Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова"

На правах рукописи

Алексеев Валентин Николаевич

Многомасштабные методы для задач течения и переноса в неоднородных средах

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование, численное методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Васильева Мария Васильевна

Якутск 2021

Содержание

Введение **4**

1 Многомасштабные методы для задач течения и переноса **18**

1.1 Смешанный обобщенный многомасштабный метод для задач течения и переноса в перфорированных областях 19

1.1.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке 19

1.1.2 Алгоритм смешанного многомасштабного метода 22

1.1.3 Численные результаты 25

1.2 Обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина для задач течения и переноса в перфорированных областях 29

1.2.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке 30

1.2.2 Алгоритм многомасштабного метода разрывного Галеркина 32

1.2.3 Численные результаты 33

1.3 Выводы 36

2 Многомасштабный метод для задач в перфорированных областях с неоднородными граничными условиями на перфорациях **38**

2.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке 39

2.2 Аппроксимация на грубой сетке 42

2.3 Численные результаты 49

2.4 Выводы 72

3 Многомасштабное моделирование задач течения и переноса в тонких областях **74**

3.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке 75

3.2 Аппроксимация на грубой сетке 78

3.3 Численные результаты 91

3.4 Выводы 112

4 Многомасштабный метод для упрощенной задачи магнитной гидродинамики в перфорированных областях 114

4.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке 115

4.2 Аппроксимация на грубой сетке 118

4.3 Численные результаты 121

4.4 Выводы 125

5 Многомасштабное моделирование задач теплопереноса с моделью Бринкмана 127

5.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке 127

5.2 Аппроксимация на грубой сетке 130

5.3 Численные результаты 133

5.4 Выводы 137

Заключение 138

Литература 140

Приложение 1 157

Приложение 2 160

Введение

Большинство процессов в реальных приложениях имеют многомасштабную природу за счет неоднородных свойств среды, а также разномасштабной природы происходящих процессов. Неоднородности могут быть связаны с перфорированными средами, тонкими областями, неоднородными средами со множеством масштабов и высокой контрастностью, и т.д. Многие прикладные задачи, такие как течение жидкости в пористой среде на уровне пор, механические процессы в полых материалах, связаны с перфорированными областями, где перфорационные отверстия могут иметь различные размеры и геометрию. На перфорациях также могут возникать неоднородные граничные условия при моделировании в масштабе пор и имитации реагирующего потока через пористую среду. Эти задачи имеют большое значение для множества приложений в физике, биологии, геологии и химии [1,2]. Методы решения этих задач требуют высокого разрешения. В частности, дискретизация должна учитывать нерегулярные границы перфорации. Также во многих приложениях прикладные задачи имеют большие различия в свойствах среды. В этих задачах обычно наблюдается высокий контраст свойств среды, где контраст - это отношение между наибольшим и наименьшим значениями свойств среды. Например, течение и перенос в неоднородных средах используется для описания потока жидкости в пористой среде при моделировании коллектора, процессов в композитных материалах и т.д. [3–7]. Эти задачи создают проблемы при численном моделировании. Наряду с этим во многих реальных приложениях встречаются математические модели в тонких областях. Течение жидкости и перенос в тонких трубчатых структурах широко используются в биологических приложениях, например, для моделирования кровотока в сосудах [8–11]. В инженерных задачах моделирование потока используется для изучения течения жидкости в сложных трубных конструкциях, например, в трубных промышленных установках, скважинах в нефтегазовой промышлен-

ности, теплообменниках и т.д. При моделировании резервуара тонкие области связаны с трещинами, которые обычно имеют сложную геометрию с очень малой толщиной по сравнению с типичными размерами резервуара. [10, 12–14]. Такие задачи часто рассматриваются со сложными процессами взаимодействия с окружающими средами или стенками. Рассмотренные процессы в перфорированных, неоднородных или тонких областях обладают многомасштабными свойствами. Для решения данного типа задач прямые методы требуют построения численных методов на неструктурированных расчетных сетках с разрешением неоднородностей на уровне сетки и приводят к большим дискретным системам, являющимся вычислительно трудоемкими. Прямое численное решение таких задач затруднено даже с появлением суперкомпьютеров. Основная трудность - это вычислительные ресурсы. Требуется огромный объем компьютерной памяти и процессорного времени, что легко может превысить лимит сегодняшних вычислительных ресурсов. Проблему можно решить с помощью параллельных вычислений. Однако, размер дискретной задачи не уменьшается. Следовательно, для данного класса задач необходимо разработать методы для понижения размерности системы с сохранением точности метода для проведения эффективных вычислений на грубой сетке.

Существует множество методов построения моделей пониженного порядка на грубых расчетных сетках, которые не разрешают неоднородностей и особенностей на сеточном уровне. Одним из наиболее базовых и широко используемых методов является метод аналитического или численного усреднения [15]. Методы усреднения являются незаменимым математическим инструментом, которые используются для понимания многомасштабной природы процессов и позволяют описывать параметры грубого масштаба как функции мелкомасштабных изменений. В методе численного усреднения эффективные свойства среды изменяются в грубом масштабе, подходящем для эффективных вычислений, при сохранении определенных грубомасштабных свойств среды мелкомасштабного

решения. Базовые принципы построения методов усреднения представлены в работах 1970-х годов и имеют фундаментальное значение. Систематическая основа асимптотического анализа и методов усреднения хорошо представлена в работах Бенсуссана, Лионса и Папаниколау [16], Келлера [17], Бабушки [18], Мюрата и Тартара [19]. Подходы к усреднению способствовали значительному прогрессу в моделировании нескольких физических механизмов, включая перенос растворенных веществ в средах с двойной пористостью. Среди прочего, подход асимптотического усреднения [20–23] и метод усреднения объема [24] были применены к задачам переноса двойной пористости, что позволило улучшить глубокое понимание этих явлений благодаря строгим процессам усреднения от малого масштаба к большему [25, 26]. Хотя в некоторых случаях методы численного усреднения превосходны, в них отсутствуют систематические стратегии выделения макропараметров, позволяющие решать проблемы с более сложными структурами. Также данный подход часто ограничен периодическими структурами, разделением масштабов и упрощением геометрии области.

В настоящее время активно развиваются и используются различные многомасштабные методы. Многомасштабные методы позволяют аппроксимировать поставленную задачу на грубых сетках с использованием специальных многомасштабных базисных функций, учитывающих локальные неоднородности на микромасштабе. В отличие от численного усреднения, многомасштабные методы позволяют обойти ограничения, связанные с идеализацией и вытекающими оттуда ограничениями на применимость метода, и являются более общей техникой, которая учитывает разномасштабные процессы в неоднородных областях. Использование построенных многомасштабных аппроксимаций позволяет существенно сократить время выполнения работы программы, объем используемой памяти и позволяет провести многовариантный расчет для заданной конфигурации геометрии области. Многомасштабные методы конечных элементов берут свое начало из работ Бабушки и Осборна [27, 28], где авторы рассматривают эл-

липтические уравнения со специальным многомасштабным коэффициентом, который является произведением одномерных полей. Хоу и Ву [29] показали, что граничные условия для построения базисных функций важны для точности метода. В работе [30] многомасштабный метод конечных элементов (MsFEM) был разработан для решения нелинейных задач. Аналогичным подходом является многомасштабный метод конечных объемов (MsFVM) [31–34], который основан на конечно - объемной аппроксимации на грубой сетке и вычислении эффективных проницаемостей на прямой грубой сетке путем решения мелкомасштабных задач в локальной подобласти. Вариационные многомасштабные методы (VMS), представленные в работе Хьюз и др [35], разбивают пространство решений на части, связанные между собой мелким и грубым масштабами, которые сочетает в себе доминирующие эффекты грубого и мелкого масштабов в форме стабилизированной вариационной задачи для представления грубомасштабного решения. Другой хорошо известной многомасштабной схемой является неоднородный многомасштабный метод (HMM), который применялся к ряду мультифизичных задач [36, 37]. Данный метод объединяет макроскопические и микроскопические представления, предполагая разделение масштабов, и аналогичен теории двухуровневого усреднения. В работах [5, 38] представлен обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (GMsFEM), представляющий собой основу для систематического обогащения многомасштабных пространств с учетом мелкомасштабной информации. В данном методе строится набор локальных снэпшот функций для аппроксимации пространств решений. Снэпшоты важны для задач в перфорированных областях, поскольку они могут фиксировать необходимую геометрическую информацию и позволяют определять минимально необходимое количество базисных функций. Затем определяются локальные многомасштабные пространства путем решения специальных локальных спектральных задач, определенных на снэпшот пространствах. Спектральные задачи дают систематическую стратегию для определения доминантных мод снэпшот

пространства, которые используются для формирования локальных многомасштабных базисных функций. При правильном построении снэпшот пространства и выборе спектральной задачи метод дает аппроксимацию решения с хорошей точностью. В [39,40] авторы разработали и провели анализ метода GMsFEM для эллиптической задачи, задачи упругости, задачи Стокса и задачи переноса в перфорированных областях.

В то время как GMsFEM основан на непрерывном методе Галеркина в качестве решателя на грубой сетке, обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина (DG-GMsFEM) строится на основе разрывного метода Галеркина с внутренним штрафом (IPDG) [41–45]. Аппроксимация с использованием разрывного метода Галеркина имеет несколько ключевых преимуществ в многомасштабных методах конечных элементов: локальные области, в которых определены базисные функции, определяются без наложения подобластей; возможность построения консервативных аппроксимаций; возможность использования различных геометрий локальных подобластей, которые, в общем случае, могут быть ассоциированы с методами, используемыми при построении параллельных алгоритмов, а также блочная структура матрицы масс, необходимая для эффективного решения волновых уравнений [46]. DG-GMsFEM был успешно применен для многих задач, таких как эллиптические уравнения, уравнения упругости, задачи Стокса и волновые уравнения в неоднородных и трещиноватых средах [6,47–49]. Особенность данного подхода состоит в том, что базисные функции строятся локально для каждой не перекрывающейся грубой области. Этот факт обеспечивает большую гибкость при проектировании грубой сетки и выборе локального многомасштабного пространства. Еще одно преимущество DG-подхода состоит в том, что нет необходимости использования функции разбиения единиц, используемых для построения непрерывных пространств. В методе DG-GMsFEM построение многомасштабных базисных функций также основано на определении локальных снэпшот пространств путем решения локальных задач для каж-

дой не перекрывающейся грубой области с некоторыми подходящими граничными условиями. Затем посредством решения локальных спектральных задач и определяются доминирующие моды снэпшот пространства.

При решении задач течения необходимо строить аппроксимации с соблюдением закона сохранения (консервативные схемы), где широко используется смешанный метод конечных элементов. Смешанный многомасштабный метод конечных элементов является широко используемым подходом, в котором формулировка задачи также приводится в терминах скорости и давления [50–52]. В смешанном обобщенном многомасштабном методе конечных элементов (Mixed GMsFEM) базисные функции для скорости строятся в локальных подобластях, ассоциированных с интерфейсом между ячейками грубой сетки, а для давления используются кусочно-постоянные функции на грубой сетке. Построение многомасштабного пространства для скорости также основано на построении снэпшот пространства с учетом возможных течений на интерфейсе грубых ячеек и последующим решением спектральной задачи для выделения основных мод для поля скоростей. Упорядочивая собственные значения в порядке возрастания, для построения многомасштабных базисных функций для скорости необходимо выбрать собственные векторы, соответствующие наибольшим собственным значениям. Сходимость метода и априорные оценки для неоднородных сред представлены в работах [53, 54]. Отметим, для задач с высоким контрастом одной базисной функции на ребро (интерфейс) недостаточно для учета многомасштабных особенностей течения [5], в то время как данный метод может систематически генерировать достаточное количество базисных функций, ассоциированных с необходимым количеством макромасштабных переменных.

Многомасштабные методы для решения задач в перфорированных средах были представлены в работах [55, 56], где авторы применили многомасштабный метод конечных элементов для задач в перфорированный области на основе многомасштабных базисных функций Круизе-Равиа. Данные подходы исполь-

зуют ограниченное количество степеней свободы на грубый элемент. В работах [38, 49, 53, 57, 58] представлен подход, при котором можно добавлять новые степени свободы путем систематического обогащения многомасштабных пространств. В этих подходах многомасштабные базисные функции строятся на основе метода GMsFEM. В [39] рассматриваются задачи в перфорированной области с однородными граничными условиями Дирихле на перфорациях, для которых снэпшот пространство строится путем решения локальных задач с нулевыми граничными условиями Дирихле на перфорациях. Для задач с однородными граничными условиями Неймана на перфорациях был представлен смешанный обобщенный многомасштабный метод в работе [54]. Многомасштабный метод, основанный на GMsFEM для эллиптических задач с неоднородными граничными условиями на перфорациях, предложен в работе [59].

Данная работа посвящена разработке и исследованию многомасштабных методов для решения задач течения и переноса в перфорированных, тонких и неоднородных средах. Рассмотрено два типа прикладных задач: (1) течение и перенос на уровне пор, когда перенос моделируется уравнением Стокса и (2) течение и перенос в пористой среде, где течение описывается законом Дарси и законом сохранения массы. Построены и исследованы многомасштабные методы для задач течения, в которых строятся многомасштабные базисные функции для скорости, а для давления используются кусочно - постоянные функции. Для решения задачи Стокса построен и исследован обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина (DG-GMsFEM), позволяющий существенно сократить размерность задач и получать точные решения с учетом мелкомасштабных неоднородностей, связанных с геометрией пор (перфораций). Для задач течения в пористой среде построен алгоритм, основанный на смешанном обобщенном многомасштабном методе конечных элементов (Mixed GMsFEM). Более того, была рассмотрена задача Бринкмана и предложен многомасштабный метод его решения на грубой сетке. Для задачи переноса построены многомасштабные

методы на основе подхода разрывного Галеркина и смешанного метода конечных элементов. Рассмотрены задачи с неоднородными граничными условиями на перфорациях или на стенках тонких сред, для которых построен и исследован многомасштабный метод, основанный на DG-GMsFEM, с концепцией разделения локальных границ по типу выделения континуумов/макромасштабных переменных.

Цель диссертационной работы состоит в разработке алгоритмов и вычислительной реализации многомасштабных методов для решения задач течения и переноса в неоднородных, перфорированных и тонких областях. Для достижения поставленной цели поставлены следующие задачи:

- Разработка и исследование алгоритма обобщенного многомасштабного метода разрывного Галеркина для решения: (1) задач в перфорированных и тонких областях с неоднородными граничными условиями на перфорациях; (2) задачи Стокса в перфорированных и тонких областях; (3) задачи тепломассопереноса, описываемые моделью Бринкмана в неоднородной области;
- Разработка и исследование алгоритма смешанного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для решения: (1) задач течения и переноса в перфорированных областях; (2) упрощенной задачи магнитной гидродинамики в перфорированных областях.

Научная новизна и практическая значимость. Научная новизна проведенных исследований заключается в следующем:

- Разработан обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина для задач течения и переноса в тонких и перфорированных областях с учетом неоднородных граничных условий;
- Представлен смешанный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задачи течения и переноса в перфорированных областях;
- Построен смешанный многомасштабный метод конечных элементов для

упрощенной задачи магнитной гидродинамики в перфорированных областях.

- Проведена численная реализация математической модели Бринкмана и процессов тепломассопереноса в неоднородных средах на основе обобщенного многомасштабного метода разрывного Галеркина.

Проведённые многомасштабные методы и численные расчёты имеют практическую значимость в построении математических моделей и исследовании процессов течения и переноса в перфорированных, тонких и неоднородных средах.

Методология и методы исследования. Решение задач течения и переноса основано на методе конечных элементов на неструктурированных расчетных сетках с использованием следующих методов: смешанный метод конечных элементов, метод разрывного Галеркина, обобщённый многомасштабный метод разрывного Галеркина, смешанный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов. Для построения расчетной области с расчетной сеткой используется генератор сеток Gmsh [60]. Численная реализация основана на библиотеке FEniCS [61] с использованием языка программирования C++.

Положения, выносимые на защиту:

- Обобщённый многомасштабный метод разрывного Галеркина для задач в перфорированных областях с неоднородными граничными условиями на границах перфораций. Модификация метода в виде дополнительных многомасштабных базисных функций для учета граничных условий Робина на перфорациях. Построение и исследование для различных классов задач (эллиптические и параболические уравнения, уравнения упругости и термоупругости, уравнение конвекции-диффузии);
- Обобщённый многомасштабный метод разрывного Галеркина для задач течения и переноса в тонких областях с неоднородными граничными условиями Робина. Модификация метода в виде дополнительных многомасштабных базисных функций для учета граничных условий Робина на стенках

рассматриваемой области;

- Алгоритм обобщённого многомасштабного метода разрывного Галеркина для модели Бринкмана и процессов тепломассопереноса в неоднородных средах;
- Алгоритм смешанного обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для упрощенной задачи магнитной гидродинамики в перфорированных средах в смешанной формулировке для магнитного поля.

Обоснованность и достоверность результатов обеспечена использованием корректно построенных математических моделей, подтверждена вычислительными экспериментами, которые приближены к реальным, а также путем сравнения результатов, полученных с использованием предлагаемых моделей и методов, с результатами прямого численного моделирования методом конечных элементов на эталонной сетке.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Якутск, Россия, 30.07.2017 - 04.08.2017;
- The Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, г.Албена, Болгария, 20.06.2018 - 25.06.2018;
- The Tenth Jubilee Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, г.Лозенец, Болгария, 11.06.2018 - 18.06.2018;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач", г.Якутск, Россия, 08.08.2018 - 10.08.2018;
- II Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г.Москва, Россия, 15.08.2018 -

17.08.2018;

- IV Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования", г.Москва, Россия, 19.05.2019 - 21.05.2019;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач", г.Якутск, Россия, 24.05.2019 - 25.05.2019;
- III Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Владивосток, Россия, 07.10.2019 - 11.10.2019;
- Применение цифровых технологий в промышленности, бизнесе и здравоохранении Республика Саха, г.Якутск, Россия, 23.12.2019 - 25.12.2019;
- IV Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Сочи, Россия, 08.09.2020 - 13.09.2020.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ - в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК (ВАК, Scopus и Web of Science), получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [62–77].

Личный вклад автора. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [62, 65–70, 75] им разработан и реализован вычислительный алгоритм, проведены расчеты и анализ результатов вычислительных экспериментов; в работах [72, 74, 76] диссертант участвовал в разработке и численной реализации математической модели. В работах [63, 64, 71, 73, 77] автор принял участие в постановке математической модели и численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертационной работы состав-

ляет 164 страницы, содержит 59 иллюстраций и 28 таблиц. Список литературы содержит 116 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантом РНФ 19-11-00230, грантом РНФ 17-71-20055, грантом РФФИ 19-11-90076\19, грантом РФФИ 17-01-00732 А, грантом РФФИ 15-31-20856.

В **первой главе** рассматриваются многомасштабные методы для задач течения и переноса в перфорированных средах. В *первом разделе* приведено подробное описание смешанного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (mixed GMsFEM). *Второй раздел* посвящен исследованию обобщенного многомасштабного метода разрывного Галеркина (DG-GMsFEM). Процесс переноса описывается уравнением конвекции-диффузии. Для смешанного многомасштабного метода течение описывается уравнением Дарси, а для многомасштабного метода разрывного Галеркина описывается уравнениями Стокса. Представлены численные результаты для модельных задач в двумерных перфорированных областях.

Во **второй главе** представлено решение задач в перфорированных областях с неоднородными граничными условиями на перфорациях. Используется DG-GMsFEM для построения многомасштабных базисных функций. Для перфораций дополнительно строятся многомасштабные базисные функции с целью уловить неоднородные граничные условия на перфорациях. В качестве математической модели рассматривается эллиптическое уравнение, параболическое уравнение, задача переноса, упругости и термоупругости. Представлены численные результаты в двумерных перфорированных областях и исследуется точность предложенного метода. Для эффективности метода представлены результаты для квазиструктурированных и неструктурированных сеток.

В **третьей главе** построена математическая модель течения жидкости в пористых средах, основанная на уравнениях Стокса и нестационарного уравнения конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями на стенках. Для

ее численной реализации предложен обобщённый многомасштабный метод разрывного Галеркина для решения задач течения и переноса в тонких областях с неоднородными граничными условиями. Для задачи течения построено снэпшот пространство для каждого интерфейса между грубыми ячейками сетки для учета возможных потоков. Для понижения размера снэпшот пространства решается локальная спектральная задача и используются собственные векторы, соответствующие наименьшим собственным значениям в качестве многомасштабных базисных функций для аппроксимации на грубой сетке. Для задачи переноса строятся многомасштабные базисные функции для каждой границы раздела между грубыми ячейками сетки и представлены дополнительные базисные функции для учета неоднородных граничных условий на стенках. Представлено численное моделирование для двумерных и трехмерных задач для демонстрации эффективности метода.

В **четвертой главе** рассматривается связанная система уравнений, описывающих упрощенную задачу магнитной гидродинамики (МГД) в перфорированных областях. Метод, используемый в данной задаче, отличается от существующих подходов и требует некоторых модификаций для представления потока и магнитных полей. Для аппроксимации задачи магнитного поля используется mixed GMsFEM, а для задачи течения применяется DG-GMsFEM. Представлены численные результаты для двумерной модельной задачи в перфорированных областях. Изучено влияние количества многомасштабных базисных функций на точность метода.

Наконец, в **пятой главе** проведена численная реализация математической модели Бринкмана и процессов тепломассопереноса в неоднородных пористых средах. Математическая модель описывается системой уравнений для температуры, давления и скорости. Для аппроксимации на грубой сетке применяется DG-GMsFEM для задачи течения. Численные результаты представлены для двумерной модельной задачи с различным числом многомасштабных базисных

функций.

Автор выражает искреннюю благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Васильевой Марии Васильевне за научное руководство, профессорам Ялчину Эфендиеву и Васильеву Василию Ивановичу за научное наставничество и оказание всесторонней поддержки. Автор выражает благодарность коллегам по международной научно-исследовательской лаборатории «Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления», сотрудникам кафедры «Вычислительные технологии» СВФУ за полезные обсуждения и советы.

Глава 1

Многомасштабные методы для задач течения и переноса

Многомасштабные задачи в перфорированных средах возникают во многих приложениях, к таким относятся течения в пористой среде, диффузия в перфорированных областях и т.д. Для решения данных задач требуется очень мелкая сетка, что приводит к большим степеням свободы. По этой причине необходимо использовать многомасштабные методы или методы численного усреднения. [78–81]. Методы численного усреднения работают для задач с разделением масштабов, т.е. когда перфорации имеют одинаковый размер. Когда перфорированная среда не имеет разделения масштабов, используются многомасштабные методы. Класс многомасштабных методов для перфорированных областей без разделения масштабов использует метод конечных элементов и создает специальные базисные функции.

Данная глава посвящается многомасштабным методам для решения задач течения и переноса. Рассмотрены два типа прикладных задач: (1) течение и перенос на уровне пор, когда течение моделируется уравнением Стокса [82–84] и (2) течение и перенос в пористой среде, где течение описывается законом Дарси и законом сохранения массы. Задача переноса описывается уравнением конвекции-диффузии. Для решения задачи Стокса построен и исследован обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина (DG-GMsFEM), а для задач течения в пористой среде построен алгоритм, основанный на смешанном обобщенном многомасштабном методе конечных элементов (mixed GMsFEM). Эти методы позволяют существенно сократить размерность задачи и получить точные решения с учетом мелкомасштабных неоднородностей связанных с геометрией перфораций. Подробно описывается алгоритм данных многомасштаб-

ных методов. Для проверки эффективности этих методов, полученные результаты сравниваются с решениями на мелкой сетке с использованием метода конечных элементов.

1.1 Смешанный обобщенный многомасштабный метод для задач течения и переноса в перфорированных областях

В данном разделе рассматривается смешанный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (mixed GMsFEM) для задачи течения в перфорированной области, где уравнение потока описывается уравнением Дарси. Использование смешанной формулировки для задачи течения гарантирует закон сохранения массы. В смешанной формулировке сначала определяем пространства снэпшот, которые представляют собой пространство решений в каждой грубой области. Затем выполняем локальное спектральное разложение в пространстве снэпшот, чтобы определить многомасштабные базисные функции. Для давления используются кусочно-постоянные базисные функции. После решения задачи течения с помощью многомасштабного метода решается задача переноса на мелкой сетке с использованием метода конечных элементов Галеркина с численной стабилизацией. Рассмотрены два примера с однородной и неоднородной проницаемостью и проводим численное исследование погрешностей для разного количества многомасштабных базисных функций.

1.1.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассмотрена задача течения и переноса в перфорированной области Ω [85] (см. Рис. 1.1). Течение жидкости в перфорированной пористой среде Ω описы-

вается задачей Дарси и уравнением неразрывности

$$\begin{aligned} k^{-1}u + \nabla p = 0, \quad x \in \Omega \\ \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $k = \frac{\kappa}{\mu}$, μ - вязкость, κ - проницаемость пористой среды. Рассмотрена задача течения с нулевым граничным условием Дирихле на глобальной границе и с нулевой скоростью на перфорациях.

Уравнение переноса примеси описывается уравнением конвекции-диффузии для концентрации

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\nabla c - \nabla \cdot (D\nabla c) = f, \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

где D - коэффициент диффузии, f - источник и u - поле скоростей. Рассматривается уравнение переноса с однородными граничными условиями Неймана и начальным условием $c(x,0) = c_0$ в Ω для $t = 0$.

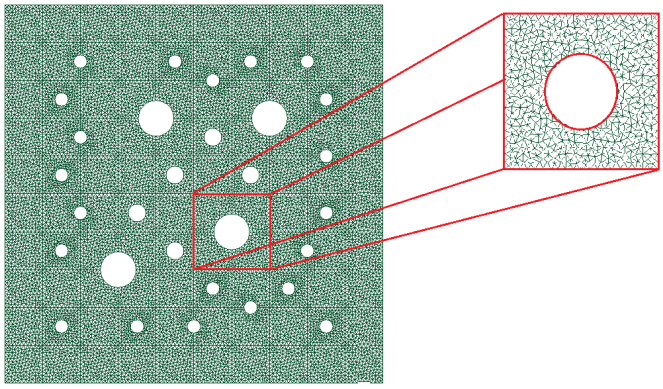


Рисунок 1.1: Иллюстрация перфорированной области Ω с неструктурированной мелкой сеткой.

Для численного решения на мелкой сетке используется метод конечных элементов [61]. Пусть

$$V = \{v \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}, \quad Q = L^2(\Omega).$$

Рассмотрены двумерные задачи, т.е. $d = 2$.

Слабую формулировку задачи течения можно записать следующим образом: найти $(u,p) \in V \times Q$ такое что

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(p,v) &= 0 \quad \forall v \in V \\ b(u,q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$a(u,v) = -\int_\Omega k^{-1} u \cdot v \, dx, \quad b(u,p) = \int_\Omega p \nabla \cdot u \, dx.$$

Можно записать аппроксимацию задачи Дарси в матричном виде

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где мы использовали пространство Равиарта-Томаса для скорости и кусочно-постоянный элемент для давления в мелкомасштабной системе.

Для определения слабой формулировки уравнения переноса, используем метод конечных элементов. У нас есть следующая слабая формулировка уравнения переноса: найти $c \in W$ такое что

$$\frac{1}{\tau} m(c - \check{c}, r) + s(c,r) + d(c,r) = (f,r) \quad \forall r \in W \tag{1.5}$$

где $W = L^2(\Omega)$ и

$$m(c,r) = \int_\Omega c\, r \, dx, \quad s(c,r) = \int_\Omega u \cdot c\, r \, dx, \quad d(c,r) = \int_\Omega \nabla c \cdot \nabla r \, dx.$$

Здесь для дискретизации по времени используем неявную схему, и $\check{c}$ - концентрация на предыдущем временном слое и τ временной слой.

Мы можем записать (1.5) как следующую матричную форму

$$M \frac{c - \check{c}}{\tau} + (S + D)c = F, \tag{1.6}$$

где используем линейные базисные функции для аппроксимации на мелкой сетке.

Для случая, когда конвективный член преобладает над диффузией, стандартное приближение с использованием классического метода Галеркина может привести к осцилляциям в решении задачи. Для численного моделирования используется метод стабилизации SUPG(Streamline-Upwinded Petrov-Galerkin method).В методе SUPG получаем следующую вариационную формулировку уравнения переноса: найти $c \in W$ такое что

$$\frac{1}{\tau} m(c - \check{c}, \check{r}) + s(c, \check{r}) + d(c, \check{r}) = (f, \check{r}) \quad \forall \check{r} \in W, \tag{1.7}$$

где $\check{r} = (r + \frac{h}{2|u|} u \Delta r)$ и h - размер сетки.

1.1.2 Алгоритм смешанного многомасштабного метода

Далее, описываем построение аппроксимации грубой сетки с использованием смешанного обобщенного многомасштабного метода для задачи течения. Заметим, что мы решаем задачу переноса на мелкой сетке и строим многомасштабный решатель только для задачи течения.

Пусть $\mathscr{T}_H$ - грубая сетка расчетной области Ω с размером грубой сетки H. Пусть $\mathscr{E}_H$ множество всех ребер грубой сетки и N_E общее количество ребер, а $\mathscr{E}_H = \bigcup_{i=1}^{N_E} E_i$. В качестве локальной области мы определяем окрестность ребра $E \in \mathscr{E}_H$ (см. Рисунок 1.2)

$$\omega^{\varepsilon} = \bigcup_j \left\{ K_j \in \mathscr{T}^H \,|\, E \in \partial K_j \right\},$$

где K_j это ячейка грубой сетки.

Смешанный обобщенный многомасштабный метод состоит из двух шагов: (1) построение многомасштабного пространства и (2) решение задачи на грубой сетке.

Строим многомасштабное пространство для скорости $u_c \in V_{ms}$

$$V_{ms} := \text{span}\{\psi_1, ..., \psi_{N_c}\},$$

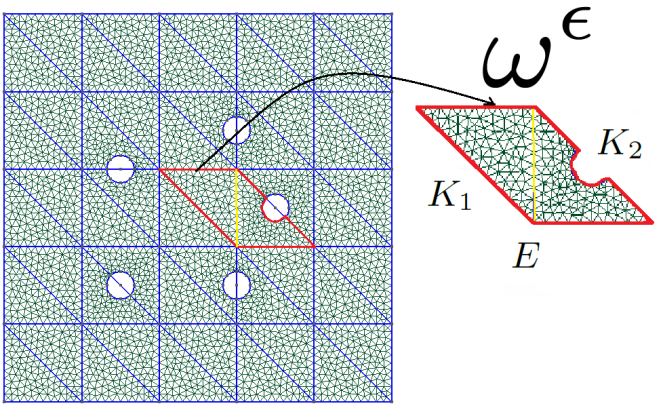


Рисунок 1.2: Иллюстрация грубой сетки $\mathscr{T}_H$ и локальной области $\omega^{\varepsilon} = K_1 \cup K_2$ для грубого ребра E.

где ψ_i - это многомасштабные базисные функции, которые поддерживаются в локальной области. ω^{ε} $(i = 1,..,N_c)$, и N_c - это количество базисных функций. Для давления используем пространство кусочно-постоянных функций Q_{ms}.

Начнем с построения пространства снэпшот в ω^{ε}, а затем выполняем уменьшение размерности путем решения локальной спектральной задачи. Целью этого является определение доминирующих модов в снэпшот пространстве и получение небольшого размера пространства для аппроксимации решения.

Для построения снэпшот пространства решаем локальную задачу в области ω^{ε}: найти $(\phi_j, \eta) \in V_h^{\omega^{\varepsilon}} \times Q_h^{\omega^{\varepsilon}}$ такую что

$$\begin{aligned} \int_{\omega^{\varepsilon}} k^{-1} \phi_j v \, dx - \int_{\omega^{\varepsilon}} \eta \, \nabla \cdot v \, dx = 0, \quad v \in V_h^{\omega^{\varepsilon}}, \\ \int_{\omega^{\varepsilon}} r \, \nabla \cdot \phi_j \, dx = \int_{\omega^{\varepsilon}} c \, r \, dx, \quad r \in Q_h^{\omega^{\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Для граничных условий установим

$$\phi_j \cdot n = 0, \quad x \in \partial \omega^{\varepsilon}$$

и

$$\phi_j \cdot n = 0, \quad x \in \partial \mathscr{B}_{\varepsilon},$$

где n - вектор единичной внешней нормали на $\partial \omega^{\varepsilon}$.

По грубому ребру E, ставим дополнительное граничное условие

$$\phi_j \cdot n = \delta_j,$$

где $j = [1, J_{\omega^\varepsilon}]$ и количество локальных задач равна $2 \cdot J_{\omega^\varepsilon}$. Здесь J_{ω^ε} количество тонких ребер сетки e_j на E, $E = \cup_{j=1}^{J_{\omega^\varepsilon}} e_j$.

Здесь δ_j - кусочно-постоянная функция, определенная на E, которая имеет значение 1 на e_j и значение 0 на других ребрах мелкой сетки. Отметим, что правая часть в системе выбрана условием совместимости.

Далее выполняем понижение пространства в пространстве снэпшот с помощью локальной спектральной задачи

$$\bar{A}_{\omega^\varepsilon} \bar{\psi}_k^{\omega^\varepsilon} = \lambda_k \bar{S}_{\omega^\varepsilon} \bar{\psi}_k^{\omega^\varepsilon}, \tag{1.9}$$

где

$$\bar{A}_{\omega^\varepsilon} = R_{\omega^\varepsilon} A_{\omega^\varepsilon} R_{\omega^\varepsilon}^T, \quad \bar{S}_{\omega^\varepsilon} = R_{\omega^\varepsilon} S_{\omega^\varepsilon} R_{\omega^\varepsilon}^T,$$

$$R_{\omega^\varepsilon} = \left[\phi_1, \ldots, \phi_{J_{\omega^\varepsilon}}, \right]$$

и

$$A_{\omega^\varepsilon} = [a_{mn}^{\omega^\varepsilon}], \quad a_{mn}^{\omega^\varepsilon} = a_{\omega^\varepsilon}(\phi_m, \phi_n) = \int_E k^{-1} (\phi_m \cdot n)(\phi_n \cdot n) ds,$$

$$S_{\omega^\varepsilon} = [m_{mn}^{\omega^\varepsilon}], \quad s_{mn}^{\omega^\varepsilon} = s_{\omega^\varepsilon}(\phi_m, \phi_n) = \int_{\omega^\varepsilon} k^{-1} \phi_m \phi_n dx + \int_{\omega^\varepsilon} \nabla \cdot \phi_m \nabla \cdot \phi_n dx.$$

Собственные значения располагаем в порядке возрастания, выбираем первые M_{ω^ε} собственные значения и возьмем соответствующие собственные векторы $\psi_k^{\omega^\varepsilon} = R_{\omega^\varepsilon} \bar{\psi}_k^{\omega^\varepsilon}$ в качестве базисных функций, $k = 1, 2, ..., M_{\omega^\varepsilon}$.

Затем определяем многомасштабное пространство для поля скорости, используя построенные многомасштабные базисные функции

$$V_{ms} := \text{span}\{\psi_k^{\omega_i^\varepsilon}, 1 \le k \le M_{\omega_i^\varepsilon, 1 \le i \le N_e}\},$$

и определяем матрицу проекции

$$R = \begin{bmatrix} R_u & 0 \\ 0 & R_p \end{bmatrix}, \quad R_u = [R_{u,1}, \ldots, R_{u,N_E}]^T, \tag{1.10}$$

где $R_{u,i} = \left[\psi_1^{\omega_i^\varepsilon}, \ldots, \psi_{M_{\omega_i^\varepsilon}}^{\omega_i^\varepsilon}\right]^T$ и R_p - матрица проекции для давления, содержащая константу в грубой ячейке для каждой строки. Здесь N_E - количество ребер грубой сетки и $M_{\omega_i^\varepsilon}$ - количество локальных многомасштабных базисных функций. Используя построенное многомасштабное пространство, получим следующую систему грубого масштаба в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A_c & B_c^T \\ B_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ p_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

где

$$A_c = R_u A R_u^T, \quad B_c = R_u B R_p^T.$$

Используя грубомасштабное решение u_c, можем восстановить решение на мелкой сетке $u_{ms} = R_u^T u_c$ и использовать u_{ms} для решения задачи переноса [48, 86].

1.1.3 Численные результаты

Рассмотрено численное моделирование с использованием представленного метода в расчетной области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ с $L_x = L_y = 1$. На рисунке 1.3, представлена грубая и мелкая сетка для перфорированной области. Мелкая сетка, которая явно разрешает перфорацию, содержит 14648 вершин, 43087 граней и 28410 ячеек. Рассматривается две грубые сетки: (1) 10×10 сетка с 36 вершинами, 60 гранями и 25 ячейками; (2) 5×5 сетка со 121 вершинами, 220 гранями и 100 ячейками.

Рассмотрены два тестовых случая:

- *Тест 1* с однородной проницаемостью, $k = 1$.
- *Тест 2* с неоднородной проницаемостью, $k = k(x)$ (Рисунок 1.3).

В качестве источника устанавливаем $f(x) = g$ для $x = 0.5$, $y = 0.5$ или $f(x) = 0$, где $g = 1$ для *Теста 1* и $g = 0.1$ для *Теста 2*. Задаём начальные условия для $c(x, 0) = 1.0$, $\mu = 1$ и $D = 0.0001$. Моделирование проводится для $T_{max} = 1.5$ с $\tau = 0.01$ для *Теста 1* и для $T_{max} = 9$ с $\tau = 0.1$ для *Теста 2*.

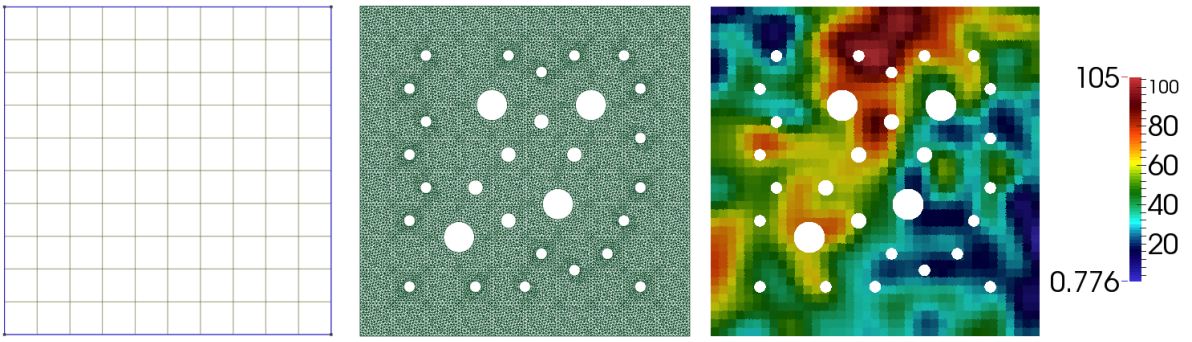


Рисунок 1.3: Грубая сетка, мелкая сетка и неоднородная проницаемость. Слева: грубая сетка 10×10 с 121 вершинами, 220 гранями и 100 ячейками. Центр: мелкая сетка с 14648 вершинами, 43087 гранями и 28410 ячейками. Справа: неоднородная проницаемость

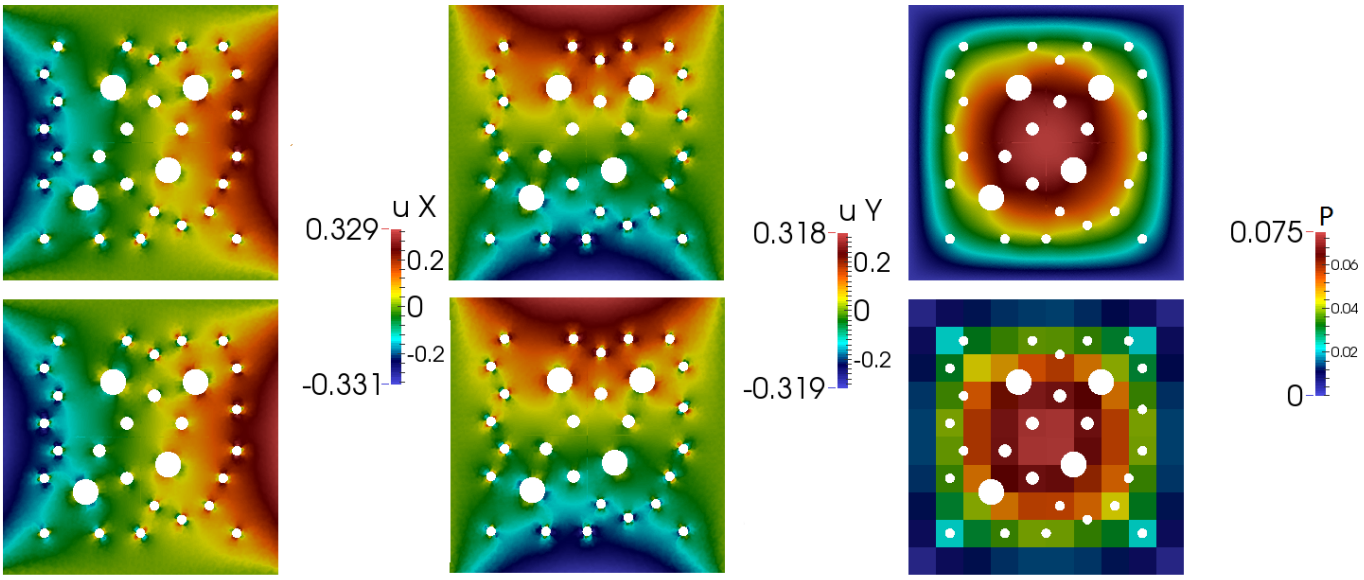


Рисунок 1.4: Распределение компонентов скорости по оси X и Y и давления в перфорированной области (u_x - первый столбец, u_y - второй столбец и p – давление). Первый ряд: мелкая сетка, $DOF_f = 43058$. Вторая строка: многомасштабное решение на грубой сетке 10×10 с использованием 4 многомасштабных базисных функций для скорости, $DOF_c = 980$. *Тест 1* с однородной проницаемостью.

Для сравнения результатов используем относительную L_2 погрешность между мелкомасштабными решениями v_f и многомасштабными решениями v_{ms} для

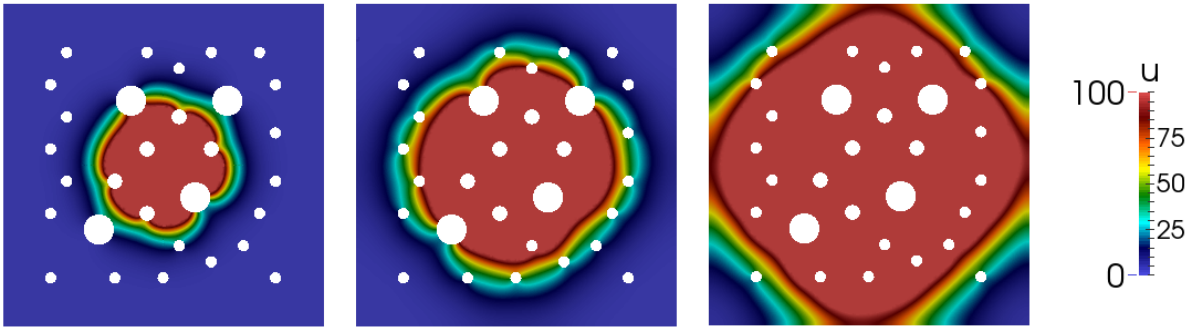


Рисунок 1.5: Решение уравнения переноса на мелкой сетке в перфорированной области для $t = 0.45, 0.9$ и 1.5. *Тест 1* с однородной проницаемостью.

M	DOF_c	$e^u_{L_2}$ (%)	$e^u_{H_1}$ (%)	$e^p_{L_2}$ (%)	$e^c_{L_2}$ (%)	$e^c_{H_1}$ (%)
Грубая сетка 5×5						
1	85	4.166	0.133	6.968	1.629	1.534
2	145	0.180	0.005	6.790	0.009	0.007
3	205	0.094	0.003	6.790	0.004	0.002
4	265	0.037	0.001	6.790	0.0002	0.0001
Грубая сетка 10×10						
1	320	1.077	0.034	1.821	0.642	0.800
2	540	0.063	0.002	1.829	0.312	0.056
3	760	0.009	0.0002	1.829	0.009	0.024
4	980	0.003	0.0001	1.829	0.003	0.007

Таблица 1.1: Относительные погрешности для скорости, давления и концентрации с различным количеством многомасштабных базисных функций для скорости, давления и переноса. *Тест 1* с однородной проницаемостью. Сверху: Грубая сетка 5×5. Снизу: Грубая сетка 10×10.

скорости, давления и переноса

$$e^2_{L_2} = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |v_f - v_{ms}|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |v_f|^2 dx},$$

относительная погрешность H_1 для скорости

$$e^2_{H_1} = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} (|v_f - v_{ms}|^2 + |\nabla \cdot (v_f - v_{ms})|^2) dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} (|v_f|^2 + |\nabla \cdot v_f|^2) dx}$$

M	DOF_c	$e^u_{L_2}$ (%)	$e^u_{H_1}$ (%)	$e^p_{L_2}$ (%)	$e^c_{L_2}$ (%)	$e^c_{H_1}$ (%)
Грубая сетка 5×5						
1	85	6.569	0.005	7.272	12.405	6.871
2	145	0.731	0.0005	6.857	3.723	2.036
3	205	0.354	0.0002	6.852	0.080	0.056
4	265	0.094	0.0001	6.790	0.003	0.001
Грубая сетка 10×10						
1	320	2.921	0.002	2.174	5.177	3.768
2	540	0.326	0.0002	2.064	0.390	0.674
3	760	0.139	0.0001	2.063	0.008	0.041
4	980	0.046	0.00002	2.053	0.002	0.005

Таблица 1.2: Относительные погрешности для скорости, давления и концентрации с разным количеством многомасштабных базисных функций для скорости, давления и переноса. *Тест 2* с неоднородной проницаемостью. Сверху: Грубая сетка 5×5. Снизу: Грубая сетка 10×10.

и относительная погрешность H_1 для переноса

$$e^2_{H_1} = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(v_f - v_{ms})|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_f|^2 dx}$$

Результаты расчетов в перфорированной области для *Теста 1* с однородной проницаемостью показаны на рисунках 1.4 и 1.5. На рисунке 1.4 представили распределение скорости по оси X и Y и распределение давления для численного решения с использованием смешанного многомасштабного метода (грубая сетка) и с использованием метода конечных элементов (мелкая сетка). Расчеты проводились с использованием 4 многомасштабных базисных функций. На рисунке 1.5 представлено распределение переноса для $t = 0.45, 0.9$ и 1.5 на мелкой сетке. Относительные погрешности L_2 и H_1 для скорости и концентрации и погрешность L_2 для давления показаны в таблице 1.2 для 5×5 и 10×10 грубых сеток. Например, если мы используем 1 многомасштабную базисную функцию для *Теста 2* для грубой сетки 5×5, получим следующую относительную погрешность для скорости $e^2_{L^2} = 4.166$ и для переноса $e^2_{L^2} = 1.629$. С увеличением

количества многомасштабных базисных функций погрешность уменьшается. И если мы используем 4 многомасштабные базисные функции для грубой сетки 5×5, то получим относительную погрешность для скорости $e^2_{L^2} = 0.037$ и для переноса $e^2_{L^2} = 0.003$.

Далее рассмотрен *Тест 2* с неоднородной проницаемостью. В таблице 1.2, представлены относительные погрешности для сеток 5×5 и 10×10 с разным количеством многомасштабных базисных функций. Например, если используем 1 многомасштабную базисную функцию для *Тест 2* для грубой сетки 5×5, то получим относительную погрешность для скорости $e^2_{L^2} = 6.569$ и для переноса $e^2_{L^2} = 12.405$. И если мы используем 4 многомасштабные базисные функции, то получаем относительную погрешность для скорости $e^2_{L^2} = 0.046$ и для транспорта $e^2_{L^2} = 0.002$.

Рассмотрено численное моделирование с однородной и неоднородной проницаемостями. Численные результаты показывают, что для достижения хорошей точности необходимо около 4 базисных функций.

1.2 Обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина для задач течения и переноса в перфорированных областях

В данном разделе рассматривается обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина(DG-GMsFEM) для задачи течения в перфорированной области, где уравнение потока описывается уравнениями Стокса. Задача переноса решается на мелкой сетке с использованием метода разрывного Галеркина (IPDG) после решения задачи течения с помощью многомасштабного метода. В DG-GMsFEM мы сперва строим снэпшот пространство, которое учитывает возможные потоки между интерфейсами грубых ячеек. После того как построили снэпшот пространство нужно решить спектральную задачу в снэпшот простран-

стве, чтобы получить многомасштабные базисные функции. Для аппроксимации давления используем кусочно-постоянные функции на грубой сетке. Численные результаты представлены для двумерного случая с разным числом многомасштабных базисных функций.

1.2.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассмотрено нестационарное уравнение конвекции-диффузии (1.2), описывающее перенос примеси в перфорированных областях Ω. Дополняется уравнение переноса с начальным условием $c(x,0) = 1$ в Ω для $t = 0$ и следующими граничными условиями

$$c = c_1, \quad x \in \Gamma_1, \quad -\lambda \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

.

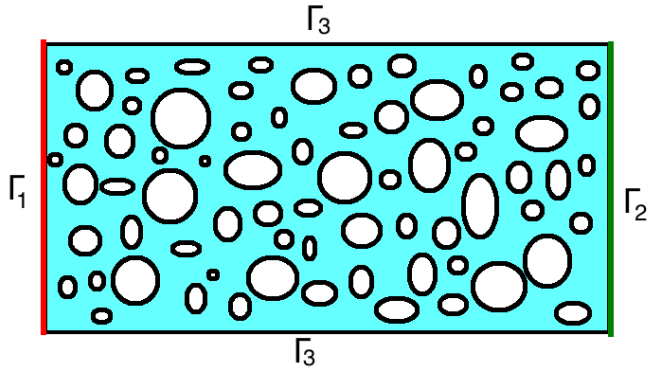


Рисунок 1.6: Перфорированная область Ω

Пример иллюстрации перфорированной области представлена на Рисунке 1.6.

Для описания течения в перфорированной области будем использовать уравнения Стокса

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u + \operatorname{grad} p = 0, \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Система уравнений (1.12) дополняется соответствующими граничными условиями для скорости течения

$$u = g(x), \quad x \in \partial\Gamma_1, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Gamma_3. \tag{1.13}$$

На границах перфораций будем задавать $u = 0$.

Далее рассмотрена аппроксимация уравнений (1.2) и (1.12) с использованием метода конечных элементов. Для того чтобы определить слабую формулировку переноса, мы используем метод конечных элементов (см. Раздел 1.1.1). Для аппроксимации задачи течения мы используем разрывный метод Галеркина (IPDG).

Начнем с аппроксимации с использованием разрывного метода Галеркина. Пусть $\mathscr{T}^h$ - триангуляция вычислительной области Ω and Γ^h множество всех граней между элементами $\mathscr{T}^h$. На ребре $E \in \Gamma^h$ между элементами K_1 и K_2, определяем среднее значение и скачок функции u

$$\{u\} = \frac{u|_{K_1} + u|_{K_2}}{2}, \quad [u] = u|_{K_1} - u|_{K_2}.$$

Мелкомасштабное пространство скоростей $V^h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in (\mathbb{P}_1(K))^2, \forall K \in \mathscr{T}^h\}$ содержит функции, кусочно-линейные в каждом элементе тонкой сетки K и разрывные по краям грубой сетки. Для давления используем пространство кусочно-постоянных функций Q^h. Для системы уравнений течения (1.12) запишем вариационную формулировку: найти $(u,p) \in V^h \times Q^h$ такую, что

$$\begin{aligned} a_{DG}(u,v) + b_{DG}(p,v) = 0, \quad \forall v \in V^h \\ b_{DG}(u,q) = 0, \quad \forall r \in Q^h, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned} a_{DG}(u,v) = &\sum_{K\in\mathscr{T}^h} \int_K (\mu\, \nabla u \cdot \nabla v) dx \\ &- \sum_{E\in\Gamma_h} \int_E \left([\mu\, u \cdot n]\{v\} - \{\mu\, v \cdot n\}[u] - \{\mu\} \frac{\gamma_u}{h} [u][v] \right) ds, \\ b_{DG}(u,p) = &\sum_{K\in\mathscr{T}^h} \int_K p \nabla u dx + \sum_{E\in\Gamma_h} \int_E \{p\}[u\cdot n]\, ds, \end{aligned}$$

где γ_u штрафной параметр и n единичный вектор нормали к ребру E.

1.2.2 Алгоритм многомасштабного метода разрывного Галеркина

В данном подразделе описывается построение аппроксимации грубой сетки с использованием обобщенного метода разрывного Галеркина для задачи течения. Отметим, что задача переноса решается на мелкой сетке. Пусть $\mathscr{T}^H$ - грубая сетка области Ω с размером сетки H и $\mathscr{E}^H$ - множество всех граней грубой сетки в $\mathscr{T}^H$. Для аппроксимации давления используется кусочно-постоянное функциональное пространство Q^H над грубыми ячейками. Определяем V^H как многомасштабное пространство скоростей, которое содержит набор базовых функций, поддерживаемых в каждом грубом блоке K [87–89].

Построим многомасштабное пространство для скорости

$$V^H = \text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{N_u}, \quad Q^H = \{r \in L^2(\Omega) : r|_K \in P^0(K), \forall K \in \mathscr{T}_H\}$$

Для давления мы используем пространство кусочно-постоянных функций над грубой триангуляцией, $N_u = \dim(V^H)$ - количество базисных функций, а $N_p = \dim(Q^H)$ равно числу грубых ячеек сетки.

Для приближения грубых сеток используем подход с разрывным Галеркиным (IPDG) и имеем следующую вариационную формулировку: найти $(u_H, p_H) \in V^H \times Q^H$ такую, что

$$\begin{aligned} a_{\text{DG}}(u_H, v) + b_{\text{DG}}(p_H, v) &= f(v) \quad \forall v \in V^H, \\ b(u_H, q) &= 0, \quad \forall q \in Q^H. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Для построения многомасштабного пространства для скорости решаем спектральную задачу для выбора доминантных мод снэпшот пространства. Мы строим локальное снэпшот пространство в каждом грубом блоке $K_i, (i = 1, \cdots, N)$, где N количество грубых блоков в Ω. Локальное снэпшот пространство состоит из

функций, которые являются решениями $\phi_l^i \in V^h(K_i)$

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{DG}}(\phi_l^i, v) + b_{\mathrm{DG}}(\eta, v) = 0 \quad \forall v \in V^h(K_i), \\ b(\phi_l^i, q) = \int_{K_i} c\, q\, dx, \quad \forall q \in Q^h(K_i). \end{aligned} \tag{1.16}$$

с $\phi_l^i = \delta_i^l$ на ∂K_i $(l = 1, \cdots, J_i)$, где J_i число мелких узлов сетки на границе K_i, и δ_i^l - это дискретная дельта-функция, определенная в ∂K_i. Здесь c выбирается условием совместимости, $c = \frac{1}{|K_i|}\int_{\partial K_i} \delta_i^l \cdot n\, ds$. Далее формируем локальное снэпшот пространство в K_i, используя все локальные решения, т.е. $V^{i,\mathrm{snap}} = \{\phi_l^i : 1 \le l \le J_i\}$, и определяем матрицу проекции для снэпшот пространства $R_{i,\mathrm{snap}} = \left[\phi_1^i, \ldots, \phi_{J_i}^i\right]$.

Для того чтобы уменьшить размер снэпшот пространства, решается следующая локальная спектральная задача

$$A^{i,\mathrm{snap}} \psi_k^{i,\mathrm{snap}} = \lambda_k S^{i,\mathrm{snap}} \psi_k^{i,\mathrm{snap}}, \tag{1.17}$$

где $A^{i,\mathrm{snap}} = R_{i,\mathrm{snap}} A^i R_{i,\mathrm{snap}}^T$, $S^{i,\mathrm{snap}} = R_{i,\mathrm{snap}} S^i R_{i,\mathrm{snap}}^T$. Здесь A^i и S^i матричные представления билинейной формы $a_i(u,v)$ и $s_i(u,v)$

$$a_i(u,v) = \int_{K_i} \mu\, \nabla u \cdot \nabla v\, dx, \quad s_i(u,v) = \int_{\partial K_i} u \cdot v\, dx.$$

Расставляем собственные значения в порядке возрастания и выбираем первые собственные векторы, соответствующие первым M_i наименьшим собственным значениям $\psi_k^i = R_{i,\mathrm{snap}} \psi_k^{i,\mathrm{snap}}$, как базисные функции $(k = 1, ..., M_i)$

$$V^H = \mathrm{span}\{\psi_k^i : 1 \le i \le N_e, 1 \le k \le M_i\},$$

Это многомасштабное пространство будет использоваться в качестве аппроксимационного пространства для скорости.

1.2.3 Численные результаты

Приведем результаты численного решения двумерной задачи в расчетной области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ с $L_x = L_y = 1$. На рисунке 1.7, представлена грубая и

мелкая сетка для перфорированной области. Мелкая сетка содержит 14648 вершин, 43087 граней и 28410 ячеек. Грубая сетка (10×10) содержит 121 вершину, 220 граней и 100 ячеек. Мы устанавливаем $\mu = 1$, $g(x) = (1.0, 0.0), c1 = 0$. Мы проводим вычисления для $T_{max} = 2.0$ с $\tau = 0.05$.

Для сравнения результатов используем относительную L_2 и H_1 погрешность между решениями на мелкой сетке и многомасштабными решениями для скорости, L_2 погрешность между решениями на мелкой сетке и многомасштабными решениями для давления, L_2 погрешность между средними значениями грубой ячейки для решений на мелкой сетке и многомасштабными решениями для давления, L_2 погрешность на мелкой сетке, используя мелкомасштабную и многомасштабную концентрации.

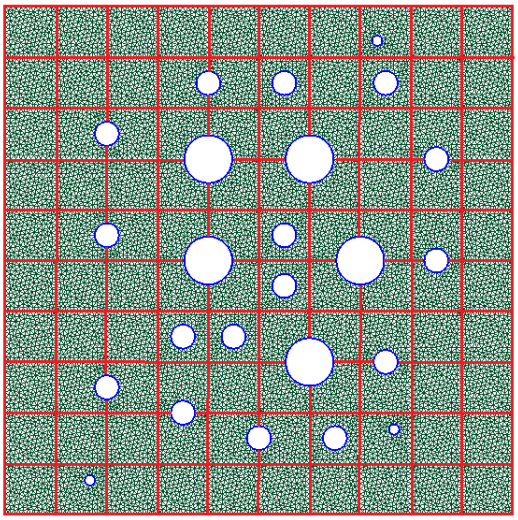


Рисунок 1.7: Вычислительная область с грубыми и мелкими сетками.

Результаты расчетов задачи течения и переноса показаны на рисунке 1.8, где представлены X и Y компоненты распределения скорости и распределение поля концентрации для эталонного (решение на мелкой сетке) и многомасштабного решения. Расчет был выполнен с использованием 40 многомасштабных базисных функций для скорости. Относительные погрешности представлены на таблице 1.3, когда уравнения Стокса решены на мелкой сетке с использованием метода разрывного Галеркина(IPDG).

скорость на мелкой сетке - DG						
M	DOF_c	$e^u_{L_2}$ (%)	$e^u_{H_1}$ (%)	$e^p_{L_2}$ (%)	$e^{\overline{p}}_{L_2}$ (%)	$e^c_{L_2}$ (%)
5	600	35.478	77.340	403.75	11.550	21.543
10	1100	18.663	52.314	52.581	1.253	12.242
20	2100	6.291	33.762	17.899	2.032	3.545
40	4100	2.843	24.325	12.352	1.908	1.697
60	6100	2.432	20.476	11.126	1.877	1.423

Таблица 1.3: Относительные погрешности для скорости, давления и концентрации в последний момент времени с разным количеством многомасштабных базисных функций

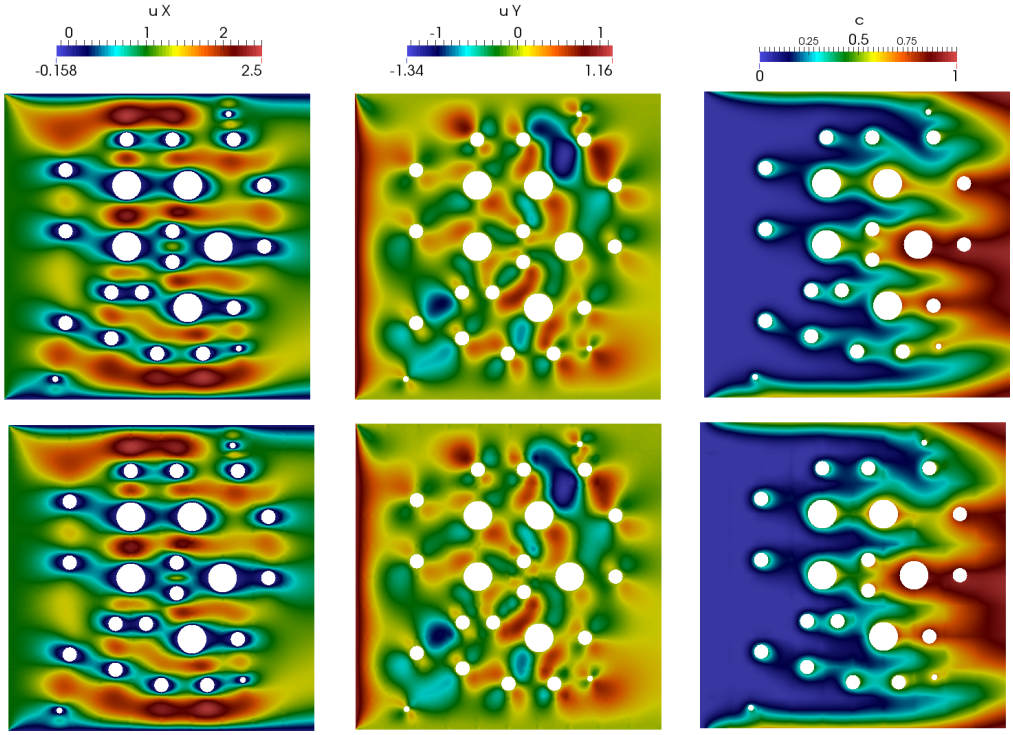


Рисунок 1.8: Распределение скорости по оси X и Y и распределение поля концентрации (слева направо). Сверху: Решение на мелкой сетке. Снизу: Многомасштабное решение.

Видим, что погрешность скорости L_2 для DG уменьшается с 35% до 2.4%, а погрешность грубой сетки давления уменьшается с 11% до 1.9%, когда мы используем 5 и 60 многомасштабных базисных функций скорости соответственно. Заметим, что мы получаем хорошие решения, используя достаточное количество

многомасштабных базисных функций для точного приближения поля скоростей.

1.3 Выводы

В данной главе были представлены многомасштабные методы для задач течения и переноса в перфорированных областях.

В первом подразделе был рассмотрен смешанный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (mixed GMsFEM) для задачи течения в перфорированной области, где уравнение течения описывается уравнением Дарси. Процесс переноса представляется уравнением конвекции-диффузии. После решения задачи течения с помощью многомасштабного решателя мы решаем задачу переноса на мелкой сетке с использованием метода конечных элементов Галеркина с численной стабилизацией. Использование смешанной формулировки для задачи течения гарантирует закон сохранения массы. В смешанной формулировке определяются пространства снэпшот, которые представляют собой пространство решений в каждой грубой области. Затем выполняется локальное спектральное разложение в пространстве снэпшот, чтобы определить многомасштабные базисные функции. Для давления было использовано кусочно-постоянные базисные функции. Рассмотрели два примера с использованием двух грубых сеток (10×10 и 5×5) и проводим численное исследование погрешностей для разного количества многомасштабных базисных функций. Было исследовано два тестовых случая: с однородной и с неоднородной проницаемостью. Представленный многомасштабный решатель обеспечивает хорошие результаты, когда используется около 4 базисных функций.

Во втором подразделе был исследован обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина для задачи течения, где уравнение течения описывается уравнениями Стокса. Задача переноса решается на мелкой сетке с применением метода разрывного Галеркина (IPDG). В DG-GMsFEM строится снэпшот пространство, которое учитывает возможные потоки между интерфейсами грубых

ячеек. Затем решается спектральная задача в снэпшот пространстве, чтобы получить многомасштабные базисные функции. Для аппроксимации на грубой сетке для давления были использованы кусочно-постоянные функции. Численные результаты представлены для двумерного случая с разным числом многомасштабных базисных функций. Вычислительные эксперименты показали, что данный многомасштабный метод показывает хорошую точность.

Глава 2

Многомасштабный метод для задач в перфорированных областях с неоднородными граничными условиями на перфорациях

В данной главе представлен многомасштабный метод разрывного Галеркина для задач в перфорированных областях с неоднородными граничными условиями на перфорациях. Многомасштабный метод представлен для решения различных модельных задач: эллиптических и параболических уравнений, уравнений конвекции-диффузии, уравнений упругости и термоупругости. Предложенный метод подразумевает разделение перфорированной области на несколько не перекрывающихся подобластей, для каждой из которых строятся локальные многомасштабные базисные функции. Для учета неоднородных граничных условий на перфорациях строятся дополнительные базисные функции. Построение многомасштабных базисных функций основано на определении снэпшот пространства, которые используются для учета процессов на границах с неоднородными граничными условиями на них. Далее решается локальная спектральная задача для уменьшения размерности снэпшот пространства. Предложено два типа многомасштабных базисных функций, которые строятся путем применения подходящих граничных условий, соответствующих границе подобласти и границе перфорации. Представлены численные результаты для решения двумерных задач с однородными и неоднородными граничными условиями на перфорациях и на стенках. Численное сравнение проводилось посредством сравнения решений, полученных с использованием многомасштабного метода и с решением на мелкой сетке. Для случая с однородными граничными условиями на перфорациях результаты показаны с использованием только локальных многомасштабных базисных функций. Для задач с неоднородными граничными условиями на пер-

форациях использовались два типа базисных функций. Было показано, что для получения аккуратной аппроксимации на грубой сетке с использованием предложенного метода необходимо использовать базисные функции обоих типов для учета переноса на границах локальных областей и учета соответствующих граничных условий. Оба типа базисных функций необходимы для получения точных решений, и они показаны для задач с неоднородными граничными условиями на перфорациях. Численное исследование проведено для модельных задач при выборе различного количества многомасштабных базисных функций.

2.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Пусть Ω - перфорированная область, Γ_g - граница стенок, а Γ_p - граница перфорации. Рассматриваем эллиптическое уравнение в перфорированной области

$$\mathscr{L}(u) = f, \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

с граничными условиями Дирихле на границе стенок

$$u = g_g, \quad x \in \Gamma_g, \tag{2.2}$$

и с неоднородными граничными условиями на границе перфорации

$$\mathscr{B}(u) = \alpha u + g_p, \quad x \in \Gamma_p, \tag{2.3}$$

где f - источник, $\mathscr{L}$ обозначает линейный дифференциальный оператор, $\mathscr{B}$ является оператором производной по нормали и $\partial\Omega = \Gamma_g \cup \Gamma_p$.

- Для оператора Лапласа имеем

$$\mathscr{L}(u) = \nabla \cdot q(u), \quad \mathscr{B}(u) = q \cdot n, \tag{2.4}$$

где

$$q(u) = -k\nabla u.$$

Здесь $q(u)$ - поток, k - коэффициент диффузии и n - внешняя единичная нормаль на $\partial\Omega$.

- Для оператора упругости имеем

$$\mathscr{L}(u) = \nabla \cdot \sigma(u), \quad \mathscr{B}(u) = \sigma \cdot n, \tag{2.5}$$

где

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda\nabla \cdot u\mathscr{I}, \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^{Tr}).$$

Здесь u - вектор перемещения, $\varepsilon(u)$ - тензор деформации, $\sigma(u)$ - тензор напряжения, u^{Tr} - транспонирование вектора u, λ и μ - коэффициенты Ламé.

Далее представлена аппроксимация с использованием разрывного метода Галеркина (IPDG) на мелкой сетке, который разрешает все перфорации на уровне сетки.

Пусть $\mathscr{T}^h$ - разбиение на мелкой сетке области Ω, заданное формулой

$$\mathscr{T}^h = \bigcup_{i=1}^{N_c^h} K_i,$$

где N_c^h - количество ячеек мелкой сетки. Мы используем $\mathscr{E}^h$ для обозначения множества граней в $\mathscr{T}^h$ с $\mathscr{E}^h = \mathscr{E}_o^h \cup \mathscr{E}_b^h$, где $\mathscr{E}_o^h$ и $\mathscr{E}_b^h$ являются множествами внутренних и граничных граней (см. Рисунок 2.1).

Определим скачок $[u]$ и среднее значение $\{u\}$ функции u на внутренней грани как

$$[u] = u_+ - u_-, \quad \{u\} = \frac{u_+ + u_-}{2},$$

где $u_+ = u|_{K^+}$, $u_- = u|_{K^-}$, K^+ и K^- - две ячейки, разделяющие грань E. Для граничных граней $[u] = u|_E$ и $\{u\} = u|_E$, $E \in \mathscr{E}_b^h$

Для аппроксимации IPDG имеем следующую вариационную постановку задачи: найти $u_h \in V_h$ такое, что

$$a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h \tag{2.6}$$

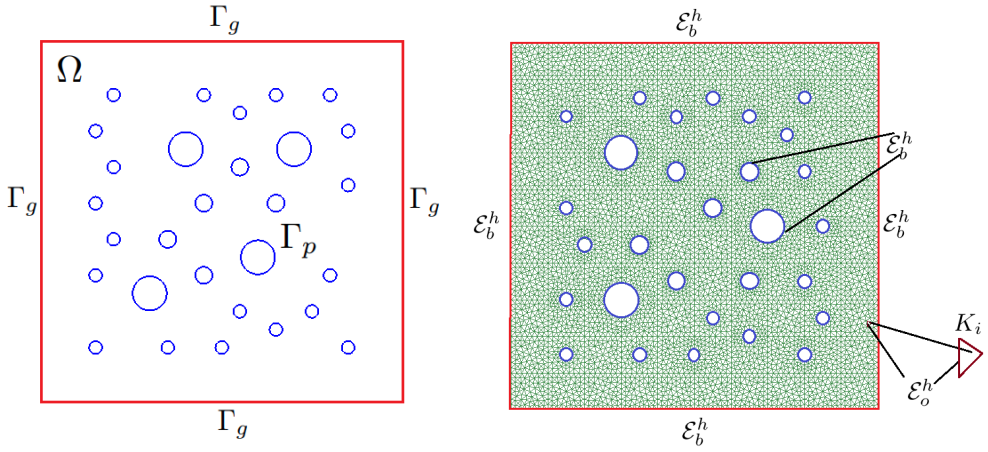


Рисунок 2.1: Иллюстрация перфорированной области Ω (слева) и мелкой сетки $\mathscr{T}^h$ (справа).

где

- для оператора Лапласа, получаем $V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathscr{T}^h\}$ и

$$
\begin{aligned}
a(u,v) = & \sum_{K\in\mathscr{T}^h} \int_K (k\nabla u, \nabla v)\, dx + \sum_{E\in\mathscr{E}^h_{b,p}} \int_E \alpha\, u\, v\, ds \\
& - \sum_{E\in\mathscr{E}^h_o \cup \mathscr{E}^h_{b,g}} \int_E \Big(\{k\nabla u \cdot n\} \cdot [v] + \{k\nabla v \cdot n\} \cdot [u] - \frac{\gamma_f}{h} \{k\}[u] \cdot [v] \Big)\, ds, \\
l(v) = & \sum_{K\in\mathscr{T}^h} \int_K f\ v\ dx + \sum_{E\in\mathscr{E}^h_{b,p}} \int_E g_p\, v\, ds \\
& + \sum_{E\in\mathscr{E}^h_{b,g}} \int_E \Big(\frac{\gamma_f}{h} k\, v - k\nabla v \cdot n \Big)\, g_g\, ds.
\end{aligned}
$$

- для оператора упругости, получаем $V_h = \{v \in [L^2(\Omega)]^2 : v|_K \in [\mathbb{P}_1(K)]^2, \forall K \in$

$\mathscr{T}^h\}$, и

$$a(u,v) = \sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K(\sigma(u),\varepsilon(v))dx + \sum_{E\in\mathscr{E}^h_{b,p}}\int_E \alpha\, u\, v\, ds$$
$$- \sum_{E\in\mathscr{E}^h_o\cup\mathscr{E}^h_{b,g}}\int_E\Big(\{\tau(u)\}[v]+\{\tau(v)\}[u]-\frac{\gamma_f}{h}\{\lambda+2\mu\}[u][v]\Big)ds,$$
$$l(v) = \sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K f\cdot v\, dx + \sum_{E\in\mathscr{E}^h_{b,p}}\int_E g_p\cdot v\, ds$$
$$+ \sum_{E\in\mathscr{E}^h_{b,g}}\int_E\Big(\frac{\gamma_f}{h}(\lambda+2\mu)v-\tau(v)\Big)\cdot g_g\, ds.$$

где $\tau(u)=\sigma(u)\cdot n$.

Здесь γ_f - штрафной параметр.

Можем записать указанные выше системы в матричной форме следующим образом:

$$A_h U_h = F_h,$$

где

$$A_h=[a_{i,j}],\quad a_{i,j}=a(\varphi_i,\varphi_j),\quad F_h=[f_j],\quad f_j=l(\varphi_j),$$

с $u_h=\sum_i u_i\varphi_i$ и $U_h=[u_j]$.

2.2 Аппроксимация на грубой сетке

В данном подразделе описываем построение аппроксимации на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов разрывного Галеркина (DG-GMsFEM). Пусть $\mathscr{T}^H$ - грубосеточное разбиение области Ω с размером грубой сетки H (см. Рисунок 2.2)

$$\mathscr{T}^H=\bigcup_{i=1}^{N_c^H}K_i,$$

где N_c^H - количество ячеек грубой сетки, а K_i - грубая ячейка (локальная область). Пусть $\mathscr{E}^H$ обозначим как набор граней в $\mathscr{T}^H$, где $\mathscr{E}^H=\mathscr{E}^H_o\cup\mathscr{E}^H_b$. Заметим, что

в DG-GMsFEM многомасштабные базисные функции поддерживаются в каждой грубой ячейке K_i.

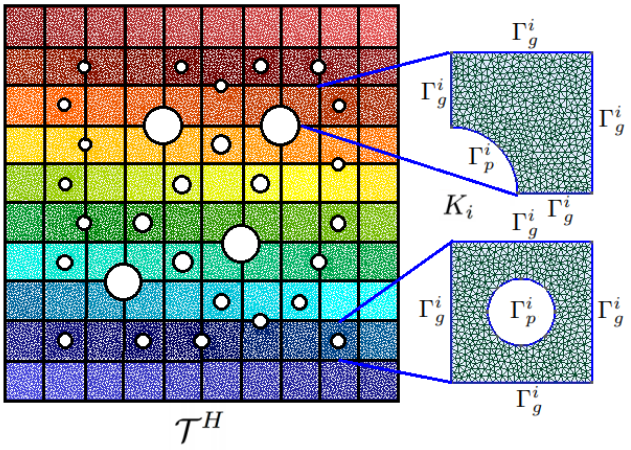


Рисунок 2.2: Грубая сетка $\mathscr{T}^H$ с грубыми ячейками K_i, $\Gamma_{out} \cup \Gamma_{perf} = \partial K_i$

Определим V_H как многомасштабное пространство

$$V_H = \text{span}\{\phi_i\}_{i=1}^{N_u},$$

где $N_u = \dim(V_H)$ - количество базисных функций.

Для аппроксимации грубой сетки используем DG-подход и получим следующую вариационную формулировку: найти $u_H \in V_H$ такое что

$$a(u_H, v) = l(v), \quad \forall v \in V_H. \tag{2.7}$$

Заметим, что система грубого масштаба может быть сформирована путем проецирования мелкомасштабной системы на грубую сетку. Матрица проекции может быть собрана с использованием многомасштабных базисных функций.

Для построения многомасштабного пространства мы начинаем с построения снэпшот пространства, которое содержит множество базисных функций, образованных решением локальных задач со всеми возможными граничными условиями с точностью до разрешения мелкой сетки в каждой грубой ячейке K_i (локальная область) для $i = 1, \cdots, N$, где N - количество грубых блоков в Ω. После этого решается спектральная задача, чтобы выбрать доминантные моды снэпшот пространства.

Далее представлены детали построения многомасштабных базисных функций. Мы рассматриваем два типа базисных функций, привязанных к двум границам: (1) внешние границы Γ_g^i и (2) граница перфорации Γ_p^i.

Многомасштабные базисные функции внешних границ. В локальном снэпшот пространстве, состоящее из функций u_l^i, которые являются решениями следующей локальной задачи

$$\mathscr{L}(u_l^i) = 0, \quad x \in K_i \tag{2.8}$$

со следующими граничными условиями на внешних границах

$$u_l^i = g_i^l, \quad x \in \Gamma_g^i,$$

и на границах перфорации, ставим однородное граничное условие, связанное с (2.3)

$$\mathscr{B}(u_l^i) = \alpha u_l^i, \quad x \in \Gamma_p^i,$$

где $l = 1, \cdots, L_i^g$. Мы решаем локальные задачи, используя аппроксимацию IPDG на мелкой сетке $\mathscr{T}^h(K_i)$. Для оператора Лапласа у нас есть локальные задачи $L_i^g = J_i^g$, где J_i^g - количество граней мелкой сетки на Γ_g^i, а $g_i^l = \delta_i^l$ это дельта-функция Кронекера, которая равна 1, если $i = l$, и равна 0 в противном случае. Для оператора упругости у нас есть локальные задачи $L_i^g = d \cdot J_i^g$, где d - размерность, а $g_i^l = (\delta_i^l, 0)$ и $(0, \delta_i^l)$ для $d = 2$.

Совокупность решений вышеупомянутых локальных задач создает снэпшот пространство в локальной области K_i

$$V_g^{i,\text{snap}} = \{u_l^i : 1 \le l \le L_i^g\}, \quad R_g^{i,\text{snap}} = \left[u_1^i, \ldots, u_{L_i^g}^i\right]^T.$$

Для того чтобы уменьшить размер снэпшот пространства, мы решаем следующую локальную спектральную задачу в снэпшот пространстве $V_g^{i,\text{snap}}$

$$\tilde{A}_g^{K_i} \tilde{\psi}_g^i = \lambda_o \tilde{S}_g^{K_i} \tilde{\psi}_g^i, \tag{2.9}$$

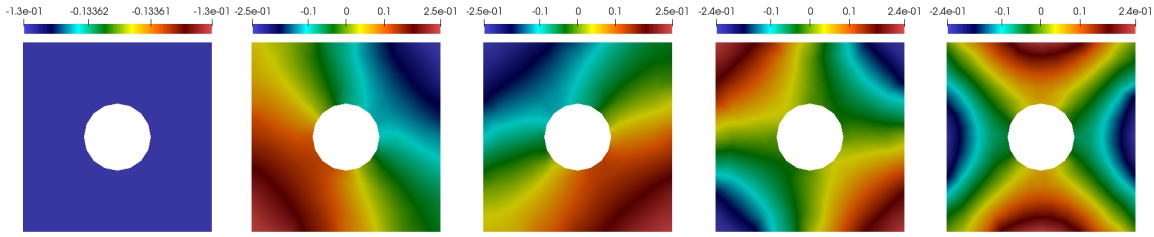


Рисунок 2.3: Иллюстрация многомасштабных базисных функций внешних границ для задачи Лапласа $\psi^i_{g,k}$ для $k = 1, \ldots, 5$ (слева направо).

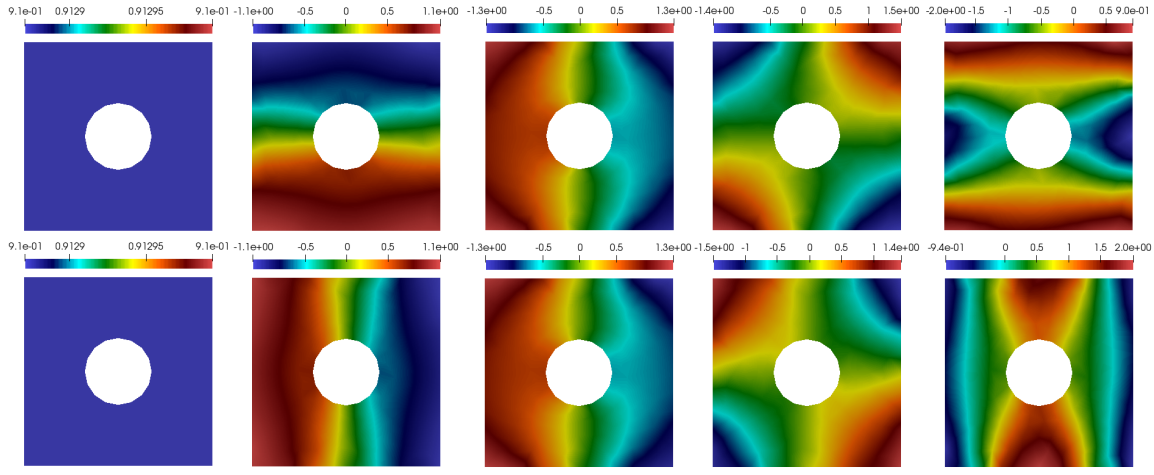


Рисунок 2.4: Иллюстрация многомасштабных базисных функций внешних границ для уравнения упругости $\psi^i_{g,k}$ для $k = 1, \ldots, 5$ (слева направо) Первая строка: ось X. Вторая строка: ось Y

где

$$\tilde{A}_g^{K_i} = R_g^{i,\text{snap}} A_h^{K_i} (R_g^{i,\text{snap}})^T, \quad \tilde{S}_g^{K_i} = R_g^{i,\text{snap}} S_h^{K_i} (R_g^{i,\text{snap}})^T.$$

Здесь $A_h^{K_i}$ и $S_h^{K_i}$ - матричные представления билинейных форм $a_{DG}^{T,K_i}(T,q)$ и $s^{T,K_i}(T,q)$, соответственно.

- Для оператора Лапласа:

$$
\begin{aligned}
a^{K_i}(u,v) = & \sum_{K\in\mathscr{T}^h(K_i)}\int_K k\nabla u\cdot\nabla v\,dx \\
& - \sum_{E\in\mathscr{E}_o^h(K_i)}\int_E \Big(\{k\nabla u\cdot n\}\cdot[v] + \{k\nabla v\cdot n\}\cdot[u] - \frac{\gamma_f}{h}\{k\}[u]\cdot[v]\Big)\,ds, \\
s^{K_i}(u,v) = & \sum_{E\in\mathscr{E}_b^h(K_i)}\int_E k\,uv\,ds.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

- Для оператора упругости:

$$
\begin{aligned}
a^{K_i}(u,v) = & \sum_{K\in\mathscr{T}^h(K_i)}\int_K (\sigma(u),\varepsilon(v))dx \\
& - \sum_{E\in\mathscr{E}_o^h(K_i)}\int_E \Big(\{\tau(u)\}[v] + \{\tau(v)\}[u] - \frac{\gamma_f}{h}\{\lambda+2\mu\}[u][v]\Big)\,ds, \\
s^{u,K_i}(u,v) = & \sum_{E\in\mathscr{E}_b^h(K_i)}\int_E (\lambda+2\mu)u\cdot v\,ds.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Отметим, что интеграл в $s^{K_i}(u,v)$ определен на границе грубого блока K_i и на основе определения снэпшот пространства, используемого для извлечения доминантных модов, связанных с внешней границей локальной области.

Затем мы располагаем собственные значения в порядке возрастания и выбираем первые собственные векторы, соответствующие первым наименьшим собственным значениям $\psi^i_{g,k} = (R^{i,\text{snap}}_g)^T\tilde{\psi}^i_{g,k}$ в качестве базисных функций ($k = 1,\ldots,M^i_g$)

$$V^g_H = \text{span}\{\psi^i_{g,k} : 1\le i\le N^H_{cell},\ 1\le k\le M^i_g\}.$$

Первые пять собственных векторов для многомасштабных базисных функций внешних границ изображены на рисунке 2.3 для оператора Лапласа и на рисунке 2.4 для оператора упругости.

Многомасштабные базисные функции границ перфораций. Для учета неоднородных граничных условий на границах перфорации мы строим дополнительные многомасштабные базисные функции. Снэпшот пространство создается

путем решения следующей задачи в локальной области K^i, содержащей перфорации

$$\mathscr{L}(u_l^i) = 0, \quad x \in K_i \tag{2.12}$$

со следующими граничными условиями на внешних границах

$$u_l^i = 0, \quad x \in \Gamma_g^i,$$

и на границах перфорации, мы устанавливаем следующее граничное условие, связанное с (2.3)

$$\mathscr{B}(u_l^i) = \alpha u_l^i + g_i^l, \quad x \in \Gamma_p^i.$$

где $l = 1, \cdots, L_i^p$, $L_i^p = J_i^p$ для задачи Лапласа и $L_i^p = d \cdot J_i^p$ для задачи упругости (J_i^p количество граней мелкой сетки на Γ_p^i).

Используя локальные решения, формируем снэпшот пространство

$$V_p^{i,\text{snap}} = \{u_l^i : 1 \le l \le L_i^p\}, \quad R_p^{i,\text{snap}} = \left[u_1^i, \ldots, u_{L_i^p}^i\right]^T.$$

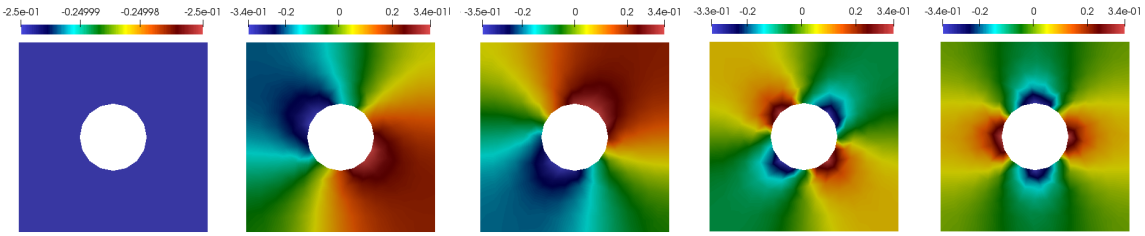


Рисунок 2.5: Иллюстрация многомасштабных базисных функций границ перфораций для задачи Лапласа $\psi_{g,k}^i$ для $k = 1, \ldots, 5$ (слева направо).

Выполняем понижение размерности в снэпшот пространстве, используя локальную спектральную задачу

$$\tilde{A}_p^{K_i} \tilde{\psi}_{g,k}^i = \eta \tilde{S}_p^{K_i} \tilde{\psi}_{g,k}^i, \tag{2.13}$$

где

$$\tilde{A}_p^{K_i} = R_p^{i,\text{snap}} A_h^{K_i} (R_p^{i,\text{snap}})^{Tr}, \quad \tilde{S}_p^{K_i} = R_p^{i,\text{snap}} S_h^{K_i} (R_p^{i,\text{snap}})^{Tr}.$$

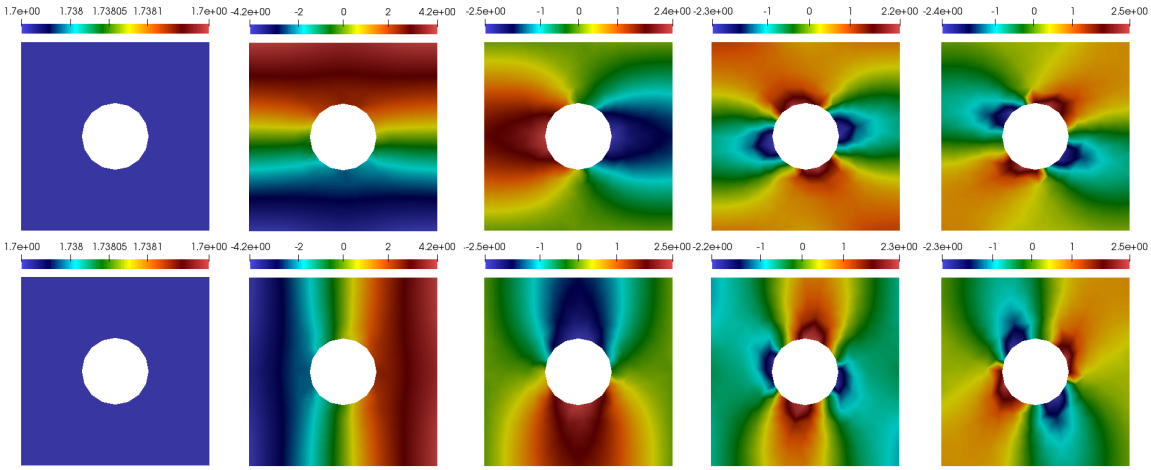


Рисунок 2.6: Иллюстрация многомасштабных базисных функций границ перфораций для уравнения упругости $\psi^i_{g,k}$ для $k = 1, \ldots, 5$ (слева направо) Первая строка: для оси X. Вторая строка: для оси Y

Собственные значения расположены в порядке возрастания, и, выбирая первые собственные векторы, соответствующие первым наименьшим собственным значениям, определяем базисные функции разномасштабной границы перфорации

$$V_H^p = \text{span}\{\psi^i_{g,k} : 1 \leq i \leq N^H_{cell,p}, 2 \leq k \leq M^i_p\}.$$

где $\psi^i_{g,k} = (R^{i,\text{snap}}_p)^{Tr} \tilde{\psi}^i_{g,k}$ для $k = 1, \ldots, M^i_p$, $N_{cell,p}$ - количество локальных областей с перфорацией. Заметим, что мы не взяли первый собственный вектор, потому что вектор с постоянным знаком уже существует во внешнем граничном многомасштабном пространстве. Многомасштабные базисные функции с границами перфорации представлены на рисунке 2.5 для задачи Лапласа и на рисунке 2.6 для задачи упругости.

Внутренние многомасштабные базисные функции. Мы добавляем одну внутреннюю базисную функцию [87], которая построена путем решения следующей локальной задачи

$$\mathscr{L}(\phi^i) = f, \quad x \in K_i \tag{2.14}$$

где $f = 1$ и с однородными граничными условиями на внешней границе и на

границе перфорации

$$\phi^i = 0, \quad x \in \Gamma_g^i, \quad \mathscr{B}(\phi) = \alpha\phi, \quad x \in \Gamma_p^i.$$

Наконец, у нас есть следующее многомасштабное пространство

$$V_H = \text{span}\{\psi_{g,k}^i, \psi_{p,m}^j, \phi^i : 1 \le i \le N_g, 1 \le j \le N_p, 1 \le k \le M_g^i, 2 \le m \le M_p^i\},$$

где $N_p = N_{cell,p}$ и $N_g = N_{cell}$.

Система грубого масштаба

Для построения системы грубой сетки, генерируем матрицу проекции с использованием многомасштабных базисных функций.

$$R = \left[\psi_{g,1}^1, \ldots, \psi_{g,M_g^{Ng}}^{N_g}, \psi_{p,1}^1, \ldots, \psi_{p,M_p^{Np}}^{N_p}, \phi_1, \ldots, \phi_{N_{cell}^H}\right]^{Tr}.$$

Используя матрицу проекции, получим следующую систему грубой сетки в матричной форме:

$$A_H U_H = F_H, \tag{2.15}$$

где

$$A_H = RA_hR^{Tr}, \quad F_H = RF_h.$$

и после расчета решения грубого масштаба мы можем восстановить мелкомасштабное решение $U_{ms} = R^{Tr}U_H$.

2.3 Численные результаты

Представлены численные результаты для модельных задач в перфорированной области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ с $L_x = L_y = 1$. Расчетная область с грубыми и мелкими сетками представлена на рисунке 2.7. Мелкая сетка содержит 14648 вершин и 28410 ячеек. Грубая сетка содержит 121 вершину и 100 ячеек (локальные области). Для построения расчетной области с расчетной сеткой мы используем генератор сеток Gmsh [60]. Описание метода решения для параболической задачи и задачи термоупругости представлено в Приложении 2.

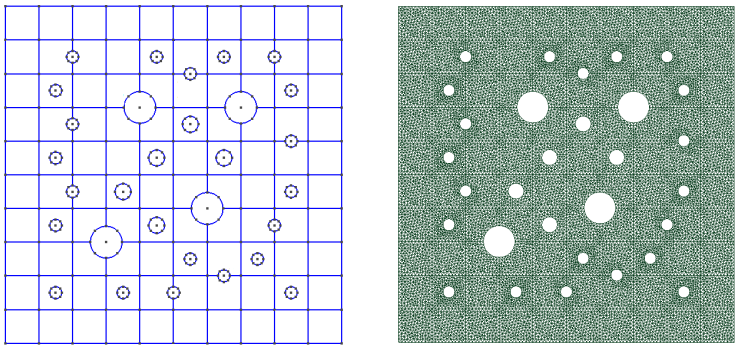


Рисунок 2.7: Расчетная область грубой сетки (слева) и мелкой сетки (справа).

Для того чтобы исследовать представленный многомасштабный метод решения задач в перфорированных областях, мы рассматриваем следующие тесты: (1) эллиптическое уравнение, (2) параболическое уравнение, (3) уравнение упругости, (4) уравнения термоупругости и (5) уравнение конвекции-диффузии. Для каждой задачи мы рассматриваем два тестовых случая:

- *Случай 1:* Однородные граничные условия на перфорациях;
- *Случай 2:* Неоднородные граничные условия на перфорациях.

Для вычисления ошибок используем следующие относительные погрешности в L_2 и в энергетической норме (полунорме H_1) между многомасштабным решением с решением на мелкой сетке

$$e(u)_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_\Omega (u_{ms}-u)^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx}}\cdot 100\%, \quad e(u)_{H_1} = \sqrt{\frac{\int_\Omega k(u_{ms}-u,u_{ms}-u)\,dx}{\int_\Omega k(u,u)\,dx}}\cdot 100\%,$$

где u и u_{ms} - решение на мелкой сетке и многомасштабное решение соответственно.

Начнем с представления результатов для эллиптических и параболических уравнений. После этого рассматривается задача упругости, термоупругости и переноса. Затем, будут представлены результаты для неструктурированных грубых сеток для всех пяти тестовых задач.

Результаты для эллиптических и параболических уравнений.

В перфорированной области Ω рассмотрим следующие задачи:

- Эллиптическое уравнение:

$$-\nabla \cdot (k\nabla u) = 0, \quad x \in \Omega,$$

- Параболическое уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k\nabla u) = 0, \quad x \in \Omega,$$

с $k = 1$ и следующие граничные условия:

- *Случай 1.* Однородные граничные условия на перфорациях:

$$u = 1, \quad x \in \Gamma_g, \quad -k\nabla u \cdot n = \alpha u, \quad x \in \Gamma_p.$$

- *Случай 2.* Неоднородные граничные условия на перфорациях:

$$u = 0, \quad x \in \Gamma_g, \quad -k\nabla u \cdot n = \alpha(u-1), \quad x \in \Gamma_p.$$

Рассматриваем три различные $\alpha = 1$, 25 и 100. Для эллиптического уравнения задаем $t_{max} = 0.02$ с 40 временными шагами. Для параболического уравнения зададим нулевое начальное условие и $t_{max} = 0.01$ с 40 временными шагами.

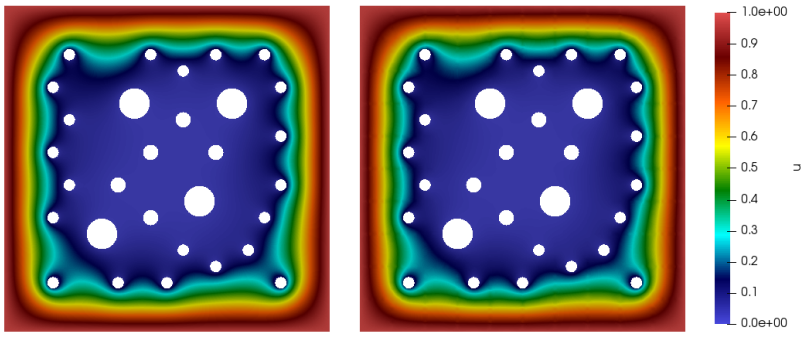


Рисунок 2.8: Эллиптическая задача с $\alpha = 100$. *Случай 1.* Слева: Эталонное решение с $DOF_h^u = 85230$; Справа: Многомасштабное решение, $M = 12$, $DOF_H^u = 1200$.

M	DOF_H	$\alpha = 1$		$\alpha = 25$		$\alpha = 100$	
		e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M$, $M_p = 0$							
1	200	21.92	97.44	96.75	100.0	82.12	100.0
2	300	21.50	95.89	87.83	100.0	66.43	100.0
4	500	7.770	42.57	8.408	32.53	5.417	32.01
6	700	3.382	29.49	4.307	27.96	3.260	27.66
8	900	2.096	21.91	2.509	21.20	1.905	20.11
12	1300	1.201	14.33	1.417	13.33	1.053	13.08
16	1700	1.169	13.89	1.379	12.77	1.004	12.49
20	2100	1.127	13.10	1.349	12.03	0.972	11.81
24	2500	1.116	13.01	1.341	11.95	0.964	11.74
32	3300	1.098	12.80	1.329	11.74	0.957	11.53

Таблица 2.1: Эллиптическая задача с $\alpha = 1, 25$ и 100. *Случай 1*. Относительные L^2 и H^1 погрешности в %. $DOF_h = 85230$.

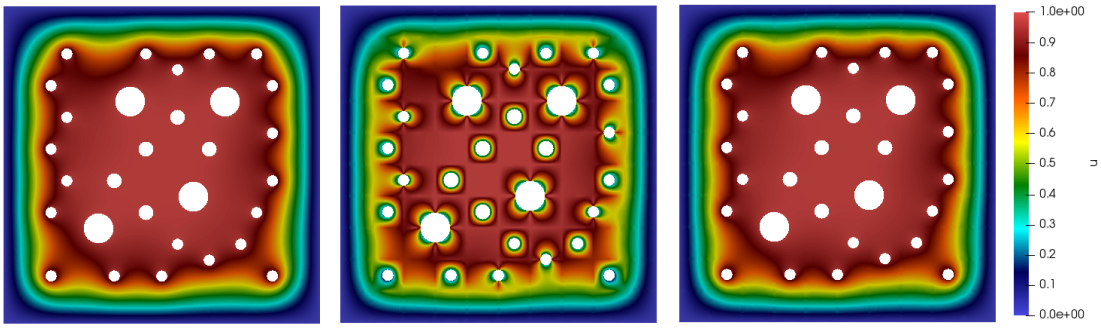


Рисунок 2.9: Эллиптическая задача с $\alpha = 100$. *Случай 2*. Слева: Эталонное решение с $DOF_h^u = 85230$. Центр: Многомасштабное решение без базисных функций для перфораций ($M_g = M = 12$, $M_p = 0$, $DOF_H = 1300$). Справа: Многомасштабное решение с использованием базисных функций для перфораций ($M_g = M_p = M = 12$, $DOF_H = 1776$).

В таблицах 2.1 и 2.2 представлены относительные погрешности для эллиптической задачи с разными граничными коэффициентами для перфорации $\alpha = 1, 25$ и 100. Здесь M - это количество многомасштабных базисных функций, DOF_h и DOF_H - количество степеней свободы для мелкосеточного (эталонного) решения и многомасштабного решения. $DOF_h = 3 \cdot N_{cell}^h$, где N_{cell}^h - количество

M	DOF_H	$\alpha = 1$		$\alpha = 25$		$\alpha = 100$	
		e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M$, $M_p = 0$							
1	200	98.00	100.0	90.85	103.2	88.31	110.1
2	300	96.16	98.57	84.23	101.8	82.39	113.5
4	500	35.55	50.93	17.47	131.8	32.63	200.6
6	700	16.33	41.68	14.37	136.5	26.66	223.9
8	900	10.71	37.02	12.64	137.5	21.48	238.5
12	1300	6.896	33.31	12.29	136.9	21.52	237.5
16	1700	6.757	33.12	12.29	136.8	21.58	237.4
20	2100	6.580	32.80	12.29	136.7	21.63	237.1
24	2500	6.532	32.76	12.29	136.7	21.67	236.9
32	3300	6.457	32.68	12.29	136.7	21.68	236.8
$M_g = M_p = M$							
1	251	96.63	97.45	82.96	123.0	66.74	129.7
2	402	93.85	95.23	67.28	116.0	43.93	112.6
4	704	27.84	39.03	6.909	32.68	3.523	33.20
6	1006	12.24	27.74	3.399	27.01	2.316	26.94
8	1308	7.909	20.65	1.747	20.01	1.201	19.30
12	1776	5.238	14.20	1.234	13.17	0.772	12.94
16	2244	5.108	13.80	1.197	12.64	0.735	12.37
20	2644	4.934	13.04	1.165	11.92	0.708	11.71
24	3044	4.887	12.97	1.155	11.86	0.699	11.66
32	3844	4.812	12.78	1.142	11.69	0.692	11.48

Таблица 2.2: Эллиптическая задача с $\alpha = 1, 25$ и 100. *Случай 2*. Относительные L^2 и H^1 погрешности в %. $DOF_h = 85230$.

ячеек мелкой сетки. Для многомасштабного решения $DOF_H = (M_g + 1) \cdot N_g + M_p \cdot N_p$, где $N_g = N^H_{cell}$ - общее количество ячеек грубой сетки, а $N_p = N^H_{cell,p}$ - количество ячеек грубой сетки с перфорацией. Для эллиптической задачи с однородными граничными условиями (*Случай 1*) мы используем многомасштабное пространство без базисных функций для перфораций ($M_p = 0$). Для *Случая 2* с неоднородными граничными условиями представлены результаты для многомасштабных пространств без и с граничными базисными функциями для перфораций ($M_p = M$). Для *Случая 1* замечаем, что относительная погрешность в

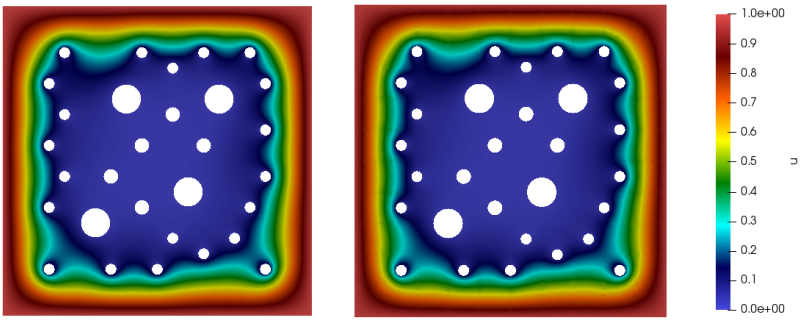


Рисунок 2.10: Параболическая задача с $\alpha = 100$ для t_{40}. *Случай 1*. Слева: Эталонное решение ($DOF_h = 85230$). Справа: Многомасштабное решение ($M_g = M = 12$, $M_p = 0$, $DOF_H = 1300$).

M	DOF_H	$\alpha = 1$		$\alpha = 25$		$\alpha = 100$	
		e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M$, $M_p = 0$							
1	200	86.14	99.75	101.6	134.7	83.13	157.8
2	300	85.57	99.22	92.55	124.4	67.41	130.3
4	500	18.58	34.51	9.460	32.42	5.393	31.97
6	700	8.323	28.86	5.001	27.98	3.436	27.71
8	900	4.445	20.53	2.774	20.93	1.959	20.08
12	1300	2.870	14.32	1.734	13.33	1.164	13.10
16	1700	2.784	13.96	1.675	12.79	1.109	12.52
20	2100	2.693	13.28	1.635	12.06	1.076	11.84
24	2500	2.666	13.23	1.622	11.99	1.066	11.76
32	3300	2.625	13.09	1.604	11.79	1.058	11.56

Таблица 2.3: Параболическая задача с $\alpha = 1, 25$ и 100. *Случай 1* (однородные граничные условия). Относительные L^2 и H^1 погрешности в %. $DOF_h = 85230$.

норме L^2 уменьшается до 1% для $\alpha = 1, 25$ и 100, когда берем достаточное количество многомасштабных базисных функций ($M_g = 12$ и $M_p = 0$). Для граничных условий *Случая 2* многомасштабный метод дает решение с большой погрешностью, когда не берем многомасштабные базисные функции для границ перфораций ($M_p = 0$). Однако хорошие результаты получаем после добавления базисов для границ перфораций ($M_p = M$). Например, относительная L^2 погрешность для $M = 12$ многомасштабных базисных функций составляет 12% для $M_p = 0$

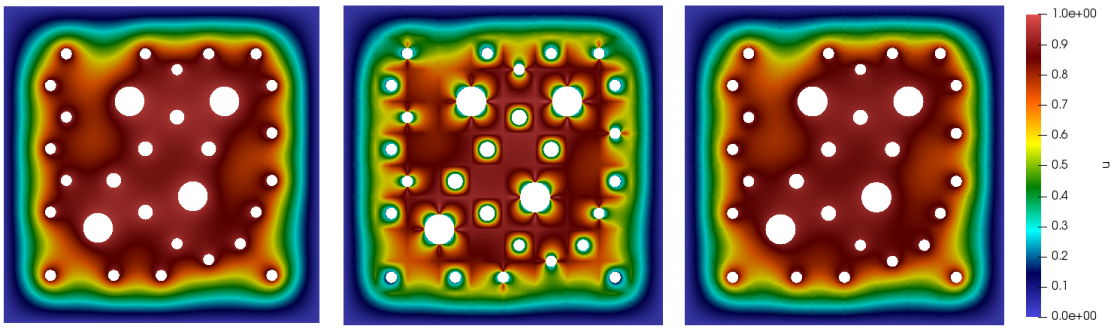


Рисунок 2.11: Параболическая задача с $\alpha = 100$ для временного слоя t_{40}. *Случай 2*. Слева: Эталонное решение ($DOF_h = 85230$). Центр: Многомасштабное решение без базисных функций для перфораций ($M_g = 12$, $M_p = 0$, $DOF_H = 1300$). Справа: Многомасштабное решение с базисными функциями для перфораций ($M_g = M_p = M = 12$, $DOF_H = 1776$).

и уменьшается до 1.2% для $M_p = M$ ($\alpha = 25$). Для тестовой задачи с большим значением $\alpha = 100$ уменьшаем L^2 погрешность с 21% до 0.67%.

На рисунках 2.8-2.9 представлены мелкосеточные и многомасштабные решения эллиптической задачи с $\alpha = 100$ для *Случая 1* и *Случая 2* соответственно. У нас есть $DOF_h = 85230$ для эталонного (мелкосеточного) решения. Для многомасштабного решения мы использовали 12 многомасштабных базисных функций ($M = 12$) для обоих случаев. У нас $DOF_H = 1300$ для многомасштабного решения без базисных функций для границ перфораций в *Случаях 1 и 2* ($M_g = M$, $M_p = 0$) и $DOF_H = 1776$ для многомасштабного решения с базисными функциями для границ перфораций в *Случае 2* ($M_g = M_p = M$). На рисунке 2.8 показываем эталонное (мелкосеточное) решение слева и многомасштабное решение справа для *Случая 1*. Для *Случая 2* представлены три изображения на рисунке 2.9: эталонное решение слева, многомасштабное решение с $M_g = M$, $M_p = 0$ в центре и многомасштабное решение с $M_g = M_p = M$ справа. Для *Случая 1* многомасштабные базисные функции для границ перфорации не нужны, потому что используются однородные граничные условия для перфораций ($M_p = 0$). Для *Случая 2* многомасштабное решение без базисов для границ перфораций

M	DOF_H	$\alpha = 1$		$\alpha = 25$		$\alpha = 100$	
		e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M$, $M_p = 0$							
1	200	91.97	100.0	88.25	106.2	87.32	113.5
2	300	84.84	98.29	79.71	107.8	80.87	119.0
4	500	13.88	79.31	17.52	146.2	31.49	209.5
6	700	9.709	74.94	15.97	148.1	27.40	228.8
8	900	8.124	72.15	14.66	147.7	22.90	240.5
12	1300	7.552	71.39	14.83	147.6	22.84	238.9
16	1700	7.330	68.91	14.40	146.1	22.90	238.7
20	2100	7.289	68.60	14.41	145.9	22.96	238.4
24	2500	7.280	68.49	14.42	145.8	22.99	238.2
32	3300	7.264	68.39	14.42	145.8	23.01	238.1
$M_g = M_p = M$							
1	251	85.93	79.07	77.39	103.4	63.56	116.3
2	402	75.40	75.78	57.40	99.07	38.96	101.3
4	704	7.938	38.96	5.154	35.27	6.326	36.65
6	1006	4.084	29.37	2.857	27.33	2.897	26.93
8	1308	2.339	21.96	1.566	20.95	1.394	19.50
12	1776	1.289	14.29	0.819	13.35	0.742	12.92
16	2244	1.192	13.19	0.735	12.54	0.654	12.24
20	2644	1.129	12.19	0.701	11.78	0.619	11.59
24	3044	1.117	11.90	0.691	11.61	0.603	11.49
32	3844	1.093	11.59	0.677	11.36	0.588	11.28

Таблица 2.4: Параболическая задача с $\alpha = 1, 25$ и 100. *Случай 2*. Относительные L^2 и H^1 погрешности в %. $DOF_h = 85230$.

($M_p = 0$) дает большие погрешности, но получим очень хорошие результаты для многомасштабного решателя после добавления базисов для перфораций, чтобы учитывать неоднородные граничные условия на перфорациях ($M_p = M$).

Далее представлены результаты для параболического уравнения. Эталонные и многомасштабные решения представлены на рисунке 2.10 для *Случая 1* и на рисунке 2.11 для *Случая 2* в конечный момент времени. Многомасштабное решение получено с использованием 12 многомасштабных базисных функций ($M = 12$). В первой строке показано мелкомасштабное решение с $DOF_h = 85230$.

Во второй строке представлено многомасштабное решение с $DOF_H = 1300$ для $M_p = 0$. В третьей строке приведено многомасштабное решение с $DOF_H = 1776$ для $M_p = M$ в *Случае 2*. Наблюдаем плохую многомасштабную аппроксимацию вблизи границы перфорации для *Случая 2* с $e_{L^2} = 22\%$ в последний момент времени, когда мы не используем базисные функции для границ перфораций для обработки неоднородных граничных условий. Для $M_p = M$ в *Случае 2* мы наблюдаем хорошее многомасштабное решение с $e_{L62} = 0.7\%$ в конечный момент времени.

Относительные погрешности для параболической задачи (*Случай 1*) между эталонным решением и многомасштабным решением для $\alpha = 1, 25$ и 100 показаны в таблице 2.3. Наблюдаем хорошее многомасштабное решение примерно с $1 - 2\%$ L^2 погрешностью, когда берем 12 многомасштабных базисных функций для внешних границ. В таблице 2.4 представлены относительные погрешности для *Случая 2*. Подобно предыдущим результатам для эллиптического уравнения, наблюдаем большие погрешности для $M_p = 0$ и можем получить хорошее многомасштабное решение, когда берем достаточное количество многомасштабных базисных функций с многомасштабными базисными функциями на внешних границах и на границах перфораций. Например, когда берем 12 многомасштабных базисных функций ($M = 12$), то получим $7 - 22\%$ для L^2 погрешности, когда $M_p = 0$ и погрешность падает до 1%, когда добавляем базисные функции для границ перфораций для $\alpha = 1, 25$ и 100.

Для *Случая 1* с однородными граничными условиями на перфорациях и для *Случая 2* с неоднородными граничными условиями на перфорациях наши результаты показывают, что представленный многомасштабный метод обеспечивает хорошие результаты с небольшими погрешностями и демонстрирует высокую точность для эллиптических и параболических задач. Когда мы используем неоднородные граничные условия для перфорации, метод многомасштабного анализа с использованием базисных функций границ перфорации значительно улучшает

наши результаты.

Результаты для уравнений упругости и термоупругости.

Пусть $\partial\Omega = \Gamma_t \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l \cup \Gamma_r \cup \Gamma_p$, где $\Gamma_t, \Gamma_b, \Gamma_l, \Gamma_r$ - верхняя, нижняя, левая и правая граница, Γ_p - граница перфорации.

Мы рассматриваем следующие задачи:

- Уравнение упругости:

$$\nabla \cdot \sigma(u) = f, \quad x \in \Omega,$$

со следующими граничными условиями:

$$u_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad x \in \Gamma_l, \quad u_y = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad x \in \Gamma_b,$$

и

  - *Случай 1*: Однородные граничные условия на перфорациях:

$$\sigma \cdot n = 1, \quad x \in \Gamma_t \cup \Gamma_r, \quad \sigma \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_p.$$

  - *Случай 2*: Неоднородные граничные условия на перфорациях:

$$\sigma \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_t \cup \Gamma_r, \quad \sigma \cdot n = -0.01, \quad x \in \Gamma_p.$$

- Уравнения термоупругости:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} + \beta\frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \nabla \cdot (k\nabla T) = 0, \quad x \in \Omega$$
$$\nabla \cdot \sigma(u) - \beta\nabla(T - T_*) = 0, \quad x \in \Omega,$$

со следующими внешними граничными условиями:

$$u_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad x \in \Gamma_l \cup \Gamma_r, \quad u_y = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad x \in \Gamma_b \cup \Gamma_t,$$
$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_l \cup \Gamma_t \cup \Gamma_r \cup \Gamma_b,$$

и со следующими граничными условиями на перфорациях:

– *Случай 1*: Однородные граничные условия на перфорациях:

$$\sigma \cdot n = -0.01, \quad -k\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha T, \quad x \in \Gamma_p,$$

где $\alpha = 100$. Численное моделирование проводим для $t_{max} = 0.02$, $\tau = 0.0005$.

– *Случай 2*: Неоднородные граничные условия на перфорациях:

$$\sigma \cdot n = 0, \quad -k\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T-1), \quad x \in \Gamma_p,$$

где $\alpha = 25$. Численное моделирование проводим для $t_{max} = 0.15$, $\tau = 0.00375$

Устанавливаем $\lambda = \mu = k = c = 1$, $T_* = 0$, $\beta = 0.0001$ и $\alpha = 25$. Берем нулевые начальные условия для перемещения и температуры и проводим моделирование с 40 временными шагами .

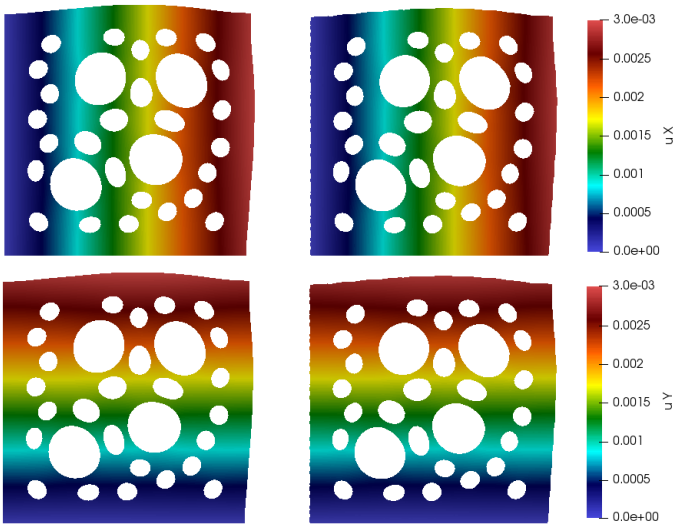


Рисунок 2.12: Задача упругости. *Случай 1*. Первая строка: перемещение по оси X. Вторая строка: перемещение по оси Y. Слева: Эталонное решение ($DOF_h = 170460$). Справа: Многомасштабное решение ($M_g = M = 24$, $M_p = 0$, $DOF_H = 4900$).

На рисунках 2.12-2.13 представлены результаты эталонных (с мелкой сеткой) и многомасштабных решений задачи упругости для *Случаев 1 и 2*. Для иллюстрации мы использовали 24 многомасштабных базисных фукнций ($M = 24$).

M	DOF_H	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M$, $M_p = 0$			
1	300	95.47	100.0
2	500	94.41	99.24
4	900	73.76	82.19
6	1300	14.50	32.53
8	1700	8.312	26.82
12	2500	6.031	22.41
16	3300	2.566	18.72
20	4100	2.354	18.08
24	4900	2.117	17.59
32	6500	1.893	17.49

Таблица 2.5: Задача упругости. *Случай 1*. Относительная L^2 и H^1 погрешность в %. $DOF_h = 170460$.

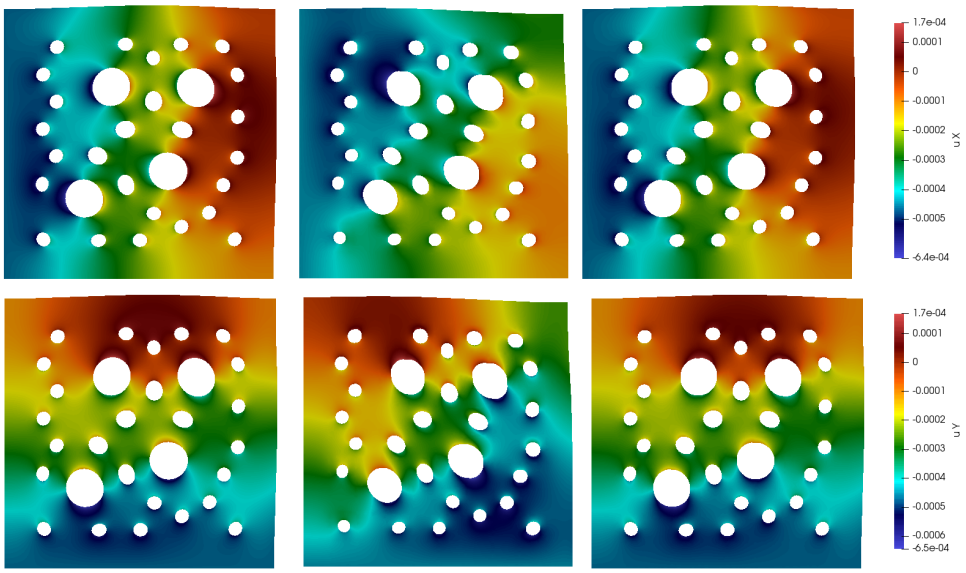


Рисунок 2.13: Задача упругости. *Случай 2*. Первая строка: перемещение по оси X. Вторая строка: перемещение по оси Y. Слева: Эталонное решение ($DOF_h = 170460$). Центр: Многомасштабное решение без базисных функций для перфораций ($M_g = M = 24$, $M_p = 0$, $DOF_H^u = 4900$). Справа: Многомасштабное решение с базисными функциями для перфораций ($M_g = M_p = M = 24$, $DOF_H^u = 5988$).

M	DOF_H	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M$, $M_p = 0$			
1	300	113.2	84.90
2	500	111.9	83.33
4	900	119.7	72.36
6	1300	118.0	64.02
8	1700	117.5	60.98
12	2500	117.6	59.82
16	3300	117.4	59.50
20	4100	117.4	59.37
24	4900	117.3	59.29
32	6500	117.2	58.35

M	DOF_H	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M_p = M$			
1	402	98.24	70.33
2	704	92.46	65.32
4	1308	52.99	45.22
6	1912	8.847	26.20
8	2516	6.835	20.38
12	3452	5.762	17.84
16	4388	2.745	16.50
20	5188	2.568	16.20
24	5988	2.324	14.24
32	7588	2.019	13.20

Таблица 2.6: Задача упругости. *Случай 2* (неоднородные граничные условия). Относительная L^2 и H^1 погрешность в %.

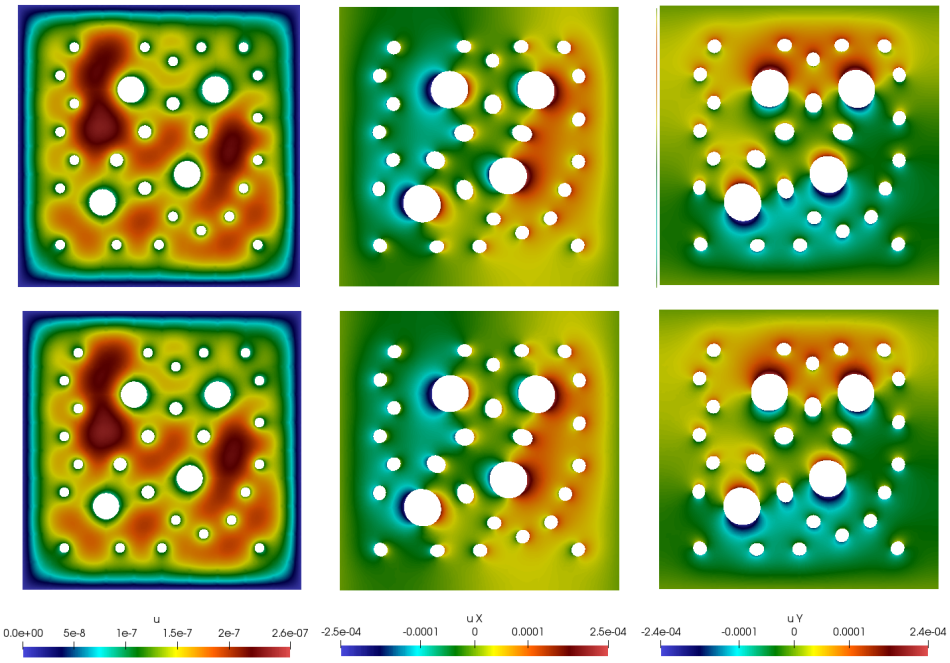


Рисунок 2.14: Задача термоупругости. *Случай 1*. Первый столбец: температура. Второй столбец: перемещение по оси X. Третий столбец: перемещение по оси Y. Первая строка: Эталонное решение ($DOF_h^u = 170460$ и $DOF_h^T = 85230$). Вторая строка: Многомасштабное решение ($M_g^u = M_p^u = M_g^T = M_p^T = M$, $DOF_H^u = 5988$ и $DOF_H^T = 3044$).

M	DOF_H^u	DOF_H^T	*Случай 1*				*Случай 2*			
			$e(u)_{L^2}$	$e(u)_{H^1}$	$e(T)_{L^2}$	$e(T)_{H^1}$	$e(u)_{L^2}$	$e(u)_{H^1}$	$e(T)_{L^2}$	$e(T)_{H^1}$
$M_g^u = M^u$, $M_p^u = 0$										
1	300	200	98.00	99.98	100.0	100.0	99.32	98.98	86.48	105.9
2	500	300	92.01	98.38	100.6	100.4	98.04	97.07	74.55	106.3
4	900	500	72.44	93.63	100.9	98.37	90.47	73.54	14.16	142.4
6	1300	700	36.91	87.77	100.3	93.44	90.01	55.30	13.32	143.3
8	1700	900	32.73	85.34	95.06	87.08	91.23	50.41	12.36	143.4
12	2500	1300	31.88	84.32	93.31	85.43	91.41	48.40	12.25	142.2
16	3300	1700	31.03	83.99	93.04	85.05	91.85	47.36	12.26	142.1
20	4100	2100	30.86	83.82	92.43	84.44	91.79	47.07	12.28	142.0
24	4900	2500	30.37	84.07	92.89	84.64	91.69	47.56	12.30	141.9
32	6500	3300	29.31	82.66	89.80	81.68	91.67	45.92	12.31	141.8
$M_g^u = M_p^u = M^u$										
1	402	200	90.81	68.11	91.36	96.15	99.42	95.38	86.48	105.9
2	704	300	82.37	57.77	82.90	91.90	97.80	90.97	74.55	106.3
4	1308	500	45.43	40.88	32.78	53.70	80.07	71.81	14.16	142.4
6	1912	700	12.48	29.04	20.93	35.71	69.01	63.08	13.32	143.3
8	2516	900	7.990	21.90	12.90	25.77	69.64	61.46	12.36	143.4
12	3452	1300	6.163	17.55	9.528	20.61	65.62	56.87	12.25	142.2
16	4388	1700	3.989	16.40	8.771	18.66	66.02	54.52	12.26	142.1
20	5188	2100	3.692	15.82	8.873	17.36	68.14	48.12	12.28	142.0
24	5988	2500	3.255	15.99	8.274	16.95	64.84	46.52	12.30	141.9
32	7588	3300	2.283	12.90	7.604	16.74	59.34	43.95	12.31	141.8

Таблица 2.7: Задача термоупругости. *Случай 1* и *Случай 2*. $M_g^T = M^T$, $M_p^T = 0$. Относительная L^2 и H^1 погрешность в %. $DOF_h = 170460$.

Для решения с мелкой сеткой имеем $DOF_h = 170460$. У нас $DOF_H = 4900$ для многомасштабного решения без базисных функций для перфораций (*Случай 1* и *Случай 2*) и $DOF_H = 5988$ для многомасштабного решения с базисными функциями для границ перфораций в *Случае 2*. Перемещение по оси X представлено в первой строке, а по оси Y во второй строке. В первом столбце показаны решения на мелкой сетке. Во втором столбце представлено многомасштабное решение с использованием многомасштабных базисных функций внешней границы с $M_p = 0$ и $M_g = 24$. В третьем столбце для *Случая 2* показывано мно-

M	DOF_H^u	DOF_H^T	*Случай 1*				*Случай 2*			
			$e(u)_{L^2}$	$e(u)_{H^1}$	$e(T)_{L^2}$	$e(T)_{H^1}$	$e(u)_{L^2}$	$e(u)_{H^1}$	$e(T)_{L^2}$	$e(T)_{H^1}$
$M_g^u = M^u$, $M_p^u = 0$										
1	300	251	98.00	99.98	99.98	100.0	99.28	97.66	77.45	123.9
2	500	402	92.01	98.38	100.9	100.3	96.78	94.60	56.93	110.3
4	900	704	72.44	93.63	101.1	96.89	93.48	70.98	3.306	31.18
6	1300	1006	36.91	87.77	101.0	89.01	99.56	52.87	1.984	25.50
8	1700	1308	32.73	85.34	95.78	82.69	100.7	48.14	1.057	19.77
12	2500	1776	31.88	84.32	93.97	80.77	101.3	46.12	0.441	12.77
16	3300	2244	31.03	83.99	93.70	80.21	102.1	45.10	0.406	12.17
20	4100	2644	30.86	83.82	93.10	79.59	102.1	44.78	0.373	11.40
24	4900	3044	30.37	84.07	93.56	79.69	102.0	45.30	0.374	11.34
32	6500	3844	29.31	82.66	90.46	76.90	102.0	43.54	0.369	11.10
$M_g^u = M_p^u = M^u$										
1	402	251	90.81	68.11	90.19	102.7	98.54	88.17	77.45	123.9
2	704	402	82.37	57.77	77.77	99.16	95.03	80.46	56.93	110.3
4	1308	704	45.43	40.88	31.77	54.53	62.22	56.58	3.306	31.18
6	1912	1006	12.48	29.04	19.71	35.62	12.12	34.48	1.984	25.50
8	2516	1308	7.990	21.90	11.79	24.15	9.885	29.21	1.057	19.77
12	3452	1776	6.163	17.55	8.775	19.12	7.687	25.99	0.441	12.77
16	4388	2244	3.989	16.40	7.970	17.15	5.304	24.32	0.406	12.17
20	5188	2644	3.692	15.82	7.535	16.35	5.153	23.90	0.373	11.40
24	5988	3044	3.255	15.99	8.087	16.37	5.023	24.03	0.374	11.34
32	7588	3844	2.283	12.90	7.530	15.66	4.698	22.09	0.369	11.10

Таблица 2.8: Задача термоупругости. *Случай 1* и *Случай 2*. $M_g^T = M_p^T = M^T$. Относительная L^2 и H^1 погрешность в %. $DOF_h = 170460$.

гомасштабное решение с использованием многомасштабных базисных функций внешней границы и границы перфорации ($M_g = M_p = 24$). Здесь $DOF_h = 6 \cdot N_{cell}^h$, $DOF_H = (2 \cdot M_g + 1) \cdot N_{cell}^H + 2 \cdot M_p \cdot N_{cell,p}^H$.

В таблицах 2.5-2.6 представлены относительные погрешности для задачи упругости для *Случая 1* и *Случая 2* соответственно. Мы видим, что L^2 погрешность уменьшается с 117% для $M_p = 0$ до 2.3% для $M_p = M$ в *Случае 2* с $M = 24$. Для *Случая 1* у нас L^2 погрешность 2% для $M_g = M = 24$ с $M_p = 0$. Для обоих случаев получили хорошие результаты с достаточным количеством многомас-

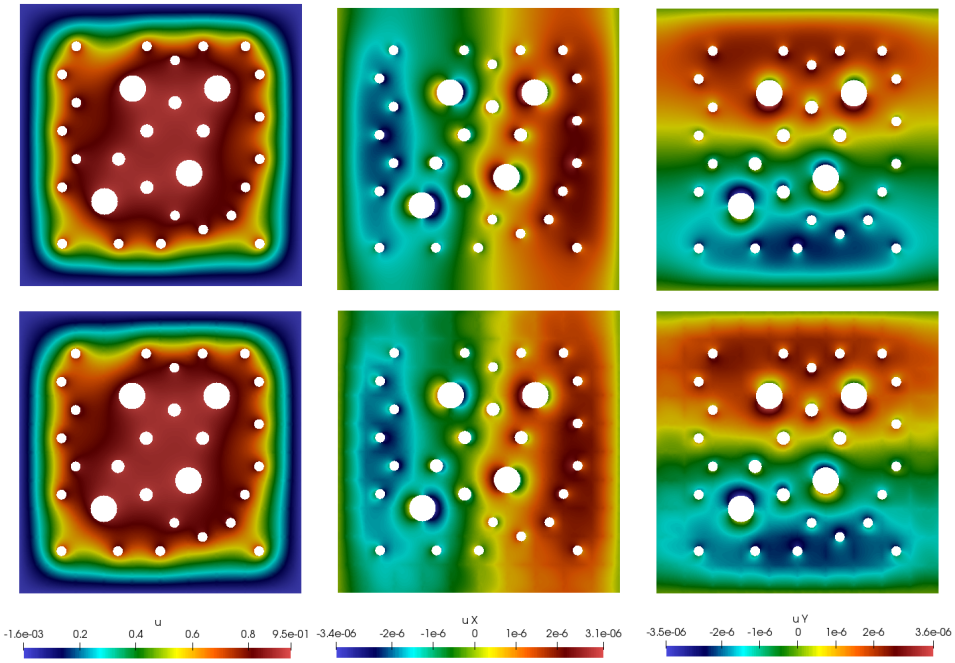


Рисунок 2.15: Задача термоупругости. *Случай 2*. Первый столбец: температура. Второй столбец: перемещение по оси X. Третий столбец: перемещение по оси Y. Первая строка: Эталонное решение ($DOF_h^u = 170460$ и $DOF_h^T = 85230$). Вторая строка: Многомасштабное решение ($M_g^u = M_p^u = M_g^T = M_p^T = M = 24$, $DOF_H^u = 5988$ и $DOF_H^T = 3044$).

штабных базисных функций.

Далее представлены результаты для задачи термоупругости. Пусть M^v - это количество многомасштабных базисных функций для перемещения ($v = u$) и температуры ($v = T$), DOF_h^v и DOF_H^v - это количество степеней свободы для эталонного (мелкосеточного) и многомасштабного решения, $e(v)_{L^2}$ и $e(v)_{H^1}$ - относительные L^2 и H^1 погрешности для $v = u, T$. Здесь $DOF_h = DOF_h^u + DOF_h^T$ с $DOF_h^u = 6 \cdot N_{cell}^h$ и $DOF_h^T = 3 \cdot N_{cell}^h$ для решения на мелкой сетке. Для многомасштабного решения у нас есть $DOF_H = DOF_H^u + DOF_H^T$ с $DOF_H^u = (2 \cdot M_g^u + 1) \cdot N_{cell}^H + 2 \cdot M_p^u \cdot N_{cell,p}^H$ и $DOF_H^T = (M_g^T + 1) \cdot N_{cell}^H + M_p^T \cdot N_{cell,p}^H$. На рисунках 2.14-2.15 представлены результаты решателей с мелкой сеткой и многомасштабных решений для задачи термоупругости в последний момент времени. Распределение температуры представлено на левом рисунке, компоненты перемещения X и

Y показаны на центральном и правом рисунках. В представленных результатах было использовано 24 многомасштабных базисных функций для перемещения и температуры ($M^u = M^T = 24$, $M_g^u = M_p^u = M^u$ и $M_g^T = M_p^T = M^T$). В первой строке представлено эталонное решение с $DOF_h^u = 170460$ для перемещения, $DOF_h^T = 85230$ для температуры. Во второй строке показано решение на грубой сетке с использованием многомасштабных базисных функций на внешней границе и границе перфорации с $DOF_H^u = 5988$ для перемещения и $DOF_H^T = 3044$ для температуры. В таблицах 2.7-2.8 представлены относительные погрешности для задачи термоупругости между мелкомасштабным и многомасштабным решением с различными многомасштабными базисными функциями в конечный момент времени. В представленных результатах были протестированы различные подходы к выбору M_g^u, M_p^u и M_g^T, M_p^T для связанного процесса.

Результаты для уравнения конвекции-диффузии.

Рассматриваем уравнение конвекции-диффузии (1.2) со следующими граничными условиями:

- *Случай 1*. Однородные граничные условия на перфорациях:

$$c = 1, \quad x \in \Gamma_l, \quad -D\nabla c \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_r,$$

$$-D\nabla c \cdot n = \alpha c \quad x \in \Gamma_{perf} \cup \Gamma_t \cup \Gamma_b,$$

  и проводим вычисления для $t_{max} = 0.6$, $D = 0.01$, $\alpha = 0.01$. Берем нулевое начальное условие.

- *Случай 2*. Неоднородные граничные условия на перфорациях:

$$c = 0, \quad x \in \Gamma_l, \quad -D\nabla c \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_r,$$

$$-D\nabla c \cdot n = \alpha(c-1) \quad x \in \Gamma_{perf} \cup \Gamma_t \cup \Gamma_b,$$

  и проводим вычисления для $t_{max} = 0.5$, $D = 0.01$, $\alpha = 1.0$. Берем начальное условие $c = 1$.

Здесь D - коэффициент диффузии, c и u - концентрация и скорость. Для описания течения будем использовать уравнения Стокса (1.12), со следующими граничны-

ми условиями:

$$
\begin{aligned}
u &= g, \quad x \in \Gamma_l, \\
(\nabla u - p\mathscr{I}) \cdot n &= 0, \quad x \in \Gamma_r, \\
u &= 0, \quad x \in \Gamma_{perf} \cup \Gamma_t \cup \Gamma_b,
\end{aligned}
$$

где μ - вязкость. Для вязкости берем $\mu = 1$. Устанавливаем нулевые начальные условия для задачи переноса и проводим вычисление с 40 временными шагами.

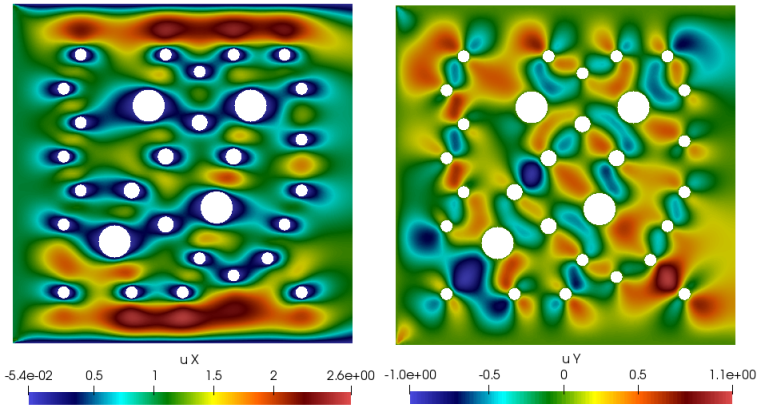


Рисунок 2.16: Распределение скорости по оси X (слева) и Y (справа) с $DOF_h^u = 198870$.

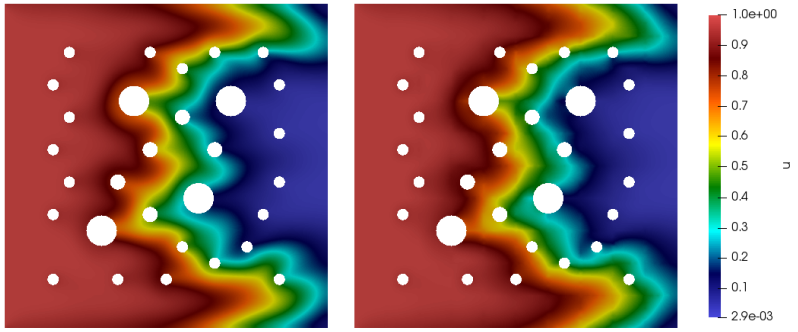


Рисунок 2.17: Задача переноса для временного слоя t_{40}. *Случай 1*. Слева: Эталонное решение с $DOF_h^u = 85230$; Справа: Многомасштабное решение, $M = 12$, $DOF_H^u = 1200$.

На рисунке 2.16 представлено решение уравнений Стокса на мелкой сетке. Скорость по оси X представлена слева, по оси Y справа.

M	DOF_H	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M$, $M_p = 0$			
1	200	65.09	70.25
2	300	44.16	58.76
4	500	7.156	24.47
6	700	2.774	17.21
8	900	2.026	14.43
12	1300	1.616	12.80
16	1700	1.596	12.66
20	2100	1.590	12.57
24	2500	1.569	12.53
32	3300	1.551	12.49

Таблица 2.9: Задача переноса. *Случай 1* (однородные граничные условия). Относительные L^2 и H^1 погрешности в %. $DOF_h = 85230$.

На рисунках 2.17-2.18 представлены результаты эталонных и многомасштабных решений для задачи переноса для *Случаев 1 и 2*. Для иллюстрации использовали 24 многомасштабных базисных фукнций ($M = 24$). Для решения с мелкой сеткой имеем $DOF_h = 170460$. У нас $DOF_H = 2500$ для многомасштабного решения без базисных функций для перфораций (*Случай 1* и *Случай 2*) и $DOF_H = 3044$ для многомасштабного решения с базисными функциями для границ перфораций в *Случае 2*. В первом столбце показаны решения на мелкой сетке. Во втором столбце представлено многомасштабное решение с использованием многомасштабных базисных функций внешней границы с $M_p = 0$ и $M_g = 24$. В третьем столбце показано многомасштабное решение с использованием многомасштабных базисных функций внешней границы и границы перфорации ($M_g = M_p = 24$). Здесь $DOF_h = 6 \cdot N^h_{cell}$, $DOF_H = (2 \cdot M_g + 1) \cdot N^H_{cell} + 2 \cdot M_p \cdot N^H_{cell,p}$.

В таблицах 2.9-2.10 представлены относительные погрешности для задачи переноса для *Случая 1* и *Случая 2* соответственно. Мы видим, что L^2 погрешность уменьшается с 7% для $M_p = 0$ до 1.2% для $M_p = M$ в *Случае 2* с $M = 24$. Для *Случая 1* у нас L^2 погрешность 1.57% для $M_g = M = 24$ с $M_p = 0$. Для обоих

случаев получаем хорошие результаты с достаточным количеством многомасштабных базисных функций.

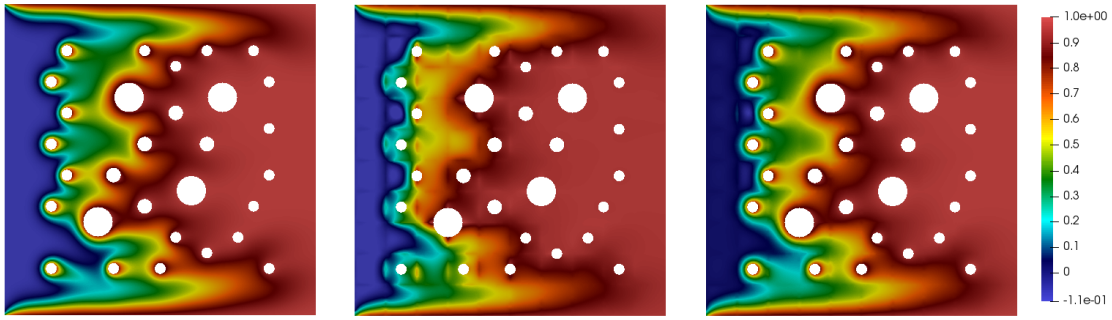


Рисунок 2.18: Задача переноса для временного слоя t_{40}. *Случай 2*. Слева: Эталонное решение с $DOF_h^u = 85230$. Центр: Многомасштабное решение без базисных функций для перфораций ($M_g = M = 12$, $M_p = 0$, $DOF_H = 1300$). Справа: Многомасштабное решение с использованием базисных функций для перфораций ($M_g = M_p = M = 12$, $DOF_H = 1776$).

M	DOF_H	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M$, $M_p = 0$			
1	200	50.31	78.98
2	300	41.16	77.49
4	500	19.96	58.08
6	700	17.86	53.74
8	900	16.06	50.69
12	1300	14.70	48.47
16	1700	14.57	48.07
20	2100	14.51	47.89
24	2500	14.47	47.74
32	3300	14.44	47.65

M	DOF_H	e_{L^2}	e_{H^1}
$M_g = M_p = M$			
1	251	46.05	70.01
2	402	32.53	64.46
4	704	7.658	35.65
6	1006	5.330	29.39
8	1308	2.826	22.56
12	1776	2.066	19.27
16	2244	1.942	18.34
20	2644	1.898	17.98
24	3044	1.861	17.68
32	3844	1.846	17.50

Таблица 2.10: Задача переноса. *Случай 2* (неоднородные граничные условия). Относительные L^2 и H^1 погрешности в %. $DOF_h = 85230$.

Неструктурированные грубые сетки

Наконец, рассмотрим решение эллиптических, параболических задач и задач упругости, термоупругости и переноса с использованием представленного мно-

гомасштабного метода на квазиструктурированных и неструктурированных грубых сетках. На рисунке 2.19 представлены квазиструктурированные и неструктурированные грубые сетки с иллюстрацией локальных областей. Грубые сетки содержат 100 локальных областей. Для численного исследования рассматриваются задачи с граничными условиями *Случая 2*. Обозначим через *Quasi* - квазиструктурированную сетку и $Unstr$ - нестркутурированную сетку.

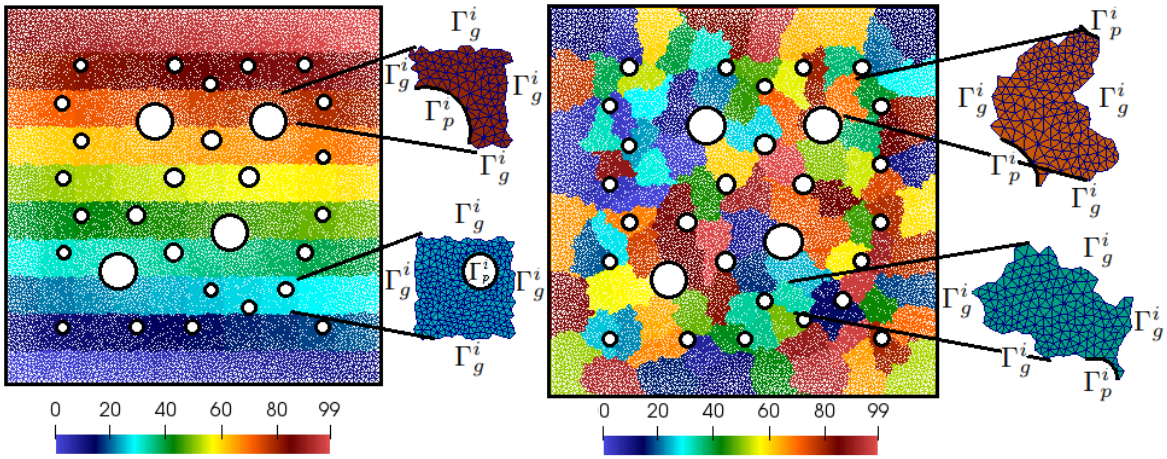


Рисунок 2.19: Грубые сетки и локальные области. Слева: квазиструктурированная сетка. Справа: неструктурированная сетка.

В таблице 2.11 представлены результаты для эллиптических и параболических уравнений с применением неоднородных граничных условий (*Случай 2*). Результаты для уравнений упругости и термоупругости представлены в таблицах 2.12 и 2.13. Численные результаты показаны для многомасштабного пространства с внешними и граничными базисными функциями ($M_g = M_p = M$) на квазиструктурированных и неструктурированных грубых сетках с 100 локальными областями. Используя 32 многомасштабные базисные функции ($M_p = M_g = 32$), получаем аналогичные результаты с L^2 погрешностью менее 1% для структурированных, квазиструктурированных и неструктурированных грубых сеток со 100 локальными областями с $D0F_H = 3844$ (4.5%) из $DOF_f = 85230$). Сравнивая результаты с меньшим количеством многомасштабных базисных функций ($M_p = M_g = 8$), видим, что погрешность для структурированной грубой сетки

M	DOF_H	Эллиптическая				Параболическая			
		Quasi		Unstr		Quasi		Unstr	
		e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}
1	251	58.12	101.1	56.66	98.80	54.82	96.18	53.32	93.48
2	402	35.39	87.82	45.87	104.1	30.56	79.76	41.23	94.00
4	704	6.539	41.82	16.53	60.94	8.184	45.51	11.60	56.13
6	1006	3.523	33.69	9.504	43.29	4.889	34.72	6.561	41.29
8	1308	2.034	23.72	4.909	33.93	3.434	25.08	4.976	35.25
12	1776	1.369	19.11	2.187	25.77	3.944	23.14	3.725	27.85
16	2244	1.052	17.04	1.390	22.29	1.526	17.72	2.761	23.90
20	2644	0.896	15.76	0.994	19.81	1.209	16.25	2.063	21.00
24	3044	0.783	15.06	0.734	17.48	0.999	15.26	1.775	18.64
32	3844	0.683	14.33	0.552	15.83	0.803	14.43	1.429	16.74

Таблица 2.11: Эллиптические и параболические задачи. *Случай 2* (неоднородные граничные условия). Неструктурированные грубые сетки. Относительная L^2 и H^1 погрешность в %. $DOF_h = 85230$.

M	DOF_H	Quasi		Unstr	
		e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}
1	402	89.14	63.53	97.97	83.36
2	704	82.55	59.52	94.60	77.88
4	1308	62.82	49.96	76.75	66.07
6	1912	44.10	41.86	50.62	53.07
8	2516	20.71	30.19	29.94	43.22
12	3452	13.68	24.60	15.75	32.33
16	4388	8.648	20.83	10.57	27.54
20	5188	6.682	18.96	8.107	25.11
24	5988	5.309	17.49	6.705	23.75
32	7588	3.629	15.64	5.407	22.26

Таблица 2.12: Задача упругости. *Случай 2* (неоднородные граничные условия). Неструктурированные грубые сетки. Относительная L^2 и H^1 погрешность в %. $DOF_h = 170460$.

меньше (1% и 19% для L^2 и H^1 погрешностей), чем для неструктурированной грубой сетки (4.9% и $33-35$% для L^2 и H^1 погрешностей). Кроме того, результа-

M	DOF_H^u	DOF_H^T	Quasi				Unstr			
			$e(u)_{L^2}$	$e(u)_{H^1}$	$e(T)_{L^2}$	$e(T)_{H^1}$	$e(u)_{L^2}$	$e(u)_{H^1}$	$e(T)_{L^2}$	$e(T)_{H^1}$
1	402	251	98.47	91.35	76.32	103.8	98.44	93.52	72.88	95.42
2	704	402	94.78	82.68	52.28	92.76	94.43	86.17	54.50	93.85
4	1308	704	72.68	64.89	6.404	37.24	79.52	73.01	15.27	53.38
6	1912	1006	51.18	54.39	3.044	32.04	62.35	63.75	7.285	37.87
8	2516	1308	21.07	36.85	1.496	22.45	46.90	55.00	3.408	30.38
12	3452	1776	13.06	31.33	0.877	18.19	21.52	39.67	1.495	23.10
16	4388	2244	8.606	27.89	0.667	16.36	12.78	32.80	0.941	20.06
20	5188	2644	6.745	26.25	0.543	15.19	8.371	29.68	0.667	18.02
24	5988	3044	5.701	25.20	0.462	14.47	6.383	28.10	0.500	16.17
32	7588	3844	4.834	24.01	0.395	13.68	4.941	26.57	0.384	14.81

Таблица 2.13: Задача термоупругости. *Случай 2* (однородные граничные условия для упругости и неоднородные граничные условия для температуры на перфорациях). Неструктурированные грубые сетки. $M = M^u = M^T$. Относительная L^2 и H^1 погрешность в %. $DOF_h = 170460$.

M	DOF_H	Quasi		Unstr	
		e_{L^2}	e_{H^1}	e_{L^2}	e_{H^1}
1	402	93.56	101.6	93.93	103.5
2	704	78.60	99.13	81.56	102.6
4	1308	17.56	45.36	33.80	66.71
6	1912	8.046	36.08	16.14	47.37
8	2516	3.687	25.84	9.763	38.69
12	3452	2.552	20.60	4.331	28.66
16	4388	1.930	18.34	2.514	24.01
20	5188	1.579	16.66	1.906	21.10
24	5988	1.362	15.87	1.529	18.99
32	7588	1.156	14.93	1.174	17.10

Таблица 2.14: Задача переноса. *Случай 2* (неоднородные граничные условия). Неструктурированные грубые сетки. Относительная L^2 и H^1 погрешность в %. $DOF_h = 170460$.

ты показывают, что квазиструктурированная сетка дает меньшие погрешности, чем неструктурированная грубая сетка. Для задачи упругости с $M = 32$ имеем

2% и 13% для L^2 и H^1 погрешностей для структурированной сетки, 3% и 15% для L^2 и H^1 погрешностей для квазиструктурированной сетки и 5% и 22% для L^2 и H^1 погрешностей для неструктурированной сетки. В задаче термоупругости получаем аналогичные результаты с L^2 погрешностями 4% и $0,3\%$ для перемещения и температуры для всех сеток при $M = 32$. Сравнивая квазиструктурированные и неструктурированные сетки, видим, что погрешности меньше для квазиструктурированной грубой сетки. Хорошие результаты с небольшими погрешностями для любых грубых сеток могут быть получены с большим количеством многомасштабных базисных функций. Отметим, что основным преимуществом использования неструктурированных грубых сеток является одинаковое количество ячеек в каждой локальной области (балансировка нагрузки). При построении структурированной сетки использована соответствующая триангуляция области с грубыми краями, что может быть затруднительно для сложной геометрии с большим количеством перфораций. Но в квазиструктурированной сетке соответствующая конструкция не требуется. Численные результаты показывают, что представленный многомасштабный метод очень хорошо работает с любыми концепциями построения грубой сетки.

2.4 Выводы

В данной главе мы представили многомасштабный метод решения задач в перфорированной области с неоднородными граничными условиями на перфорациях. Для аппроксимации на мелкой сетке, применили метод разрывного Галеркина и использовали её в качестве эталонного решения. Для уменьшения размера системы с мелкими сетками, представили обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина с построением многомасштабных базисных функций для внешней границы и границы перфорации отдельно. Численное исследование представленного метода проводилось для пяти модельных задач: (1) эллиптической, (2) параболической, (3) упругой (4) термоупругой и (5) зада-

чи переноса в перфорированной области. Представлены результаты для двух случаев: с однородными и неоднородными граничными условиями. Для случая с однородными граничными условиями на перфорациях показаны результаты с использованием только внешних граничных базисных функций. Однако для неоднородного граничного условия следует использовать базисные функции как внешней границы, так и границы перфорации. Представлены численные результаты для различных концепций построения грубой сетки (структурированные, квазиструктурированные и неструктурированные грубые сетки). Численные результаты показывают, что предложенный метод может дать хорошие результаты и дать существенное уменьшение размера системы при соответствующем выборе построения многомасштабных базисных функций для задач с однородными и неоднородными граничными условиями перфорации.

Глава 3

Многомасштабное моделирование задач течения и переноса в тонких областях

В данной главе представлен многомасштабный метод для задач течения и переноса в тонких областях. Предложенная концепция основана на разделении снэпшот пространств для каждой функции и имеет много общего с многомасштабными методами для задач в трещиноватых средах [71,90], а также с недавно разработанным методом Edge GMsFEM, в котором многомасштабные базисные функции построены для каждого интерфейса грубой сетки [91, 92]. Целью данной главы является построение общего многомасштабного подхода для решения задач течения и переноса в тонких областях со сложной геометрией. Метод основан на DG-GMsFEM, где для задачи течения мы начинаем с определения снэпшот пространства, учитывающего всевозможные потоки между интерфейсами грубых ячеек. После построения снэпшот пространства путем решения локальных спектральных задач проводится понижение размерности. Для аппроксимации давления используются кусочно-постоянные функции на грубой сетке. Для задачи переноса предложены многомасштабные базисные функции для каждой границы интерфейса между грубыми ячейками сетки, а также дополнительные базисные функции для учета неоднородных граничных условий на стенках. Представленные снэпшот пространства могут аккуратно аппроксимировать процессы на неровных границах локальной подобласти с неоднородными граничными условиями на них. Представлены результаты численного моделирования для трех тестовых геометрий в двумерной и трехмерной постановках.

3.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Пусть Ω будет тонкой областью с многомасштабными особенностями, толщина которой мала по сравнению с длиной области (см. Рисунок 3.1 для иллюстрации). Мы будем рассматривать задачу переноса (1.2), которое описывается уравнением конвекции-диффузии в тонкой области Ω.

Для описания течений в тонкой области будем использовать нестационарные уравнения Стокса

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla p = 0, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где μ - вязкость жидкости, ρ - плотность жидкости, p - давление.

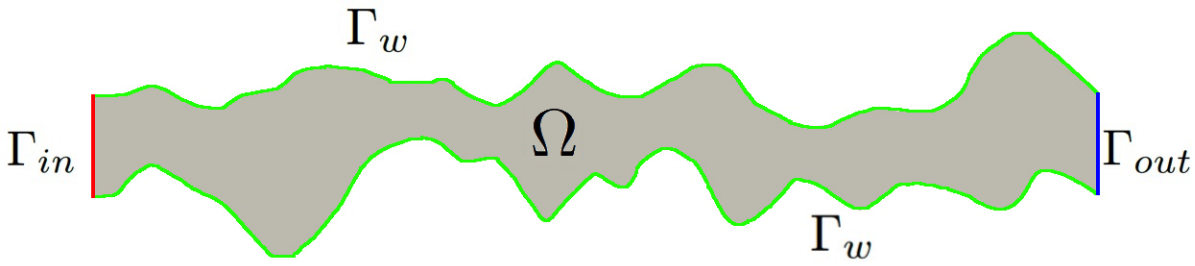


Рисунок 3.1: Иллюстрация тонкой области Ω с многомасштабными особенностями.

Уравнения (1.2-3.1) имеет следующие начальные условия

$$c = c_0, \quad u = u_0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0.$$

Более того, рассматриваются следующие граничные условия для задачи течения

(3.1)

$$u = g, \quad x \in \Gamma_{in},$$
$$(\nabla u - p\mathscr{I}) \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_{out},$$
$$u = 0, \quad x \in \Gamma_w,$$

где n - единичный вектор внешней нормали на $\partial\Omega$, $\mathscr{I}$ - единичная матрица, Γ_{in} - граница входа потока, Γ_{out} - граница выхода потока, Γ_w - реактивная граница тонкой области, $\Gamma_w \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} = \partial\Omega$ (см. Рисунок 3.1).

Для задачи переноса имеем следующие входные и выходные граничные условия

$$c = c_{in}, \quad x \in \Gamma_{in},$$
$$-D\nabla c \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_{out},$$

и задаем смешанный тип граничного условия Γ_w

$$-\beta D\nabla c \cdot n = \alpha(c - c_w) + \zeta g \quad x \in \Gamma_w,$$

где получаем граничные условия Дирихле для $\beta = \zeta = 0$, $\alpha = 1$(DBC), граничные условия Неймана для $\beta = \zeta = 1$, $\alpha = 0$ (NBC), и граничные условия Робина для $\beta = 1$, $\zeta = 0$ (RBC). Далее, для упрощения, представлена конечно-элементная аппроксимация для задачи переноса и течения с граничными условиями Робина для концентрации.

Для того чтобы решить задачу (3.1), мы генерируем неструктурированную сетку (мелкую сетку) и воспользуемся методом конечных элементов для аппроксимацией по пространству. Пусть $\mathscr{T}^h$ - мелкосеточное разбиение области Ω заданное формулой

$$\mathscr{T}^h = \bigcup_{i=1}^{N_{cell}^h} K_i,$$

где N_{cell}^h - количество ячеек мелкой сетки. Мы используем $\mathscr{E}^h$ для обозначения множества фасетов в $\mathscr{T}^h$ с $\mathscr{E}^h = \mathscr{E}_o^h \cup \mathscr{E}_b^h$, где $\mathscr{E}_o^h$ - множество внутренних граней

и $\mathscr{E}_b^h$ - множество граничных фасетов с $\mathscr{E}_b^h = \mathscr{E}_{b,in}^h \cup \mathscr{E}_{b,w}^h \cup \mathscr{E}_{b,out}^h$ (см. Рисунок 3.2). Мы используем K и E для обозначения общей ячейки и грани в мелкой сетке $\mathscr{T}^h$. Мы определяем скачок $[u]$ и среднее значение $\{u\}$ функции u на внутренней грани

$$[u] = u_+ - u_-, \quad \{u\} = \frac{u_+ + u_-}{2},$$

где $u_+ = u|_{K^+}$, $u_- = u|_{K^-}$ на грани E разделяют два элемента K^+ и K^-, $E = \partial K^+ \cup \partial K^-$. Обратите внимание, что мы определяем $[u] = u|_E$ и $\{u\} = u|_E$ для $E \in \mathscr{E}_b^h$ [93].

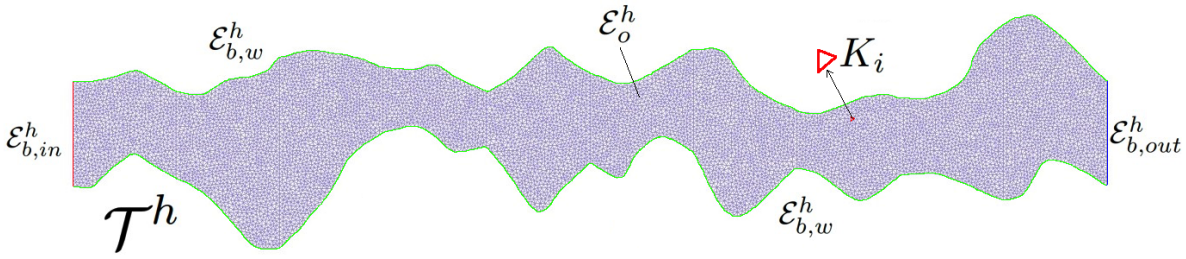


Рисунок 3.2: Иллюстрация мелкой сетки для области Ω

Определяем мелкомасштабное пространство скоростей

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in (\mathbb{P}_1(K))^2, \forall K \in \mathscr{T}^h\},$$

которое содержит функции, кусочно-линейные в каждом элементе мелкой сетки K и разрывные по краям грубой сетки. Для давления используем пространство кусочно-постоянных функций

$$Q_h = \{q \in L^2(\Omega) : q|_K \in \mathbb{P}_0(K), \forall K \in \mathscr{T}^h\}.$$

Пусть $\check{u}_h$ является решением из предыдущего временного слоя, τ - заданный размер временного шага. Используя эти пространства, мы получаем следующую вариационную формулировку IPDG с неявной аппроксимацией времени для задачи течения: Найти $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ такое что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} m^u(u_h - \check{u}_h, v) + a_{\mathrm{DG}}^u(u_h, v) + b_{\mathrm{DG}}(p_h, v) &= l^u(v), \quad \forall v \in V_h, \\ b_{\mathrm{DG}}(u_h, q) &= l^p(q), \quad \forall q \in Q_h, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$
\begin{aligned}
a^u_{\mathrm{DG}}(u,v) &= \sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K \mu\nabla u\cdot\nabla v\,dx \\
&\quad - \sum_{E\in\mathscr{E}^h/\mathscr{E}^h_{b,out}}\int_E \Big(\{\mu\nabla u\cdot n\}\cdot[v]+\{\mu\nabla v\cdot n\}\cdot[u]-\frac{\gamma_u}{h}\{\mu\}[u]\cdot[v]\Big)\,ds, \\
m^u(u,v) &= \sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K \rho\, u v\,dx, \\
b_{\mathrm{DG}}(u,p) &= -\sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K p\,\nabla\cdot u\,dx + \sum_{E\in\mathscr{E}^h/\mathscr{E}^h_{b,out}}\int_E p\,[u]\cdot n\,ds, \\
l^u(v) &= \sum_{E\in\mathscr{E}^h_{b,in}}\int_E \Big(\frac{\gamma_u}{h}\,\mu v-(\mu\nabla v\cdot n)\Big)\cdot g\,ds, \\
l^p(q) &= \sum_{E\in\mathscr{E}^h_{b,in}}\int_E (g\cdot n)\,q\,dx,
\end{aligned}
$$

и γ_u - штрафной параметр.

Мы можем записать указанную выше дискретную систему (3.2) следующим образом:

$$
\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} M^u_h & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_h-\check{u}_h\\ p_h-\check{p}_h\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A^u_h & B^T_h\\ B_h & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_h\\ p_h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F^u_h\\ F^p_h\end{pmatrix}. \tag{3.3}
$$

3.2 Аппроксимация на грубой сетке

В данном разделе представлен алгоритм обобщенного многомасштабного метода разрывного Галеркина(DG-GMsFEM) для решения задач течения и переноса, используемых для уменьшения размера системы. В используемом многомасштабном методе решаем задачи в локальных областях с различными граничными условиями для формирования снэпшот пространства и решаем спектральную задачу в снэпшот пространстве для выполнения требуемого понижения размерности.

Пусть $\mathscr{T}^H$ - грубосеточное разбиение области Ω с размером сетки H

$$
\mathscr{T}^H=\bigcup_{i=1}^{N^H_{cell}} K_i,
$$

где N_{cell}^H - количество ячеек грубой сетки (локальные области). Мы используем $\mathscr{E}^H$ для обозначения множества граней $\mathscr{T}^H$ с $\mathscr{E}^H = \mathscr{E}_o^H \cup \mathscr{E}_b^H$. На рисунке 3.3 представлена иллюстрация мелкой и грубой сетки. Каждая грубая ячейка K_i является подобластью глобальной области Ω. Более того, мелкая сетка соответствует граням грубой сетки. Пусть $\mathscr{T}^h(K_i)$ - мелкосеточное разбиение области K_i, Ω, $\mathscr{E}_o^h(K_i)$ и $\mathscr{E}_b^h$ - наборы внутренних и граничных граней в $\mathscr{T}^h(K_i)$. Для построения аппроксимации на грубой сетке мы используем обобщенный многомасштабный метод разрывного Галеркина (DG-GMsFEM). В DG-GMsFEM многомасштабные базисные функции поддерживаются в каждой грубой ячейке K_i [39, 40, 47]. Определяем V_H как многомасштабное пространство скоростей и P_H как многомасштабное пространство для концентрации. Для аппроксимации давления используем кусочно-постоянное функциональное пространство Q_H по грубым ячейкам.

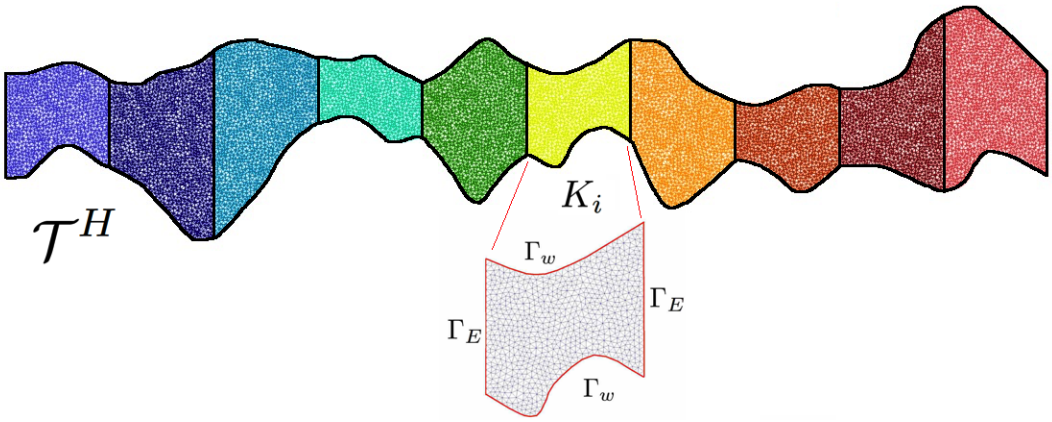


Рисунок 3.3: Иллюстрация грубой сетки $\mathscr{T}^H$ с грубой ячейкой K_i, $\Gamma_w \cup \Gamma_E = \partial K_i$

Обозначим многомасштабные пространства для концентрации и скорости как

$$P_H = \text{span}\{\phi_i\}_{i=1}^{N_c}, \quad V_H = \text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{N_u},$$

соответственно, где $N_u = \dim(V_H)$ - количество базисных функций для скорости, $N_c = \dim(P_H)$ - количество базисных функций для концентрации и $N_p = \dim(Q_H)$ равно количеству ячеек грубой сетки ($N_p = N_{cell}^H$). Отметим, что базисные функ-

ции ϕ_i и ψ_i являются элементами $P_h(K_j)$ и $V_h(K_j)$ соответственно, когда они построены для грубого элемента K_j.

Для аппроксимации грубой сетки имеем следующую вариационную формулировку:

- Задача течения: найти $(u_H, p_H) \in V_H \times Q_H$ такое что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} m^u(u_H - \check{u}_H, v) + a^u_{\mathrm{DG}}(u_H, v) + b_{\mathrm{DG}}(p_H, v) = l^u(v), \quad \forall v \in V_H, \\ b_{\mathrm{DG}}(u_H, q) = l^p(q), \quad \forall q \in Q_H. \end{aligned} \tag{3.4}$$

- Задача переноса: найти $c_H \in P_H$ такое что

$$\frac{1}{\tau} m^c(c_H - \check{c}_H, r) + a^c_{\mathrm{DG}}(c_H, r) + c^c_{\mathrm{DG}}(c_H, r) = l^c(r), \quad \forall r \in P_H. \tag{3.5}$$

Далее подробно рассмотрено построение многомасштабных базисных функций для скорости и концентрации.

Многомасштабное пространство для скорости

Для построения многомасштабного пространства для скорости начинаем с построения снэпшот пространства. Снэпшот пространство формируется решением локальных задач со всеми возможными граничными условиями с точностью до разрешения мелкой сетки в каждой грубой ячейке $K_i, (i = 1, \cdots, N^H_{cell})$, где N^H_{cell} - количество грубых блоков в Ω. После этого мы решаем локальную спектральную задачу, чтобы выбрать доминантные моды снэпшот пространства.

Рассмотрены два типа многомасштабных пространств:

- *Тип 1*. Многомасштабное пространство для течения определяется таким образом, чтобы снэпшот пространства и спектральные задачи строились отдельно для каждого направления потока.
- *Тип 2*. Многомасштабное пространство для течения определяется таким образом, чтобы снэпшот пространства и спектральные задачи были построены для всего вектора скорости.

Начнем с построения многомасштабных базисных функций *Tuna 1*. Локальное снэпшот пространство состоит из функций $u_l^{i,r} \in V_h(K_i)$ которые являются решениями следующей задачи

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u_l^{i,r} + \nabla p = 0, \qquad & x \in K_i, \\ \nabla \cdot u_l^{i,r} = f_l^{i,r}, \qquad & x \in K_i, \end{aligned} \tag{3.6}$$

с граничными условиями

$$u_l^{i,r} = \delta_l^{i,r}, \quad x \in \Gamma_E, \quad u_l^{i,r} = 0, \quad x \in \Gamma_w,$$

для $l = 1, \cdots, J_i$, J_i количество граней мелкой сетки на Γ_E, и $\delta_l^{i,r}$ - векторная дискретная дельта-функция, определенная на Γ_E, $\Gamma_E = \partial K_i / \Gamma_w$ это интерфейс между локальными областями ($r = 1, .., d$ и $d = 2, 3$ размерность задачи). Здесь константа c выбирается из условия совместимости, $f_l^{i,r} = \frac{1}{|K_i|} \int_{\Gamma_E} \delta_l^{i,r} \cdot n \, ds$. Для двумерной задачи решаем локальные задачи (3.6) используя следующие коэффициенты

$$\delta_l^{i,1} = (\delta_l, 0), \quad \text{и} \quad \delta_l^{i,2} = (0, \delta_l).$$

Для трехмерной задачи решаем локальные задачи (3.6) используя следующие коэффициенты

$$\delta_l^{i,1} = (\delta_l, 0, 0), \quad \delta_l^{i,2} = (0, \delta_l, 0), \quad \text{и} \quad \delta_l^{i,3} = (0, 0, \delta_l).$$

В приведенном выше, δ_l - символ Кронекера, который равен 1 на l-ой грани мелкой сетки и 0 в других. Отметим, что локальные проблемы (3.6) решаются на мелкой сетке с помощью метода IPDG. Используя эти локальные решения, формируем следующее локальное снэпшот пространство

$$V_r^{i,\text{snap}} = \{u_l^{i,r} : 1 \leq l \leq J_i\},$$

где направление течения, $r = 1, .., d$, рассматриваются отдельно.

Для того чтобы уменьшить размер снэпшот пространств на основе направлений, мы решаем следующую локальную спектральную задачу в каждом снэпшот

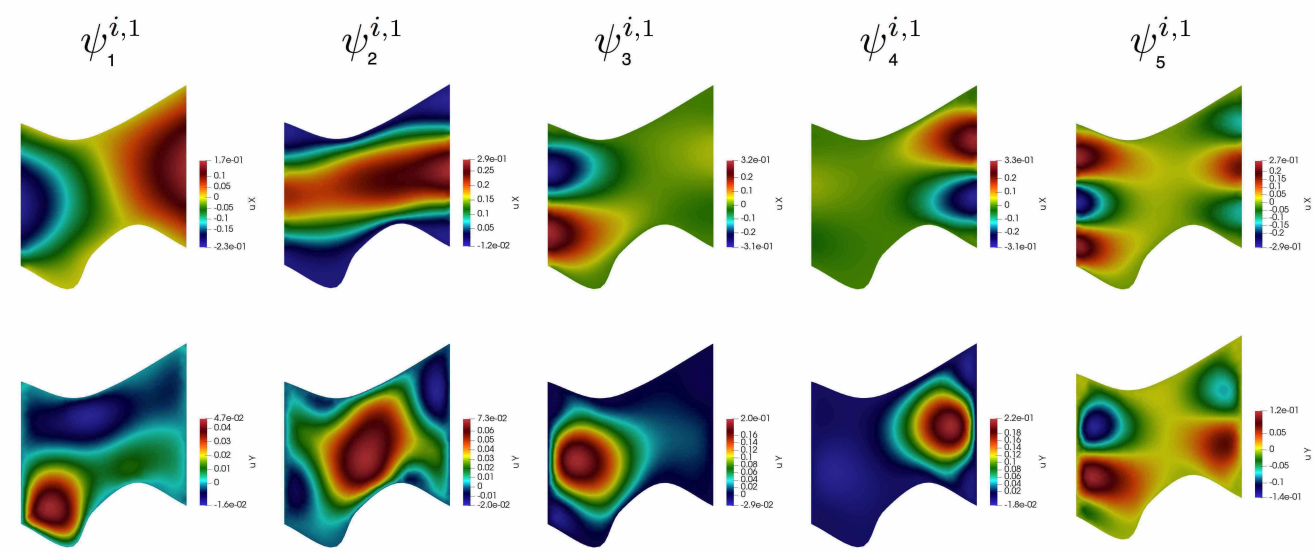


Рисунок 3.4: Иллюстрация многомасштабных базисных функций для скорости $\psi_k^{i,r} = (\psi_{k,x}^{i,r}, \psi_{k,y}^{i,r})$ для $r = 1$ и $k = 1, \ldots, 5$ (слева направо). *Тип 1* (V_H^1). Первая строка: $\psi_{k,x}^{i,1}$. Вторая строка: $\psi_{k,y}^{i,1}$

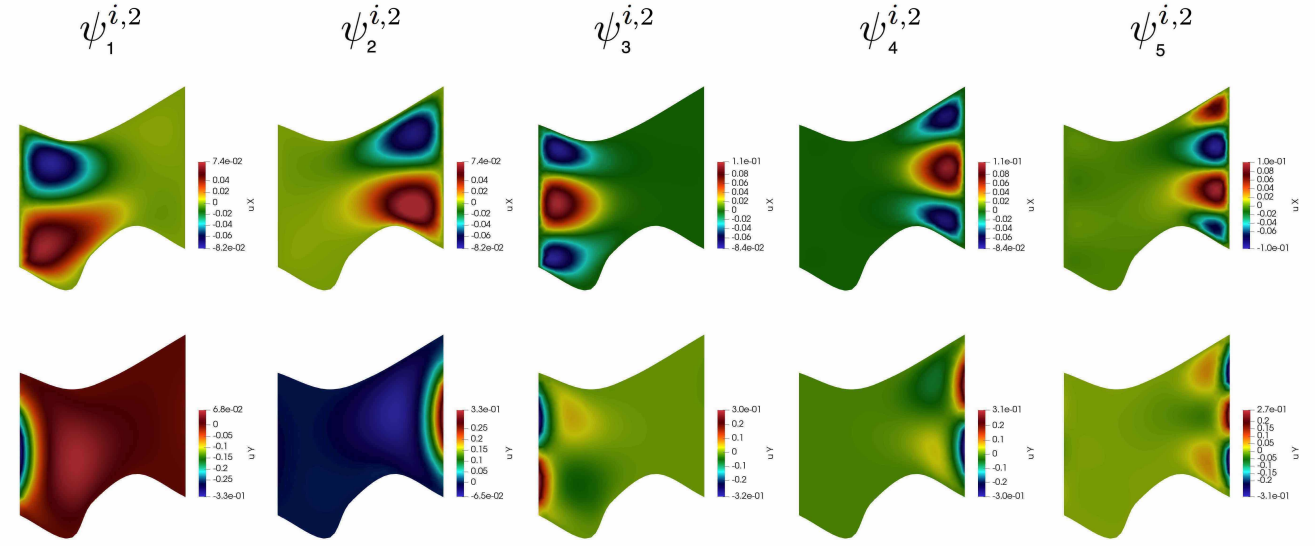


Рисунок 3.5: Иллюстрация многомасштабных базисных функций для скорости $\psi_k^{i,r} = (\psi_{k,x}^{i,r}, \psi_{k,y}^{i,r})$ для $r = 2$ и $k = 1, \ldots, 5$ (слева направо). *Тип 1* (V_H^2). Первая строка: $\psi_{k,x}^{i,2}$. Вторая строка: $\psi_{k,y}^{i,2}$

пространстве $V_r^{i,\mathrm{snap}}$ в K_i.

$$\tilde{A}_r^{u,K_i} \tilde{\psi}^{i,r} = \lambda \tilde{S}_r^{u,K_i} \tilde{\psi}^{i,r}, \tag{3.7}$$

где

$$\tilde{A}_r^{u,K_i} = R_{i,\text{snap}}^{u,r} A_h^{u,K_i} (R_{i,\text{snap}}^{u,r})^T, \quad \tilde{S}_r^{u,K_i} = R_{i,\text{snap}}^{u,r} S_h^{u,K_i} (R_{i,\text{snap}}^{u,r})^T,$$

и A_h^{u,K_i} - матричное представление билинейной формы $a_{DG}^{u,K_i}(u,v)$ и S_h^{u,K_i} - матричное представление билинейной формы $s^{u,K_i}(u,v)$

$$\begin{aligned} a_{\text{DG}}^{u,K_i}(u,v) = & \sum_{K \in \mathscr{T}^h(K_i)} \int_K \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ & - \sum_{E \in \mathscr{E}_o^h(K_i)} \int_E \left(\{\mu \nabla u \cdot n\} \cdot [v] + \{\mu \nabla v \cdot n\} \cdot [u] - \frac{\gamma_u}{h} \{\mu\} [u] \cdot [v] \right) ds, \\ s^{u,K_i}(u,v) = & \sum_{E \in \mathscr{E}_b^h(K_i)} \int_E u \cdot v \, dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Приведенная выше матрица проекции снэпшот пространства определяется путем сбора всех локальных решений

$$R_{i,\text{snap}}^{u,r} = \left[u_1^{i,r}, \ldots, u_{J_i}^{i,r} \right]^T, \quad r = 1, .., d.$$

Отметим, что интеграл в $s^{u,K_i}(u,v)$ задан на границе грубого блока, и $\mathscr{T}^h(K_i)$ это мелкая сетка для локальной области K_i.

Для сформирования многомасштабного пространства на основе направлений для скорости, мы располагаем собственные значения в порядке возрастания и выбираем собственные векторы, соответствующие первым M_i^u наименьшим собственным значениям для каждого направления потока

$$V_H^r = \text{span}\{ \psi_k^{i,r} : 1 \leq i \leq N_{cell}^H, 1 \leq k \leq M_i^u \},$$

где $\psi_k^{i,r} = R_{i,\text{snap}}^{u,r} \tilde{\psi}_k^{i,r}$ $k = 1, \ldots, M_i^u$. На рисунках 3.4 и 3.5, мы изобразили первые пять многомасштабных базисных функций в V_H^1 и V_H^2, соответственно. Наконец, многомасштабное пространство для *Tuna 1* определяется следующим образом

$$V_H = V_H^1 + V_H^2 \text{ для 2D}, \quad V_H = V_H^1 + V_H^2 + V_H^3 \text{ для 3D}.$$

Многомасштабное пространство для *Tuna 2* построено аналогичным образом. Вместо выбора базисных функций путем рассмотрения снэпшот про-

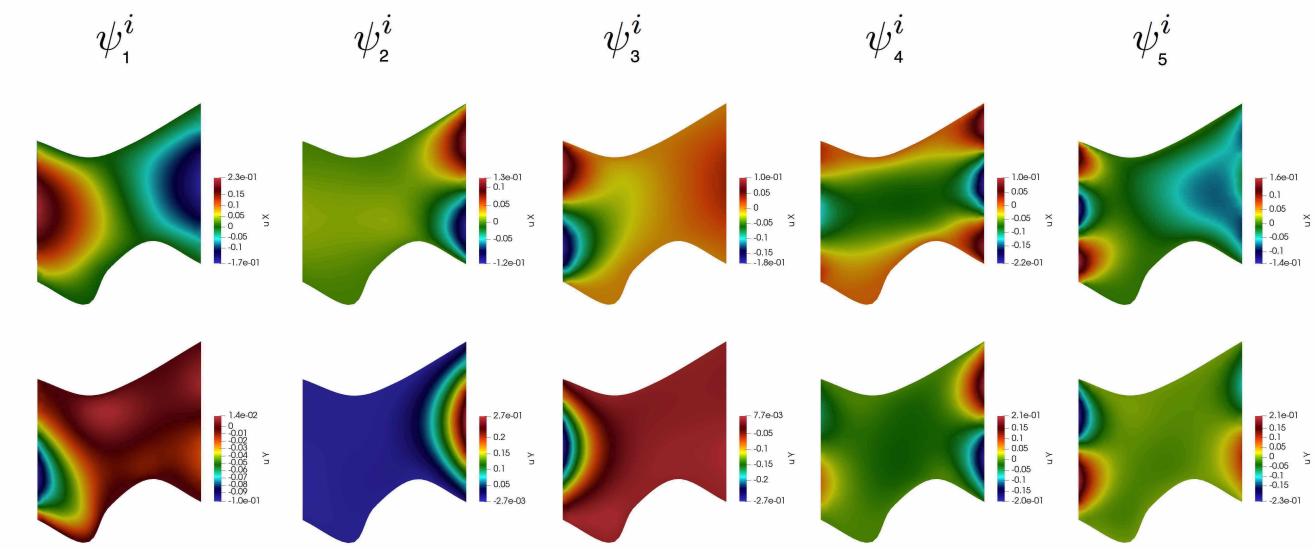


Рисунок 3.6: Иллюстрация многомасштабных базисных функций для скорости $\psi_k^i = (\psi_{k,x}^i, \psi_{k,y}^i)$ для $k = 1, ..., 5$ (слева направо). *Тип 2*. Первая строка: $\psi_{k,x}^i$. Вторая строка: $\psi_{k,y}^i$

странств, полученных путем наложения различных направлений потока по отдельности, мы определяем здесь снэпшот пространство, содержащее все локальные решения для всего поля скоростей

$$V^{i,\text{snap}} = \{u_l^{i,r} : 1 \leq l \leq J_i, r = 1, .., d\}.$$

где $d = 2, 3$. Для того чтобы построить многомасштабное пространство, мы выполняем понижение размерности путем решения локальной спектральной задачи на снэпшот пространстве $V^{i,\text{snap}}$

$$\tilde{A}^{u,K_i}\tilde{\psi}^i = \lambda \tilde{S}^{u,K_i}\tilde{\psi}^i, \tag{3.9}$$

с $\tilde{A}^{u,K_i} = R^u_{i,\text{snap}} A_h^{u,K_i} (R^u_{i,\text{snap}})^T$, $\tilde{S}^{u,K_i} = R^u_{i,\text{snap}} S_h^{u,K_i} (R^u_{i,\text{snap}})^T$ и

$$R^u_{i,\text{snap}} = \left[u_1^{i,1}, \ldots u_1^{i,d}, \ldots, u_{J_i}^{i,1}, \ldots u_{J_i}^{i,d}\right]^T.$$

где A_h^{u,K_i} и S_h^{u,K_i} даны в (3.8). Расположим собственные значения в порядке возрастания и выберем первые собственные векторы, соответствующие первым M_i^u наименьшим собственным значениям, в качестве базисных функций

$$V_H = \text{span}\{\psi_k^i : 1 \leq i \leq N_{cell}^H, 1 \leq k \leq M_i^u\}.$$

где $\psi_k^i = R^u_{i,\text{snap}} \tilde{\psi}_k^i$, $k = 1, ..., M_i^u$. Смотрите рисунок 3.6 для иллюстрации многомасштабных базисных функций *Tuna 2* .

Многомасштабное пространство для концентрации

Построение многомасштабного пространства для концентрации имеет аналогичную концепцию. Пространство строится для каждой грубой ячейки K_i (локальная область) для $i = 1, \cdots, N^H_{cell}$. Рассмотрены два типа многомасштабных пространств:

- *Tun 1*. Многомасштабное пространство, для которого граница локальной области и реактивная граница обрабатываются отдельно. Снэпшот пространства строятся отдельно с соответствующими спектральными задачами для каждой из них.
- *Tun 2*. Многомасштабное пространство, для которого граничное условие Дирихле применяется на всей границе, с соответствующими спектральными задачами для выделения доминантной моды.

Мы будем рассматривать два типа границ: (1) интерфейс между локальными областями Γ_E и (2) реактивные границы стенок Γ_w. Эта концепция основана на определении переменных грубой сетки и аналогична подходу, которую использовали в работе [71,90]. Начнем с построения многомасштабной базисной функции *Tuna 1*. Локальное снэпшот пространство состоит из функций $c_l^{i,r}$, которые являются решениями следующей локальной задачи

$$-\nabla \cdot (D \nabla c_l^{i,r}) = 0, \quad x \in K_i. \tag{3.10}$$

где граничные условия зависят от типа неоднородных граничных условий на границе стенки

- $r = 1$ для переноса между локальными областями на интерфейсе Γ_E, мы устанавливаем

$$c_l^{i,r} = \delta_i^l, \quad x \in \Gamma_E, \quad -\beta D \nabla c \cdot n = \alpha c \quad x \in \Gamma_w.$$

- $r = 2$ для переноса от границы стен

$$-\beta D\nabla c \cdot n = \alpha(c - \delta_i^l) + \zeta\delta_i^l, \quad x \in \Gamma_w, \quad -D\nabla c_l^i \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_E.$$

Здесь $l = 1, \cdots, J_i$, где J_i - количество граней мелкой сетки на границе K_i, и δ_i^l является символом Кронекера, определенная на ∂K_i и равняется 1, если $i = l$ и 0 в противном случае. Это задача решается на мелкой сетке методом IPDG. Заметим, что мы строим многомасштабные базисные функции *Tuna 1* для каждого граничного условия, определенных выше, и каждого значения α.

Используя эти локальные решения, мы формируем локальное снэпшот пространство для концентрации в K_i

$$P_r^{i,\text{snap}} = \{c_l^{i,r} : 1 \le l \le J_i\},$$

и определяем матрицу проекции снэпшот пространства

$$R_{i,\text{snap}}^{c,r} = \left[c_1^{i,r}, \ldots, c_{J_i}^{i,r}\right]^T.$$

где $r = 1, 2$.

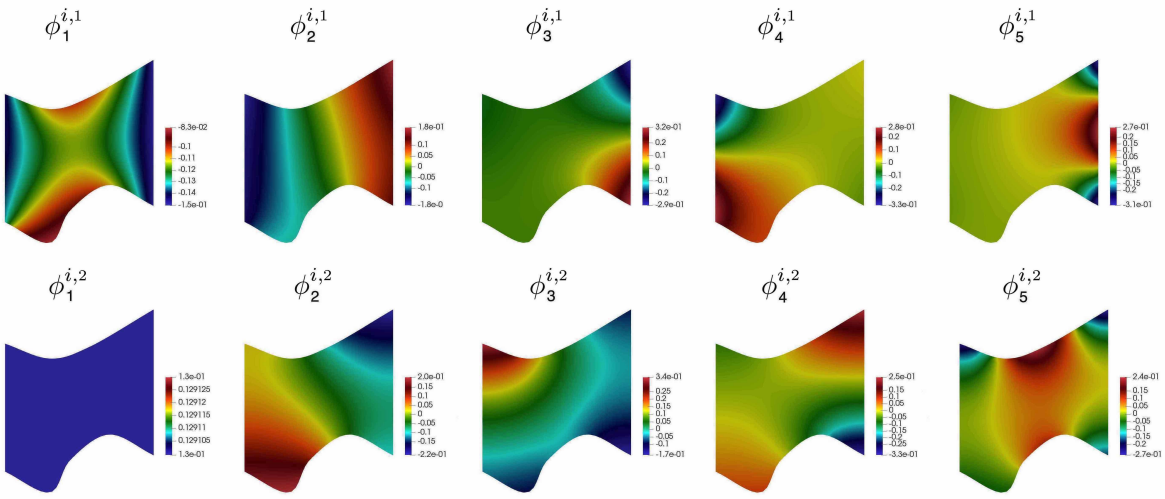


Рисунок 3.7: Иллюстрация многомасштабных базисных функций для концентрации $\phi_k^{i,r}$ для $r = 2$ и $k = 1, ..., 5$ (слева направо). *Tun 1* для граничных условий Робина на Γ_w (*RBC*). Первая строка: $\phi_k^{i,1}$. Вторая строка: $\phi_k^{i,2}$

Для уменьшения размера снэпшот пространства, решаем следующую локальную спектральную задачу в снэпшот пространстве $P_r^{i,\text{snap}}$

$$\tilde{A}_r^{c,K_i}\tilde{\phi}^{i,r} = \eta \tilde{S}_r^{u,K_i}\tilde{\phi}^{i,r}, \tag{3.11}$$

где

$$\tilde{A}_r^{c,K_i} = R_{i,\text{snap}}^{c,r} A_h^{c,K_i} (R_{i,\text{snap}}^{c,r})^T, \quad \tilde{S}_r^{c,K_i} = R_{i,\text{snap}}^{c,r} S_h^{c,K_i} (R_{i,\text{snap}}^{c,r})^T,$$

и A_h^{c,K_i} - матричное представление билинейной формы $a_{DG}^{c,K_i}(c,r)$ и S_h^{c,K_i} - матричное представление билинейной формы $s^{u,K_i}(c,r)$

$$\begin{aligned} a_{DG}^{c,K_i}(c,z) = & \sum_{K\in\mathscr{T}^h(K_i)} \int_K D\nabla c\cdot\nabla z\, dx \\ & - \sum_{E\in\mathscr{E}_0^h(K_i)} \int_E \Big(\{D\nabla c\cdot n\}[z] + \{D\nabla z\cdot n\}[c] - \frac{\gamma_c}{h}\{D\}[c][z] \Big) ds \\ s^{c,K_i}(c,z) = & \sum_{E\in\mathscr{E}_b^h(K_i)} \int_E c\, z\, ds. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отметим, что интеграл в $s^{c,K_i}(c,r)$ определен на границе грубого блока, а $\mathscr{T}^h(K_i)$ - это мелкая сетка для локальной области K_i.

Расположим собственные значения в порядке возрастания и выберем первые собственные векторы, соответствующие первым M_i^c наименьшим собственным значениям, в качестве базисных функций

$$P_H^r = \text{span}\{\phi_k^{i,r} : 1 \le i \le N_{cell}^H, 1 \le k \le M_i^c\}.$$

где $\phi_k^{i,r} = R_{i,\text{snap}}^{c,r}\tilde{\phi}_k^{i,r}$ для $k = 1,...,M_i^c$ и $r = 1,2$. Наконец, многомасштабное пространство для *Tuna 1* определяется следующим образом

$$P_H = P_H^1 + P_H^2.$$

Смотрите рисунок 3.7 для иллюстрации многомасштабных базисных функций.

Многомасштабное пространство для *Tuna 2* построено аналогично. В снэпшот пространстве мы собираем все возможные граничные условия на ∂K_i и

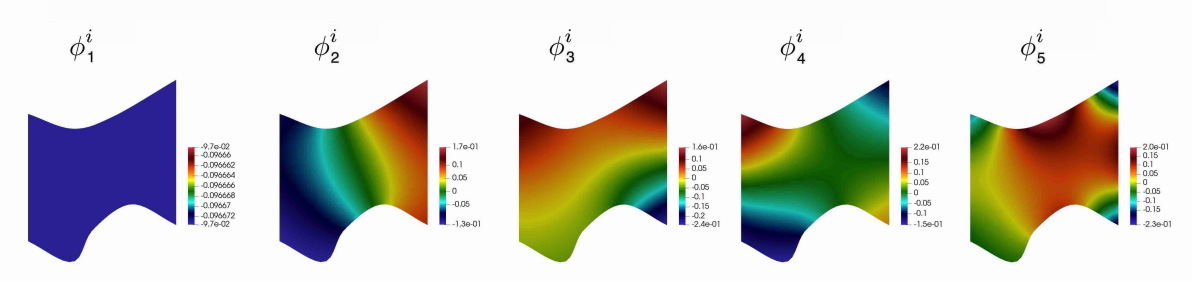


Рисунок 3.8: Иллюстрация многомасштабных базисных функций для концентрации ϕ_k^i для $k = 1, ..., 5$ (слева направо). *Тип 2*.

решаем следующую задачу

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (D\nabla c_l^i) &= 0, \quad x \in K_i, \\ c_l^i &= \delta_i^l, \quad x \in \partial K_i. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Локальные решения собираются как снэпшот пространство

$$V^{i,\text{snap}} = \{c_l^i : 1 \le l \le J_i\}.$$

Понижение размерности снэпшот пространства выполняется путем решения локальной спектральной задачи на снэпшот

$$\tilde{A}^{c,K_i}\tilde{\phi}^i = \eta \tilde{S}^{u,K_i}\tilde{\phi}^i, \tag{3.14}$$

где $\tilde{A}^{c,K_i} = R^c_{i,\text{snap}} A_h^{c,K_i} (R^c_{i,\text{snap}})^T$, $\tilde{S}^{c,K_i} = R^c_{i,\text{snap}} S_h^{c,K_i} (R^c_{i,\text{snap}})^T$ и

$$R^c_{i,\text{snap}} = \left[c_1^i, \ldots, c_{J_i}^i\right]^T.$$

где A_h^{u,K_i} и S_h^{u,K_i} заданы в (3.12). Расположим собственные значения в порядке возрастания и выберем первые собственные векторы, соответствующие первым M_i^c наименьшим собственным значениям, в качестве базисных функций

$$P_H = \text{span}\{\phi_k^i : 1 \le i \le N_{cell}^H, 1 \le k \le M_i^c\}.$$

где $\phi_k^i = R^c_{i,\text{snap}} \tilde{\phi}_k^i$ для $k = 1, ..., M_i^c$. Многомасштабные базисные функции для *Типа 2* представлены на рисунке 3.8. Заметим, что базисные функции *Типа 2* не зависят от типа граничных условий на Γ_w.

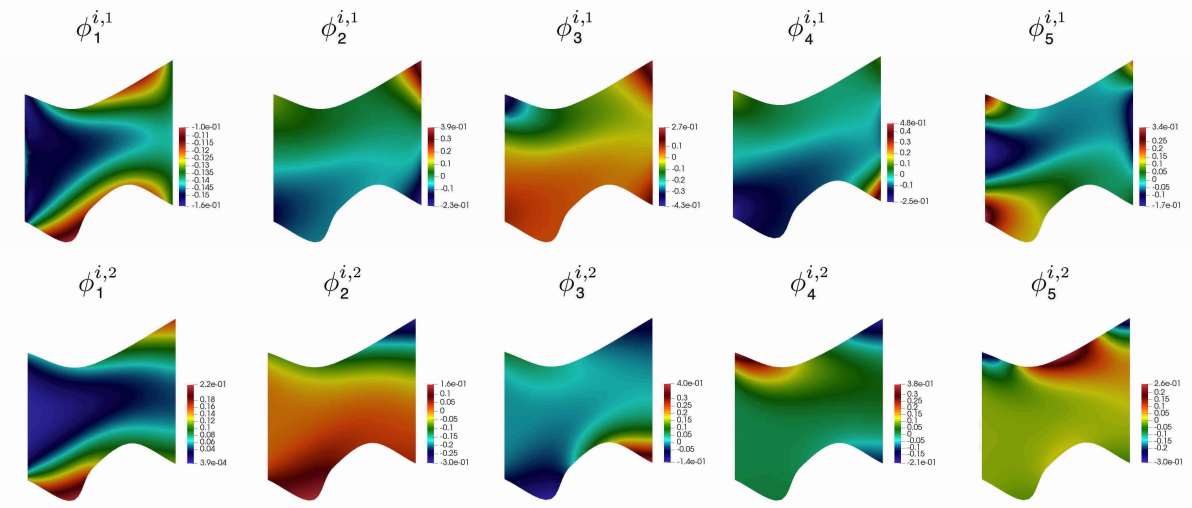


Рисунок 3.9: Иллюстрация многомасштабных базисных функций для концентрации $\phi_k^{i,r}$ для $r = 2$ и $k = 1, \ldots, 5$ (слева направо). *Tun 2* со скоростью и со временем для граничных условий Робина на Γ_w (*RBC*)

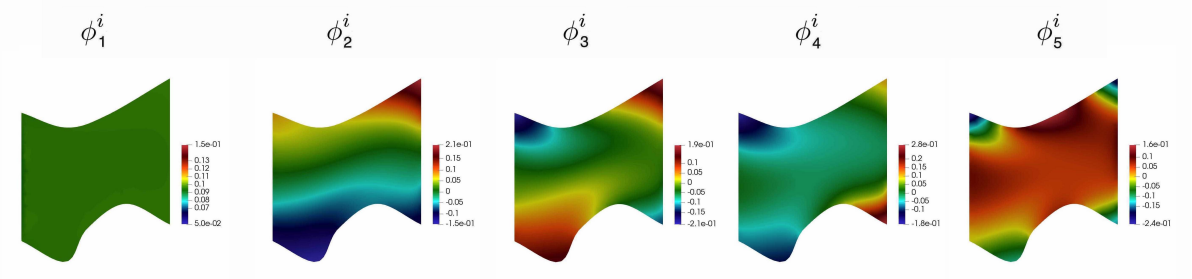


Рисунок 3.10: Иллюстрация многомасштабных базисных функций для концентрации ϕ_k^i для $k = 1, \ldots, 5$ (слева направо). *Tun 2* со скоростью и со временем

Для использования нестационарной задачи конвекции-диффузии вместо эллиптической задачи (3.10) для построения снэпшот пространства мы можем использовать формулировку локальной задачи, которая эквивалентна глобальной проблеме [94, 95]

$$\frac{1}{\tau} c_l^i + u \cdot \nabla c_l^i - \nabla \cdot (D \nabla c_l^i) = 0, \quad x \in K_i, \tag{3.15}$$

где в качестве поля скорости u мы берем решение уравнения Стокса на мелкой сетке или с использованием многомасштабного решателя с различным количеством многомасштабных базисных функций для скорости. В общем, это требует

построения базисных функций для каждого значения τ и u. В данном случае используем стационарное решение для скорости и фиксированное значение τ (некоторые подробности можно найти в следующей работе [40]).

Мы будем использовать обозначения «Тип 1 со временем и со скоростью» и «Тип 2 со временем и со скоростью» в разделе численных результатов. Иллюстрация многомасштабных базисных функций для *Tuna 1* и *Tuna 2* со временем и со скоростью представлена на рисунках 3.9 и 3.10, соответственно.

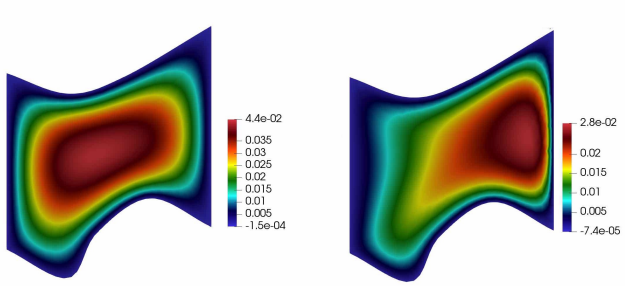


Рисунок 3.11: Дополнительные базисные функции. Слева: локальная задача (3.10) с нулевыми граничными условиями Дирихле. Справа: локальная задача (3.15) с нулевыми граничными условиями Дирихле.

Представленные базисные функции связаны с граничными базисными функциями [5, 87]. В дополнение к представленным многомасштабным базисным функциям мы добавляем одну внутреннюю базисную функцию, которая строится путем решения соответствующей локальной задачи (3.10) или (3.15) с нулевыми граничными условиями Дирихле на $x \in \partial K_i$ (см. рисунок 3.11).

Система грубого масштаба

Для построения системы грубой сетки, строим матрицы проекции, используя вычисленные многомасштабные базисные функции для скорости и концентрации

$$R_u = [\psi_1, \ldots, \psi_{N_u}]^T, \quad R_p = \left[\eta_1, \ldots, \eta_{N_p}\right]^T, \quad R_c = [\phi_1, \ldots, \phi_{N_c}]^T,$$

где мы использовали обозначение с одним индексом. Для *Tuna 1*, имеем $N_c = \sum_{i=1}^{N_{cell}^H} M_i^c$ и $N_u = \sum_{i=1}^{N_{cell}^H} M_i^u$. Для *Tuna 2*, имеем $N_c = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N_{cell}^H} M_i^c$ и $N_u = d \cdot \sum_{i=1}^{N_{cell}^H} M_i^u$. Заметим, что мы используем пространство кусочно-постоянных функций для R_p по грубой сетке и устанавливаем $\eta_i(x)$ равным 1, если $x \in K_i$ и нулю в противном случае ($N_p = N_{cell}^H$).

Используя эти матрицы, получаем следующие вычислительные системы в матричной форме:

- Задача течения:

$$\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} M_H^u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_H - \check{u}_H \\ p_H - \check{p}_H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_H^u & B_H^T \\ B_H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_H \\ p_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_H^u \\ F_H^p \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

  где

$$M_H^u = R_u M_h^u R_u^T, \quad A_H^u = R_u A_h^u R_u^T, \quad B_H = R_u B_h R_p^T, \quad F_H^u = R_u F_h^u, \quad F_H^u = R_p F_h^p,$$

  а после решения аппроксимации грубого масштаба восстанавливаем скорость на мелкой сетке $u_{ms} = R_u^T u_H$.

- Задача переноса:

$$\frac{1}{\tau} M_H^c (c_H - \check{c}_H) + (A_H^c + C_H^c(u_{ms}))c_H = F_H^c, \tag{3.17}$$

  где

$$M_H^c = R_c M_h^c R_c^T, \quad A_H^c = R_c A_h^c R_c^T, \quad C_H^c(u_{ms}) = R_c C_h^c(u_{ms}) R_c^T, \quad F_H^c = R_c F_h^c,$$

  и восстановить концентрацию на мелкой сетке $c_{ms} = R_c^T c_H$.

3.3 Численные результаты

В данном разделе представлены численные результаты. Мы будем использовать следующие три вычислительные области (Рисунок 3.12), чтобы продемонстрировать производительность нашего метода:

Геометрия 1 с мелкой сеткой, содержащей 17350 ячеек. Грубая сетка содержит 10 локальных областей.

Геометрия 2 с мелкой сеткой, содержащей 18021 ячеек. Грубая сетка содержит 20 локальных областей.

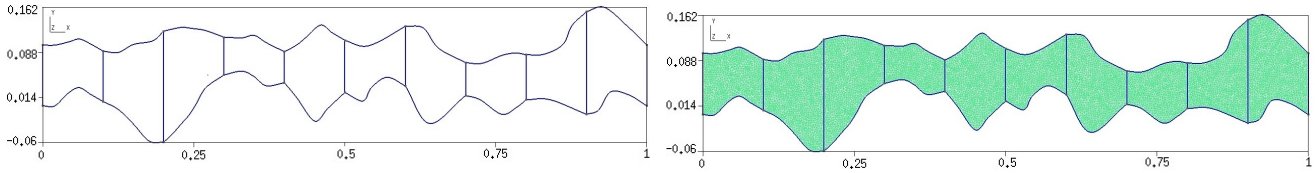
Геометрия 3 с мелкой сеткой, содержащей 15094 ячеек. Грубая сетка содержит 10 локальных областей.

Для того чтобы построить структурированные грубые сетки, мы добавляем линии между локальными областями (грубыми ячейками сетки) при построении геометрии. Для неструктурированной грубой сетки локальные области имеют грубый интерфейс между локальными областями. Расчетные области с мелкими и грубыми сетками представлены на рисунке 3.12 для геометрии 1, 2 и 3. Используем Gmsh для построения вычислительной геометрии и неструктурированных мелких сеток [60]. Численная реализация основана на библиотеке FEniCS [61].

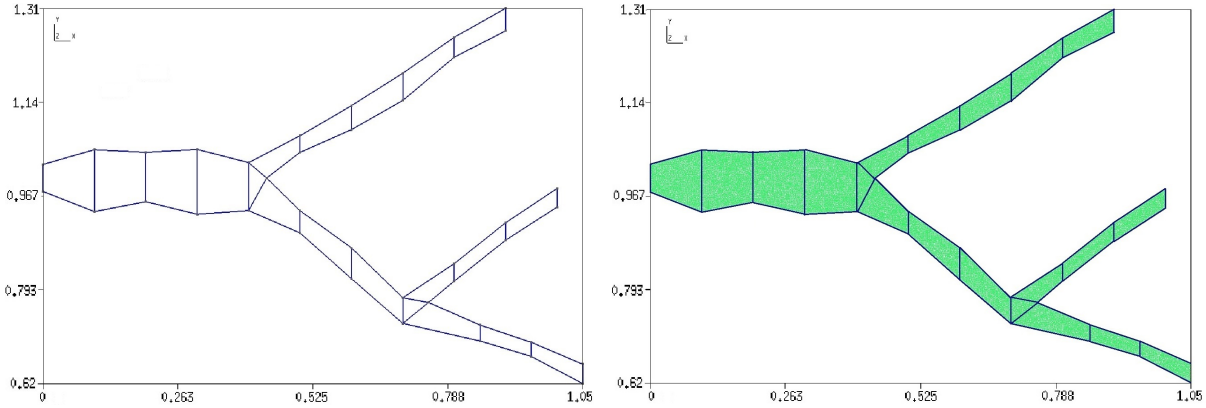
Для исследования представленного многомасштабного метода решения задач в тонких областях с неоднородными граничными условиями, рассматриваются следующие тесты:

- *Тест 1* для разной геометрии расчетной области. Используем геометрии 1, 2 и 3 (см. рисунок 3.12). Рассматриваются задачи с неоднородными граничными условиями Робина для концентрации.
- *Тест 2* для разных граничных условий и коэффициентов диффузии ($D = 0.01, 0.1$ и 1). Рассматриваются неоднородные граничные условия Дирихле и Неймана на границе стенки Γ_w. В данном тесте мы также подробно исследуем различные типы многомасштабных базисных функций.

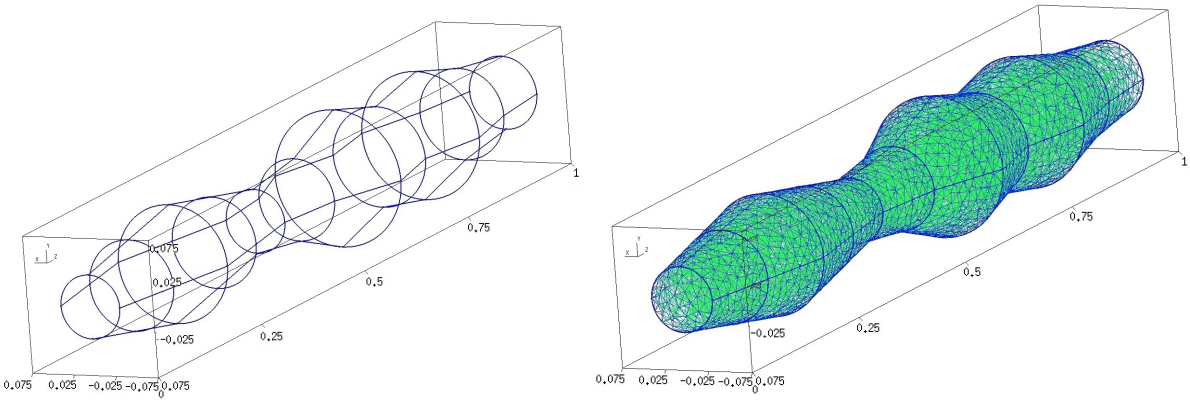
Для задачи течения, берем $\mu = 1$, $\rho = 1$ и $u_0 = 0$. Устанавливаем $g = (\tilde{g}, 0)$ для геометрии 1,2 и $g = (0, 0, \tilde{g})$ для геометрии 3 как условие на входной границе расчётной области Γ_{in}, где $\tilde{g}(x) = u_{in} n^{-1}(n+2)(1-(r/r_{max})^n)$ с $n = 2$ и $u_{in} = 1$ [11, 96]. Здесь r - это расстояние до центральной точки x_0 и r_{max} - радиус



(a) Геометрия 1 (мелкая сетка с 17350 ячейками и грубая сетка с 10 локальными областями)



(b) Геометрия 2 (мелкая сетка с 18021 ячейками и грубая сетка с 20 локальными областями)



(c) Геометрия 3 (мелкая сетка с 15094 ячейками и грубая сетка с 10 локальными областями)

Рисунок 3.12: Грубая сетка и мелкая сетка для геометрии 1, 2 и 3. Слева: расчетная геометрия и грубая сетка. Справа: мелкая сетка.

левой границы Γ_{in}, где $x_0 = (0, 0.05)$, $r_{max} = 0.05$ для геометрии 1, $x_0 = (0, 1)$, $r_{max} = 0.025$ для геометрии 2, и $x_0 = (0, 0, 1)$, $r_{max} = 0.035$ для геометрии 3.

Рассчитываем относительные погрешности в норме L^2 в процентах

$$e(c) = \sqrt{\frac{\int_\Omega (c_{ms} - c)^2 \, dx}{\int_\Omega c^2 \, dx}} \cdot 100\%, \quad e(u) = \sqrt{\frac{\int_\Omega (u_{ms} - u, u_{ms} - u) \, dx}{\int_\Omega (u, u) \, dx}} \cdot 100\%,$$

где c_{ms} и u_{ms} - многомасштабные решения, c и u - точные решения.

Тест 1 - Разные геометрии

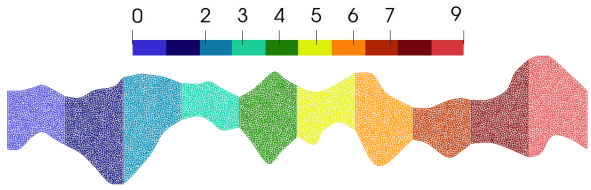
Рассматривается тестовая задача с неоднородным граничным условием Робина для концентрации

$$-D\nabla c \cdot n = \alpha(c - c_w), \quad x \in \Gamma_w,$$

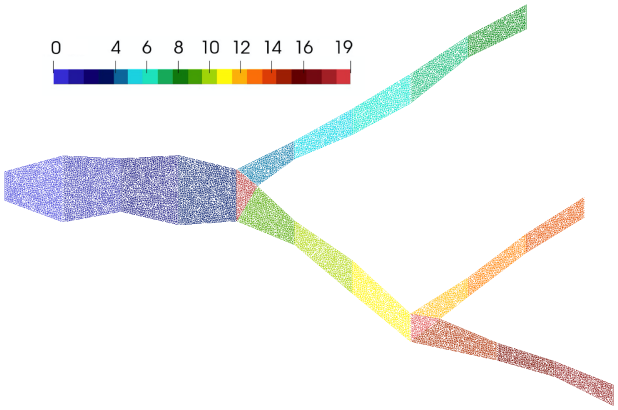
где $c_w = 1$, $\alpha = 0.01$ и $D = 0.01$. В качестве начальных условий положим $c_0 = 1$ и $u_0 = 0$. Для входной (левой) границы положим $c_{in} = 0$ для Γ_{in}. Проводим вычисление для $t_{max} = 0.7$ (Геометрия 1), $t_{max} = 1$ (Геометрия 2) и $t_{max} = 2$ (Геометрия 3) с 40 итерациями по времени. Грубая сетка структурирована с 20 локальными областями для Геометрии 2 и с 10 локальными областями для Геометрии 1 и 3. На рисунке 3.13 мы показываем маркеры локальных областей.

Рассматривается эффективность представленного метода для решения задач течения и переноса в различных вычислительных областях. Представлены два типа многомасштабных базисных функций. M^c и M^u - количество многомасштабных базисных функций для концентрации и скорости соответственно. DOF_h^u и DOF_h^c - количество степеней свободы для эталонного (мелкосеточного) решения. DOF_H^u и DOF_H^c - количество степеней свободы для многомасштабного решения. Эталонное решение выполняется на мелкой сетке с использованием аппроксимации IPDG. Использовали линейные базисные функции для полей скорости и концентрации на мелкой сетке.

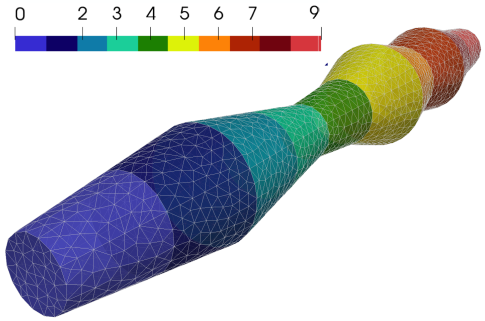
Поскольку скорость не зависит от концентрации в наших тестовых задачах, то начнем с результатов для задач течения. На рисунке 3.14, представлены эталонные и многомасштабные решения для геометрий 1, 2 и 3. Величина поля скорости изображена в последний момент. В многомасштабном решателе мы использовали $M^u = 20$ многомасштабных базисных функций для каждого направления (*Tun 1*). Для геометрии 1 имеем $DOF_h^u = 121450$ и $DOF_H^u = 410$ (0.33 % из DOF_h^u). Для геометрии 2 имеем $DOF_h^u = 126147$ и $DOF_H^u = 820$ (0.65 % из DOF_h^u). Для геометрии 3 имеем $DOF_h^u = 196222$ и $DOF_H^u = 610$ (0.31 % из



(a) Геометрия 1 с 10 локальными областями



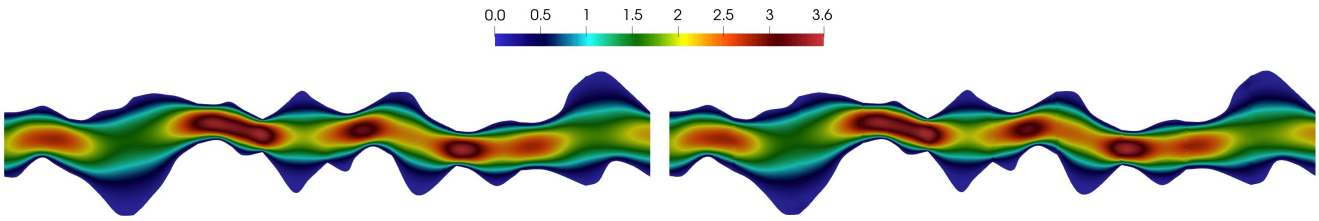
(b) Геометрия 2 с 20 локальными областями



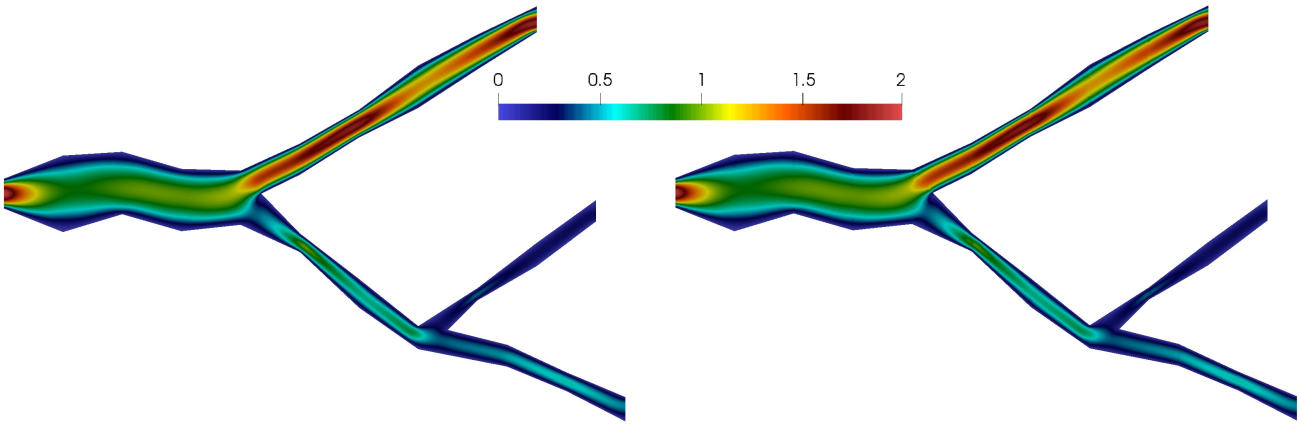
(c) Геометрия 3 с 10 локальными областями

Рисунок 3.13: Мелкая сетка с маркерами подобластей для Геометрии 1, 2 и 3.

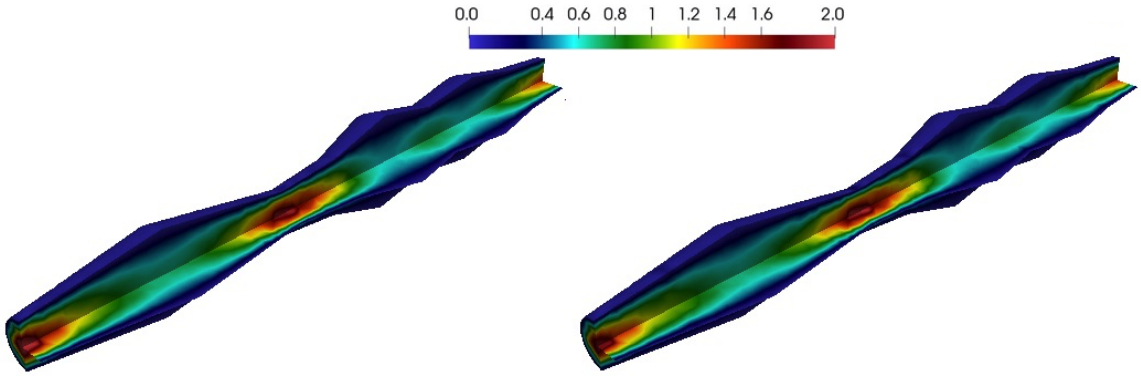
DOF_h^u). Мы наблюдаем хорошую точность представленного метода при огромном уменьшении размера дискретной системы. В таблице 3.1 представлены относительные погрешности в % для скорости между эталонным решением и многомасштабным решением с различным количеством многомасштабных базисных функций в конечные моменты времени. Мы наблюдаем уменьшение погрешности с увеличением числа многомасштабных базисных функций для всех геометрий. Например, для 40 многомасштабных базисных функций *Tuna 1* имеем 1.3 % погрешности для Геометрии 1, 1.5 % погрешности для Геометрии 2, и



(a) Геометрия 1. Слева: эталонное решение, $DOF_h^u = 121450$. Справа: многомасштабное решение, $DOF_H^u = 410$



(b) Геометрия 2. Слева: эталонное решение, $DOF_h^u = 126147$. Справа: многомасштабное решение, $DOF_H^u = 820$



(c) Геометрия 3. Слева: эталонное решение, $DOF_h^u = 196222$. Справа: многомасштабное решение, $DOF_H^u = 610$

Рисунок 3.14: Эталонные и многомасштабные решения скорости в конечный момент времени. Слева: эталонное решение. Справа: многомасштабное решение с 20 многомасштабными базисными функциями *Tuna 1*.

4.0 % погрешности для Геометрии 3. Для *Типов 1* и *2* наблюдаем аналогичные погрешности для двумерных задач (Геометрия 1 и 2). Для трехмерной области

Tun 1	
$DOF_c^u(M^u)$	$e(u)$ (%)
Геометрия 1	
110 (5)	19.85
210 (10)	10.52
410 (20)	3.230
810 (40)	1.346
Геометрия 2	
220 (5)	31.51
420 (10)	10.08
820 (20)	3.570
1620 (40)	1.521
Геометрия 3	
160 (5)	15.96
310 (10)	10.63
610 (20)	6.548
1210 (40)	4.082

Tun 2	
$DOF_H^u(M^u)$	$e(u)$ (%)
Геометрия 1	
110 (10)	11.70
210 (20)	6.013
410 (40)	1.536
810 (80)	1.064
Геометрия 2	
220 (10)	27.20
420 (20)	6.205
820 (40)	1.485
1620 (80)	1.374
Геометрия 3	
160 (15)	36.70
310 (30)	10.76
610 (60)	9.493
1210 (120)	5.657

Таблица 3.1: Относительная погрешность L_2 для скорости в последний момент времени. Геометрия 1, 2 и 3 (Тест 1). Слева: многомасштабные базисные функции *Tuna 1*. Справа: многомасштабные базовые функции *Tuna 2*. Эталонное решение $DOF_h^u = 121450$ (Геометрия 1), $DOF_h^u = 126147$ (Геометрия 2) и $DOF_h^u = 196222$ (Геометрия 3).

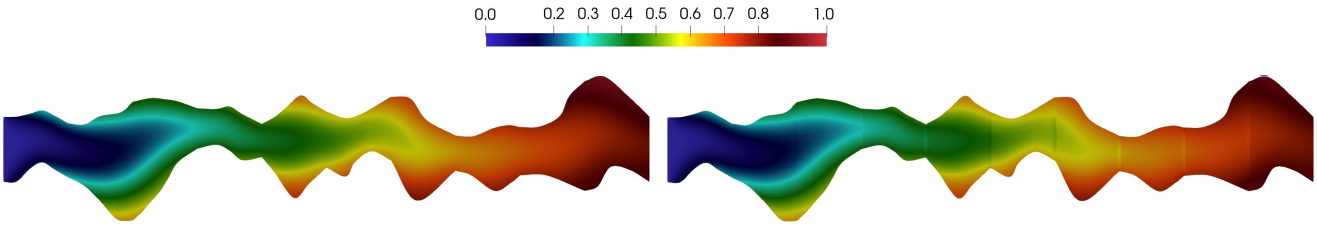


Рисунок 3.15: Эталонное и многомасштабное решение концентрации при t_{40}. Геометрия 1 (Тест 1). Слева: эталонное решение, $DOF_h^c = 52050$. Справа: многомасштабное решение с 20 многомасштабными базисными функциями *Tuna 1*, $DOF_H^c = 410$.

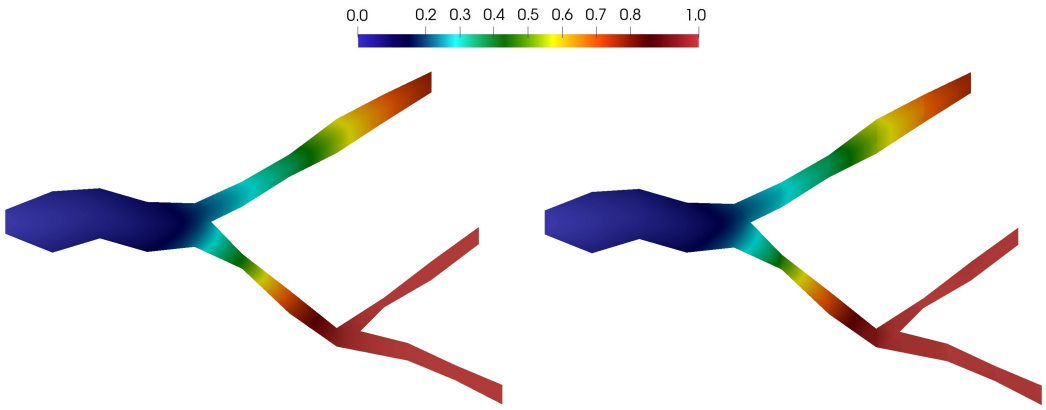


Рисунок 3.16: Эталонное и многомасштабное решение концентрации при t_{40}. Геометрия 2 (Тест 1). Слева: эталонное решение, $DOF_h^c = 54063$. Справа: многомасштабное решение с 20 многомасштабными базисными функциями *Tuna 1*, $DOF_H^c = 820$.

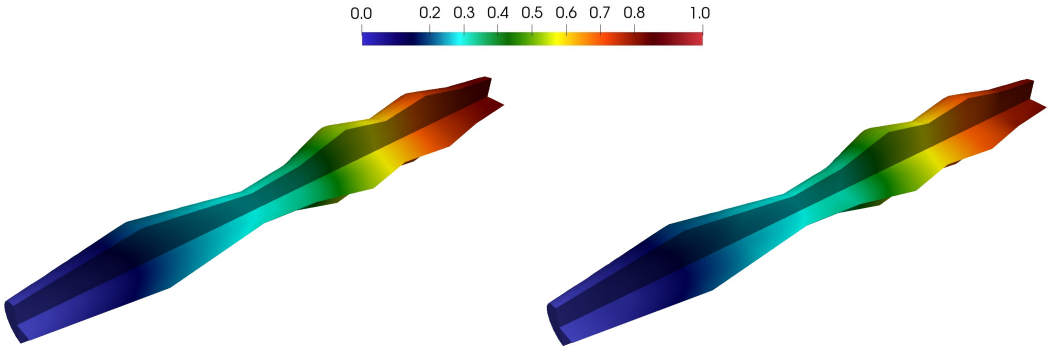


Рисунок 3.17: Эталонное и многомасштабное решение концентрации при t_{40}. Геометрия 3 (Тест 1). Слева: эталонное решение, $DOF_h^c = 60376$. Справа: многомасштабное решение с 20 многомасштабными базисными функциями *Tuna 1*, $DOF_H^c = 410$.

в Геометрии 3 получаем лучшие результаты с многомасштабными базисными функциями *Tuna 1*.

На рисунке 3.15, 3.16 и 3.17, представлены распределения концентраций для эталонных (мелкомасштабных) и многомасштабных решений на разных временных уровнях t_m для $m = 10, 20$ и 40. В этих расчетах использовано фиксированное количество многомасштабных базисных функций для поля скорости ($M^u = 20$ *Tuna 1*). Исследуем влияние точности скорости на решение

Tun 1 без скорости					*Tun 2* без скорости				
$DOF_c^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$	$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$
Геометрия 1					Геометрия 1				
30 (1)	46.99	53.03	52.54	50.25	30 (2)	42.27	38.93	37.68	37.64
70 (3)	4.111	4.070	4.746	5.154	70 (6)	6.747	7.675	8.587	9.206
110 (5)	2.653	2.851	2.973	2.989	110 (10)	3.160	3.818	4.269	4.549
210 (10)	1.950	2.196	2.236	2.224	210 (20)	1.954	2.228	2.294	2.300
410 (20)	1.906	2.127	2.154	2.140	410 (40)	1.924	2.189	2.252	2.259
810 (40)	1.901	2.120	2.147	2.134	810 (80)	1.916	2.177	2.236	2.240
Геометрия 2					Геометрия 2				
60 (1)	73.44	84.91	87.34	87.06	60 (2)	60.30	61.20	55.67	46.25
140 (3)	2.256	2.205	2.349	2.249	140 (6)	1.931	2.021	2.668	2.766
220 (5)	1.341	1.569	1.692	1.581	220 (10)	1.784	1.495	1.471	1.451
420 (10)	1.142	1.204	1.228	1.144	420 (20)	1.041	1.074	1.059	0.989
820 (20)	1.145	1.190	1.215	1.144	820 (40)	1.048	1.315	1.069	0.997
1620 (40)	1.149	1.191	1.219	1.150	1620 (80)	1.058	1.088	1.079	1.009
Геометрия 3					Геометрия 3				
30 (1)	58.70	71.74	74.82	73.37	30 (2)	16.17	16.07	21.69	23.32
70 (3)	2.322	1.866	2.071	2.229	70 (6)	16.60	14.86	15.52	15.85
110 (5)	2.306	1.895	2.051	2.214	110 (10)	16.23	14.50	15.15	15.47
210 (10)	2.317	2.142	2.348	2.586	210 (20)	5.274	4.940	5.252	5.648
410 (20)	1.892	1.773	1.992	2.210	410 (40)	4.871	4.607	4.947	5.338
810 (40)	1.651	1.552	1.746	1.938	810 (80)	4.568	4.337	4.659	5.037

Таблица 3.2: Относительная погрешность L_2 для концентрации при t_m ($m = 10, 20, 30$ и 40). Геометрия 1, 2 и 3 (Тест 1). Многомасштабные базисные функции без скорости. Слева: многомасштабные базисные функции *Tuna 1* для концентрации. Справа: многомасштабные базовые функции *Tuna 2* для концентрации. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$ (Геометрия 1), $DOF_h^c = 54063$ (Геометрия 2) и $DOF_h^c = 60376$ (Геометрия 3).

концентрации позже, в тесте 3. На рисунках мы представили результаты для $M^u = 20$ многомасштабных базисных функций для каждого типа границ локальных областей (*Tun 1*). Для Геометрии 1 (Рисунок 3.15), имеем $DOF_h^c = 52050$ и $DOF_H^c = 410$ (0.78 % из DOF_h^c). Для Геометрии 2 (Рисунок 3.16), имеем $DOF_h^c = 54063$ и $DOF_H^c = 820$ (1.5 % из DOF_h^c). Для Геометрии 3 (Рисунок 3.17),

Tun 1 со скоростью					*Tun 2* со скоростью				
$DOF_c^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$	$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$
Геометрия 1					Геометрия 1				
30 (1)	49.91	53.68	52.64	50.36	30 (2)	60.48	66.48	65.71	63.81
70 (3)	26.22	24.27	21.11	19.47	70 (6)	41.95	45.45	43.60	40.94
110 (5)	14.63	13.24	9.694	7.351	110 (10)	31.93	34.33	31.66	28.18
210 (10)	6.909	5.760	3.943	2.372	210 (20)	6.114	7.652	6.285	4.931
410 (20)	1.867	2.004	1.870	1.701	410 (40)	1.747	1.776	1.572	1.376
810 (40)	1.846	1.973	1.836	1.669	810 (80)	1.741	1.758	1.549	1.352
Геометрия 2					Геометрия 2				
60 (1)	48.37	53.67	52.88	49.64	60 (2)	65.49	64.93	58.22	48.53
140 (3)	14.56	19.78	20.14	15.63	140 (6)	47.06	53.16	53.16	42.65
220 (5)	12.46	16.05	16.30	12.98	220 (10)	16.22	15.71	15.73	14.42
420 (10)	1.474	1.517	1.532	1.350	420 (20)	1.467	1.491	1.474	1.275
820 (20)	1.308	1.362	1.340	1.159	820 (40)	1.277	1.315	1.274	1.089
1620 (40)	1.272	1.331	1.302	1.126	1620 (80)	1.252	1.293	1.248	1.065
Геометрия 3					Геометрия 3				
30 (1)	32.10	32.21	34.24	32.98	30 (2)	43.35	39.21	40.01	40.01
70 (3)	32.09	32.19	34.22	32.96	70 (6)	22.71	21.47	21.47	21.47
110 (5)	10.03	9.976	10.90	11.25	110 (10)	21.90	20.70	21.68	20.55
210 (10)	7.491	7.609	8.511	8.736	210 (20)	15.56	14.70	15.34	15.34
410 (20)	6.934	7.026	7.702	8.124	410 (40)	12.48	12.05	12.96	13.77
810 (40)	6.028	6.234	6.909	7.320	810 (80)	11.20	10.98	11.88	12.68

Таблица 3.3: Относительная погрешность L_2 для концентрации при t_m ($m = 10, 20, 30$ и 40). Геометрия 1, 2 и 3 (Тест 1). Многомасштабные базисные функции со скоростью. Слева: многомасштабные базисные функции *Tuna 1* для концентрации. Справа: многомасштабные базовые функции *Tuna 2* для концентрации. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$ (Геометрия 1), $DOF_h^c = 54063$ (Геометрия 2) и $DOF_h^c = 60376$ (Геометрия 3).

имеем $DOF_h^c = 60376$ и $DOF_H^c = 410$ (0.67 % из DOF_h^c). Наблюдаем хорошие результаты представленного метода решения задачи переноса для всех трех геометрий.

В таблицах 3.2 и 3.3 представлены численные результаты для различного количества многомасштабных базисных функций для концентрации (*Tun 1* и *2*) для

фиксированного числа многомасштабных базисных функций для поля скорости. ($M^u = 20$ *типа 1*). Относительные погрешности для концентраций представлены для четырех временных слоев t_m с $m = 10, 20, 30$ и 40. Мы можем получить хорошее многомасштабное решение, если возьмем достаточное количество многомасштабных базисных функций. Например, мы получаем около 40 % погрешности концентрации, когда берем 3 многомасштабные базисные функции *Tuna 2* и около 20 % для *Tuna 1*. Для 40 многомасштабных базисных функций *Tuna 1* погрешность уменьшается до 1.6 % для Геометрии 1, 1.1 % для Геометрии 2, и 1.9 % для Геометрии 3. Для двумерных задач (Геометрия 1 и 2) получим аналогичную погрешность для многомасштабных базисных функций *Tuna 1* и *Tuna 2*. Однако для трехмерной задачи (Геометрия 3) многомасштабный базис для *Tuna 1* лучше.

Отметим, что основной вычислительный выигрыш в многомасштабном решателе - это небольшая система с грубыми сетками по сравнению с системой с мелкими сетками. В каждой грубой ячейке у нас есть многомасштабные базисные функции M^c и M^u для концентрации и скорости. Количество грубых ячеек составляет N^h_{cell} и N^H_{cell} для мелких и грубых сеток. Следовательно, для многомасштабного решателя имеем $DOF^u_H = N^H_{cell}(d \cdot M^u + 1)$, $DOF^c_H = N^H_{cell}(2 \cdot M^c + 1)$ для многомасштабных базисных функций *Tuna 1* и $DOF^u_H = N^H_{cell}(M^u + 1)$, $DOF^c_H = N^H_{cell}(M^c + 1)$ для *Tuna 2*. С другой стороны, размер системы мелкой сетки равен $DOF^u_h = N^h_{cell} \cdot (d\,(d+1)+1)$ и $DOF^c_h = N^h_{cell} \cdot (d+1)$. Для Геометрии 1 имеем $DOF^c_h = 52050$ и $DOF^u_h = 121450$ для системы с мелкой сеткой для задач переноса и течения, соответственно. Для системы грубого масштаба имеем $DOF^c_H = 410$, $DOF^u_H = 410$ и получаем решение с $e(c_{40}) = 1.7\%$ и $e(u) = 3.2\%$ относительными погрешностями для концентрации и скорости в конечный момент времени соответственно. Для Геометрии 2 имеем $DOF^c_h = 54063$ и $DOF^u_h = 126147$ для системы с мелкой сеткой для задач переноса и течения, соответственно. Для системы грубого масштаба имеем $DOF^c_H = 820$, $DOF^u_H = 820$

и получаем решение с $e(c_{40}) = 1.1\%$ и $e(u) = 3.5\%$ относительными погрешностями для концентрации и скорости. Для Геометрии 3, имеем $DOF_h^c = 60376$ и $DOF_h^u = 196222$ для системы с мелкой сеткой для задач переноса и течения, соответственно. Для системы грубого масштаба имеем $DOF_H^c = 410$, $DOF_H^u = 610$ и получаем решение с $e(c_{40}) = 2.2\%$ и $e(u) = 6.5\%$ относительными погрешностями для концентрации и скорости. Для Геометрии 3 время счета для мелкой сетки равно 69 секундам, время счета для многомасштабного метода с использованием 40 базисных функций для скорости и концентрации равно 1 секунде. Максимальное число базисных функций отдельно для каждой локальной области строятся за 106 секунд. Заметим, что в представленном методе используем предварительно рассчитанные многомасштабные базисные функции. Более того, многомасштабные базисные функции могут легко использовать преимущества параллельных вычислений, поскольку все базисные функции могут быть вычислены независимо. В общем, мы можем повысить точность нашего подхода, используя технику оверсэмплинга для построения многомасштабных базисных функций [47].

В таблицах 3.4-3.5 представлены относительные погрешности для полей скорости и концентрации между эталонным и многомасштабным решением, где многомасштабные базисные функции строятся без и с использованием техники оверсэмплинга [47]. Численные результаты представлены для геометрии 1. Для того чтобы сгенерировать многомасштабные базисные функции, строим снэпшот пространство путем решения локальных задач в локальной области с оверсэмплингом. Область оверсэмплинга создается путем добавления одного дополнительного слоя грубой ячейки. Мы заметили, что погрешность концентрации с оверсэмплингом меньше для многомасштабных базисных функций *Tuna 1* и *Tuna 2*. Однако для поля скоростей имеем аналогичные погрешности.

Видим, что представленный многомасштабный метод обеспечивает хорошие результаты с небольшими погрешностями и огромным уменьшением размера

Tun 1	
$DOF_c^u(M^u)$	$e(u)$ (%)
Без оверсэмплинга	
110 (5)	19.85
210 (10)	10.52
410 (20)	3.230
810 (40)	1.346
С оверсэмплингом	
110 (5)	16.44
210 (10)	5.494
410 (20)	3.171
810 (40)	1.029

Tun 2	
$DOF_H^u(M^u)$	$e(u)$ (%)
Без оверсэмплинга	
110 (10)	11.70
210 (20)	6.013
410 (40)	1.536
810 (80)	1.064
С оверсэмплингом	
10 (10)	54.57
210 (20)	6.672
410 (40)	3.280
10 (80)	1.120

Таблица 3.4: Относительная погрешность L_2 для скорости в последний момент времени. Геометрия 1 (*Tun* 1). Слева: многомасштабные базисные функции *Tuna 1* без оверсэмплинга и с оверсэмплингом. Справа: многомасштабные базисные функции *Tuna 2* без оверсэмплинга и с оверсэмплингом. Эталонное решение с $DOF_h^u = 121450$ (Геометрия 1).

системы для всех трех конфигураций теста. Для представленной тестовой задачи в трехмерном случае лучше использовать базисные функции без информации о поле скорости. Для трехмерной задачи многомасштабные базисные функции *Tuna 1* лучше, чем *Tuna 2*, из-за прямого определения направлений течения и переноса. Однако для двумерной задачи получаем аналогичные результаты для базисных функций *Tuna 1* и *2*.

Тест 2 - Разные граничные условия и коэффициенты диффузии

Далее рассматривается эффективность представленного метода решения задачи переноса с разными типами граничных условий и разными значениями коэффициента диффузии D.

Для исследования влияния граничных условий на результаты представленного многомасштабного метода, рассматривается геометрия 1 и устанавливается

Тип 1 со скоростью				
$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$
Без оверсэмплинга				
30 (1)	49.91	53.68	52.64	50.36
70 (3)	26.22	24.27	21.11	19.47
110 (5)	14.63	13.24	9.694	7.351
210 (10)	6.909	5.760	3.943	2.372
410 (20)	1.867	2.004	1.870	1.701
810 (40)	1.846	1.973	1.836	1.669
С оверсэмплингом				
30 (1)	21.25	22.07	21.83	21.77
70 (3)	11.19	11.09	11.09	11.49
110 (5)	7.870	7.751	7.797	8.008
210 (10)	2.013	1.870	1.885	1.989
410 (20)	1.459	1.164	1.037	1.092
810 (40)	1.381	0.974	0.743	0.763

Тип 2 со скоростью				
$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$
Без оверсэмплинга				
30 (2)	60.48	66.48	65.71	63.81
70 (6)	41.95	45.45	43.60	40.94
110 (10)	31.93	34.33	31.66	28.18
210 (20)	6.114	7.652	6.285	4.931
410 (40)	1.747	1.776	1.572	1.376
810 (80)	1.741	1.758	1.549	1.352
С оверсэмплингом				
30 (2)	53.75	62.09	63.45	62.86
70 (6)	30.84	31.21	31.75	32.49
110 (10)	23.32	24.43	25.15	25.51
210 (20)	2.173	1.874	1.786	1.804
410 (40)	1.455	1.038	0.756	0.762
810 (80)	1.376	0.992	0.740	0.758

Таблица 3.5: Относительная погрешность L_2 для концентрации при t_m ($m = 10, 20, 30$ и 40). Геометрия 1 (Тест 1). Многомасштабные базисные функции со скоростью. Слева: многомасштабные базисные функции *Типа 1* без оверсэмплинга и с оверсэмплингом. Справа: многомасштабные базисные функции *Типа 2* без оверсэмплинга и с оверсэмплингом. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$ (Геометрия 1)

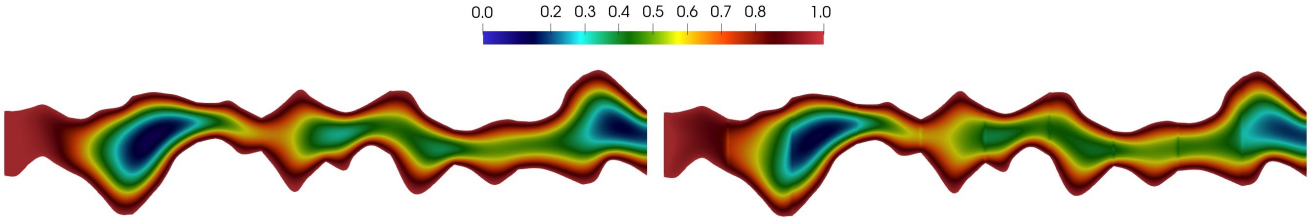


Рисунок 3.18: Эталонные и многомасштабные решения концентрации при t_{20}. Граничные условия Дирихле (Тест 2). Слева: эталонное решение. Справа: многомасштабное решение с 20 многомасштабными базисными функциями Типа 1.

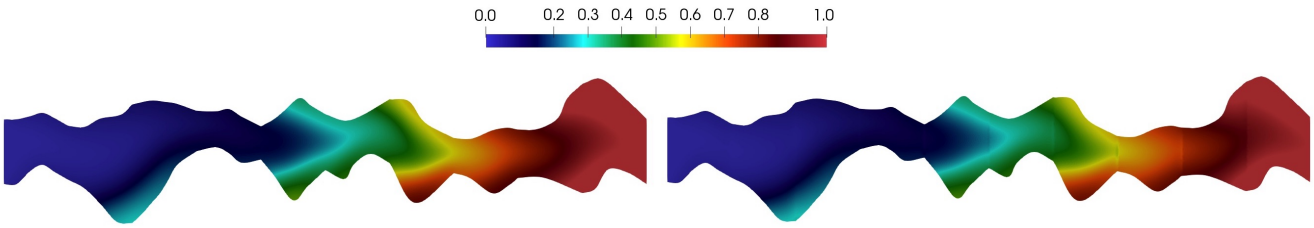


Рисунок 3.19: Эталонные и многомасштабные решения концентрации при t_{40}. Граничные условия Неймана (Тест 2). Слева: эталонное решение. Справа: многомасштабное решение с 20 многомасштабными базисными функциями Типа 1.

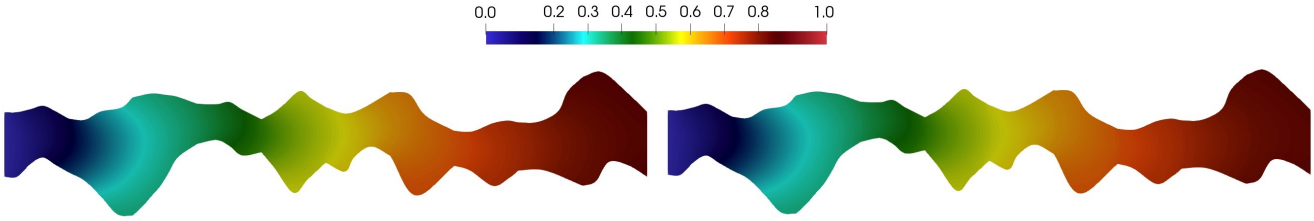


Рисунок 3.20: Относительная погрешность L_2 для концентрации t_{40}. Коэффициент диффузии $D = 0.1$ (Тест 2). Слева: многомасштабные базисные функции *Tuna 2* для концентрации. Справа: многомасштабные базисные функции *Tuna 1* для концентрации. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$

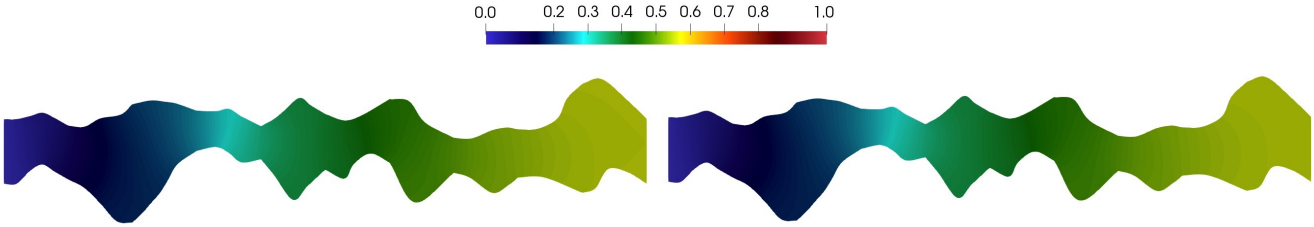


Рисунок 3.21: Относительная погрешность L_2 для концентрации при t_{40}. Коэффициент диффузии $D = 1$ (Тест 2). Слева: многомасштабные базисные функции *Tuna 2* для концентрации. Справа: многомасштабные базисные функции *Tuna 1* для концентрации. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$

коэффициент диффузии $D = 0.01$. Рассматриваются следующие типы граничных условий на Γ_w:

без скорости					со скоростью				
$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$	$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$
Тип 1 без времени					*Тип 1* без времени				
30 (1)	89.85	83.50	73.50	65.06	30 (1)	44.40	31.76	23.15	16.78
70 (3)	62.18	62.39	59.84	56.96	70 (3)	17.92	11.85	8.891	6.782
110 (5)	51.05	48.08	42.41	36.61	110 (5)	12.42	6.768	4.681	3.486
210 (10)	7.397	4.893	3.972	3.309	210 (10)	9.150	5.210	3.815	2.906
410 (20)	6.750	4.405	3.397	2.656	410 (20)	8.845	5.065	3.848	2.888
810 (40)	6.726	4.392	3.381	2.649	810 (40)	8.829	5.131	3.786	2.886
Тип 1 со временем					*Тип 1* со временем				
30 (1)	89.85	83.51	73.50	65.07	30 (1)	44.40	31.76	23.15	16.78
70 (3)	62.18	62.40	59.85	56.97	70 (3)	17.92	11.86	8.892	6.783
110 (5)	51.03	48.06	42.40	36.60	110 (5)	12.42	6.768	4.681	3.487
210 (10)	7.397	4.892	3.971	3.308	210 (10)	9.150	5.210	3.815	2.906
410 (20)	6.750	4.405	3.398	2.656	410 (20)	8.844	5.135	3.788	2.888
810 (40)	6.726	4.393	3.381	2.649	810 (40)	8.829	5.131	3.786	2.886
Тип 2 со временем					*Тип 2* без времени				
30 (2)	67.69	49.62	34.35	23.66	30 (2)	51.74	36.78	26.43	18.88
70 (6)	67.83	49.75	34.47	23.78	70 (6)	51.75	36.82	26.45	18.90
110 (10)	64.16	48.15	33.99	23.80	110 (10)	44.35	31.52	22.54	16.19
210 (20)	15.70	13.12	11.58	9.439	210 (20)	18.04	11.93	8.893	6.877
410 (40)	9.781	5.065	3.848	2.939	410 (40)	9.781	5.784	4.241	3.229
810 (80)	6.831	4.736	3.619	2.754	810 (80)	9.114	5.366	3.946	3.001

Таблица 3.6: Относительная L_2 погрешность для концентрации при t_m ($m = 10, 20, 30$ и 40). Граничные условия Дирихле (Тест 2). Слева: многомасштабные базисные функции для концентрации без скорости. Справа: многомасштабные базисные функции для концентрации со скоростью. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$

DBC - Граничные условия типа Дирихле:

$$c = c_w, \quad x \in \Gamma_w,$$

с $c_w = 1$, начальное условие $c_0 = 0$ и $c_{in} = 1$ на Γ_{in}. Вычисляем для $t_{max} = 0.1$ с 40 временными итерациями.

без скорости					со скоростью				
$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$	$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$
Тип 1 без времени					*Тип 1* без скорости				
30 (1)	75.71	89.67	93.60	93.30	30 (1)	47.37	56.09	61.62	59.57
70 (3)	6.233	6.465	8.005	11.93	70 (3)	28.27	31.79	31.76	24.81
110 (5)	4.621	6.042	7.537	10.75	110 (5)	15.85	18.89	18.45	15.28
210 (10)	3.385	4.431	5.718	8.192	210 (10)	8.635	8.903	7.371	9.659
410 (20)	3.164	4.037	5.214	7.593	410 (20)	2.126	2.669	2.823	2.283
810 (40)	3.056	3.896	5.021	7.301	810 (40)	2.109	2.646	2.797	2.270
Тип 1 со временем					*Тип 1* со скоростью				
30 (1)	67.10	82.64	88.56	88.73	30 (1)	47.38	56.10	61.64	59.59
70 (3)	4.373	4.409	5.511	8.065	70 (3)	28.26	31.78	31.76	24.80
110 (5)	2.680	3.212	4.097	5.803	110 (5)	15.85	18.89	18.45	15.29
210 (10)	2.143	2.723	3.338	4.492	210 (10)	8.636	8.902	7.368	9.661
410 (20)	2.123	2.691	3.290	4.409	410 (20)	2.126	2.669	2.822	2.283
810 (40)	2.120	2.688	3.286	4.402	810 (40)	2.109	2.646	2.797	2.270
Тип 2 без времени					*Тип 2* со скоростью				
30 (2)	45.87	48.36	50.73	48.27	30 (2)	69.34	84.22	89.44	89.28
70 (6)	5.842	6.302	7.917	11.05	70 (6)	49.09	61.96	67.20	64.77
110 (10)	2.860	3.474	4.482	6.459	110 (10)	36.89	47.61	51.47	46.71
210 (20)	2.131	2.703	3.338	4.570	210 (20)	7.022	11.53	13.35	16.50
410 (40)	2.104	2.670	3.284	4.465	410 (40)	2.080	2.587	2.744	2.371
810 (80)	2.099	2.664	3.274	4.442	810 (80)	2.069	2.559	2.705	2.327

Таблица 3.7: Относительная погрешность L_2 для концентрации при t_m ($m = 10, 20, 30$ и 40). Граничные условия Неймана (тест 2). Слева: многомасштабные базисные функции для концентрации без скорости Справа: многомасштабные базисные функции для концентрации со скоростью. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$

NBC - Граничные условия типа Неймана:

$$-D\nabla c \cdot n = g, \quad x \in \Gamma_w,$$

с $g = 0.01$, начальное условие $c_0 = 1$ и $c_{in} = 0$ на Γ_{in}. Мы вычисляем для $t_{max} = 0.5$ с 40 временными итерациями.

Грубая сетка состоит из 10 локальных областей.

без скорости					со скоростью				
$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$	$DOF_H^c(M^c)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$
Тип 1 без времени					*Тип 1* без времени				
30 (1)	93.96	93.31	92.55	92.02	30 (1)	71.43	75.52	73.94	72.40
70 (3)	3.892	3.337	2.978	2.793	70 (3)	8.661	8.862	8.827	8.631
110 (5)	0.486	0.488	0.503	0.509	110 (5)	1.208	1.440	1.440	1.492
210 (10)	0.384	0.361	0.362	0.362	210 (10)	0.509	0.619	0.656	0.648
410 (20)	0.380	0.357	0.356	0.357	410 (20)	0.408	0.467	0.490	0.486
810 (40)	0.380	0.356	0.356	0.356	810 (40)	0.399	0.451	0.472	0.469
Тип 1 со временем					*Тип 1* со временем				
30 (1)	93.96	93.31	92.55	92.02	30 (1)	71.43	75.52	73.94	72.40
70 (3)	3.893	3.339	2.980	2.795	70 (3)	8.662	8.863	8.828	8.632
110 (5)	0.486	0.488	0.503	0.509	110 (5)	1.209	1.441	1.514	1.493
210 (10)	0.384	0.361	0.362	0.363	210 (10)	0.509	0.619	0.656	0.649
410 (20)	0.380	0.357	0.356	0.357	410 (20)	0.408	0.467	0.490	0.487
810 (40)	0.380	0.356	0.355	0.356	810 (40)	0.399	0.452	0.472	0.469
Тип 2 без времени					*Тип 2* со временем				
30 (2)	45.03	46.24	45.64	44.56	30 (2)	48.32	51.01	50.58	49.42
70 (6)	3.870	3.959	3.910	3.813	70 (6)	6.069	6.268	6.097	5.845
110 (10)	0.843	0.842	0.841	0.816	110 (10)	0.827	0.875	0.870	0.826
210 (20)	0.505	0.502	0.505	0.492	210 (20)	0.516	0.569	0.570	0.537
410 (40)	0.471	0.465	0.470	0.462	410 (40)	0.475	0.524	0.528	0.502
810 (80)	0.468	0.462	0.467	0.459	810 (80)	0.472	0.520	0.524	0.498

Таблица 3.8: Относительная погрешность L_2 для концентрации при t_m ($m = 10, 20, 30$ и 40). Коэффициент диффузии $D = 0.1$ (Тест 2). Слева: многомасштабные базисные функции для концентрации без скорости. Справа: многомасштабные базисные функции для концентрации со скоростью. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$

Для исследования представленного метода для различных коэффициентов диффузии, рассмотрена задача переноса в Геометрии 1 с граничными условиями Робина (RBC) с $c_w = 1$ и $\alpha = 0.1$, Задано начальное условие $c_0 = 1$ и $c_{in} = 0$ для Γ_{in}. Вычисления проводятся для $t_{max} = 0.7$ с 40 итерациями по времени. Рассмотрены следующие коэффициенты диффузии: $D = 0.1$ и $D = 1$.

Для каждого типа граничных условий и значения коэффициента диффузии

без скорости					со скоростью				
$DOF_c^c(M)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$	$DOF_c^c(M)$	$e(c_{10})$	$e(c_{20})$	$e(c_{30})$	$e(c_{40})$
Тип 1 без времени					*Тип 1* без времени				
30 (1)	98.76	98.43	98.25	98.17	30 (1)	95.75	94.61	94.00	93.75
70 (3)	7.119	7.728	7.684	7.536	70 (3)	5.556	6.164	6.173	6.059
110 (5)	0.699	0.872	0.870	0.846	110 (5)	0.765	0.965	0.988	0.973
210 (10)	0.197	0.251	0.253	0.246	210 (10)	0.299	0.387	0.398	0.391
410 (20)	0.114	0.143	0.145	0.141	410 (20)	0.155	0.204	0.210	0.205
810 (40)	0.108	0.135	0.137	0.133	810 (40)	0.143	0.187	0.192	0.188
Тип 1 со временем					*Тип 1* со временем				
30 (1)	98.76	98.43	98.25	98.17	30 (1)	95.75	94.61	94.00	93.75
70 (3)	7.119	7.728	7.684	7.536	70 (3)	5.556	6.164	6.173	6.059
110 (5)	0.699	0.872	0.872	0.846	110 (5)	0.765	0.965	0.988	0.974
210 (10)	0.197	0.251	0.251	0.246	210 (10)	0.299	0.387	0.398	0.391
410 (20)	0.114	0.143	0.145	0.141	410 (20)	0.155	0.204	0.210	0.205
810 (40)	0.108	0.135	0.137	0.133	810 (40)	0.143	0.187	0.192	0.188
Тип 2 без времени					*Тип 2* со временем				
30 (2)	82.00	80.87	78.91	78.04	30 (2)	82.06	80.92	78.95	78.09
70 (6)	9.095	10.93	11.00	10.74	70 (6)	9.142	10.99	11.05	10.79
110 (10)	2.086	2.625	2.636	2.562	110 (10)	2.094	2.636	2.647	2.572
210 (20)	1.344	1.707	1.718	1.671	210 (20)	1.354	1.720	1.731	1.683
410 (40)	1.149	1.458	1.468	1.428	410 (40)	1.159	1.471	1.481	1.441
810 (80)	1.120	1.421	1.431	1.392	810 (80)	1.130	1.434	1.444	1.405

Таблица 3.9: Относительная погрешность L_2 для концентрации при t_m ($m = 10, 20, 30$ и 40). Коэффициент диффузии $D = 1$ (Тест 2). Слева: многомасштабные базисные функции для концентрации без скорости. Справа: многомасштабные базисные функции для концентрации со скоростью. Эталонное решение с $DOF_h^c = 52050$

подробно исследуем влияние типов многомасштабных базисных функций. Рассмотрены многомасштабные базисные функции *Тип 1* и *Тип 2* и представлены результаты для многомасштабных базисных функций с учетом времени и скорости и без них при построении снэпшот пространства. Заметим, что спектральные задачи аналогичны для всех типов снэпшот и содержат только информацию о диффузии.

На рисунках 3.18 и 3.19 представлены результаты для граничных условий Дирихле и Неймана. Распределения концентраций изображены для эталонных (мелкомасштабных) и многомасштабных решениях на разных временных уровнях t_m для $m = 10, 20$ и 40. В расчетах использовано фиксированное количество многомасштабных базисных функций для поля скорости ($M^u = 20$ *Tuna 1* со временем и скоростью). Наблюдаем хорошие результаты представленного метода решения задач переноса для всех типов неоднородных граничных условий.

В таблицах 3.6 и 3.7 представлены относительные погрешности для концентрации в % для разного количества многомасштабных базисных функций для фиксированного количества многомасштабных базисных функций для поля скорости ($M^u = 20$ *Tun 1*). Относительные погрешности для концентраций представлены для четырех временных слоев t_m с $m = 10, 20, 30$ и 40. Для теста с граничными условиями Дирихле и снэпшотами с информацией о скорости получаем около 2 % ошибки концентрации в последний момент, когда мы берем 20 многомасштабных базисных функций *Tuna 1*. Для базисных функций *Tuna 2* получаем аналогичные результаты для такого же размера системы грубой сетки ($DOF_H^c = 410$). Численные результаты почти одинаковы для любого типа снэпшот пространства из-за большого влияния граничных условий на решение задачи переноса(см. Рисунок 3.18).

Для граничных условий Неймана видим, что многомасштабные базисные функции лучше, когда учитываем скорость в локальных задачах. Например, мы получаем 4-7 % погрешности для базисных функций без скорости и уменьшаем погрешности до 2 % для базиса с информацией о скорости. Однако добавление информации о времени в построение базиса не влияет на ошибки для тестов с любым типом граничных условий. Видим, что базисные функции *Tuna 1* и *2* дают аналогичные результаты для двумерной задачи переноса. Заметим, что для однородных граничных условий не требуется добавлять второе пространство для обработки граничных условий в базисных функциях *Tuna 1*, и размер

системы грубой сетки будет в два раза меньше.

На рисунках 3.20 и 3.21 представлены результаты для $D = 0.1$ и 1 с граничными условиями Робина на границе стенки. Распределения концентраций изображены для эталонных (мелкомасштабных) и многомасштабных решений на разных временных уровнях t_m для $m = 10, 20$ и 40. Использовано фиксированное количество многомасштабных базисных функций для поля скорости ($M^u = 20$ *Тип 1* со временем и скоростью).

Относительные погрешности для концентрации для различных типов многомасштабных базисных функций представлены в таблицах 3.8 и 3.9. Для поля скорости использовали $M^u = 20$ многомасштабных базисных функций *Tuna 1* во всех расчетах. Погрешности концентрации представлены для четырех временных слоев t_m с $m = 10, 20, 30$ и 40. Мы наблюдаем меньшие погрешности для больших значений коэффициентов диффузии. Например, у нас есть 0.4 % погрешности для $M^u = 20$ многомасштабных базисных функций *Tuna 1* для $D = 0.1$ и 0.2 % погрешностей для $D = 0, 1$.

Для больших коэффициентов диффузии погрешности уменьшаются быстрее с увеличением числа базисных функций, и мы можем использовать 5 многомасштабных базисных функций *Tuna 1* для получения результатов с погрешностями менее одного процента. Численные результаты показывают, что результаты лучше для построения базисных функций без учета времени и скорости. Однако они практически одинаковы, и в целом лучше строить основу, используя всю информацию в конструкциях снэпшот пространства.

Для Теста 2 с другими граничными условиями и коэффициентами диффузии мы имеем следующие выводы для задачи переноса:

- Лучшие результаты получаются с многомасштабными базисными функциями, построенными со всей информацией (время и скорость).
- *Типы 1* и *2* дают почти одинаковые результаты при одинаковом размере системы грубой сетки для двумерной задачи. Однако *Тип 1* предпочтительнее

из-за точного определения параметров грубой сетки и может быть более применим для общего случая с однородными граничными условиями.

- Представленный многомасштабный метод дает хорошие результаты с небольшими погрешностями и дает огромное уменьшение размера системы.

3.4 Выводы

В данной главе был разработан метод пониженного порядка многомасштабной модели для решения задач течения и переноса в тонких областях. Для аппроксимации мелкой сетки, применяется разрывный метод Галеркина и решение берется в качестве эталонного решения. Представлены два типа локальных многомасштабных базисных функций для скорости и концентрации, где первый подход основан на разделении параметров макромасштаба по направлению потока для скорости и по типу границы для переноса, а второй подход основан на подходе, сочетающем все возможные направления потоков и транспортов в локальной области. Более того, наши многомасштабные пространства могут точно фиксировать сложные процессы на неровных границах стен с неоднородными граничными условиями. Мы используем численное моделирование для трех тестовых геометрий для двумерных и трехмерных задач. Численное исследование представленного метода было выполнено (1) для разной геометрии расчетной области, (2) для разных граничных условий и коэффициентов диффузии. Предлагаемый многомасштабный метод дает хорошие результаты с небольшими погрешностями и дает огромное сокращение размера системы. Из наших численных результатов видно, что многомасштабные базисные функции *Tun 1* в целом обеспечивают лучшие решения, поскольку такое многомасштабное пространство учитывает различные направления потока и переноса. Также продемонстрировали, что использование оверсэмплинга является эффективным методом для уменьшения размера снэпшот пространства, а также для уменьше-

ния количества погрешностей.

Глава 4

Многомасштабный метод для упрощенной задачи магнитной гидродинамики в перфорированных областях

Магнитогидродинамическая (МГД) система описывает взаимодействия электропроводящих потоков несжимаемой жидкости в присутствии магнитного поля. МГД-потоки обычно используются в следующих контекстах: жидкометаллическое охлаждение ядерных реакторов, электромагнитное литье металлов, МГД-генераторы, ускорители и ионные двигатели МГД, см. [97–99]. Уравнения, моделирующие МГД, представляют собой связь несжимаемых уравнений Навье – Стокса [100, 101] и уравнений Максвелла через силу Лоренца и закон Ома. В данной главе рассматривается упрощенная задача МГД в перфорированных областях и предложен многомасштабный метод его решения на грубой сетке. Рассматривается частный двумерный случай МГД-уравнений. Для аппроксимации на мелкой сетке используется смешанная формулировка задачи для обоих уравнений. Для того чтобы решить полученную нелинейую систему используется метод простых итераций Пикара для разделения уравнений. Для построения многомасштабной аппроксимации на грубой сетке используется смешанный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задачи магнитного поля [40, 53, 54, 102], а для задачи течения применяется DG-GMsFEM. Построение базисных функций в обоих методах следует общей структуре GMsFEM с использованием локальных снэпшотов и локальных спектральных задач. Численные результаты представлены для модельной задачи в двумерной перфорированной области. Модельная задача является частным случаем общей трехмерной задачи. Изучается влияние количества многомасштабных базисных функций на точность методов и показано, что используемые методы обеспечивает хорошую

точность с небольшим количеством базисных функций.

4.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Полные стационарные уравнения МГД для несжимаемой жидкости в $\Omega \subset R^3$ представляют собой сложную систему, связывающую поле скоростей $u = (u_1, u_2, u_3)$, магнитное поле $B = (B_1, B_2, B_3)$ и давление p:

$$\begin{aligned} -R_e^{-1}\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p - S_c \operatorname{curl} B \times B = f, \quad x \in \Omega, \\ R_{e_m}^{-1} \operatorname{curl}(\operatorname{curl} B) - \operatorname{curl}(u \times B) = g, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot B = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где R_e - гидродинамическое число Рейнольдса, R_{e_m} - магнитное число Рейнольдса, S_c - параметр взаимодействия. Мы отсылаем читателей к [103] для получения подробной информации о существовании, единственности и аппроксимации конечными элементами решений (4.1).

В данной работе рассматривается магнитное поле $B = (0, 0, B)$ перпендикулярное полю скорости $u = (u_1, u_2, 0)$ (4.1) в двумерной перфорированной области Ω, таким образом упрощенные уравнения МГД без подъёмной силы и гидродинамического конвективного члена описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (uB) - \nabla \cdot (R_{e_m}^{-1} \nabla B) = 0, \quad x \in \Omega, \\ -R_e^{-1}\Delta u + \nabla p - S_c B \nabla B = 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Пусть $D = R_{e_m}^{-1}$, $q = -D\nabla B$ является потоком и Ω является перфорированной

областью (смотрите Рис. 1.1). Запишем уравнения (4.2) в смешанной форме

$$\begin{aligned} D^{-1}q + \nabla B &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot q + \nabla \cdot (uB) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ -R_e^{-1}\Delta u + \nabla p + S_c D^{-1} B q &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{4.3}$$

и рассмотрим со следующими граничными условиями

$$u = 0, \quad x \in \Gamma_P, \quad (\nabla u - p\mathscr{I}) \cdot n = 0, \quad x \in \partial\Omega/\Gamma_P,$$

$$B = 0, \quad x \in \Gamma_P, \quad B = g, \quad x \in \Gamma_1, \quad q \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_2,$$

где Γ_P граница перфорации, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_P = \partial\Omega$, n - единичный вектор внешней нормали на $\partial\Omega$ и $\mathscr{I}$ представляет собой единичную матрицу $n \times n$.

Для линеаризации используем итерации Пикара и получаем следующий алгоритм

- Найти (q^{k+1}, B^{n+1}) из

$$\begin{aligned} D^{-1}q^{k+1} + \nabla B^{k+1} &= 0, \\ \nabla q^{k+1} + \nabla (u^k B^{k+1}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

- Найти (u^{k+1}, p^{n+1}) из

$$\begin{aligned} -R_e^{-1}\Delta u^{k+1} + \nabla S_c p^{k+1} + S_c D^{-1} B^{k+1} q^{k+1} &= 0, \\ \nabla u^{k+1} &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь k - нелинейная итерация.

Имеем следующие вариационные формулировки: найти $(q^{k+1}, B^{n+1}) \in V^q \times Q^B$ такие что

$$\begin{aligned} m(q^{k+1}, v) + g(B^{k+1}, v) &= f_q(v) \quad \forall v \in V^q, \\ g(q^{k+1}, r) + c(B^{k+1}, r) &= 0, \quad \forall r \in Q^B, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$m(q, v) = -\int_\Omega D^{-1} q \cdot v \, dx, \quad g(B, q) = \int_\Omega B \nabla q \, dx,$$

$$c(B,r) = \int_\Omega (u^k \nabla B) \cdot r\, dx, \quad f_q(v) = \int_{\Gamma_1} g\, v \cdot n\, ds.$$

Мы можем переписать аппроксимацию на мелкой сетке в матричном виде

$$\begin{pmatrix} M & G^T \\ G & C^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{k+1} \\ B^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_q \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где $C^k = C(u^k)$. Задача решается на мелкой сетке с использованием элемента Равиарта-Томаса низшего порядка.

Для аппроксимации задачи течения на мелкой сетке используем разрывный метод Галеркина [93, 104–108]. Пусть $\mathscr{T}^h$ - мелкосеточное разбиение области Ω, $\mathscr{E}^h$ - множество граней в $\mathscr{T}^h$ и $\mathscr{E}^h = \mathscr{E}^h_{int} \cup \mathscr{E}^h_{out}$ ($\mathscr{E}^h_{int}$ - множество внутренних граней и $\mathscr{E}^h_{out}$ - множество внутренних граней). Мы используем коэффициенты K и E для обозначения ячейки и грани в мелкой сетке $\mathscr{T}^h$. Определяем скачок $[u]$ и среднее значение $\{u\}$ функции u на внутренней грани

$$[u]_E = u|_{K^+} - u|_{K^-}, \quad \{u\}_E = \frac{u|_{K^+} + u|_{K^-}}{2},$$

где n - единичный вектор нормали на E, K^+ и K^- две ячейки разделяют грань E. Для $E \in \mathscr{E}^h_{out}$, мы определяем

$$[u]_E = u|_E, \quad \{u\}_E = u|_E.$$

У нас есть следующие вариационные формулировки подхода DG: найти $(u^{k+1}, p^{n+1}) \in V^u \times Q^p$ такие что

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{DG}}(u^{k+1}, v) + b_{\mathrm{DG}}(p^{k+1}, v) &= f_u(v), \quad \forall v \in V^u, \\ b_{\mathrm{DG}}(u^{k+1}, r) &= 0, \quad \forall r \in Q^p, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где

$$a_{\mathrm{DG}}(u,v) = \int_\Omega R_e^{-1} \nabla u \cdot \nabla v\, dx -$$

$$- \sum_{E \in \mathscr{E}^h} \int_E \left(\{R_e^{-1} \nabla u \cdot n\} \cdot [v] + \{R_e^{-1} \nabla v \cdot n\} \cdot [u] - \int_E \frac{\gamma}{h} R_e^{-1} [u] \cdot [v] \right) ds,$$

$$b_{\mathrm{DG}}(u,p) = -\sum_{K\in\mathscr{T}^H}\int_K p\nabla u\,dx + \sum_{E\in\mathscr{E}^h}\int_E p\,[u]\cdot n\,ds,$$

$$f_u(v) = -\int_\Omega (S_c D^{-1} B^{k+1} q^{k+1})\cdot v\,dx.$$

Пространство скоростей мелкого масштаба $V^u = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in (\mathbb{P}_1(T))^2, \forall K \in \mathscr{T}^h\}$ содержит функции, которые являются кусочно-линейными в каждом элементе мелкой сетки K и непрерывны по краям мелкой сетки, но разрывны по краям грубой сетки. Для давления используем пространство кусочно-постоянных функций.

В матричной форме имеем

$$\begin{pmatrix} A & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ p^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_u^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где $F_u^{k+1} = F_u(B^{k+1}, q^{k+1})$.

4.2 Аппроксимация на грубой сетке

Для построения многомасштабного пространства для аппроксимации грубой сетки, используем смешанный GMsFEM [40, 53, 54, 102, 109]. Пусть $\mathscr{T}^H$ - грубая сетка области Ω и $\mathscr{E}^H$ - множество всех ребер грубой сетки, где, H - размер грубой сетки и N_e - общее количество ребер.

Определим окрестность ребер $E_i \in \mathscr{E}^H$ как

$$\omega_i = \bigcup_j \left\{K_j \in \mathscr{T}^H \,|\, E_i \in \partial K_j\right\}.$$

и ω_i представляет собой объединение двух блоков грубой сетки, когда E_i лежит внутри области Ω (см. рисунок 4.1).

Строим многомасштабное пространство для потока

$$V^{q,H} = \mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{N_q}, \quad Q^{B,H} = \{r \in L^2(\Omega) : r|_K \in P^0(K), \forall K \in \mathscr{T}_H\}$$

и для B, используем пространство кусочно-постоянных функций над грубой триангуляцией $\mathscr{T}^H$. Здесь ψ_i многомасштабные базисные функции, которые под-

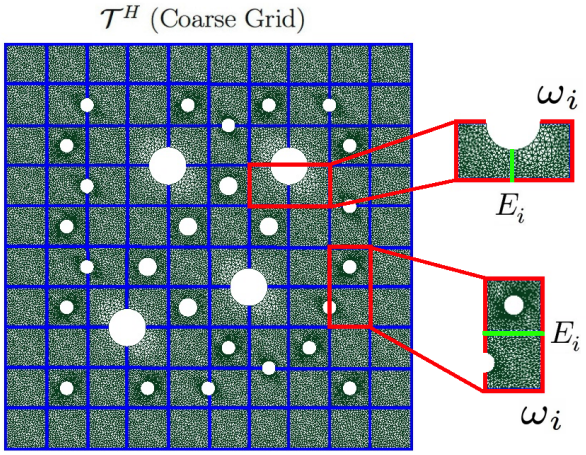


Рисунок 4.1: Иллюстрация грубой сетки и локальной области (ω_i) для задачи магнитного поля.

держиваются в грубой окрестности. ω_i, $N_q = \dim(V^{q,H})$ - количество базисных функций и $N_B = \dim(Q^{B,H})$ равно количеству ячеек грубой сетки.

Для аппроксимации на грубой сетке используем смешанный GMsFEM и имеем следующую вариационную формулировку: найти $(q_H^{k+1}, B_H^{k+1}) \in V^{q,H} \times Q^{B,H}$ такие что

$$\begin{aligned} m(q_H^{k+1}, v) + g(B_H^{k+1}, v) &= f(v) \quad \forall v \in V^{q,H}, \\ g(q_H^{k+1}, r) + c(B_H^{k+1}, r) &= 0, \quad \forall r \in Q^{B,H}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

Мы можем записать нашу систему в матричной форме для каждой нелинейной итерации.

$$\begin{pmatrix} M_H & G_H \\ G_H^T & C_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_H \\ B_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_H \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

где

$$M_H = R_q M R_q^T, \quad G_H = R_q G R_B^T, \quad C_H = R_B C R_B^T, \quad F_H = R_q F_q.$$

Здесь R_q и R_B - матрицы проекции

$$R_q = \left[\psi_1, \ldots, \psi_{N_q}\right], \quad R_B = \left[\eta_1, \ldots, \eta_{N_B}\right].$$

Заметим, что $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_q}$ являются многомасштабными базисными функциями для потока и $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_B}$ являются базисными функциями для B.

Для построения многомасштабного пространства для потока начнем с построения пространства снэпшот, которое содержит обширный набор базисных функций, сформированных путем решения локальных задач со всеми возможными граничными условиями с точностью до разрешения мелкой сетки. После этого решаем спектральную задачу для выбора доминантных мод в пространстве снэпшот.

Снэпшот пространство Решаем следующую задачу на грубой окрестности ω_i соответствующей ребру грубой сетки $E_i \in \mathscr{E}^H$: Найти (ϕ_l^i, η) такое что

$$\begin{aligned} m(\phi_l^i v) + g(\eta, v) &= 0, \quad v \in V_h^i, \\ g(\phi_l^i, r) &= \int_{\omega_i} c\, r\, dx, \quad r \in Q_h^i, \end{aligned} \tag{4.12}$$

с граничным условием $\phi_l^i \cdot n_i = 0$ на $\partial\omega_i$ и с дополнительным граничным условием $\phi_l^i \cdot n_i = \delta_l^i$ на грубом ребре E_i, где n_i - вектор внешней единичной нормали на $\partial\omega_i$. Локальная задача (4.12) решается отдельно на каждом элементе грубой сетки $K_j^i \subset \omega_i$ с использованием мелкой сетки, определенной в ω_i по элементу Равиарта-Томаса самого низкого порядка. Здесь $E_i = \cup_{l=1}^{J_i} e_l$, где e_l ребра с мелкой сеткой на E_i/Γ_P, и J_i - количество ребер тонкой сетки на E_i/Γ_P. Дельта-функция δ_l^i - это кусочно-постоянная функция, определенная на E_i/Γ_P такая, что она имеет значение 1 на e_l и значение 0 на других ребрах мелкой сетки. Постоянная c в (4.12) выбирается из условия совместимости, $c = \frac{1}{|K_j^i|}\int_{E_i} \phi_l^i \cdot n_i\, ds,\ j = 1, 2.$

Совокупность решений вышеуказанных локальных проблем генерирует пространство снэпшот в ω_i

$$V^{i,\text{snap}} = \{\phi_l^i : 1 \le l \le J_i\}, \quad R_{i,\text{snap}} = \left[\phi_1^i, \ldots, \phi_{J_i}^i\right].$$

Многомасштабное пространство. Для понижения на снэпшот пространстве решаем следующую локальную спектральную задачу в ω_i

$$A^{i,\text{snap}} \psi_k^{i,\text{snap}} = \lambda_k S^{i,\text{snap}} \psi_k^{i,\text{snap}}, \tag{4.13}$$

где

$$A^{i,\text{snap}} = [a_{mn}^{\text{snap}}] = a_i(\phi_m^i, \phi_n^i) = R_{i,\text{snap}} A^i R_{i,\text{snap}}^T,$$

$$S^{i,\text{snap}} = [m_{mn}^{\text{snap}}] = s_i(\phi_m^i, \phi_n^i) = R_{i,\text{snap}} S^i R_{i,\text{snap}}^T,$$

и

$$a_i(q,v) = \int_{E_i} (q \cdot n_i)(v \cdot n_i) ds, \quad s_i(q,v) = \int_{\omega_i} q\, v\, dx + \int_{\omega_i} \operatorname{div} q \operatorname{div} v dx.$$

Для того чтобы сформировать многомасштабное пространство, расположим собственные значения в порядке возрастания, выбираем первые собственные значения M_i и далее выбираем соответствующие собственные вектора $\psi_k^i = R_{i,\text{snap}} \psi_k^{i,\text{snap}}$ как базисные функции ($k = 1, ..., M_i$)

$$V^{q,H} = \text{span}\{\psi_k^i : 1 \le i \le N_e, 1 \le k \le M_i\}, \quad R_q = \left[\psi_1^1, ..., \psi_{M_1}^1, ..., \psi_1^{N_e}, ..., \psi_{M_{N_e}}^{N_e}\right].$$

Это пространство будет использоваться как пространство аппроксимации для задачи магнитного поля. Для аппроксимации задачи течения на грубой сетке мы используем DG-GMsFEM (смотрите раздел 1.2.2).

4.3 Численные результаты

Представлены численные результаты для модельной задачи в перфорированной области. Представленный метод основан на вычислениях локальных многомасштабных базисных функций для формирования проекционной матрицы, которая используется для построения аппроксимации меньшей размерности. После получения решения системы пониженного порядка восстанавливаем разрешение на мелкой сетке, используя транспонированную матрицу проекций. Для расчета ошибок, мы используем решение задачи с аппроксимацией конечных элементов на мелкой сетке в качестве эталонного решения.

Расчетная перфорированная область представлена на рисунке 4.2 и имеет размер $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Для аппроксимации перфорированной области используется неструктурированная мелкая сетка с треугольными ячейками, которая

разрешает перфорацию на уровне сетки. Это может привести к большой дискретной системе уравнений для традиционных аппроксимаций методом конечных элементов. Для уменьшения размера системы, представлен многомасштабный решатель, который используется для построения приближения пониженного порядка на грубой сетке. Грубая сетка может быть структурированной или неструктурированной. В данной работе для простоты рассмотрена структурированная сетка размером 10×10, чтобы проиллюстрировать многомасштабный метод. Во многих приложениях проще использовать структурированные грубые сетки и разрешать эффекты подсеток, как мы это делаем в наших вычислениях. Строим неструктурированную мелкую сетку, содержащую 61912 ячеек, 93668 граней и 31727 вершин. Грубая сетка однородна и содержит 100 ячеек, 220 граней и 121 вершину.

Установим, что $R_e^{-1} = 1$, $D = 10$, $S_c = 1$ и $g = 1$.

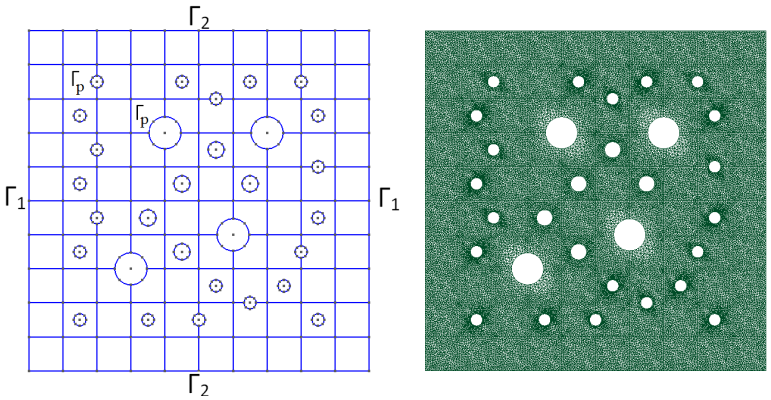


Рисунок 4.2: Перфорированная область с грубой (слева) и мелкой сеткой (справа)

На рисунках 4.3, 4.4 и 4.5, представлены результаты предлагаемого метода многомасштабного анализа. Распределение магнитного поля (B и q) представлено на рисунках 4.3 и 4.4. На рисунке 4.5, показываем поле скорости. На верхних рисунках представлены мелкомасштабные решения. Многомасштабные решения представлены на нижнем рисунке с $DOF_c = 980$ для q и $DOF_c = 4100$ для поля скоростей u. Заметим, что используем кусочно-постоянные функции для

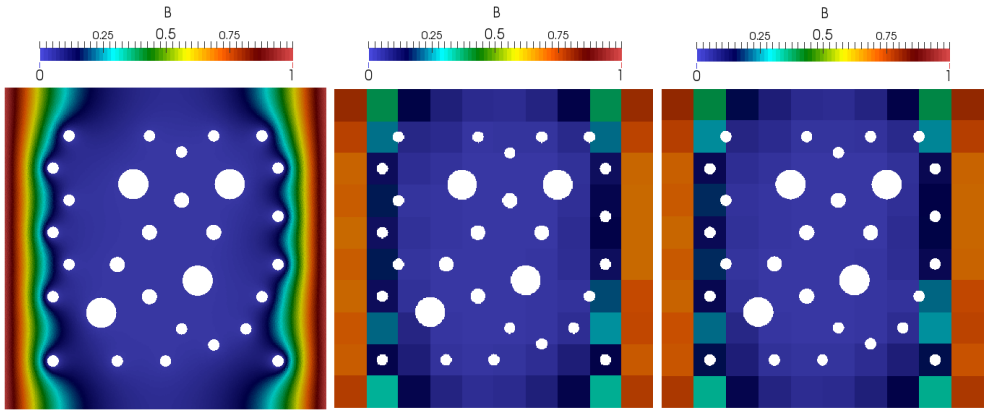


Рисунок 4.3: Распределение магнитного поля. Слева: Эталонное решение (мелкая сетка), $DOF_f = 155580$. Центр: Среднее значение ячейки для эталонного (мелкая сетка) решения. Справа: Многомасштабное решение, $DOF_c = 980$ (0.63 % из DOF_f).

многомасштабного решения B. Мы используем итерации Пикара и выполняем 3 итерации для всех случаев с $\varepsilon_B = 10^{-9}$.

Вычисляем следующие погрешности:

$$e^u = \sqrt{\frac{\int_\Omega |u - u_{ms}|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}} \cdot 100\%, \quad e^q = \sqrt{\frac{\int_\Omega |q - q_{ms}|^2 dx}{\int_\Omega q^2 dx}} \cdot 100\%,$$

$$e^{\overline{p}}_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_\Omega |\overline{p} - p_H|^2 dx}{\int_\Omega \overline{p}^2 dx}}, \cdot 100\%, \quad e^{\overline{B}}_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_\Omega |\overline{B} - B_H|^2 dx}{\int_\Omega \overline{B}^2 dx}} \cdot 100\%,$$

где (q, B) и (u, p) являются эталонными решениями с использованием традиционных решателей с мелкой сеткой, $\bar{B}$ и $\bar{p}$ - среднее значение грубой ячейки для эталонных решений, (q_H, B_H) и (u_H, p_H) являются решениями на грубой сетке с использованием представленных многомасштабных решателей, $q_{ms} = R_q^T q_H$ и $u_{ms} = R_u^T u_H$ являются реконструированными многомасштабными решениями.

В таблице 5.1, показываем относительную погрешность для q, B, u и p. Мы представили погрешности для разных скоростей: (1) многомасштабные скорости с $DOF_c = 1100$ (10 базисов), (2) многомасштабные скорости с $DOF_c = 2100$ (20

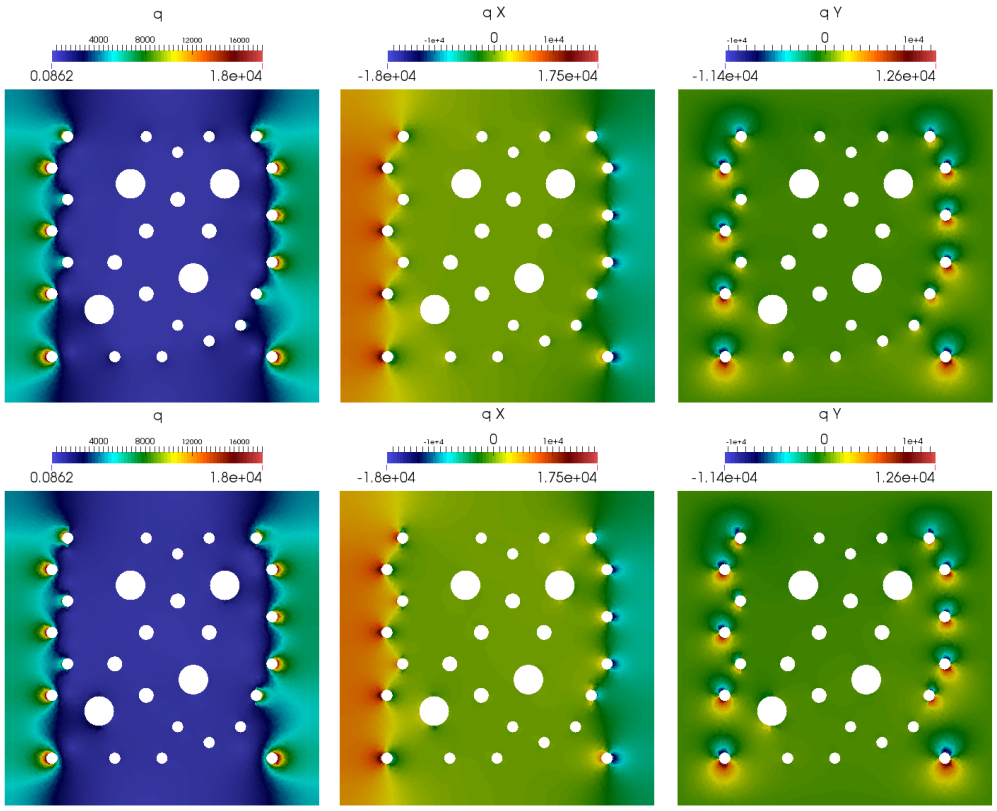


Рисунок 4.4: Распределение потока. Магнитудное значение потока, x и y компоненты потока, q, q_x, q_y (слева направо). Сверху: Эталонное решение (мелкая сетка), $DOF_f = 155580$. Снизу: Многомасштабное решение, $DOF_c = 980$ (0.63 % из DOF_f).

базисов), (3) многомасштабные скорости с $DOF_c = 4100$ (40 базисов), (4) многомасштабные скорости с $DOF_c = 6100$ (60 базисов) и (5) решение на мелкой сетке с $DOF_f = 433384$. Мы представили погрешности для u и p для разных B: (1) многомасштабное магнитное поле с $DOF_c = 320$ (1 базис), (2) многомасштабное магнитное поле с $DOF_c = 540$ (2 базиса), (3) многомасштабное магнитное поле с $DOF_c = 760$ (3 базиса), (4) многомасштабное магнитное поле с $DOF_c = 980$ (4 базиса) и (5) решение на мелкой сетке с $DOF_f = 155580$. Видим, что относительная погрешность для q уменьшилась с 4.1% до 0.8% и а грубая средняя ошибка ячейки для B составляет около одного процента. Относительная погрешность скорости уменьшается с 60% до 8% с большим количеством многомасштабных базисных функций.

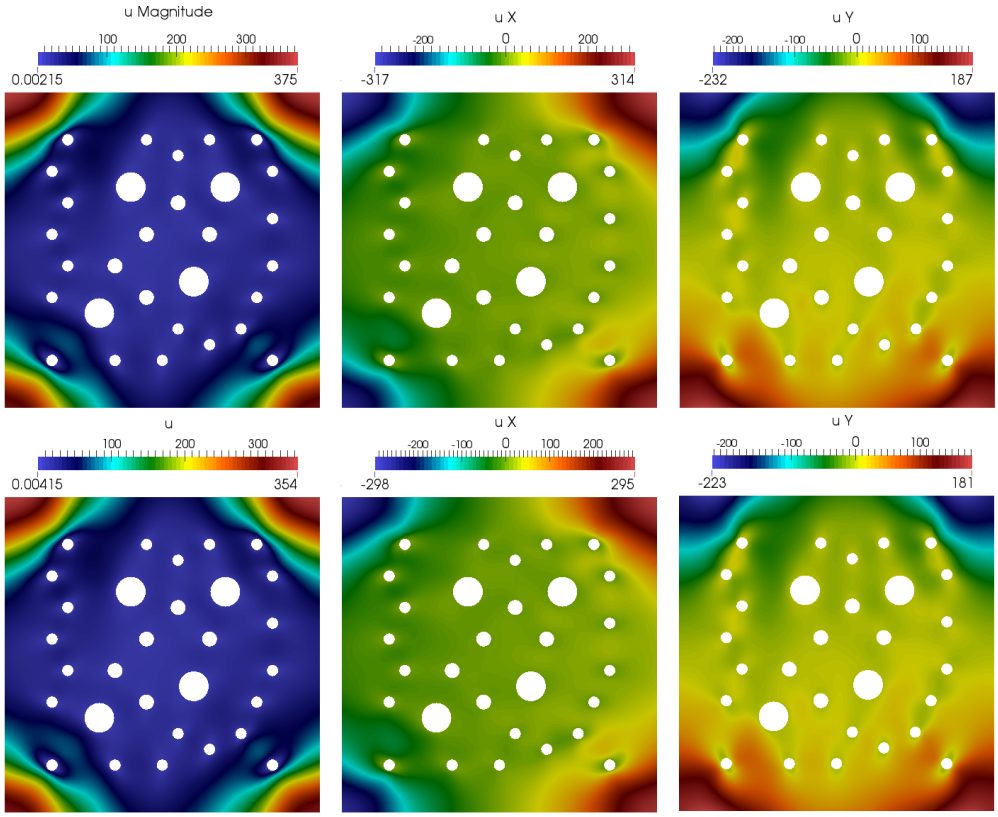


Рисунок 4.5: Распределение скорости. Магнитудное значение скорости, x и y компоненты скорости, u, u_x u_y (слева направо). Сверху: Эталонное решение (мелкая сетка), $DOF_f = 433384$. Снизу: Многомасштабное решение, $DOF_c = 4100$ (0.9 % из DOF_f).

4.4 Выводы

В данной главе была рассмотрена задача магнитной гидродинамики (МГД) в перфорированной области. Математическая модель описывалась с использованием связанной системы уравнений для магнитного поля и задачи течения. Для решения задачи магнитного поля на мелкой сетке построена аппроксимация смешанным методом конечных элементов. Для уменьшения размера дискретной системы на мелкой сетке представлен смешанный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (mixed GMsFEM), позволяющий аккуратно аппроксимировать задачу на грубой сетке. Представлены численные результаты для двумерной модельной задачи в перфорированной области и исследовано

DOF_c^B	e^q (%)	$e^{\overline{B}}$ (%)
$DOF_c^u = 1100$		
320	4.170	1.690
540	1.181	1.578
760	0.958	1.578
980	0.835	1.578
$DOF_c^u = 2100$		
320	4.165	1.688
540	1.176	1.577
760	0.953	1.577
980	0.831	1.577
$DOF_c^u = 4100$		
320	4.164	1.688
540	1.176	1.577
760	0.952	1.577
980	0.830	1.577
$DOF_c^u = 6100$		
320	4.163	1.688
540	1.176	1.577
760	0.952	1.577
980	0.830	1.577
$DOF_f^u = 433384$		
320	4.161	1.688
540	1.174	1.577
760	0.954	1.577
980	0.832	1.577

DOF_c^u	e^u (%)	$e^{\overline{p}}$ (%)
$DOF_c^B = 320$		
1100	60.501	25.800
2100	16.689	2.005
4100	9.792	1.138
6100	8.843	1.078
$DOF_c^B = 540$		
1100	60.477	25.798
2100	16.694	1.996
4100	9.792	1.138
6100	8.843	1.078
$DOF_c^B = 760$		
1100	60.473	25.797
2100	16.695	1.997
4100	9.792	1.138
6100	8.843	1.078
$DOF_c^B = 980$		
1100	60.472	25.797
2100	16.694	1.997
4100	9.792	1.138
6100	8.843	1.078
$DOF_f^B = 155580$		
1100	59.420	25.300
2100	16.615	1.878
4100	9.754	1.112
6100	8.809	1.055

Таблица 4.1: Относительные погрешности для потока, магнитного поля, скорости и давления с разным количеством многомасштабных базисных функций для ячеек 10x10. $DOF_f^B = 155580$, $DOF_f^u = 433384$

влияние количества многомасштабных базисных функций на точность метода. В предложенном многомасштабном решателе основной выигрыш в вычислениях обусловлен небольшим количеством многомасштабных базисных функций, которые используются для аппроксимации полей потока и скорости.

Глава 5

Многомасштабное моделирование задач теплопереноса с моделью Бринкмана

В данной главе рассматривается численная реализация процессов тепломассопереноса в неоднородных средах. Математическая модель описывается системой уравнений для температуры, давления и скорости. Для моделирования задачи течения в области с малопроницаемыми препятствиями используется модель Бринкмана. Аппроксимация на мелкой сетке построена на основе метода разрывного Галеркина (IPDG) для задач теплообмена и течения. Для аппроксимации на грубой сетке для задачи течения используется обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина. В данном методе многомасштабная базисная функция строится в каждой грубой ячейке. Для скорости строится снэпшот пространство, которое сформировано путем решения локальных задач. Далее решается спектральная задача для уменьшения размерности снэпшот пространства. Для давления используются кусочно-постоянные функции на грубой сетке. Численные результаты представлены для двумерной модельной задачи с различным числом многомасштабных базисных функций. Исследование работоспособности представленного метода проведено для двух грубых сеток. Проведено сравнение точности метода для разного количества многомасштабных базисных функций.

5.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассматриваются задачи переноса и течения в области с слабопроницаемыми препятствиями $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 - область свободного движения жидкости, а Ω_2 подобласть препятствий. Уравнение переноса моделирует теплообмен в неод-

нородных областях со свободным течением в подобласти Ω_1. Для моделирования течения в неоднородных областях со свободным течением в подобласти Ω_1 и течением Дарси в препятствиях с низкой проницаемостью используем модель Бринкмана (модель Дарси-Стокса-Бринкмана) [110–113]. Такие математические модели используются, например, для описания сложных процессов в пористых средах на уровне пор [47, 67, 73, 114].

Рассматривается задача течения и тепломассопереноса в неоднородной области $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Уравнение течения описывается моделью Бринкмана

$$\begin{aligned} \mu \Delta u - \nabla p + Au = 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{5.1}$$

со следующими граничными условиями

$$u = g, \quad x \in \Gamma_L, \quad (\mu \nabla u - p\mathscr{I}) \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_R, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma_T \cup \Gamma_B,$$

где μ - вязкость, p - давление, $A = k^{-1}$. Здесь проницаемость k в области препятствий Ω_2 определяется с использованием уравнения Кармана-Козени

$$A = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_1, \\ -C\dfrac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 + b}, & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

где C - постоянная, учитывающая морфологию мягких областей, ε - пористость, b - постоянная, введенная во избежание деления на ноль.

Уравнение теплопередачи описывается уравнением конвекции-диффузии с заданным полем скоростей u

$$\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} T \right) - \operatorname{div} \cdot (\lambda \operatorname{grad} T) = 0, \quad x \in \Omega \tag{5.2}$$

с начальным условием $T = T_0$ и граничными условиями

$$T = T_1, \quad x \in \Gamma_L, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_R \cup \Gamma_T \cup \Gamma_B,$$

где $\partial\Omega = \Gamma_L \cup \Gamma_R \cup \Gamma_T \cup \Gamma_B$.

Для коэффициентов уравнения имеем следующие соотношения

$$\alpha = \begin{cases} \rho_w c_w, & x \in \Omega_1, \\ \rho_{sc} c_{sc}, & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_w, & x \in \Omega_1, \\ \lambda_{sc}, & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

где ρ_w, c_w, λ_w и ρ_{sc}, c_{sc}, λ_{sc} - плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность воды и гранул соответственно.

Для аппроксимации задачи относительно пространственных переменных используем разрывный метод Галеркина (IPDG) как для уравнений теплообмена, так и для уравнений течения (5.2) и (5.1). Для стандартной аппроксимации мы строим достаточно мелкую сетку, которая разрешает все мелкомасштабные неоднородности на уровне сетки. Пусть $\mathscr{T}^h$ - триангуляция вычислительной области Ω and Γ^h множество всех граней между элементами $\mathscr{T}^h$. На ребре $E \in \Gamma^h$ между элементами K_1 и K_2, определим среднее значение и скачок функции u

$$\{u\} = \frac{u|_{K_1} + u|_{K_2}}{2}, \quad [u] = u|_{K_1} - u|_{K_2}.$$

Мелкомасштабное пространство скоростей $V^h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in (\mathbb{P}_1(K))^2, \forall K \in \mathscr{T}^h\}$ содержит функции, кусочно-линейные в каждом элементе тонкой сетки K и разрывные по краям грубой сетки. Для давления используем пространство кусочно-постоянных функций Q^h. У нас есть следующая вариационная формулировка для задачи течения (5.1): найти $(u,p) \in V^h \times Q^h$ такую, что

$$\begin{aligned} a_{DG}(u,v) + b_{DG}(p,v) = 0, \quad \forall v \in V^h \\ b_{DG}(u,q) = 0, \quad \forall r \in Q^h, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$$\begin{aligned} a_{DG}(u,v) = & \sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K (\mu \nabla u \cdot \nabla v + A\, u v) dx \\ & - \sum_{E \in \Gamma_h} \int_E \left([\mu\, u \cdot n] \{v\} - \{\mu\, v \cdot n\} [u] - \{\mu\} \frac{\gamma_u}{h} [u] [v] \right) ds, \\ b_{DG}(u,p) = & \sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K p \nabla u dx + \sum_{E \in \Gamma_h} \int_E \{p\} [u \cdot n]\, ds, \end{aligned}$$

где γ_u штрафной параметр и n единичный вектор нормали к ребру E.

Вариационная формулировка уравнения переноса (5.2) с использованием разрывного метода Галеркина (IPDG) определяется следующим образом: найдите $T^{n+1} \in W^h$ так, чтобы

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K(\alpha\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}r+\alpha\, u\cdot\nabla T^{n+1}\, r+\lambda\,\nabla T^{n+1}\cdot\nabla r)\,dx \\
&+\sum_{E\in\Gamma_h}\int_E[T^{n+1}u\cdot n][r]\,ds-\sum_{E\in\Gamma_h}\int_E(\{\lambda\,\nabla r\}\cdot[T^{n+1}n]-\{\lambda\,\nabla T^{n+1}\}\cdot[rn] \qquad (5.4)\\
&\qquad\qquad +\{\lambda\}\frac{\gamma_T}{h}\cdot[T^{n+1}n]\,[rn])\,ds=0,\quad \forall r\in W^h,
\end{aligned}$$

где γ_T штрафной параметр и $W^h=\{v\in L^2(\Omega): v|_K\in(\mathbb{P}_1(K))^2, \forall K\in\mathscr{T}^h\}$. Здесь мы используем неявную схему для аппроксимации по времени временным слоем τ.

5.2 Аппроксимация на грубой сетке

Далее представлено построение многомасштабного пространства для аппроксимации грубой сетки для скорости. Заметим, что в многомасштабном методе DG мы строим многомасштабный базис в каждом грубом блоке [39, 47, 87, 115, 116].

Пусть $\mathscr{T}^H$ - грубо-сеточное разбиение области Ω с размером ячейки H и $\mathscr{E}^H$ - множество граней в $\mathscr{T}^H$, $\mathscr{E}^H=\mathscr{E}^H_{int}\cup\mathscr{E}^H_{out}$. Для аппроксимации давления используем кусочно-постоянное функциональное пространство $Q^{p,H}$ над грубыми ячейками. Определим $V^{u,H}$ как многомасштабное пространство скоростей, которое содержит множество базисных функций, поддерживаемых в каждом грубом блоке K (см. Рис.5.1).

Строим многомасштабное пространство для скорости $\mathscr{T}^H$

$$V^{u,H}=\operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{N_u},\quad Q^{p,H}=\{r\in L^2(\Omega): r|_K\in P^0(K),\forall K\in\mathscr{T}_H\}$$

а для давления используем пространство кусочно-постоянных функций над грубой триангуляцией $N_u=\dim(V^{u,H})$ - количество базисных функций и $N_p=$

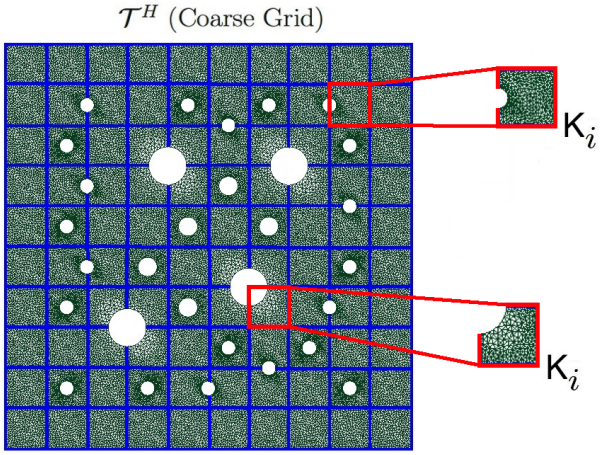


Рисунок 5.1: Иллюстрация грубой сетки и локальной области (K_i) для задачи течения.

$\dim(Q^{p,H})$ равно количеству ячеек грубой сетки.

Для аппроксимации на грубой сетке используем DG-подход и получим следующую вариационную формулировку: найти $(u_H^{k+1}, p_H^{k+1}) \in V^{u,H} \times Q^{p,H}$ такое что

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{DG}}(u_H^{k+1}, v) + g_{\mathrm{DG}}(p_H^{k+1}, v) &= f(v) \quad \forall v \in V^{u,H}, \\ g(u_H^{k+1}, r) &= 0, \quad \forall r \in Q^{p,H}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

Можем записать систему в матричной форме для каждой нелинейной итерации

$$\begin{pmatrix} A_H & G_H \\ G_H^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_H \\ p_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_H \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

где

$$A_H = R_u A R_u^T, \quad G_H = R_u G R_p^T, \quad F_H = R_u F_u.$$

Здесь R_u и R_p - матрицы проекции

$$R_u = [\psi_1, \ldots, \psi_{N_u}], \quad R_p = [\eta_1, \ldots, \eta_{N_p}],$$

где $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_u}$ являются многомасштабными базисными функциями для скорости.

Для построения многомасштабного пространства для скорости начнем с построения пространства снэпшот, которое содержит обширный набор базисных

функций, сформированных путем решения локальных задач со всеми возможными граничными условиями с точностью до разрешения сетки. После этого решаем спектральную задачу для выбора доминантных мод пространства снэпшот.

Снэпшот пространство. Строим локальные снэпшот базисы в каждом грубом блоке $K_i, (i = 1, \cdots, N)$, где N - количество грубых блоков в Ω. Локальное снэпшот пространство состоит из функций, которые являются решениями $\phi_l^i \in V^u(K_i)$

$$\begin{aligned} -R_e^{-1}\Delta\phi_l^i + \nabla\eta = 0, \qquad & x \in K_i, \\ \nabla \cdot \phi_l^i = c, \qquad & x \in K_i, \end{aligned} \tag{5.7}$$

с $\phi_l^i = \delta_i^l$ на ∂K_i $(l = 1, \cdots, J_i)$, где J_i количество узлов мелкой сетки на границе K_i, и δ_i^l - дискретная дельта-функция, определенная на ∂K_i. Эта задача решается на мелкой сетке с использованием некоторых подходящих аппроксимационных пространств (DG). Здесь постоянная c выбрана из условия совместности, $c = \frac{1}{|K_i|}\int_{\partial K_i} \delta_i^l \cdot n\, ds$.

Используя локальные решения, формируем локальное пространство снэпшот в K_i

$$V^{i,\text{snap}} = \{\phi_l^i : 1 \le l \le J_i\}, \quad R_{i,\text{snap}} = \left[\phi_1^i, \ldots, \phi_{J_i}^i\right].$$

Многомасштабное пространство. Для уменьшения размера снэпшот пространства, мы решаем следующую локальную спектральную задачу в пространстве снэпшот для K_i

$$A^{i,\text{snap}}\psi_k^{i,\text{snap}} = \lambda_k S^{i,\text{snap}}\psi_k^{i,\text{snap}}, \tag{5.8}$$

где

$$A^{i,\text{snap}} = R_{i,\text{snap}}A^i R_{i,\text{snap}}^T, \quad S^{i,\text{snap}} = R_{i,\text{snap}}S^i R_{i,\text{snap}}^T,$$

и A^i - матричное представление билинейной формы $a_i(u,v)$ и S^i - матричное представление билинейной формы $s_i(u,v)$

$$a_i(u,v) = \int_{K_i} R_e^{-1}\nabla u \cdot \nabla v\, dx, \quad s_i(u,v) = \int_{\partial K_i} u \cdot v\, dx.$$

Заметим, что интеграл в $s_i(u,v)$ определен на границе грубого блока. В этом случае количество спектральных задач равен количеству грубых блоков. Многомасштабные базисные функции для скорости представлены на рисунке 5.2.

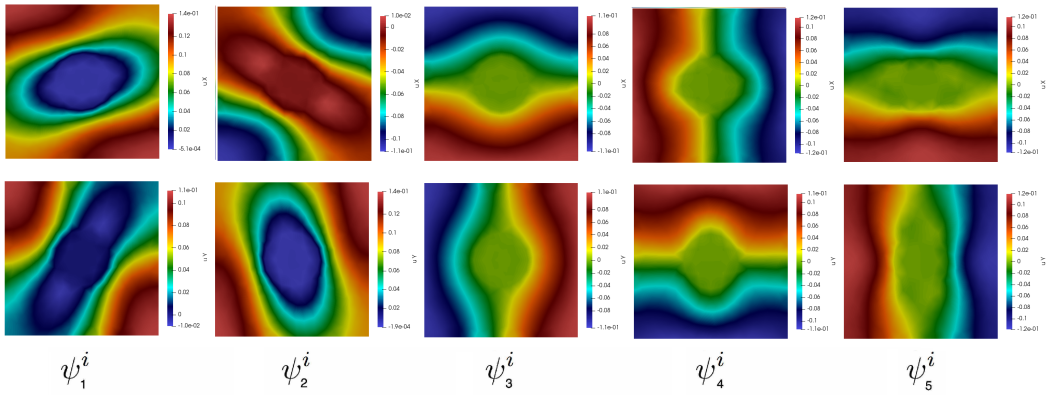


Рисунок 5.2: Иллюстрация многомасштабных базисных функций для скорости $\psi_k^i = (\psi_{k,x}^i, \psi_{k,y}^i)$ для $k = 1,...,5$ (слева направо). Первая строка: $\psi_{k,x}^i$. Вторая строка: $\psi_{k,y}^i$

Расположим собственные значения в порядке возрастания и выберем первые собственные векторы, соответствующие первым M_i наименьшим собственным значениям $\psi_k^i = R_{i,\text{snap}}\psi_k^{i,\text{snap}}$ в качестве базисных функций ($k = 1,...,M_i$)

$$V_i^{u,H} = \text{span}\{\psi_k^i : 1 \le i \le N_e, 1 \le k \le M_i\}, \quad R_u = \left[\psi_1^1, ..., \psi_{M_1}^1, ..., \psi_1^{N_c}, ..., \psi_{M_{N_c}}^{N_c}\right].$$

Это пространство будет использоваться как пространство аппроксимации для скорости. Глобальное многомасштабное пространство $V^{u,H}$ это комбинация локальных, т.е.

$$V^{u,H} = \text{span}\{\phi_k^i : 1 \le k \le L_i, 1 \le i \le N\}.$$

Отметим, что мы решаем задачу переноса на мелкой сетке с помощью метода конечных элементов.

5.3 Численные результаты

Рассмотрено численное моделирование с использованием предложенных моделей в неоднородной вычислительной области $\Omega = [0,1]^2$ (см. Рисунок 5.3).

Мелкая сетка содержит 89778 вершин, 30127 граней и 59562 треугольных ячеек. Рассматриваются две грубые сетки: (1) 5×5 сетка с 36 вершинами, 60 гранями и 25 ячейками; (2) 10×10 сетка со 121 вершиной, 220 гранями и 100 ячейками. Установим $\mu = 1.0$, $C = 1.0$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $b = 10^{-6}$, $\rho_w = 1000$, $c_w = 4200$, $\lambda_w = 560$, $\rho_{sc} = 1260$, $c_{sc} = 840$, $\lambda_{sc} = 1100$, $g = (1.0, 0.0)$, $T_0 = 1$ и $T_1 = 10$. Мы моделируем для $t = 0.5$ с 50 временными слоями.

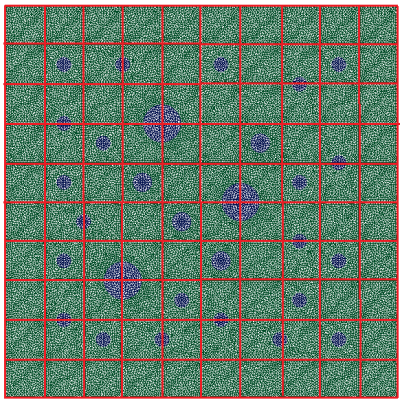


Рисунок 5.3: Вычислительная область с грубыми и мелкими сетками

5×5						
M	DOF_c	$e^u_{L_2}$ (%)	$e^u_{H_1}$ (%)	$e^p_{L_2}$ (%)	$e^{\overline{p}}_{L_2}$ (%)	$e^T_{L_2}$ (%)
10	275	43.059	78.449	732.669	41.409	28.847
20	525	15.426	39.407	38.187	0.19	8.598
30	775	8.424	29.258	20.21	0.026	5.610
40	1025	5.317	24.173	16.595	9.1e-03	3.251
60	1525	3.044	18.645	14.723	1.79e-03	1.976
10×10						
10	1100	22.24	51.489	91.398	4.079	12.705
20	2100	6.081	30.154	20.233	0.054	3.792
30	3100	3.683	23.081	15.025	0.013	2.712
40	4100	2.673	19.833	13.572	9.04e-03	1.888
60	6100	2.154	17.056	12.604	4.87e-03	1.497

Таблица 5.1: Относительные погрешности для скорости, давления и температуры с различным количеством многомасштабных базисных функций для ячеек 5x5 и 10x10

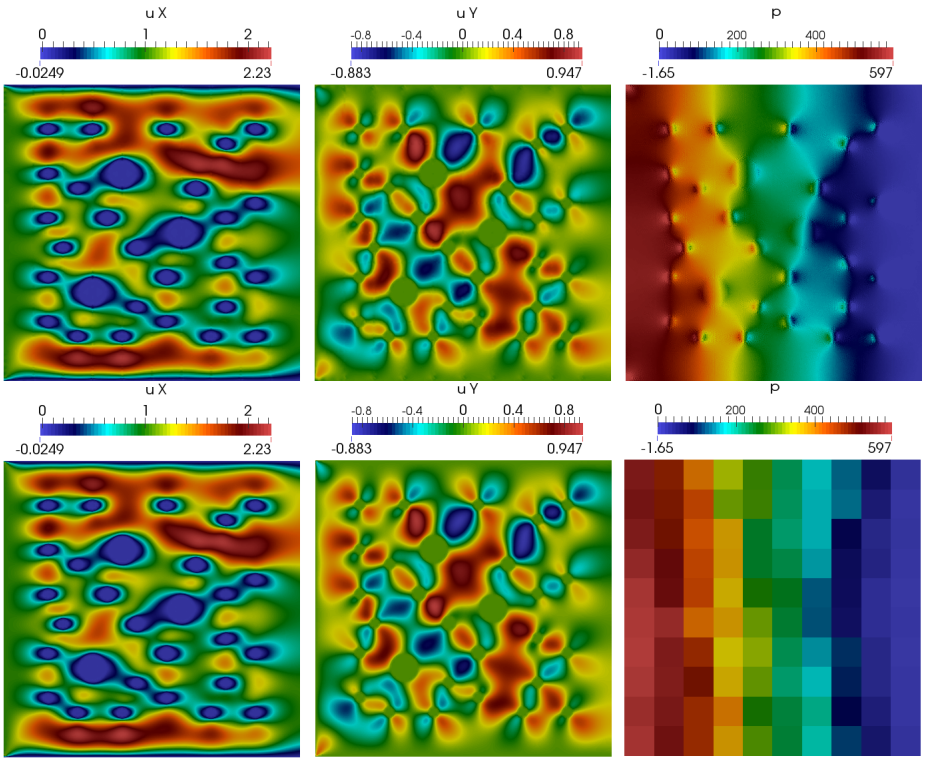


Рисунок 5.4: Распределение скорости (u_x и u_y), давления(слева направо) для ячеек 10x10. Сверху: решение на мелкой сетке. Снизу: многомасштабное решение.

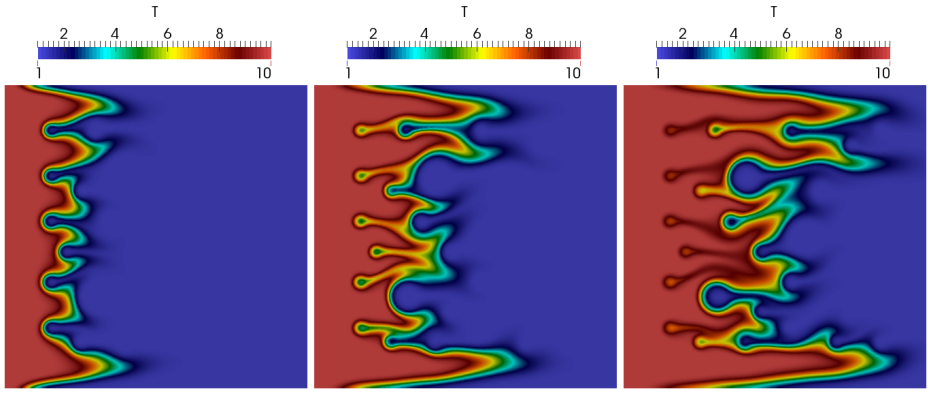


Рисунок 5.5: Распределение температуры для $t = 0.2, 0.35$ и 0.5 (слева направо) для ячеек 10x10

Для сравнения результатов используем относительную L_2 и H_1 погрешность между эталонными решениями v_f и многомасштабными решениями v_{ms} для скорости ($e^u_{L_2}$ и $e^u_{H_1}$). Для давления используем L_2 погрешность на мелкой и грубой сетках ($e^p_{L_2}$ и $e^{\bar{p}}_{L_2}$). Для температуры вычисляем L_2 погрешность на мелкой сетке,

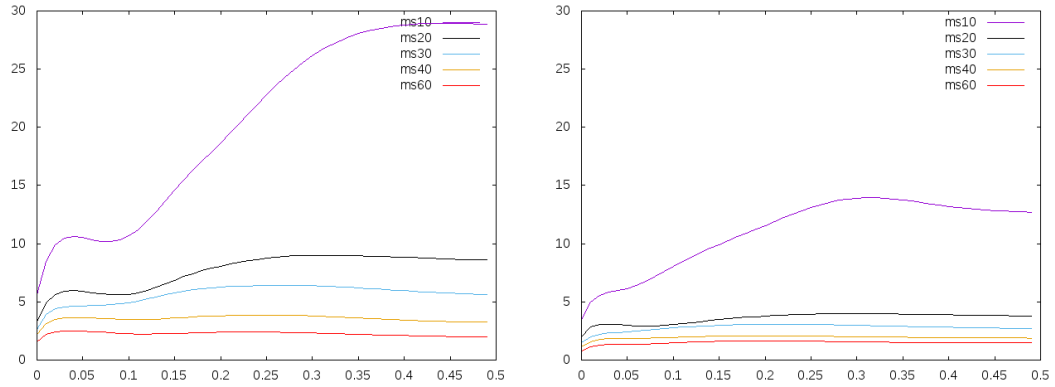


Рисунок 5.6: Погрешность L_2 между мелкомасштабным и многомасштабным решением температуры. (Слева: погрешность для ячеек 5x5. Справа: погрешность для ячеек 10x10.)

используя мелкомасштабную и многомасштабную скорость ($e^T_{L_2}$).

Результаты расчетов показаны на рисунке 5.4-5.5, где представлены X и Y компоненты распределения скорости, давления и температуры для мелкой сетки и многомасштабных решений. Расчет был выполнен с использованием 60 многомасштабных базисных функций для заданной скорости. Относительные погрешности представлены в таблице 5.1 для грубых сеток 5×5 и 10×10. Видим, что погрешность скорости L_2 уменьшается с 43% до 3% и погрешность грубой сетки давления уменьшается с 41% до 0.0018% для сетки 5×5, когда мы используем 10 и 60 многомасштабных базисных функций скорости соответственно. На грубой сетке 10×10, L_2 погрешность скорости уменьшается с 22% до 2% и а погрешность грубой сетки давления уменьшается с 4% до 0.0049%, когда используем 10 и 60 многомасштабных базисных функций скорости соответственно. На рисунке 5.6 представлена динамика относительной погрешности L_2 для температуры, где мы получаем хорошие решения, используя достаточное количество многомасштабных базисных функций для точного приближения поля скоростей.

5.4 Выводы

В последней главе рассмотрена задача тепломассопереноса в неоднородных средах. Аппроксимация на мелкой сетке построена на основе разрывного метода Галеркина для задач теплопередачи и течения. Была построена аппроксимация для грубой сетки с использованием многомасштабного метода разрывного Галеркина для задачи течения. Эффективность представленного метода проводилось для двух грубых сеток: 5×5 и 10×10. Полученные численные результаты показывают, что предложенный метод даёт хорошие погрешности с использованием около 60 ($DOF_c = 6100$) многомасштабных базисных функций.

Заключение

Диссертационная работа посвящена разработке и численной реализации многомасштабных математических моделей процессов течения и переноса в неоднородных, тонких и перфорированных средах. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- Разработан и численно реализован вычислительный алгоритм обобщенного многомасштабного метода разрывного Галеркина, пригодный для решения задач в перфорированных областях с неоднородными граничными условиями на перфорациях. Построены и исследованы дополнительные базисные функции для учета неоднородных граничных условий на перфорациях. Построенный алгоритм применим для различного типа задач (эллиптические и параболические уравнения, уравнения конвекции-диффузии, упругости и термоупругости). Численное исследование проводилось для различных модельных задач с однородными и неоднородными граничными условиями. Численные результаты представлены для различных концепций построения грубой сетки (структурированная, квазиструктурированная и неструктурированная). Предлагаемый многомасштабный метод для перфорированных областей дает хорошие результаты и существенное уменьшение размера дискретной системы.
- Построена математическая модель течения жидкости в пористых средах, основанная на уравнениях Стокса и нестационарного уравнения конвекции-диффузии с неоднородными граничными условиями на стенках. Для ее численной реализации предложен обобщённый многомасштабный метод разрывного Галеркина для решения задач течения и переноса в тонких областях с неоднородными граничными условиями. Предложен метод построения локальных снэпшот пространств для задач в тонких областях, учитывающий течение и перенос на интерфейсе между ячейками.

Уменьшение размера снэпшот пространства выполнено посредством решения локальных спектральных задач. Полученные собственные векторы, соответствующие наименьшим собственным значениям, были использованы в качестве многомасштабных базисных функций для аппроксимации на грубой сетке. Для учета неоднородных граничных условий на стенках области построены дополнительные многомасштабные базисные функции. Представлены численные результаты для трех тестовых геометрий в дву- и трехмерных постановках, демонстрирующих эффективность предложенного метода. Предложено и исследовано использование оверсэмплинга при построении снэпшот пространств.

- Рассмотрен и исследован алгоритм смешанного обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для упрощенной задачи магнитной гидродинамики в перфорированных средах в смешанной формулировке для магнитного поля. Математическая модель построена с помощью связанной системы уравнений для магнитного поля и задачи течения. Для решения нелинейной системы использован итерационный метод Пикара. Уменьшение вычислительных ресурсов осуществлено посредством применения для задачи магнитного поля смешанного многомасштабного метода, а для задачи течения был использован многомасштабный метод разрывного Галеркина. Для задачи магнитного поля снэпшот пространство построено для каждого грубого края, а для задачи течения - для каждой грубой ячейки путем решения локальных задач. Выполнена локальная спектральная декомпозиция в снэпшот пространстве и выделены доминантные многомасштабные моды, которые были использованы в качестве многомасштабных базисных функций. Численные результаты представлены для двумерной модельной задачи. Предложенный многомасштабный метод показывает хорошую точность с использованием небольшого количества базисных функций.

- Проведена численная реализация математической модели Бринкмана и процессов тепломассопереноса в неоднородных пористых средах с помощью обобщённого многомасштабного метода разрывного Галеркина. Математическая модель описывалась системой уравнения температуры, давления и скорости. Для моделирования задачи течения в области с малопроницаемыми препятствиями использовалась модель Бринкмана. Предложена аппроксимация на грубой сетке для задачи течения на основе многомасштабного метода разрывного Галеркина. Для каждой грубой ячейки построено пространство снэпшот, содержащее обширный набор базисных функций, сформированных путем решения локальных задач со всеми возможными граничными условиями. Спектральная задача решена для выбора доминантных мод снэпшот пространства. Приведены численные результаты, полученные для двумерной модельной задачи. Для демонстрации эффективности представленного метода представлено численное моделирование для двух грубых сеток: 5×5 и 10×10. Вычислительный эксперимент показал, что данный многомасштабный метод показывает высокую точность для данного типа задач.

Литература

1. Oleg Iliev, Zahra Lakdawala, Katherine HL Neßler, Torben Prill, Yavor Vutov, Yongfei Yang, and Jun Yao. On the pore-scale modeling and simulation of reactive transport in 3d geometries. *Mathematical Modelling and Analysis*, 22(5):671–694, 2017.

2. Grégoire Allaire, Andro Mikelić, and Andrey Piatnitski. Homogenization approach to the dispersion theory for reactive transport through porous media. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 42(1):125–144, 2010.

3. Morris Muskat and Milan W Meres. The flow of heterogeneous fluids through porous media. *Physics*, 7(9):346–363, 1936.

4. Franciane F Rocha, Fabricio S Sousa, Roberto F Ausas, Gustavo C Buscaglia, and Felipe Pereira. Multiscale mixed methods for two-phase flows in high-contrast porous media. *Journal of Computational Physics*, 409:109316, 2020.

5. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Guanglian Li. An adaptive gmsfem for high-contrast flow problems. *Journal of Computational Physics*, 273:54–76, 2014.

6. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Wing Tat Leung. An adaptive generalized multiscale discontinuous galerkin method (gmsdgm) for high-contrast flow problems. *arXiv preprint arXiv:1409.3474*, 2014.

7. VL Savatorova, AV Talonov, and AN Vlasov. Homogenization of thermoelasticity processes in composite materials with periodic structure of heterogeneities. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 93(8):575–596, 2013.

8. Alfio Quarteroni and Luca Formaggia. Mathematical modelling and numerical simulation of the cardiovascular system. *Handbook of numerical analysis*, 12:3–127, 2004.

9. Abdessalem Nachit, Gregory P Panasenko, and Abdelmalek Zine. Asymptotic partial domain decomposition in thin tube structures: numerical experiments. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 11(5), 2013.

10. EA Muravleva. Finite-difference schemes for the computation of viscoplastic medium flows in a channel. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 1(6):768–779, 2009.

11. Marie Oshima, Ryo Torii, Toshio Kobayashi, Nobuyuki Taniguchi, and Kiyoshi Takagi. Finite element simulation of blood flow in the cerebral artery. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(6-7):661–671, 2001.

12. Vincent Martin, Jérôme Jaffré, and Jean E Roberts. Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(5):1667–1691, 2005.

13. Luca Formaggia, Alessio Fumagalli, Anna Scotti, and Paolo Ruffo. A reduced model for darcy's problem in networks of fractures. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 48(4):1089–1116, 2014.

14. Carlo D'angelo and Alfio Quarteroni. On the coupling of 1d and 3d diffusion-reaction equations: application to tissue perfusion problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(08):1481–1504, 2008.

15. NS Bakhvalov and GP Panasenko. Homogenization in periodic media, mathematical problems of the mechanics of composite materials. *ed: Nauka, Moscow*, 1984.

16. G Papanicolau, A Bensoussan, and J-L Lions. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Elsevier, 1978.

17. Joseph B Keller. Effective behavior of heterogeneous media. In *Statistical mechanics and statistical methods in theory and application*, pages 631–644. Springer, 1977.

18. Ivo Babuška. Homogenization and its application. mathematical and computational problems. In *Numerical solution of partial differential equations–III*, pages 89–116. Elsevier, 1976.

19. François Murat and Luc Tartar. Calculus of variations and homogenization. In *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, pages 139–173. Springer, 1997.

20. Enrique Sanchez-Palencia. Homogenization in elasticity and electromagnetism. *Non-homogeneous media and vibration theory*, pages 84–128, 1980.

21. JL Auriault. Homogenization: appliciation to porous saturated media in two phase medium mechanics. *Publikacje Politechniki Gdańskiej*, pages 1–56, 1983.

22. Дмитрий Борисович Волков-Богородский and Александр Николаевич Власов. Асимптотическое усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в многофазных средах с периодической структурой. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 18(1):92–110, 2012.

23. Александр Николаевич Власов and Дмитрий Борисович Волков-Богородский. Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 20(4):491–505, 2014.

24. Michel Quintard and Stephen Whitaker. Two-phase flow in heterogeneous

porous media: The method of large-scale averaging. *Transport in porous media*, 3(4):357–413, 1988.

25. Pascale Royer and Claude Boutin. Time analysis of the three characteristic behaviours of dual-porosity media. i: fluid flow and solute transport. *Transport in porous media*, 95(3):603–626, 2012.

26. Yohan Davit and Michel Quintard. Technical notes on volume averaging in porous media i: how to choose a spatial averaging operator for periodic and quasiperiodic structures. *Transport in Porous Media*, 119(3):555–584, 2017.

27. Ivo Babuška and John E Osborn. Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):510–536, 1983.

28. Ivo Babuška, Gabriel Caloz, and John E Osborn. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(4):945–981, 1994.

29. Thomas Y Hou and Xiao-Hui Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of computational physics*, 134(1):169–189, 1997.

30. Yalchin Efendiev, Thomas Y Hou, Victor Ginting, et al. Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications. *Communications in Mathematical Sciences*, 2(4):553–589, 2004.

31. Patrick Jenny, Seong H Lee, and Hamdi A Tchelepi. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. *Multiscale Modeling & Simulation*, 3(1):50–64, 2005.

32. Ivan Lunati and Patrick Jenny. Multiscale finite-volume method for

compressible multiphase flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, 216(2):616–636, 2006.

33. Seong H Lee, H Zhou, and Hamdi A Tchelepi. Adaptive multiscale finite-volume method for nonlinear multiphase transport in heterogeneous formations. *Journal of Computational Physics*, 228(24):9036–9058, 2009.

34. David A Barajas-Solano and Alexandre M Tartakovsky. Hybrid multiscale finite volume method for advection-diffusion equations subject to heterogeneous reactive boundary conditions. *Multiscale Modeling & Simulation*, 14(4):1341–1376, 2016.

35. Thomas JR Hughes, Gonzalo R Feijóo, Luca Mazzei, and Jean-Baptiste Quincy. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 166(1-2):3–24, 1998.

36. E Weinan, Bjorn Engquist, et al. The heterognous multiscale methods. *Communications in Mathematical Sciences*, 1(1):87–132, 2003.

37. Assyr Abdulle, E Weinan, Björn Engquist, and Eric Vanden-Eijnden. The heterogeneous multiscale method. *Acta Numerica*, 21:1–87, 2012.

38. Yalchin Efendiev, Juan Galvis, and Thomas Y Hou. Generalized multiscale finite element methods (gmsfem). *Journal of Computational Physics*, 251:116–135, 2013.

39. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Guanglian Li, and Maria Vasilyeva. Generalized multiscale finite element methods for problems in perforated heterogeneous domains. *Applicable Analysis*, 95(10):2254–2279, 2016.

40. Eric T Chung, Wing Tat Leung, Maria Vasilyeva, and Yating Wang. Multiscale model reduction for transport and flow problems in perforated domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330:519–535, 2018.

41. Михаил Владиславович Алексеев and Евгений Борисович Савенков. Применение разрывного метода Галеркина для решения одномерных гиперболических задач гиперупругости в неоднородной среде. *Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН*, (0):88–20, 2019.

42. Михаил Владиславович Алексеев, Евгений Борисович Савенков, and Федор Николаевич Воронин. Численное решение уравнений Баера–Нунциато разрывным методом Галеркина. *Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН*, (0):48–23, 2020.

43. Марина Евгеньевна Ладонкина, Ольга Александровна Неклюдова, and Владимир Федорович Тишкин. Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики. *Математическое моделирование*, 26(1):17–32, 2014.

44. Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The local discontinuous galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(6):2440–2463, 1998.

45. Huiqiang Yue, Jian Cheng, Tiegang Liu, and Vladimir Shaydurov. A hybridizable direct discontinuous galerkin method for elliptic problems. *Boundary Value Problems*, 2016(1):1–16, 2016.

46. Yalchin Efendiev, Juan Galvis, R Lazarov, M Moon, and Marcus Sarkis. Generalized multiscale finite element method. symmetric interior penalty coupling. *Journal of Computational Physics*, 255:1–15, 2013.

47. Eric T Chung, Maria Vasilyeva, and Yating Wang. A conservative local multiscale model reduction technique for stokes flows in heterogeneous perforated domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 321:389–405, 2017.

48. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Wing Tat Leung. An online generalized multiscale discontinuous galerkin method (gmsdgm) for flows in heterogeneous media. *Communications in Computational Physics*, 21(2):401–422, 2017.

49. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Wing Tat Leung. Generalized multiscale finite element methods for wave propagation in heterogeneous media. *Multiscale Modeling & Simulation*, 12(4):1691–1721, 2014.

50. Yalchin Efendiev, Oleg Iliev, and Panayot S Vassilevski. Mini-workshop: Numerical upscaling for media with deterministic and stochastic heterogeneity. *Oberwolfach Reports*, 10(1):393–431, 2013.

51. Eric Chung, Yalchin Efendiev, and Thomas Y Hou. Adaptive multiscale model reduction with generalized multiscale finite element methods. *Journal of Computational Physics*, 320:69–95, 2016.

52. Eric T Chung and Chak Shing Lee. A mixed generalized multiscale finite element method for planar linear elasticity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 348:298–313, 2019.

53. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Chak Shing Lee. Mixed generalized multiscale finite element methods and applications. *Multiscale Modeling & Simulation*, 13(1):338–366, 2015.

54. Eric T Chung, Wing Tat Leung, and Maria Vasilyeva. Mixed gmsfem for second order elliptic problem in perforated domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 304:84–99, 2016.

55. Bagus Putra Muljadi, Jacek Narski, Alexei Lozinski, and Pierre Degond. Nonconforming multiscale finite element method for stokes flows in heterogeneous media. part i: methodologies and numerical experiments. *Multiscale Modeling & Simulation*, 13(4):1146–1172, 2015.

56. Claude Le Bris, Frédéric Legoll, and Alexei Lozinski. Msfem à la crouzeix-raviart for highly oscillatory elliptic problems. In *Partial Differential Equations: Theory, Control and Approximation*, pages 265–294. Springer, 2014.

57. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Richard L Gibson, and Maria Vasilyeva. A generalized multiscale finite element method for elastic wave propagation in fractured media. *GEM-International Journal on Geomathematics*, 7(2):163–182, 2016.

58. Yalchin Efendiev, Juan Galvis, Guanglian Li, and Michael Presho. Generalized multiscale finite element methods. nonlinear elliptic equations. *Communications in Computational Physics*, 15(3):733–755, 2014.

59. Y Efendiev, MV Vasilyeva, and DA Stalnov. Numerical solution of the elliptic equation using generalized multiscale finite element method (gmsfem) in perforated media with non-homogeneous robyn boundary conditions. In *Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling*, pages 29–30, 2017.

60. Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International journal for numerical methods in engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.

61. Anders Logg, Kent-Andre Mardal, and Garth Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2012.

62. Валентин Николаевич Алексеев, Мария Васильевна Васильева, and Сергей Павлович Степанов. Итерационные методы решения для задачи течения и переноса в перфорированных областях. *Вестник Северо-Восточного федерального университета им. МК Аммосова*, (5 (55)), 2016.

63. Уйгулаана Семеновна Гаврильева, Валентин Николаевич Алексеев, and Мария Васильевна Васильева. Течение и перенос в перфорированных и трещиноватых областях с неоднородными граничными условиями Робина. *Математические заметки СВФУ*, 24(3), 2017.

64. Valentin N Alekseev, Mariya Vasil'evna Vasil'eva, Georgiy Anatolyevich Prokop'ev, and Aleksei A Tyrylgin. Models of thermoelasticity for porous materials with fractures taken into account. *Mathematical notes of NEFU*, 24(3):19–37, 2017.

65. Валентин Николаевич Алексеев, Алексей Афанасьевич Тырылгин, Мария Васильевна Васильева, and Василий Иванович Васильев. Численное усреднение для задач теплопереноса в условиях криолитозоны. *Математические заметки СВФУ*, 27(2), 2020.

66. Valentin N Alekseev, Mariya Vasil'evna Vasil'eva, Vasilii Ivanovich Vasiliev, and Nikolai Ivanovich Sidnyaev. Numerical simulation of natural convection in a freezing soil. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 161(3):327–340, 2019.

67. V Alekseev, U Gavrileva, D Spiridonov, A Tyrylgin, and M Vasilyeva. Numerical simulation of the transport and flow problems in perforated domains using generalized multiscale finite element method. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2025, page 100001. AIP Publishing LLC, 2018.

68. Valentin Alekseev, Maria Vasilyeva, and Vasily Vasiliev. Multiscale simulation of the heat and mass transfer with brinkman model. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1392, page 012063. IOP Publishing, 2019.

69. Valentin Alekseev, Qili Tang, Maria Vasilyeva, Eric T Chung, and Yalchin Efendiev. Mixed generalized multiscale finite element method for a simplified

magnetohydrodynamics problem in perforated domains. *Computation*, 8(2):58, 2020.

70. Valentin Alekseev, Aleksey Tyrylgin, and M Vasilyeva. Generalized multiscale finite element method for elasticity problem in fractured media. In *International Conference on Finite Difference Methods*, pages 137–144. Springer, 2018.

71. Maria Vasilyeva, Eric T Chung, Wing Tat Leung, and Valentin Alekseev. Nonlocal multicontinuum (nlmc) upscaling of mixed dimensional coupled flow problem for embedded and discrete fracture models. *GEM-International Journal on Geomathematics*, 10(1):23, 2019.

72. A Tyrylgin, M Vasilyeva, Q Zhang, D Spiridonov, and V Alekseev. Mathematical modeling of the fluid flow and geo-mechanics in the fractured porous media using generalized multiscale finite element method. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2025, page 100009. AIP Publishing LLC, 2018.

73. Maria Vasilyeva, Masoud Babaei, Eric T Chung, and Valentin Alekseev. Upscaling of the single-phase flow and heat transport in fractured geothermal reservoirs using nonlocal multicontinuum method. *Computational Geosciences*, 23(4):745–759, 2019.

74. Maria Vasilyeva, Valentin Alekseev, Eric T Chung, and Yalchin Efendiev. Multiscale dimension reduction for flow and transport problems in thin domain with reactive boundaries. *Journal of Computational Physics*, page 110512, 2021.

75. Valentin Alekseev, Maria Vasilyeva, Uygulaana Kalachikova, and Eric T Chung. Dg-gmsfem for problems in perforated domains with non-homogeneous boundary conditions. *Computation*, 9(7):75, 2021.

76. Мария Васильевна Васильева and Валентин Николаевич Алексеев. Сви-

детельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Вычислительная библиотека для численного моделирования задачи течения в перфорированных и неоднородных областях с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина». № 2019667386 от 07.12.2019 г.

77. Гаврильева Уйгулаана Семеновна Васильева, Мария Васильевна and Валентин Николаевич Алексеев. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Вычислительная библиотека для численного моделирования задач в трещиноватых областях с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина». № 2018663107 от 07.11.2018 г.

78. Yalchin Efendiev and Thomas Y Hou. *Multiscale finite element methods: theory and applications*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2009.

79. Donald L Brown, Yalchin Efendiev, Guanglian Li, and Viktoria Savatorova. Homogenization of high-contrast brinkman flows. *Multiscale Modeling & Simulation*, 13(2):472–490, 2015.

80. Vasili Vasilievitch Jikov, Sergei M Kozlov, and Olga Arsenievna Oleinik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer Science & Business Media, 2012.

81. Patrick Henning and Mario Ohlberger. The heterogeneous multiscale finite element method for elliptic homogenization problems in perforated domains. *Numerische Mathematik*, 113(4):601–629, 2009.

82. Ivan Oseledets and Ekaterina Muravleva. Fast orthogonalization to the kernel of the discrete gradient operator with application to stokes problem. *Linear algebra and its applications*, 432(6):1492–1500, 2010.

83. Ekaterina A Muravleva and Ivan V Oseledets. Approximate solution of linear systems with laplace-like operators via cross approximation in the frequency domain. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 19(1):137–145, 2019.

84. Ekaterina Dementyeva and Evgeniya Karepova. A comparison of numerical techniques for the fem for the stokes problem for incompressible flow. In *International Conference on Numerical Analysis and Its Applications*, pages 286–293. Springer, 2016.

85. M Vasilyeva and DA Stalnov. Numerical averaging for the heat conduction problem in inhomogeneous and perforated media. *Herald of MK Ammosov Northeastern Federal University*, 2017.

86. Claude Le Bris, Frédéric Legoll, and Alexei Lozinski. An msfem type approach for perforated domains. *Multiscale Modeling & Simulation*, 12(3):1046–1077, 2014.

87. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Maria Vasilyeva, and Yating Wang. A multiscale discontinuous galerkin method in perforated domains. In *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, volume 42, pages 212–229. INST MATHEMATICS & MECHANICS, NATL ACAD SCIENCES AZERBAIJAN, 2016.

88. Uigulaana Gavrileva, Valentin Alekseev, M Vasilyeva, Jonas D De Basabe, Yalchin Efendiev, and RL Gibson. Generalized multiscale discontinuous galerkin method for helmholtz problem in fractured media. In *International Conference on Finite Difference Methods*, pages 250–257. Springer, 2018.

89. Sergei Stepanov, Maria Vasilyeva, and Vasiliy I Vasil'ev. Generalized multiscale discontinuous galerkin method for solving the heat problem with phase change. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 340:645–652, 2018.

90. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Wing Tat Leung, Maria Vasilyeva, and Yating Wang. Non-local multi-continua upscaling for flows in heterogeneous fractured media. *Journal of Computational Physics*, 372:22–34, 2018.

91. Shubin Fu, Guanglian Li, Richard Craster, and Sebastien Guenneau. Wavelet-based edge multiscale finite element method for helmholtz problems in perforated domains. *arXiv preprint arXiv:1906.08453*, 2019.

92. Shubin Fu, Eric Chung, and Guanglian Li. Edge multiscale methods for elliptic problems with heterogeneous coefficients. *Journal of Computational Physics*, 396:228–242, 2019.

93. Béatrice Rivière. *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: theory and implementation*. SIAM, 2008.

94. Ibrahim Y Akkutlu, Yalchin Efendiev, and Maria Vasilyeva. Multiscale model reduction for shale gas transport in fractured media. *Computational Geosciences*, 20(5):953–973, 2016.

95. Yashar Mehmani and Hamdi A Tchelepi. Multiscale formulation of two-phase flow at the pore scale. *Journal of Computational Physics*, 389:164–188, 2019.

96. Tatyana Dobroserdova, Fuyou Liang, Grigory Panasenko, and Yuri Vassilevski. Multiscale models of blood flow in the compliant aortic bifurcation. *Applied Mathematics Letters*, 93:98–104, 2019.

97. René J Moreau. *Magnetohydrodynamics*, volume 3. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2013.

98. Peter Alan Davidson. An introduction to magnetohydrodynamics, 2002.

99. Jean-Frédéric Gerbeau, Claude Le Bris, and Tony Lelièvre. *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals*. Clarendon Press, 2006.

100. Evgenia Andreeva, Alexander Vyatkin, and Vladimir Shaidurov. The semi-lagrangian approximation in the finite element method for navier-stokes equations for a viscous incompressible fluid. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1611, pages 3–11. American Institute of Physics, 2014.

101. ВВ Шайдуров and МВ Якубович. Полулагранжева аппроксимация и метод конечных элементов для решения уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа. *Тезисы Международной конференции «АПВПМ»*, (2020), 2020.

102. Ho Yuen Chan, Eric Chung, and Yalchin Efendiev. Adaptive mixed gmsfem for flows in heterogeneous media. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 9(4):497–527, 2016.

103. Max D Gunzburger, Amnon J Meir, and Janet S Peterson. On the existence, uniqueness, and finite element approximation of solutions of the equations of stationary, incompressible magnetohydrodynamics. *Mathematics of Computation*, 56(194):523–563, 1991.

104. D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5):1749–1779, 2001/02.

105. R.E. Ewing, J. Wang, and Y. Yang. A stabilized discontinuous finite element method for elliptic problems. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 10(1-2):83–104, 2003.

106. R.D. Lazarov, J.E. Pasciak, J. Schöberl, and P.S. Vassilevski. Almost optimal interior penalty discontinuous approximations of symmetric elliptic problems on non-matching grids. *Numer. Math.*, 96(2):295–315, 2003.

107. R.D. Lazarov, S.Z. Tomov, and P.S. Vassilevski. Interior penalty discontinuous

approximations of elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Math.*, 1(4):367–382, 2001.

108. Vivette Girault, Béatrice Riviére, and Mary Wheeler. A discontinuous galerkin method with nonoverlapping domain decomposition for the stokes and navier-stokes problems. *Mathematics of Computation*, 74(249):53–84, 2005.

109. Zhiming Chen and Thomas Hou. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. *Mathematics of Computation*, 72(242):541–576, 2003.

110. Timothy J Young and Kambiz Vafai. Convective flow and heat transfer in a channel containing multiple heated obstacles. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(21):3279–3298, 1998.

111. CT Hsu and P Cheng. The brinkman model for natural convection about a semi-infinite vertical flat plate in a porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28(3):683–697, 1985.

112. Matteo Lesinigo, Carlo D'Angelo, and Alfio Quarteroni. A multiscale darcy–brinkman model for fluid flow in fractured porous media. *Numerische Mathematik*, 117(4):717–752, 2011.

113. A-RA Khaled and K Vafai. The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(26):4989–5003, 2003.

114. Denis Spiridonov, Maria Vasilyeva, and Wing Tat Leung. A generalized multiscale finite element method (gmsfem) for perforated domain flows with robin boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 357:319–328, 2019.

115. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Wing Tat Leung. An adaptive generalized multiscale discontinuous galerkin method for high-contrast flow problems. *Multiscale Modeling & Simulation*, 16(3):1227–1257, 2018.

116. Eric T Chung and Wing Tat Leung. A sub-grid structure enhanced discontinuous galerkin method for multiscale diffusion and convection-diffusion problems. *Communications in Computational Physics*, 14(2):370–392, 2013.

Приложение 1. Вычислительная библиотека для численного моделирования задачи течения в перфорированных и неоднородных областях с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина

Библиотека предназначена для численного решения прикладных задач на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина посредством построения специальных многомасштабных базисных функций. Базисные функции строятся посредством решения задач в локальных подобластях. Программа является вычислительной библиотекой написанной на языке C++ с использованием вычислительной платформы FEniCS с примерами решения задачи Стокса в перфорированных областях и модели Бринкмана в неоднородных областях.

Методология

Разработан обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина для решения уравнений Стокса в перфорированных областях и модели Бринкмана в неоднородных областях. На оффлайн этапе, мы определяем грубую сетку и локальные подобласти, в которых строим многомасштабные базисные функции посредством решения локальных задач. Отметим, что при этом каждый элемент грубой сетки (локальная подобласть) является объединением ячеек мелкой сетки. Для построения локальных многомасштабных базисных функций, мы, в первую очередь, строим граничное многомасштабное пространство. Граничное многомасштабное пространство строится посредством решения спектральных локальных задач. Спектральное разложение основывается на проведенном анализе и локальном собственно-ортогональном разложении, что позволяет выбирать в качестве элементов оффлайн пространства наиболее доминатные моды

разложения. На онлайн этапе, мы решаем задачу при заданных входных параметрах с использованием построенного оффлайн пространства.

Техническое и программное решение

Программа состоит из двух модулей:

- *Модуль 1:* Модуль построения локальных областей.
  - 1. localdomain/localdomain.cpp - файл, где строятся координаты локальной области.
  - 2. ms-domain/main.cpp - файл, где строятся и генерируется локальные области.
  - 3. ms-domain/generator.h - файл, который генерирует и сохраняет локальные области.

  Данный модуль работает с построением локальной области. Для начала надо запустить localdomain.cpp, который сохраняет в разные файлы координаты локальных областей. Затем необходимо запустить файл ms-domain/main.cpp с соответствующими входными данными, который работает с мелкой сеткой и строит локальные области.
- *Модуль 2:* Модуль построения базисных функций.
  - 1. dg-basis/main.cpp - файл, где строятся базисные функции в одной локальной области.
  - 2. dg-basis/run2 - файл, который компилирует программу main.cpp для каждой локальной области.
  - 3. dg-basis/Stokes.ufl - фениксовский файл для определения пространств, билинейных и линейных форм для локальной задачи и спектральной задачи.

  В данном модуле строится снэпшот пространство путем решения локальных задач и решается спектральная задача, чтобы определить многомасштабные базисные функции. Сперва нужно запустить Stokes.ufl для определения пространств, затем запустить файл run2, который будет запускать

программу main.cpp для каждой локальной области отдельно.

- *Модуль 3:* Модуль построения матрицы проекции.
  - 1. ms-rgen/main.cpp - файл, который собирает в матрицу базисные функции.

  Данный модуль определяет многомасштабное пространство, используя построенные многомасштабные базисные функции и определяет матрицу проекции.
- *Модуль 4:* Модуль решателей, содержащих классический решатель на мелкой сетке, ри решатель на грубой сетке посредством использования обобщенных многомасштабных базисных функций.
  - 1. solver/main.cpp - решатель уравнений Стокса на грубой и мелкой сетке.
  - 2. solver/Stokes.ufl - фениксовский файл для определения вариационных форм для уравнений Стокса
  - 3. solver/main2.cpp - решатель модели Бринкмана на грубой и мелкой сетке
  - 4. solver/Stokes2.ufl - фениксовский файл для определения вариационных форм для модели Бринкмана

  В данном модуле реализованы некоторые базовые классы, которые необходимы для проведения расчетов. Для получения решения на грубой и мелкой сетке необходимо запустить файл solver/main.cpp через ./main 1 . . . чтобы получить решение на мелкой сетке и ./main 2 . . . чтобы получить решение на грубой сетке.

Приложение 2. Многомасштабный метод для параболического уравнения и уравнений термоупругости и переноса в перфорированных областях с неоднородными граничными условиями на перфорациях

Параболическая задача. Рассмотрим параболическую задачу в перфорированной области Ω:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega \tag{5.9}$$

со следующими граничными условиями

$$u = g_g, \quad x \in \Gamma_g, \quad -k\nabla u \cdot n = \alpha(u - g_p), \quad x \in \Gamma_p,$$

и с начальным условием $T = T_0$ в Ω для $t = 0$.

Для аппроксимации по времени используется неявная аппроксимация с шагом по времени τ. У нас есть следующая аппроксимация на мелкой сетке на $\mathscr{T}^h$ с использованием метода IPDG: Имеем следующую аппроксимацию на мелкой сетке на $\mathscr{T}^h$ с использованием метода IPDG: найти $u_h \in V_h$ такое что

$$\frac{1}{\tau} m(u_h - \check{u}_h, v) + a(u_h, v) = l(v), \quad \forall v \in V_h,$$

где

$$\begin{aligned} a(u,v) = & \sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K (k\nabla u, \nabla v)\, dx + \sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,p}} \int_E \alpha\, u v\, ds \\ & - \sum_{E \in \mathscr{E}^h_o \cup \mathscr{E}^h_{b,g}} \int_E \Big(\{k\nabla u \cdot n\} \cdot [v] + \{k \nabla v \cdot n\} \cdot [u] - \frac{\gamma_f}{h} \{k\} [u] \cdot [v] \Big)\, ds, \\ l(v) = & \sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,p}} \int_E \alpha\ g_p\, v\, ds + \sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,g}} \int_E \Big(\frac{\gamma_f}{h} k v - k \nabla v \cdot n \Big)\, g_g\, dx, \quad m(u,v) = \sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K u v\, ds, \end{aligned}$$

и $\check{u}_h$ это решение из предыдущего временного слоя.

Берем следующую матричную форму:

$$\frac{1}{\tau}M_h(U_h - \check{U}_h) + A_h(U_h) = F_h,$$

для $u_h = \sum_i U_i \varphi_i$ и с

$$M_h = [m_{i,j} := m(\varphi_i, \varphi_j)], \quad A_h = [a_{i,j} := a(\varphi_i, \varphi_j)], \quad F_h = [f_j := l(\varphi_j)].$$

В многомасштабном методе строим многомасштабное пространство, подобное задаче Лапласа (2.4), и генерируем матрицу проекции

$$R = \left[\varphi^1_{g,1}, \ldots, \varphi^{N_g}_{g,M_g}, \varphi^2_{p,1}, \ldots, \varphi^{N_p}_{p,M_p}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N^H_{cell}}\right]^{Tr}.$$

Наконец, получаем следующую систему грубой сетки для параболической задачи

$$\frac{1}{\tau}M_H(U_H - \check{U}_H) + A_H(U_H) = F_H,$$

где

$$M_H = RM_hR^{Tr}, \quad A_H = RA_hR^{Tr}, \quad F_H = RF_h,$$

Получив решение на грубой сетке, можем восстановить решение на мелкой сетке $U_{ms} = R^{Tr}U_H$.

Задача термоупругости. Рассматривается задача термоупругости в Ω, который описывается системой уравнений для температуры и перемещения:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma(u) - \beta \nabla(T - T_*) = 0, \quad x \in \Omega, \\ c\frac{\partial T}{\partial t} + \beta \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{5.10}$$

Рассматривается уравнение (5.11) со следующими граничными условиями:

$$u = g^u_g, \quad T = g^T_g, \quad x \in \Gamma_g, \quad \sigma \cdot n = g^u_p, \quad -k\nabla T \cdot n = \alpha(T - g^T_p), \quad x \in \Gamma_p,$$

и с начальным условием $T = T_0$, $u = 0$ в Ω для $t = 0$.

Для метода IPDG на мелкой сетке $\mathscr{T}^h$, имеем следующую вариационную формулировку: найти $(u_h, T_h) \in W_h \times Q_h$ такое что

$$\begin{aligned} &a^u(u_h, v) + b(T_h, v) = l^u(v), \quad \forall v \in W_h \\ &\frac{1}{\tau} m(T_h - \check{T}_h, q) + \frac{1}{\tau} d(u_h - \check{u}_h, q) + a^T(T_h, q) = l^T(q), \quad \forall q \in Q_h \end{aligned},$$

где

$$Q_h = \{T \in L^2(\Omega) : T|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathscr{T}^h\}$$

$$W_h = \{v \in [L^2(\Omega)]^2 : v|_K \in [\mathbb{P}_1(K)]^2, \forall K \in \mathscr{T}^h\},$$

с

$$\begin{aligned} a^T(T,q) = &\sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K (k \nabla T, \nabla q)\, dx + \sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,p}} \int_E \alpha\, T\, q\, ds \\ &- \sum_{E \in \mathscr{E}^h_o \cup \mathscr{E}^h_{b,g}} \int_E \Big(\{k \nabla T \cdot n\} \cdot [q] + \{k \nabla q \cdot n\} \cdot [T] - \frac{\gamma_f}{h} \{k\} [T] \cdot [q] \Big)\, ds, \\ l(q) = &\sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,p}} \int_E \alpha\ g_p^T\, q\, ds + \sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,g}} \int_E \Big(\frac{\gamma_f}{h} k q - k \nabla q \cdot n \Big)\, g_g^T\, dx, \\ m(T,q) = &\sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K c\, T\, q\, dx, \\ a^u(u,v) = &\sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K (\sigma(u), \varepsilon(v)) dx \\ &- \sum_{E \in \mathscr{E}^h_o \cup \mathscr{E}^h_{b,g}} \int_E \Big(\{\tau(u)\} [v] + \{\tau(v)\} [u] - \frac{\gamma_f}{h} \{\lambda + 2\mu\} [u] [v] \Big)\, ds, \\ l^u(v) = &\sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,p}} \int_E g_p^u \cdot v\, ds + \sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,g}} \int_E \Big(\frac{\gamma_f}{h} (\lambda + 2\mu) v - \tau(v) \Big) \cdot g_g^u\, ds, \\ b(T,v) = &\sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K \beta\ \nabla T \cdot v\ dx, \quad d(u,q) = \sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K \beta\, \nabla \cdot u q\, dx. \end{aligned}$$

Берем следующую матричную форму:

$$\begin{aligned} &A_h^u(U_h) + B_h(T_h) = F_h^u \\ &\frac{1}{\tau} M_h(T_h - \check{T}_h) + \frac{1}{\tau} D_h(U_h - \check{U}_h) + A_h^T(T_h) = F_h^T, \end{aligned}$$

для

$$u_h = \sum_i U_i \psi_i; \quad T_h = \sum_i T_i \varphi_i,$$

с

$$M_h = [m_{i,j} := m(\varphi_i, \varphi_j)], \quad A_h^T = [a_{i,j}^T := a^T(\varphi_i, \varphi_j)], \quad A_h^u = [a_{i,j}^u := a^u(\psi_i, \psi_j)],$$

$$B_h = [b_{i,j} := b(\psi_i, \varphi_j)], \quad D_h = [d_{i,j} := d(\varphi_i, \psi_j)],$$

$$F_h^u = [f_j^u := l^u(\psi_j)], \quad F_h^T = [f_j^T := l^T(\varphi_j)].$$

Для построения многомасштабного метода для задачи термоупругости, отдельно строим многомасштабные пространства для перемещения и температуры. Затем генерируем матрицы проекции, используя многомасштабные базисные функции

$$R_u = \left[\psi_{g,1}^1, \ldots, \psi_{g,M_g^u}^{N_g}, \psi_{p,1}^2, \ldots, \psi_{p,M_p^u}^{N_p}, \phi_1, \ldots, \phi_{N_{cell}^H}\right]^{Tr},$$

$$R_T = \left[\varphi_{g,1}^1, \ldots, \varphi_{g,M_g^T}^{N_g}, \varphi_{p,1}^2, \ldots, \varphi_{p,M_p^T}^{N_p}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N_{cell}^H}\right]^{Tr}.$$

Наконец, построим следующую систему грубой сетки для задачи термоупругости

$$A_H^u(U_H) + B_H(T_H) = F_H^u$$

$$\frac{1}{\tau} M_H(T_H - \check{T}_H) + \frac{1}{\tau} D_H(U_H - \check{U}_H) + A_H^T(T_H) = F_H^T,$$

где

$$M_H = R_T M_h R_T^{Tr}, \quad A_H^T = R_T A_h^T R_T^{Tr}, \quad A_H^u = R_u A_h^u R_u^{Tr},$$

$$B_H = R_u B_h R_T^{Tr}, \quad D_H = R_T D_h R_u^{Tr}, \quad F_H^u = R_u F_h^u, F_H^T = R_T F_h^T.$$

После расчета грубомасштабного решения U_h, T_H, мы восстанавливаем мелкомасштабное решение, $U_{ms} = R_u^{Tr} U_H$ и $T_{ms} = R_T^{Tr} T_H$.

Задача переноса. Рассмотрим уравнение конвекции-диффузии в перфорированной области Ω:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\nabla c - \nabla \cdot (D\nabla c) = f, \quad x \in \Omega, \tag{5.11}$$

со следующими граничными условиями

$$c = g_g, \quad x \in \Gamma_l, \quad -D\nabla c \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_r, \quad -D\nabla c \cdot n = \alpha(c - g_p) \quad x \in \Gamma_{perf} \cup \Gamma_t \cup \Gamma_b,$$

и с начальным условием $c = c_0$ в Ω для $t = 0$.

Для описания течения используем уравнения Стокса:

$$-\mu\Delta u + \nabla p = 0,$$
$$\nabla \cdot u = 0,$$

Для аппроксимации по времени используется неявная аппроксимация с шагом по времени τ. У нас есть аппроксимация на мелкой сетке на $\mathscr{T}^h$ с использованием метода IPDG (см. 1.1.1). Для того чтобы построить многомасштабный метод для задачи переноса, строим многомасштабное пространство, подобное задаче Лапласа (2.4). Дадее генерируем матрицу проекции

$$R = \left[\varphi_{g,1}^1, \ldots, \varphi_{g,M_g}^{N_g}, \varphi_{p,1}^2, \ldots, \varphi_{p,M_p}^{N_p}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N_{cell}^H}\right]^{Tr}.$$

Наконец, получаем следующую систему грубой сетки для уравнения конвекции-диффузии

$$\frac{1}{\tau}M_H^c(c_H - \check{c}_H) + (A_H^c + C_H^c(u_{ms}))c_H = F_H^c,$$

где

$$M_H^c = R_c M_h^c R_c^T, \quad A_H^c = R_c A_h^c R_c^T,$$
$$C_H^c(u_{ms}) = R_c C_h^c(u_{ms}) R_c^T, \quad F_H^c = R_c F_h^c,$$
$$c_{ms} = R_c^T c_H.$$

Получив решение на грубой сетке, можем восстановить решение на мелкой сетке $c_{ms} = R^{Tr} c_H$.