Министерство науки и высшего образования Российской Федерации ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова»

На правах рукописи

Аммосов Дмитрий Андреевич

Многомасштабное моделирование многофизичных задач с упругими деформациями

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,

численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: PhD, профессор Ялчин Эфендиев

Содержание

2		

4

Введение

1	Мно	огомасі	итабное моделирование процесса морозного пучения неоднородного грунта	14				
	1.1	Предв	арительные сведения	15				
1.2 Математическая модель								
	1.3	1.3 Конечно-элементная аппроксимация на мелкой сетке						
		1.3.1	Вариационная формулировка	18				
		1.3.2	Дискретная формулировка	19				
	1.4	Офлай	йн аппроксимация на грубой сетке с использованием ОММКЭ	20				
		1.4.1	Многомасштабные базисные функции для температуры	21				
		1.4.2	Многомасштабные базисные функции для перемещений	22				
1.4.3 Системы на грубой сетке								
	1.5	Онлай	н обогащение офлайн аппроксимации на грубой сетке	25				
	1.6	Числе	нные результаты	29				
1.7 Выводы								
2	Мно	огомасі	птабное моделирование термопороупругих процессов в неоднородных и					
	неод	цнороді	ных трещиновато-пористых средах	39				
	2.1	Матем	иатическая модель	40				
		2.1.1	Фильтрация жидкости	40				
		2.1.2	Теплоперенос	42				
		2.1.3	Механические деформации	44				
		2.1.4	Связанная модель	44				
	2.2 Конечно-элементная аппроксимация на мелкой сетке							
	2.3	Аппро	оксимация на грубой сетке с использованием ОММКЭ	49				
		2.3.1	Многомасштабные базисные функции для давления и температуры	49				
		2.3.2	Многомасштабные базисные функции для перемещений	51				
		2.3.2 2.3.3	Многомасштабные базисные функции для перемещений	51 52				
	2.4	2.3.2 2.3.3 Числе	Многомасштабные базисные функции для перемещений	51 52 52				
	2.4	2.3.2 2.3.3 Числе 2.4.1	Многомасштабные базисные функции для перемещений	51 52 52 54				
	2.4	 2.3.2 2.3.3 Числе 2.4.1 2.4.2 	Многомасштабные базисные функции для перемещений	51 52 52 54 61				

3	Мно	огомаси	птабное моделирование неоднородных пьезоэлектрических материалов	70				
	3.1 Постановка задачи							
	3.2	3.2 Конечно-элементная аппроксимация на мелкой сетке						
	3.3	Аппро	жсимация на грубой сетке с использованием ОММКЭ	73				
3.3.1 Расщепленные многомасштабные базисные функции								
		3.3.2	Связанные многомасштабные базисные функции	76				
		3.3.3	Система на грубой сетке	77				
	3.4	Числе	нные результаты	78				
		3.4.1	Проверка решения на мелкой сетке	78				
		3.4.2	Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов	80				
	3.5	Вывод	ы	92				
4	Мно	огомаси	птабное моделирование неоднородной упругой среды Коссера	93				
	4.1	Опред	еляющие уравнения	94				
		4.1.1	Общая модель упругости Коссера	94				
		4.1.2	Двумерная модель упругости Коссера	95				
	4.2	Конеч	но-элементная аппроксимация на мелкой сетке	97				
	4.3	.3 Аппроксимация на грубой сетке с использованием ОММКЭ						
		4.3.1	Расщепленные многомасштабные базисные функции	99				
		4.3.2	Связанные многомасштабные базисные функции	101				
		4.3.3	Система на грубой сетке	103				
	4.4	Числе	нные результаты	103				
		4.4.1	Проверка решения на мелкой сетке	104				
		4.4.2	Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов	113				
	4.5	Вывод	ы	122				
Зa	Заключение							
Ли	итера	тура		125				
Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 14								

Введение

Математическое моделирование служит эффективным инструментом прогнозирования различных физических процессов. По сравнению с проведением физических, натурных экспериментов математическое моделирование является менее затратным и более быстрым способом получения необходимой информации. В материаловедении и инженерии особый интерес представляют различные задачи с упругими деформациями. Решение таких задач позволяет прогнозировать свойства новых композитных материалов, проводить анализ устойчивости сооружений и оптимизировать процесс добычи полезных ископаемых и т.д. [1–6].

Изучению задач с упругими деформациями (статических и динамических) уделяется большое внимание: строятся аналитические решения, исследуются разрывы решений, изучаются свойства волн. При этом помимо однородных сред рассматриваются и более сложные случаи с наличием трещин и включений [7, 8]. В случае волновых задач необходимо отметить работы А. Г. Куликовского, А. П. Чугайновой, А. Т. Ильичёва и В. А. Шаргатова [9–12].

Следует заметить, что многие прикладные задачи с упругими деформациями по своей природе являются многофизичными. Например, процессы фильтрации и теплопереноса могут оказывать существенное влияние на упругие деформации пористой среды, в то время как сами деформации тоже могут воздействовать на эти процессы [13]. Поэтому для обеспечения высокой точности моделирования необходимо учитывать взаимное влияние различных физических процессов, происходящих в упругих средах.

Решение многофизичных задач с упругими деформациями сопряжено с рядом трудностей. Одной из них является то, что прикладные многофизичные задачи в большинстве случаев не представляется возможным решить аналитическими методами. Следовательно, необходимо использовать численные методы решения, такие как конечно-разностный метод, метод конечных объемов, метод конечных элементов и др. Каждый из перечисленных методов имеет свои особенности, которые в зависимости от решаемой задачи могут иметь как преимущества, так и недостатки. Отметим, что для моделирования упругих сред, как правило, применяют метод конечных элементов [14].

Одна из главных особенностей многофизичных задач с упругими деформациями заключается в том, что они описываются связанными системами дифференциальных уравнений с частными производными для нескольких искомых полей [15–19]. В таких моделях помимо механических перемещений по различным направлениям присутствуют дополнительные поля, такие как давление, температура, электрический и магнитный потенциалы. Таким образом, количество искомых степеней свободы увеличивается многократно. В случае, если каждое искомое поле определяется большим количеством степеней свободы, решение дискретной задачи будет требовать значительных вычислительных ресурсов. Одним из способов разрешения данной проблемы является применение схем расщепления [15, 20, 21]. Схемы расщепления позволяют решать дискретные задачи для каждого искомого поля последовательно. Однако перед их применением необходимо убедиться в выполнении условий устойчивости. Применение схем расщепления, основанных на общей теории устойчивости операторно-разностных схем, для задач математической физики детально изложено в монографии А. А. Самарского и П. Н. Вабищевича [22].

Дополнительная сложность может также возникнуть в случае, если многофизичная математическая модель является нелинейной. В таком случае необходимо применять различные методы линеаризации, которые зачастую являются итерационными. Тогда на каждом временном слое появляются дополнительные итерации по нелинейности. Наиболее популярными методами линеаризации являются метод Ньютона [23] и метод Пикара [24], а также их различные вариации. В случае если решение не сильно меняется за один временной шаг, то можно применять линеаризацию с прошлого временного слоя, что соответствует одной итерации метода Пикара. В качестве примера таких задач можно привести задачи с фазовым переходом грунта [25].

Помимо этого стоит отметить, что многие прикладные многофизичные задачи с упругими деформациями задаются в неоднородных средах [26, 27]. Для точного моделирования различных процессов, протекающих в таких средах, необходимо учитывать все мелкие неоднородности, так как они могут оказывать существенное влияние на решение. Поэтому нужно использовать подробные вычислительные сетки, способные разрешать все неоднородности среды. Однако применение подобных сеток приводит к увеличению размерности дискретной задачи. Учитывая то, что многофизичные математические модели описываются связанными системами уравнений, вычислительные затраты увеличиваются многократно. Таким образом, разработка эффективных вычислительных алгоритмов численного решения многофизичных задач является чрезвычайно актуальной задачей.

Одним из способов решения проблемы, связанной с неоднородностью среды, является классический подход асимптотического усреднения [28–30]. В данном подходе в основном рассматривается среда с некоторой периодической неоднородностью, а также предполагается возможность разделения микро- и макромасштабов. Целью асимптотического усреднения является вывод усредненного уравнения (макроскопической модели) при периоде неоднородности, стремящемся к нулю. Следует отметить, что асимптотическое усреднение содержит ряд ограничений, которые сильно сужают область его применения. Однако данный метод позволяет получить точное усредненное уравнение, которое можно использовать для проверки численных подходов.

Метод численного усреднения позволяет преодолеть ограничения асимптотического подхода [17, 31, 32]. В численном подходе усреднения неоднородная среда может быть непериодичной и без разделения масштабов. Вычислительная область дискретизируется с помощью мелкой сетки, которая разрешает неоднорости среды. Затем вводится грубая сетка, каждая ячейка которой содержит мелкосеточные ячейки. Однако при этом грубая сетка не разрешает неоднородности среды. Цель численного усреднения состоит в определении эффективных коэффициентов в каждой ячейке грубой сетки путем решения локальных задач. В итоге, как и в аналитическом усреднении, получается макроскопическая модель.

Помимо методов усреднения широко применяются многомасштабные методы, такие как многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ) [33]. Вариации ММКЭ и их приложения для различных задач детально изложены в монографии Я. Эфендиева и Т. Ю. Хоу [34]. Основная идея ММКЭ заключается в построении специальных (многомасштабных) базисных функций вместо стандартных. В нем так же, как и в методе численного усреднения, вводится грубая сетка, каждая ячейка которого содержит мелкосеточные ячейки. Затем в каждой грубой ячейке решается локальная задача, чтобы вычислить многомасштабные базисные функции. Получаемые многомасштабные базисные функции содержат в себе информацию о мелкомасштабных неоднородностях среды. Более того, получаемая макроскопическая модель во многом аналогична модели, полученной численным усреднением.

Следует отметить, что подходы численного усреднения и многомасштабного метода конечных элементов вводят один макроскопический параметр (эффективный коэффициент/базисную функцию) на ячейку грубой сетки. К сожалению, во многих случаях этого бывает недостаточно. Методы многоконтинуального усреднения позволяют решить данную проблему [35–39]. Данные методы строят макроскопическую модель, состояющую из нескольких континуумов и, следовательно, нескольких макроскопических параметров. Одной из первых работ в данном направлении является статья Л. И. Рубинштейна [35], в которой рассматривается распространение тепла в неоднородных средах. Наиболее известными работами данного подхода усреднения являются работы, посвященные трещиновато-пористым средам [36–38]. Из недавних работ необходимо отметить статью Я. Эфендиева и В. Т. Леяна [39], в которой был предложен новый метод многоконтинуального усреднения, позволяющий выводить многоконтинуальные модели наиболее строгим образом. При этом данный метод является достаточно гибким, чтобы его можно было применять для различных задач. Основная идея метода заключается в формулировке специальных задач на ячейках с ограничениями и последующем разложении решения по континуумам. Однако, несмотря на все достоинства методов многоконтинуального усреднения, для их применения необходимо задавать

определенные ограничения на среду, что несколько сужает область их применения.

Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ) вводит дополнительные макроскопические параметры (базисные функции) и позволяет эффективно решать задачи с высоким контрастом и без разделения масштабов [40]. Данный метод является обобщением ММКЭ и строит несколько многомасштабных базисных функций на ячейку грубой сетки. Для этого в каждой локальной области строится вспомогательное пространство, в котором проводится локальное спектральное разложение. Собственные векторы, соответствующие наименьшим собственным значениям, выбираются в качестве базисных функций. По этой причине их также называют спектральными базисными функциями. Для обеспечения их согласованности применяется метод разбиения единицы. Результатом применения ОММКЭ является вычислительная макроскопическая модель, схожая с многоконтинуальными моделями, так как она содержит несколько макроскопических параметров. При этом следует отметить, что при использовании только одной базисной функции на ячейку грубой сетки макроскопическая модель становится аналогичной моделям, получаемым подходами численного усреднения и многомасштабного метода конечных элементов. Данный многомасштабный метод продемонстрировал свою высокую эффективность для различных задач в неоднородных средах с высоким контрастом [41–46].

Успешная реализация ОММКЭ для ряда сложных задач дала начало разработке его различных модификаций. Одной из таких модификаций является онлайн обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ООММКЭ) на основе невязки [47]. В данном методе вычисляются дополнительные (онлайн) многомасштабные базисные функции в ходе решения самой задачи. Онлайн многомасштабные базисные функции строятся путем решения локальных задач на основе невязки, что позволяет ускорить сходимость метода и производить учет изменения свойств среды в случае нелинейных задач. При этом данное обогащение многомасштабного пространства может проводиться адаптивно – для локальных областей с наибольшей невязкой.

Одной из особенностей ОММКЭ является то, что построение грубой сетки не зависит от вида неоднородности и контраста. В классических подходах численного решения задач вычислительная сетка строится с учетом неоднородности среды. Ярким примером служат перфорированные среды, в которых сетка строится вокруг перфораций. ОММКЭ позволяет решать задачи на любой грубой сетке независимо от масштабов и контраста. Вместо этого для разрешения мелкомасштабной информации используются многомасштабные базисные функции. Таким образом, данный метод имеет общие черты с бессеточными подходами. Это было наглядно показано в недавней работе, в которой был представлен бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов [48].

Необходимо отметить, что ОММКЭ относится к спектральным методам и не гарантирует улучшения точности при измельчении грубой сетки. По этой причине был разработан обобщенный многомасштабный метод конечных элементов с ограничением для минимизации энергии [49]. В нем после вычисления базисных функций ОММКЭ многомасштабное пространство строится путем решения задач с ограничением минимизации энергии в области с избыточной дискретизацией (превышающей стандартную локальную область). Вслед за данным методом был предложен метод нелокального многоконтинуального апскейлинга [50]. Данный метод также основан на решении задач с ограничениями в области с избыточной дискретизацией. Метод не требует предварительного вычисления многомасштабных базисных функций ОММКЭ.

Как известно, в последнее время большую популярность получило применение методов машинного обучения в численном моделировании [51–53]. Стоит отметить, что методы машинного обучения могут быть применены для ускорения построения вычислительных макроскопических моделей. Например, их можно использовать для быстрого вычисления эффективных свойств численного усреднения и базисных функций ММКЭ [54–57]. Данные методы также были использованы для предсказания дискретизации ОММКЭ для задач фильтрации [58].

В случае применения ОММКЭ для многофизичных или многоконтинуальных моделей важным вопросом становится формулировка локальных задач для построения вспомогательных пространств, а также вид матриц в локальных спектральных задачах. Наиболее распространенным является расщепленный подход, в котором формулируются отдельные локальные задачи для каждого поля. В результате получаются расщепленные многомасштабные базисные функции. Преимуществами данного подхода являются простота реализации и уменьшение вычислительных затрат. Однако в таком случае не учитывается взаимовлияние полей решения, что может сказаться на точности аппроксимации мелкомасштабного решения. Альтеранативным подходом является связанное построение многомасштабных базисных функций, в котором решаются связанные локальные задачи. Получаемые в результате связанные многомасштабные базисные функции учитывают взаимовлияние полей решения, что в среднем обеспечивает лучшую точность. Большинство работ с применением данного подхода рассматривают многоконтинуальные модели [59–62], но не так много работ посвящено использованию связанных многомасштабных базисных функций для многофизичных моделей [63]. Связанный подход может быть крайне полезен для учета взаимовлияния физических процессов.

Диссертационная работа посвящена разработке и реализации эффективных вычислительных многомасштабных алгоритмов на основе ОММКЭ для многофизичных задач с упругими деформациями в неоднородных средах. Результатом применения данных алгоритмов являются

вычислительные макроскопические модели, которые имеют общие черты с многоконтинуальными моделями и позволяют выйти за границы классических подходов усреднения. В работе рассматриваются следующие задачи: (1) задача термоупругости с фазовым переходом в неоднородной среде; (2) задача термопороупругости в неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых средах; (3) задача пьезоэлектричества в композитной и стохастически неоднородной средах; (4) задача упругости Коссера в перфорированной, композитной и стохастически неоднородной средах. Для рассмотренных задач многомасштабные алгоритмы разработаны с учетом их особенностей. Главной сложностью первой задачи является нелинейность, вызванная фазовым переходом. Поэтому для нее разработан онлайн многомасштабный подход с обогащением многомасштабного пространства в ходе решения самой задачи. Данный онлайн подход позволяет учесть изменения упругих и тепловых свойств среды, вызванные фазовым переходом. Вторая задача отличается сложностью математической модели. Поэтому в многомасштабном алгоритме строятся расщепленные многомасштабные базисные функции. Для последних двух задач, которые характеризуются сильной связанностью уравнений, строятся связанные многомасштабные базисные функции для учета взимовлияния физических процессов.

Цель диссертационной работы состоит в разработке многомасштабных алгоритмов решения многофизичных задач с упругими деформациями в неоднородных средах. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи исследования:

- Разработка и исследование алгоритмов офлайн и онлайн обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для решения задачи термоупругости с фазовым переходом в неоднородной среде.
- Разработка и исследование алгоритма обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задачи термопороупругости в неоднородных и неоднородных трещиноватопористых средах.
- Разработка и исследование алгоритма обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с использованием расщепленных и связанных многомасштабных базисных функций для решения: (1) задачи пьезоэлектричества в композитной и стохастически неоднородной средах; (2) задачи упругости Коссера в перфорированной, композитной и стохастически неоднородной средах.

Научная новизна и практическая значимость. Научная новизна проведенных исследований заключается в следующем:

• Разработаны алгоритм офлайн и онлайн обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для решения задачи термоупругости с фазовым переходом в неоднородной среде.

- Разработан алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задачи термопороупругости в неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых средах.
- Разработан алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с использованием связанных и расщепленных базисных функций для задачи пьезоэлектричества в композитной и стохастически неоднородной средах.
- Разработан алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с использованием связанных и расщепленных базисных функций для задачи упругости Коссера в перфорированной, композитной и стохастически неоднородной средах.

Разработанные многомасштабные алгоритмы и численные расчёты имеют практическую значимость в численном исследовании многофизичных процессов с упругими деформациями в средах с различным видом неоднородностей. Полученные в результате вычислительные макроскопические модели расширяют предыдущие работы по усреднению на случай без разделения масштабов и периодичности.

Решение многофизичных задач с упругими деформациями основано на методе конечных элементов на структурированных и неструктурированных расчетных сетках с использованием: (1) обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с расщепленными и связанными базисными функциями; (2) онлайн обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Для построения расчетной области с расчетной сеткой применялся генератор сеток Gmsh [64] и вычислительный пакет FEniCS [65]. Численная реализация многомасштабных алгоритмов основана на вычислительном пакете FEniCS с использованием языков программирования C++ и Python.

Положения, выносимые на защиту:

- Алгоритмы офлайн и онлайн обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задачи термоупругости с фазовым переходом в неоднородной среде.
- Алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задачи термопороупругости в неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых средах.
- Алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с использованием расщепленных и связанных базисных функций для задачи пьезоэлектричества в композитной и стохастически неоднородной средах.
- Алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с использованием расщепленных и связанных базисных функций для задачи упругости Коссера в перфорированной, композитной и стохастически неоднородной средах.

Обоснованность и достоверность результатов обеспечена использованием корректно по-

строенных математических моделей, подтверждена вычислительными экспериментами, а также путем сравнения результатов многомасштабных методов с результатами численного моделирования методом конечных элементов на эталонной сетке.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Международная конференция «Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач», г. Якутск, 08.08.2018–10.08.2018;
- XXIII Лаврентьевские чтения, посвященные 70-летию основания Якутского научного центра СО РАН, г. Якутск, 15.04.2019–19.04.2019;
- Международная конференция «Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач», г. Якутск, 24.06.2019–25.06.2019;
- XII международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», г. Академгородок, Новосибирск, 04.10.2020– 12.10.2020;
- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», г. Москва, 10.11.2020–27.11.2020;
- Международная конференция «Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач», Якутск, 07.12.2020;
- The 13th InterPore Annual Meeting (InterPore2021), онлайн, 31.05.2021–04.06.2021;
- Международная конференция «Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные», г. Якутск, 18.07.2021–25.07.2021;
- Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2021», г. Академгородок, Новосибирск, 04.10.2021–08.10.2021;
- Mathematical Aspects of the Contemporary Continuum Mechanics, Steklov Mathematical Institute, г. Москва, 08.11.2021–12.11.2021;
- V Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, 27.06.2022– 30.06.2022;
- V Всероссийская научная конференция «Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления», г. Якутск, 05.09.2022–07.09.2022.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК (ВАК, Scopus, Web of Science) [66–76], получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [77]. **Личный вклад автора.** В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [66,67,70–73,75,76] разработан и реализован вычислительный алгоритм, проведены расчеты и проведен анализ результатов вычислительных экспериментов; в работах [68, 69, 74] диссертант участвовал в построении математической модели и ее численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертационной работы составляет 140 страниц, содержит 53 иллюстрации и 17 таблиц. Список литературы содержит 157 наименований.

Работа поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14. Y26.31.0013, грантом РНФ 19-11-00230, грантом РНФ 17–71–20055, грантом РНФ 22-11-20027, грантом РНФ 23-71-30013.

В первой главе представлена модель термоупругости, учитывающая изменения тепловых и механических свойств среды, вызванные фазовым переходом. В предложенной модели деформации грунта происходят из-за роста пористости, вызванного разницей плотности льда и воды. Представлена конечно-элементная аппроксимация этой модели на мелкой сетке. Для разрешения нелинейности задачи используется простейшая линеаризация, в которой все нелинейные коэффициенты берутся с предыдущего временного слоя. С целью уменьшения размерности дискретной задачи предложены офлайн и онлайн многомасштабные алгоритмы, основанные на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов. В численных результатах рассматривается двумерная модельная задача морозного пучения неоднородного грунта с жестким включением. Многомасштабные алгоритмы хорошо аппроксимируют мелкосеточное решение с меньшим числом степеней свободы. Однако онлайн алгоритм имеет лучшую точность, так как учитывает изменения неоднородности, вызванные фазовым переходом.

Во второй главе рассматриватся задача термопороупругости в неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых средах. Математическая модель описывается связанной системой уравнений для давления, температуры и перемещений. Метод конечных элементов и модель дискретных трещин применяются для аппроксимации на мелкой сетке. Для аппроксимации на грубой сетке используется обобщенный многомасштабный метод конечных элементов. Численные результаты представлены для двух- и трехмерных модельных задач в неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых средах. Численные результаты показывают, что предложенный многомасштабный алгоритм может обеспечить хорошую точность при малом числе степеней свободы.

В третьей главе разрабатывается многомасштабный алгоритм для пьезокомпозитов. Математическая модель описывается системой связанных дифференциальных уравнений для меха-

нических перемещений и электрического потенциала. Предлагаемый многомасштабный алгоритм основан на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов, который позволяет выйти за рамки численного усреднения. Рассматриваются как связанные, так и расщепленные базисные функции. В первом случае многомасштабные базисные функции строятся путем решения связанных локальных задач. В частности, связанные локальные задачи решаются для генерации вспомогательных пространств. Численные результаты представлены для двухмерных модельных задач в композитной и стохастически неоднородной средах. Предлагаемые подходы построения базисных функций позволяют добиться хорошей аппроксимации мелкомасштабного решения при меньшем числе степеней свободы. Однако связанные многомасштабные базисные функции в среднем обеспечивают лучшую точность решения.

В четвертой главе разрабатывается многомасштабный вычислительный алгоритм на основе ОММКЭ для неоднородных сред Коссера без разделения масштабов и с высоким контрастом. Математической моделью служит краевая задача для системы дифференциальных уравнений для перемещений и микровращения. Рассматриваются связанный и расщепленный подходы построения многомасштабных базисных функций. Численные результаты представлены для перфорированной, композитной и стохастически неоднородной сред. Результаты показывают, что предлагаемые подходы построения базисных функций позволяют добиться хорошей аппроксимации мелкомасштабного решения с использованием меньшего количества степеней свободы. При этом связанные многомасштабные базисные функции в среднем дают меньшие погрешности решения.

Автор выражает искреннюю благодарность доктору физико-математических наук, профессору Ялчину Эфендиеву за научное руководство и доценту Васильевой Марии Васильевне за научное наставничество и оказание всесторонней поддержки. Автор выражает благодарность своим коллегам по научно-исследовательской кафедре «Вычислительные технологии» СВФУ и сотрудникам молодежной лаборатории «Вычислительные технологии моделирования многофизичных и многомасштабных процессов криолитозоны» за полезные советы и помощь в редактировании работы.

Глава 1

Многомасштабное моделирование процесса морозного пучения неоднородного грунта

Проектирование и строительство инженерных сооружений и зданий в криолитозоне требуют особого подхода. Оттаивание и замерзание таких грунтов может вызывать деформации поверхности земли, что приводит к разрушению различных сооружений и зданий [78–80]. В то же время сами здания могут служить источником тепла и способствовать оттаиванию оснований. По этим причинам их следует строить на свайных фундаментах [81–83]. Другим способом стабилизации является искусственное замораживание грунта [84–86]. Математическое моделирование может служить полезным инструментом как на стадии проектирования, так и при исправлении уже существующих дефектов. Оно может точно прогнозировать влияние определенных строительных технологий на конкретные участки грунта. Однако для этого математические модели должны учитывать многофизичную природу задачи.

Существует много работ, посвященных разработке математических моделей для моделирования процессов оттаивания и пучения грунта.

В [79] представлена трехфазная конечно-элементная модель для пористых материалов, состоящая из твердого каркаса, воды и льда. Полученная модель была разработана для описания поведения талых грунтов при замерзании.

В [87, 88] разработана термо-гидро-механическая (ТГМ) модель для описания морозного пучения и оттаивания. Представленная модель использует функцию скорости роста пористости для моделирования роста ледяных линз как среднего роста пористости.

В работе [89] был разработан связанный ТГМ подход, основанный на степени насыщения жидкостью и эффективном напряжении.

В [90] была представлена модель термо-гидро-механической связи с учетом изменения фаз вода-лед.

В [91] была представлена многофазная модель поромеханики, моделирующая рост и таяние ледяных линз, а также возникающие в результате этого морозное пучение и оттаивание в многокомпонентных мерзлых грунтах.

В [68] была разработана упрощенная версия модели, представленной в [87]. В этой модели деформации грунта происходят из-за роста пористости, вызванного разницей в плотности льда и воды.

В данной главе рассматривается модифицированная версия модели термоупругости, разработанной в [68]. Как и в исходной модели, механические деформации среды возникают в результате изменения пористости, вызванного сменой фаз. В данной модифицированной версии учитываются также изменения упругих свойств среды. Математическая модель описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными для температуры и перемещений. Для этой модели разрабатывается конечно-элементная аппроксимация на мелкой сетке. Для линеаризации задачи используется решение с предыдущего временного шага.

Рассматриваются два многомасштабных подхода на основе обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (ОММКЭ). В первом подходе многомасштабные базисные функции строятся без учета нелинейности математической модели. Во втором подходе при решении задачи используется онлайн обогащение многомасштабного пространства на основе невязки [47]. Такое обогащение позволяет учесть изменения упругих и тепловых свойств среды, вызванные фазовым переходом. Следует отметить, что ранее многомасштабные алгоритмы на основе ОММКЭ были реализованы только для задач тепло-массопереноса с фазовым переходом [92, 93], а также для задачи термоупругости без фазового перехода [44]. Для проверки многомасштабных подходов рассматривается двумерная модельная задача морозного пучения неоднородного грунта.

1.1 Предварительные сведения

В данном разделе кратко изложены концепции, на которых основана модель термоупругости с фазовым переходом. Более подробные описания и выводы можно найти в [68]. Сначала вводятся функция содержания воды w(T) и ее производная w'(T).

$$w(T) = \begin{cases} \overline{w}, & T \ge T_f, \\ \overline{w} \exp(\alpha [T - T_f]), & T < T_f \end{cases},$$
$$w'(T) = \frac{\partial w(T)}{\partial T} = \begin{cases} 0, & T \ge T_f, \\ \alpha \overline{w} \exp(\alpha [T - T_f]), & T < T_f \end{cases}$$

где \overline{w} – максимальное содержание воды, T – температура, T_f – температура замерзания, и α – параметр модели.

Далее с помощью w(T) выводится функция пористости $\phi(T)$.

$$\phi(T) = \frac{w(T) + (\overline{w} - w(T))\frac{\rho_w}{\rho_i}}{\frac{\rho_w}{\rho_s} + w(T) + (\overline{w} - w(T))\frac{\rho_w}{\rho_i}}$$

где ρ_w, ρ_i и ρ_s – плотности воды, льда и твердого скелета грунта, соответственно.

$$\overline{w} = \left(\frac{\overline{\phi}}{1-\overline{\phi}}\right)\frac{\rho_w}{\rho_s}.$$

Наконец, с помощью w(T) и $\phi(T)$ определяются объемные доли воды, льда и твердого скелета грунта $\Theta_w(T)$, $\Theta_i(T)$ и $\Theta_s(T)$, соответственно.

$$\Theta_w(T) = w(T)\frac{\rho_s}{\rho_w}(1-\phi(T)), \quad \Theta_i(T) = (\overline{w} - w(T))\frac{\rho_s}{\rho_i}(1-\phi(T)), \quad \Theta_s(T) = 1-\phi(T).$$

Необходимо отметить, что в случае полностью насыщенной пористой среды справедливо $\Theta_w(T) + \Theta_i(T) + \Theta_s(T) = 1.$

1.2 Математическая модель

В данной главе рассматривается модификация модели, представленной в [68]. Как и в исходной модели, механические деформации среды являются следствием изменения пористости, вызванного фазовым переходом. Данная модификация также учитывает изменение упругих свойств среды. Полученная математическая модель описывается следующей системой уравнений для температуры *T* и перемещений *u* в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ при $t \in (0, t_{max}]$

$$[c\rho(T) + D(T)w'(T)] \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot [k(T)\nabla T] = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\nabla [\mu(T)\nabla du] + \nabla ([\lambda(T) + \mu(T)] \nabla \cdot du) + \nabla [\beta(T) d\phi(T)] = 0, \quad x \in \Omega.$$
(1.1)

Для расчета объемной теплоемкости $c\rho(T)$ используется следующая формула

$$c\rho(T) = \Theta_s(T)c_s\rho_s + \Theta_i(T)c_i\rho_i + \Theta_w(T)c_w\rho_w,$$

где *c*_s, *c*_i и *c*_w обозначают удельные теплоемкости твердого скелета грунта, льда и воды, соответственно.

Коэффициент теплопроводности k(T) вычисляется с помощью логарифмического закона [94]

$$k(T) = k_s^{\Theta_s(T)} k_i^{\Theta_i(T)} k_w^{\Theta_w(T)},$$

где k_s , k_i и k_w обозначают коэффициенты теплопроводности твердого скелета грунта, льда и воды, соответственно.

В уравнении для перемещений $\lambda(T)$ и $\mu(T)$ обозначают параметры Ламе, которые могут быть рассчитаны с помощью коэффициента Пуассона ν и модуля упругости E(T).

$$\lambda(T) = \frac{\nu E(T)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu(T) = \frac{E(T)}{2(1+\nu)}.$$

Отметим, что модуль упругости E зависит от температуры T. Таким образом, рассматриваются изменения упругих свойств среды, вызванные фазовым переходом. Для вычисления модуля упругости E(T) применяется следующая формула

$$E(T) = \frac{E_i \left[\bar{w} - w(T)\right] \frac{\rho_s}{\rho_i} + E_s}{\left[\bar{w} - w(T)\right] \frac{\rho_s}{\rho_i} + 1},$$

где E_i и E_s – модули упругости льда и твердого скелета грунта, соответственно.

Следует отметить, что $\beta(T)$ представляет собой тепловое расширение, вызванное изменением пористости

$$\beta(T) = \frac{3\lambda(T) + 2\mu(T)}{3(1 - \phi(T))}.$$

Наконец, теплота фазового перехода D(T) может быть выражена следующим образом

$$D(T) = L\rho_s \left[(1 - \phi(T)) + (\overline{w} - w(T)) \frac{\partial \phi(T)}{\partial w(T)} \right],$$

где *L* – удельная теплота фазового перехода.

Система уравнений (1.1) дополняется следующими начальными условиями

$$T = T_0, \quad u = u_0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0$$
 (1.2)

и граничными условиями

$$-k(T)\nabla T \cdot n = \gamma(T - T_{env}), \quad x \in \Gamma_T, \quad -k(T)\nabla T \cdot n = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_T,$$

$$u_1 = 0, \quad (\sigma(u) \cdot n)_2 = 0, \quad x \in \Gamma_L \cup \Gamma_R, \quad u_2 = 0, \quad (\sigma(u) \cdot n)_1 = 0, \quad x \in \Gamma_B,$$

$$\sigma(u) \cdot n = \sigma_p, \quad x \in \Gamma_M, \quad \sigma(u) \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_T \setminus \Gamma_M,$$

$$(1.3)$$

где n – единичный вектор нормали к $\partial \Omega$; Γ_L , Γ_R , Γ_B и Γ_T обозначают левую, правую, нижнюю и верхнюю границы Ω , а $\Gamma_M \subset \Gamma_T$ (см. Рисунок 1.1); $\sigma(u)$ – тензор напряжений, определенный следующим образом

$$\sigma(u) = 2\mu(T)\varepsilon(u) + \lambda(T)\operatorname{tr}(\varepsilon(u))\mathcal{I}, \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T).$$

Здесь $\varepsilon(u)$ – тензор деформаций, а I – единичная матрица.

1.3 Конечно-элементная аппроксимация на мелкой сетке

Здесь представлена мелкосеточная аппроксимация модели термоупругости с фазовым переходом. Для пространственной аппроксимации используется метод конечных элементов со стандартными линейными базисными функциями. Дискретизация по времени основана на неявной аппроксимации.



Рисунок 1.1: Иллюстрация вычислительной области Ω с границами

1.3.1 Вариационная формулировка

Сначала проводится аппроксимация по времени. Для этого производная по времени в уравнении теплопроводности заменяется разностным отношением "вперед"

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau},$$

где $n = 0, ..., N_t - 1$ – номер временного шага, N_t – количество временных шагов, $\tau = t_{max}/N_t$ – размер шага по времени. Таким образом, рассматриваемая нестационарная задача преобразуется в серию стационарных задач.

Далее производится пространственная аппроксимация. Пусть $T^{n+1} \in Q$ и $u^{n+1} \in V$ для всех временных шагов, где функциональные пространства определены следующим образом

$$Q = H^{1}(\Omega), \quad V = \{ v \in [H^{1}(\Omega)]^{2} : v_{1}(x) = 0, x \in \Gamma_{L} \cup \Gamma_{R} \lor v_{2}(x) = 0, x \in \Gamma_{B} \}$$

где H^1 – пространство Соболева. Затем уравнения теплопереноса и упругости умножаются на тестовые функции $q \in Q$ и $v \in V$, соответственно. Полученные уравнения интегрируются с применением формулы интегрирования по частям и с учетом (1.3). В итоге получается следующая вариационная формулировка: для $n = 0, ..., N_t - 1$, найти $T^{n+1} \in Q$ и $u^{n+1} \in V$ такие, что

$$s(\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau}, q) + a_T(T^{n+1}, q) = l_T(q), \quad \forall q \in Q,$$

$$a_u(u^{n+1} - u^n, v) = l_u(v) + b(T^{n+1} - T^n, v), \quad \forall v \in V,$$

где билинейные и линейные формы определяются следующим образом

$$s(T,q) = \int_{\Omega} \left[(c\rho)^n + (Dw')^n \right] Tqdx, \quad a_T(T,q) = \int_{\Omega} k^n \nabla T \cdot \nabla q dx + \int_{\Gamma_T} \gamma Tqdx,$$

$$a_{u}(u,v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) dx, \quad b(T,v) = \int_{\Omega} [\beta(T)\phi(T)I] : \varepsilon(v) dx,$$
$$l_{T}(q) = \int_{\Gamma_{T}} \gamma T_{env} q ds, \quad l_{u}(v) = \int_{\Gamma_{M}} \sigma_{p} \cdot v ds.$$

Необходимо отметить, что в данной вариационной формулировке используется неявная аппроксимация по времени. Для линеаризации теплового уравнения коэффициенты вычисляются из предыдущего временного шага. Поскольку в рассматриваемой модели перемещения не влияют на температуру, уравнения теплопереноса и упругости решаются последовательно.

1.3.2 Дискретная формулировка

Далее нам необходимо провести пространственную дискретизацию. Для этого сначала определяется мелкая сетка \mathcal{T}^h , состоящая из конечных элементов K_j таких, что $K_j \cap K_i = \emptyset$, если $j \neq i$. После этого вводится дискретизированная вычислительная область $\Omega_h = \bigcup_{j=1}^{N_c^h} K_j$, где N_c^h – число конечных элементов. Затем определяются конечномерные функциональные пространства $Q_h \subset Q$ и $V_h \subset V$ на Ω_h . В дискретной формулировке для каждого временного шага ищутся $T^{n+1} \in Q_h$ и $u^{n+1} \in V_h$, которые могут быть представлены следующим образом

$$T^{n+1} = \sum_{j=1}^{N_{\nu}^{h}} T_{h,j}^{n+1} \phi_{j}, \quad u^{n+1} = \sum_{j=1}^{2N_{\nu}^{h}} u_{h,j}^{n+1} \Phi_{j},$$

где ϕ_j и Φ_j – стандартные линейные базисные функции, $T_{h,j}^{n+1}$ и $u_{h,j}^{n+1}$ – векторы узловых значений температуры и перемещений.

Необходимо отметить, что дискретная задача может быть записана в матрично-векторной форме: для $n = 0, ..., N_t - 1$,

1. Найти вектор узловых значений температуры T_h^{n+1} такой, что

$$S \, \frac{T_h^{n+1} - T_h^n}{\tau} + A_T T_h^{n+1} = L_T,$$

где матрицы и векторы имеют следующий вид

$$S = [s_{ij}], \quad s_{ij} = s(\phi_i, \phi_j), \quad A_T = [a_{T,ij}], \quad a_{T,ij} = a_T(\phi_i, \phi_j),$$
$$L_T = \{l_{T,j}\}, \quad l_{T,j} = l_T(\phi_j).$$

2. Найти вектор узловых значений перемещений u_h^{n+1} такой, что

$$A_u(u_h^{n+1} - u_h^n) = L_u + B^{n+1} - B^n,$$

где матрицы и векторы определены следующим образом

$$A_{u} = [a_{u,ij}], \quad a_{u,ij} = a_{u}(\Phi_{i}, \Phi_{j}), \quad L_{u} = \{l_{u,j}\}, \quad l_{u,j} = l_{u}(\Phi_{j}),$$
$$B^{n+1} = \{b_{j}^{n+1}\}, \quad b_{j}^{n+1} = b(T^{n+1}, \Phi_{j}), \quad B^{n} = \{b_{j}^{n}\}, \quad b_{j}^{n} = b(T^{n}, \Phi_{j}).$$

Полученные дискретные задачи для теплопереноса и упругости содержат N_v^h и $2N_v^h$ степеней свободы, соответственно. В следующих двух разделах представлены многомасштабные методы, позволяющие уменьшить размерность дискретной задачи.

1.4 Офлайн аппроксимация на грубой сетке с использованием ОММКЭ

В данном разделе представлен подход многомасштабного понижения порядка модели, который не учитывает нелинейность при построении многомасштабных базисных функций. Данный многомасштабный подход основан на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов (ОММКЭ). Основная идея ОММКЭ заключается в построении многомасштабных базисных функций путем решения локальных спектральных задач. Такие базисные функции учитывают различные мелкомасштабные неоднородности среды. Более того, данный метод позволяет вводить более одной базисной функции на грубый элемент, что играет важную роль в задачах с высоким контрастом.

Алгоритм ОММКЭ можно разделить на офлайн и онлайн этапы. На офлайн этапе строятся многомасштабные базисные функции, способные учитывать неоднородности среды. Базисные функции вычисляются в локальных областях ω_i грубой сетки \mathcal{T}^H . Локальная область ω_i состоит из ячеек грубой сетки K_j , содержащих узел грубой сетки x_i , т.е. $\omega_i = \{K_j \in \mathcal{T}^H : x_i \in K_j\}$ (см. Рисунок 1.2). Офлайн этап состоит из следующих шагов.

Офлайн этап

- 1. Генерация грубой сетки \mathcal{T}^H .
- 2. Построение вспомогательного пространства для каждой локальной области ω_i .
- 3. Построение многомасштабного пространства путем решения локальных спектральных задач во вспомогательных пространствах.
- 4. Сборка матрицы проекции в многомасштабное пространство.

На онлайн этапе мелкосеточная система переводится на грубую сетку с помощью полученной матрицы проекции. В итоге задача решается на грубой сетке. Отметим, что решение на мелкой сетке может быть восстановлено из грубосеточного решения. Онлайн этап можно разделить на следующие шаги.

Онлайн этап

1. Для текущего временного шага мелкосеточная система переводится на грубую сетку с помощью многомасштабной матрицы проекции.



Рисунок 1.2: Грубая сетка \mathcal{T}^H , грубая ячейка K_j и локальная область ω_i

- 2. Решается задача на грубой сетке.
- 3. Решение на мелкой сетке восстанавливается с помощью многомасштабной матрицы проекции и решения на грубой сетке.
- 4. Переход к следующему временному шагу.

Поскольку задачи теплопереноса и упругости решаются последовательно, многомасштабные базисные функции строятся по отдельности для температуры и перемещений. В следующих подразделах представлено описание построения базисных функций для обоих полей. Предполагается, что грубая сетка и локальные области уже построены. Поэтому описание начинается с расчета вспомогательных пространств. Отметим, что для простоты в обозначении локальной области нижний индекс *i* по возможности будет опускаться.

1.4.1 Многомасштабные базисные функции для температуры

Вспомогательные пространства. Чтобы построить вспомогательные пространства для температуры, необходимо решить следующие локальные задачи: для каждой ω найти ψ_i^{ω} такие, что

$$\int_{\omega} k(T_0) \nabla \psi_j^{\omega} \cdot \nabla q \, dx = 0$$

со следующими граничными условиями Дирихле

$$\psi_i^{\omega} = \delta_i^h(x), \quad x \in \partial \omega,$$

где $\delta_j^h(x) = \delta_{j,k}, \forall j, k \in J_h(\omega)$, а $J_h(\omega)$ – множество всех узлов мелкой сетки на $\partial \omega$. Необходимо отметить, что всего нужно решить $N^{\partial \omega}$ локальных задач, где $N^{\partial \omega}$ обозначает количество узлов мелкой сетки на $\partial \omega$. После этого для каждой локальной области строятся вспомогательное пространство и вспомогательная матрица проекции

$$\begin{split} &Q_{snap}(\omega) = span\{\psi_j^{\omega} : 1 \le j \le N^{\partial \omega}\}, \\ &R_{T,snap}^{\omega} = (\psi_1^{\omega}, ..., \psi_{N^{\partial \omega}}^{\omega, snap})^T. \end{split}$$

Многомасштабное пространство. Полученные вспомогательные пространства используются для построения многомасштабного пространства. Необходимо решить следующие локальные спектральные задачи: для каждой ω найти $\tilde{\psi}_k^{\omega}$ такие, что

$$\tilde{A}_T \tilde{\psi}_k^{\omega} = \lambda_k \tilde{S}_T \tilde{\psi}_k^{\omega},$$

где

$$\tilde{A}_T = R_{T,snap}^{\omega} A_T (R_{T,snap}^{\omega})^T, \quad \tilde{S}_T = R_{T,snap}^{\omega} S_T (R_{T,snap}^{\omega})^T,$$
$$A_T = [a_{T,ij}], \quad a_{T,ij} = \int_{\omega} k(T_0) \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx, \quad S_T = [s_{T,ij}], \quad s_{T,ij} = \int_{\omega} k(T_0) \phi_i \phi_j dx.$$

Полученные собственные значения сортируются в порядке возрастания. Затем выбираются собственные векторы, соответствующие первым M_{off} собственным значениям. После этого эти собственные векторы переводятся обратно в исходное пространство

$$\bar{\psi}_k^{\omega} = (R_{T,snap}^{\omega})^T \tilde{\psi}_k^{\omega}$$

Для получения согласованных базисных функций собственные векторы умножаются на функцию разбиения единицы χ_i . Эта функция линейна и непрерывна в ω_i , равна 1 в x_i и 0 в других узлах грубой сетки.

$$\psi_{i,k}^{off} = \chi_i \bar{\psi}_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M_{off},$$

где N_v^H – количество узлов грубой сетки.

После этого строятся офлайн многомасштабное пространство и его матрица проекции

$$\begin{split} &Q_{off} = span\{\psi_{i,k}^{off} : 1 \leq i \leq N_{v}^{H} \quad \mathsf{M} \quad 1 \leq k \leq M_{off}\}, \\ &R_{T}^{off} = (\psi_{1,1}^{off}, ..., \psi_{1,M_{off}}^{off}, ..., \psi_{N_{v}^{H},1}^{off}, ..., \psi_{N_{v}^{H},M_{off}}^{off})^{T}. \end{split}$$

Примеры полученных многомасштабных базисных функций представлены на Рисунке 1.3.

1.4.2 Многомасштабные базисные функции для перемещений

Вспомогательные пространства. Как и в случае температуры, для получения вспомогательных функций необходимо решить локальные задачи. Однако локальные задачи должны быть решены для каждого направления перемещений: для каждой ω и l = 1, 2 найти $\Psi_{j}^{\omega,l}$ такие, что

$$\int_{\omega} \sigma(\Psi_j^{\omega,l}) : \varepsilon(v) dx = 0,$$

Рисунок 1.3: Пример коэффициента теплопроводности k_s и первых 4 офлайн многомасштабных базисных функций для температуры (слева направо) в локальной области ω_i

с граничными условиями Дирихле

$$\Psi_{j}^{\omega,l} = \bar{\delta}_{j}^{h}(x), \quad x \in \partial \omega,$$

где $\bar{\delta}_{j}^{h}(x) = \delta_{j,k}e_{l}, \forall j, k \in J_{h}(\omega_{i}), e_{l} - l$ -ый столбец единичной матрицы I_{2} . Таким образом, необходимо решить $2N^{\partial\omega}$ локальных задач. После этого для каждой локальной области ω и направления l = 1, 2 строятся вспомогательное пространство и матрица проекции

$$\begin{split} V_{snap}^{l}(\omega) &= span\{\Psi_{j}^{\omega,l}: 1 <= j <= N^{\partial \omega}\},\\ R_{u,snap}^{\omega,l} &= (\Psi_{1}^{\omega,l}, ..., \Psi_{N^{\partial \omega}}^{\omega,l})^{T}. \end{split}$$

Многомасштабное пространство. Многомасштабные базисные функции также строятся по отдельности для каждого направления перемещений. Для этого необходимо решить следующие локальные спектральные задачи: для каждой ω и l = 1, 2 найти $\tilde{\Psi}_{k}^{\omega,l}$ такие, что

$$\tilde{A}_{u}^{l}\tilde{\Psi}_{k}^{\omega,l}=\lambda_{k}^{l}\tilde{S}_{u}^{l}\tilde{\Psi}_{k}^{\omega,l},$$

где

$$\begin{split} \tilde{A}_{u}^{l} &= R_{u,snap}^{\omega,l} A_{u} (R_{u,snap}^{\omega,l})^{T}, \quad \tilde{S}_{u}^{l} = R_{u,snap}^{\omega,l} S_{u} (R_{u,snap}^{\omega,l})^{T}, \\ A_{u} &= \{a_{u,ij}\}, \quad a_{u,ij} = \int_{\omega} \sigma(\Phi_{j}) : \varepsilon(\Phi_{i}) dx, \\ S_{u} &= \{s_{u,ij}\}, \quad s_{u,ij} = \int_{\omega} (\lambda(T_{0}) + 2\mu(T_{0})) \Phi_{i} \cdot \Phi_{j} dx. \end{split}$$

Далее полученные собственные значения сортируются в порядке возрастания. После этого выбираются собственные векторы, соответствующие первым M_{off} собственным значениям. Как и для температуры, собственные векторы переводятся обратно с помощью вспомогательной матрицы проекции

$$\bar{\Psi}_k^{\omega,l} = (R_{u,snap}^{\omega,l})^T \tilde{\Psi}_k^{\omega,l}.$$

Затем мы умножаем полученные собственные векторы на функцию разбиения единицы χ_i , чтобы получить согласованные базисные функции

$$\Psi_{i,k}^{off,l} = \chi_i \bar{\Psi}_k^{\omega_i,l}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M_{off}, \quad 1 \le l \le 2.$$

В конце строятся многомасштабное пространство и его матрица проекции

$$\begin{split} V_{off} &= span\{\Psi_{i,k}^{off,l} : 1 \leq i \leq N_{v}^{H}, \quad 1 \leq k \leq M_{off}, \quad 1 \leq l \leq 2\}, \\ R_{u}^{off} &= (\Psi_{1,1}^{off,1}, ..., \Psi_{N_{v}^{v}, M_{off}}^{off,2})^{T}. \end{split}$$

На Рисунках 1.4 и 1.5 представлены примеры полученных многомасштабных базисных функций по направлениям *x*₁ и *x*₂, соответственно.



Рисунок 1.4: Пример модуля упругости E_s (слева) и первых 4 офлайн многомасштабных базисных функций для перемещения по x_1 (справа) в локальной области ω_i



Вторые компоненты первых 4 базисных функций u₂ (слева направо)

Рисунок 1.5: Пример модуля упругости E_s (слева) и первых 4 офлайн многомасштабных базисных функций для перемещения по x_2 (справа) в локальной области ω_i

1.4.3 Системы на грубой сетке

С помощью полученных матриц проекции для температуры и перемещений можно перевести дискретные системы с мелкой сетки на грубую. Более того, решение на грубой сетке можно перевести обратно на мелкую сетку.

Дискретные задачи на грубой сетке можно записать следующим образом: для *n* = 0, ..., *N*_t - 1, 1. Найти вектор узловых значений температуры *T*_Hⁿ⁺¹ такой, что

$$S_H \frac{T_H^{n+1} - T_H^n}{\tau} + A_{T,H} T_H^{n+1} = L_{T,H},$$

где матрицы и векторы определяются следующим образом

$$S_H = R_T^{off} S(R_T^{off})^T, \quad A_{T,H} = R_T^{off} A_T (R_T^{off})^T,$$
$$L_{T,H} = R_T^{off} L_T, \quad T_H^n = R_T^{off} T_h^n.$$

2. Найти вектор узловых значений перемещений u_H^{n+1} такой, что

$$A_{u,H}(u_H^{n+1} - u_H^n) = L_{u,H} + B_H^{n+1} - B_H^n,$$

где матрица и векторы получаются следующим образом

$$A_{u,H} = R_u^{off} A_u (R_u^{off})^T, \quad B_H^n = R_u^{off} B^n$$
$$L_{u,H} = R_u^{off} L_u, \quad u_H^n = R_u^{off} u_h^m.$$

Мелкосеточное решение может быть восстановлено с помощью матрицы проекции

$$T_{off}^{n+1} = (R_T^{off})^T T_H^{n+1}, \quad u_{off}^{n+1} = (R_u^{off})^T u_H^{n+1}.$$

Как было уже упомянуто, данный подход многомасштабного понижения порядка модели не учитывает нелинейность, вызванную фазовым переходом. Для ее учета в следующем разделе рассматривается метод онлайн обогащения.

1.5 Онлайн обогащение офлайн аппроксимации на грубой сетке

Модель термоупругости с фазовым переходом является нелинейной, поскольку коэффициенты уравнений зависят от температуры. Таким образом, свойства среды меняются в ходе решения задачи. Многомасштабный метод, описанный в предыдущем разделе, не учитывает эти изменения, что может служить источником погрешностей. Поэтому для повышения точности многомасштабного моделирования лучше применять онлайн подходы. Эти подходы позволяют обогащать информацию о среде в процессе решения задачи. В данном разделе представлено онлайн обогащение многомасштабного пространства, основанное на невязке. Офлайн многомасштабное пространство обогащается путем вычисления дополнительных онлайн многомасштабных базисных функций в процессе решения самой задачи. Поскольку вычисление этих базисных функций для каждого временного шага может быть затратным, предпочтительно обновлять онлайн базисные функции каждые 5-10 временных шагов. Офлайн пространство можно также обогащать адаптивно – только для некоторых локальных областей с большой невязкой [47,95]. Алгоритм онлайн обогащения можно записать следующим образом.

Онлайн этап

- 1. Генерация системы на грубой сетке для текущего временного шага.
- 2. Решение системы на грубой сетке.
- 3. Вычисление онлайн многомасштабных базисных функций.
- 4. Обогащение офлайн многомасштабного пространства.
- 5. Повторное решение задачи для текущего временного шага.
- 6. Переход к следующему временному шагу.

Поскольку задачи для температуры и перемещений решаются последовательно, онлайн многомасштабные базисные функции вычисляются по отдельности для температуры и перемещений.

Онлайн многомасштабные базисные функции для температуры. Мы должны решить следующие локальные задачи для вычисления онлайн многомасштабных базисных функций для температуры: для каждой ω найти ψ_k^{ω} такую, что

$$s(\frac{\psi_k^{\omega}}{\tau}, q) + a_T(\psi_k^{\omega}, q) = r_T^{k-1}(q), \quad x \in \omega,$$

$$\psi_k^{\omega} = 0, \quad x \in \partial \omega \setminus \gamma_T,$$

Здесь $\gamma_T = \partial \omega \cap \Gamma_T$, а невязка $r_T^k(q)$ определяется следующим образом

$$r_T^k(q) = l_T(q) + s(\frac{T_{ms}^n}{\tau}, q) - s(\frac{T_{ms}^k}{\tau}, q) - a_T(T_{ms}^k, q),$$

где нижний индекс *ms* обозначает многомасштабное решение.

Далее полученные функции умножаются на функции разбиения единицы

$$\psi_{i,k}^{on} = \chi_i \psi_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H.$$

Затем производится обогащение многомасштабного пространства с помощью полученных онлайн базисных функций

$$Q_{ms} = span\{\psi_{i,j}^{off}, \psi_{i,k}^{on} : 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le j \le M_{off}, \quad 1 \le k \le M_{on}\},\$$



Рисунок 1.6: Пример теплопроводности *k*_s, модуля упругости *E*_s и онлайн многомасштабных базисных функций для температуры и перемещений (слева направо) в двух локальных областях (сверху вниз)

Онлайн многомасштабные базисные функции для перемещений. Как и в случае температуры, для вычисления онлайн многомасштабных базисных функций необходимо решить локальные задачи: для каждой ω найти Ψ_k^{ω} такую, что

$$a_u(\Psi_k^{\omega}, v) = r_u^{k-1}(v), \quad x \in \omega,$$

$$\Psi_k^{\omega} = 0, \quad x \in \partial \omega \setminus \gamma_M,$$

где $\gamma_M = \partial \omega \cap \Gamma_M$, а невязка $r_u^k(v)$ определяется следующим образом

$$r_{u}^{k}(v) = l_{u}(v) + b(T_{ms}^{n+1} - T_{ms}^{n}, v) + a_{u}(u_{ms}^{n}, v) - a_{u}(u_{ms}^{k}, v).$$

Для обеспечения согласованности базисных функций полученные функции умножаются на функции разбиения единицы следующим образом

$$\Psi_{i,k}^{on} = \chi_i \Psi_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H.$$

Далее эти базисные функции необходимо умножить на *e*₁, чтобы получить онлайн базисные функции, соответствующие каждому направлению перемещения

$$\Psi_{i,k}^{l,on} = e_l \Psi_{i,k}^{on}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le l \le 2.$$

После этого производится обогащение многомасштабного пространства с помощью данных онлайн базисных функций

$$V_{ms} = span\{\Psi_{i,j}^{l,off}, \Psi_{i,k}^{l,on} : 1 \le i \le N_v^H, \ 1 \le j \le M_u^{off}, \ 1 \le k \le M_u^{on}, \ 1 \le l \le 2\},$$

Примеры онлайн базисных функций представлены на Рисунке 1.6. Далее представлен подробный алгоритм предлагаемого многомасштабного подхода с онлайн обогащением пространства.

Многомасштабный алгоритм с онлайн обогащением. Можно определить следующие шаги предлагаемого многомасштабного алгоритма с онлайн обогащением на основе невязки. Для каждого временного шага *n* = 0, ..., *N_t* – 1,

- 1. Решить тепловую задачу.
 - 1) Определить матрицу проекции $R_T = R_T^n$ для текущего временного шага *n*, где $R_T = R_T^{off}$, если n = 0.
 - 2) Построить и решить грубосеточную систему на текущем временном шаге.
 - а) Если нужно добавить или обновить онлайн базисные функции для текущего временного шага, необходимо решить следующие задачи: для k = 1, ..., M_{on} решить

$$S_{H}^{k-1} \frac{T_{H}^{k} - T_{H}^{n}}{\tau} + A_{T,H}^{k-1} T_{H}^{k} = L_{T,H}^{k-1},$$

где матрицы и векторы определены следующим образом

$$\begin{split} S_{H}^{k} &= R_{T}^{k} S(R_{T}^{k})^{T}, \quad A_{T,H}^{k} = R_{T}^{k} A_{T}(R_{T}^{k})^{T}, \quad L_{T,H}^{k} = R_{T}^{k} L_{T}, \\ R_{T}^{k} &= (\psi_{1,1}^{off}, ..., \psi_{N_{\nu}^{H}, M_{off}}^{off}, \psi_{1,1}^{on}, ..., \psi_{N_{\nu}^{H}, k}^{on})^{T}. \end{split}$$

Здесь онлайн базисные функции $\psi_{i,k}^{on}$ вычисляются с помощью решения, полученного на предыдущей итерации *k*. После всех онлайн итераций устанавливается $R = R_T^{M_{on}}$.

б) Решить

$$S_H \frac{T_H^{n+1} - T_H^n}{\tau} + A_{T,H} T_H^{n+1} = L_{T,H},$$

где

$$S_H = R_T S(R_T)^T$$
, $A_{T,H} = R_T A_T (R_T)^T$, $L_{T,H} = R_T L_T$

- 2. Решить задачу упругости.
 - 1) Определить матрицу проекции $R_u = R_u^n$ для текущего временного шага *n*, где $R_u = R_u^{off}$, если n = 0.
 - 2) Построить и решить систему на грубой сетке для текущего временного шага.
 - а) Если нужно добавить или обновить онлайн базисные функции для текущего временного шага, необходимо решить следующие задачи: для k = 1, ..., M_{on} решить

$$A_{u,H}^{k-1}(u_{H}^{k}-u_{H}^{n})=L_{u,H}^{k-1}+B_{H}^{n+1,k-1}-B_{H}^{n,k-1},$$

где

$$\begin{split} A_{u,H}^{k} &= R_{u}^{k} A_{u} (R_{u}^{k})^{T}, \quad B_{H}^{k,n} = R_{u}^{k} B^{n} (R_{u}^{k})^{T}, \quad L_{u,H}^{k} = R_{u}^{k} L_{u} \\ R_{u}^{k} &= (\Psi_{1,1}^{off,1}, ..., \Psi_{N_{v}^{v},M_{off}}^{off,2}, \Psi_{1,1}^{on,1}, ..., \Psi_{N_{v}^{v},k}^{on,2})^{T}, \end{split}$$

где онлайн базисные функции $\Psi_{i,k}^{on}$ вычисляются с использованием решения предыдущей итерации *k*. После всех онлайн итераций задается $R = R_u^{M_{on}}$.

б) Решить

$$A_{u,H}(u_H^{n+1} - u_H^n) = L_{u,H} + B_H^{n+1} - B_H^n,$$

где

$$A_{u,H} = R_u A_u (R_u)^T$$
, $B_H^n = R_u B^n (R_u)^T$, $L_{u,H} = R_u L_u$.

3. Перейти к следующему временному шагу.

Далее представлены численные результаты предложенных многомасштабных подходов.

1.6 Численные результаты

В данном разделе представлены численные результаты для проверки модели термоупругости и предложенных многомасштабных подходов. Рассматривается двумерная модельная задача, моделирующая процесс пучения неоднородного грунта с жестким включением. Для проверки многомасштабных подходов вычисляются относительные погрешности для различного числа офлайн и онлайн базисных функций.

Реализация многомасштабных алгоритмов основана на программе для ЭВМ "Вычислительная библиотека для многомасштабного моделирования задачи термоупругости с фазовым переходом" [77]. Программа предназначена для многомасштабного моделирования термоупругих процессов с фазовым переходом на двухмерных и трехмерных сетках.

Программа разработана с использованием языков программирования C++, Python и вычислительного пакета FEniCS [65]. Функциональные возможности: разбиение вычислительной области на локальные подобласти; разбиения вычислительной области на ячейки грубой сетки; построение многомасштабных базисных функций; решение задачи на мелкой и грубой сетках; вычисление погрешностей между решением на мелкой сетке и многомасштабным решением и др. Задание параметров производится через конфигурационный файл текстового формата JSON.

Рассматриваемая двумерная модельная задача определена в Ω = [0, 6] × [0, 6] м². В качестве мелкой сетки используется равномерная сетка с 10201 вершиной и 20000 треугольными ячейками. Грубая сетка состоит из 121 вершины и 100 прямоугольных ячеек. Вычислительная область и сетки представлены на Рисунке 1.7.



Рисунок 1.7: Вычислительная область и сетки (слева направо). Мелкая сетка – синяя, грубая сетка – черная

Длительность моделируемого процесса составляет $t_{max} = 2592000$ с [c] использованием 50 шагов в аппроксимации по времени. Рассматривается неоднородный грунт с жестким включением. Для этого используются неоднородные коэффициенты c_s , ρ_s , k_s , $\bar{\phi}$ и E_s (см. Рисунок 1.8). Коэффициент Пуассона задан равным $\nu = 0.3$, остальные коэффициенты определены следующим образом

- Свойства льда: $E_i = 9.5 \cdot 10^9$ Па, $k_i = 2.24$ Вт · м⁻¹ · °С⁻¹, $c_i = 2000$ Дж · кг⁻¹ · °С⁻¹, и $\rho_i = 917$ кг · м⁻³.
- Свойства воды: $k_w = 0.56 \text{ BT} \cdot \text{m}^{-1} \cdot {}^{\circ}\text{C}^{-1}, c_w = 4180 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot {}^{\circ}\text{C}^{-1}, \text{ и } \rho_w = 1000 \text{ кг} \cdot \text{m}^{-3}.$
- Свойства фазового перехода: $L = 333000 \, \text{Дж} \cdot \text{кr}^{-1}, T_f = 0 \,^{\circ}\text{C}, \text{ м} \, \alpha = (0.3)^{-1} \,^{\circ}\text{C}^{-1}.$

В качестве начальных значений задаются $T_0 = 2 \,^{\circ}$ С и $u_0 = (0, 0)^T$ м. Используются граничные условия (1.3) с $\gamma = 14 \,\text{Br} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \,^{\circ}$ С⁻¹, $T_{env} = -15 \,^{\circ}$ С, и $\sigma_p = (0, -10^3)^T$ Па. Соответствующие границы области изображены на Рисунке 1.7.



Рисунок 1.8: Распределения c_s , ρ_s , k_s , $\bar{\phi}$ и E_s (слева направо)

На всех рисунках результаты онлайн многомасштабного подхода отображены с периодич-

ностью обогащения раз в 5 временных шагов. На Рисунке 1.9 представлены распределения температуры в различные моменты времени. Сверху вниз изображены мелкосеточное решение и многомасштабные решения с использованием 4 офлайн базисных функций и с использованием 2 онлайн и 4 офлайн базисных функций, соответственно. На рисунках белая линия – это изолиния 0, которая соответствует температуре фазового перехода. Как видно, все рисунки очень похожи, что говорит о том, что предложенные многомасштабные подходы хорошо аппроксимируют мелкосеточное решение. Однако изолиния 0 более гладкая в многомасштабном решении с онлайн обогащением.

С точки зрения моделируемого процесса, решения ведут себя корректно. Первоначально грунт находится в оттаявшем состоянии. Затем на верхней границе начинается промерзание, вызванное взаимодействием с низкой температурой окружающей среды. Это приводит к процессу фазового перехода. Можно заметить, что изолиния 0 опускается все ниже по мере замерзания. Процесс замерзания грунта неоднороден, особенно в области жесткого включения.

На Рисунке 1.10 представлены распределения перемещений по x_1 и x_2 , а также модуля перемещений (слева направо) в финальный момент времени. Рисунок отображает мелкосеточное решение и многомасштабные решения с использованием 4 офлайн базисных функций и с использованием 2 онлайн и 4 офлайн базисных функций (сверху вниз). Видно, что все результаты похожи, как и в случае с температурой. Однако можно заметить, что результаты офлайн подхода сильнее отличаются от эталонного решения.

Необходимо обратить внимание, что в результатах используется коэффициент масштабирования деформации 2 для более наглядного отображения деформаций среды. Отметим, что основное перемещение происходит в направлении x_2 . При этом, чем ближе к верхней границе, тем сильнее перемещения. Это явление объясняется тем, что деформации происходят из-за изменения пористости, вызванного сменой фаз. Как и ожидалось, перемещения в области жестких включений намного меньше, чем в остальной части области. В целом, процесс пучения грунта отображен корректно.

На Рисунке 1.11 показаны распределения пористости, теплопроводности и модуля упругости (слева направо) в финальный момент времени. Так как погрешности вычисления коэффициентов исходят из погрешностей температуры, в данном рисунке отображены только коэффициенты мелкосеточного решения. Можно заметить, что все коэффициенты изменились из-за фазового перехода, но наиболее заметное изменение произошло с модулем упругости. Это явление объясняется тем, что упругие свойства льда сильно отличаются от свойств грунта. Поэтому можно четко проследить процесс затвердевания. Необходимо обратить внимание, что граница изменения упругих





Многомасштабное решение с использованием 4 офлайн базисных функций и 2 онлайн базисных функций

Рисунок 1.9: Распределения T при t_n , n = 10, 30, 50 (слева направо)

свойств соответствует изолинии 0 (см. Рисунок 1.9).

Далее рассматриваются погрешности предложенных многомасштабных подходов. В качестве эталонного используется мелкосеточное решение. Рассматриваются два вида погрешностей: L_2 и энергетическая. Первая показывает погрешность самих полей решения, а вторая отражает





Многомасштабное решение с использованием 4 офлайн базисных функций и 2 онлайн базисных функций

Рисунок 1.10: Распределения u_1 , u_2 и |u| (слева направо) в финальный момент времени

погрешность вычисления градиентов. Для расчета относительных погрешностей L₂ используются следующие формулы

$$\epsilon_{L_2}^T = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (T - T_{ms})^2 dx}{\int_{\Omega} T^2 dx}} \times 100\%, \quad \epsilon_{L_2}^u = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u - u_{ms})^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}} \times 100\%,$$



Эталонное решение

Рисунок 1.11: Распределения ф, k и E (слева направо) в финальный момент времени

а для относительных энергетических погрешностей следующие

$$\epsilon_e^T = \sqrt{\frac{\int_\Omega a_T (T - T_{ms}, T - T_{ms}) dx}{\int_\Omega a_T (T, T) dx}} \times 100\%, \quad \epsilon_e^u = \sqrt{\frac{\int_\Omega a_u (u - u_{ms}, u - u_{ms}) dx}{\int_\Omega a_u (u, u) dx}} \times 100\%,$$

где нижний индекс *ms* обозначает многомасштабное решение (офлайн или онлайн), в то время как поля без нижних индексов обозначают мелкосеточные решения.

Таблица 1.1 содержит относительные L_2 и энергетические погрешности в финальный момент времени для всех полей. Левая часть соответствует обновлению онлайн базисных функций каждые 5 временных шагов. Правая часть показывает погрешности при обновлении каждые 10 временных шагов. В таблице приведены погрешности для различного числа офлайн и онлайн базисных функций на каждый узел грубой сетки.

Рассмотрим результаты без использования онлайн базисных функций. Видно, что погрешности уменьшаются с увеличением числа базисных функций. Таким образом, можно наблюдать сходимость по базисным функциям. В целом, погрешности небольшие, особенно для температуры. Например, при использовании 12 базисных функций L_2 погрешность составляет менее 1.5%, а энергетическая погрешность – чуть более 2.5%. Однако погрешности перемещений заметно больше. Например, для того же числа базисных функций L_2 погрешность составляет около 4%, а энергетическая погрешность – более 5%. Это объясняется тем, что изменение фазы сильно влияет на упругие свойства среды.

Далее рассмотрим результаты при использовании онлайн базисных функций, обновляемых каждые 5 временных шагов. Добавление 1 или 2 онлайн базисных функций значительно повышает точность расчетов. Например, если добавить 2 онлайн базисные функции к 4 офлайн базисным функциям, то получаются следующие результаты. Относительная L_2 погрешность уменьшается с

			Периодичность обогащения = 5			Периодичность обогащения = 10				
Mon	DOF_{H}^{T}	DOF_{H}^{u}	$\epsilon_{L^2}^T$	ϵ_e^T	$\epsilon^u_{L^2}$	ϵ^u_e	$\epsilon_{L^2}^T$	ϵ_e^T	$\epsilon^u_{L^2}$	ϵ_e^u
			$M_{off} = 1$		$M_{off} = 1$					
0	121	242	6.785	13.479	30.542	24.562	6.785	13.479	30.542	24.562
1	242	363	3.187	5.93	16.077	19.078	3.681	7.435	19.187	17.908
2	363	484	1.637	2.888	8.324	12.903	2.337	4.338	12.453	14.285
			$M_{off} = 2$			$M_{off} = 2$				
0	242	484	5.317	10.342	25.777	20.197	5.317	10.342	25.777	20.197
1	363	605	2.613	4.698	11.84	15.568	3.108	6.083	16.941	15.459
2	484	726	1.375	2.45	6.824	11.413	2.066	4.003	9.043	11.896
			$M_{off} = 4$			$M_{off} = 4$				
0	484	968	3.577	7.063	11.238	12.775	3.577	7.063	11.238	12.775
1	605	1089	1.499	2.635	5.856	10.561	1.861	3.359	6.038	10.175
2	726	1210	0.812	1.397	3.827	8.555	1.36	2.379	4.901	7.984
			$M_{off} = 8$			$M_{off} = 8$				
0	968	1936	2.02	3.61	5.653	6.945	2.02	3.61	5.653	6.945
1	1089	2057	1.031	1.771	3.399	6.263	1.303	2.228	3.888	6.036
2	1210	2178	0.591	0.969	2.159	5.485	0.973	1.577	2.915	5.166
				$M_{off} = 12$			$M_{off} = 12$			
0	1452	2904	1.427	2.542	4.089	5.147	1.427	2.542	4.089	5.147
1	1573	3025	0.724	1.254	2.349	4.748	0.958	1.623	2.657	4.636
2	1694	3146	0.418	0.699	1.513	4.115	0.72	1.168	2.047	4.078

Таблица 1.1: Относительные погрешности (%) для температуры и перемещений с различным количеством офлайн и онлайн базисных функций (M_{off} и M_{on}). Онлайн базисные функции обновляются каждые 5 и 10 временных шагов (слева и справа, соответственно).

примерно 3.6% до 0.8% для температуры. В то же время, относительная энергетическая погрешность уменьшается с примерно 7% до 1.4%. Для перемещений L_2 погрешность уменьшается с примерно 11.2% до 3.8%, а энергетическая погрешность уменьшается с примерно 12.8% до 8.6%. Можно заметить, что эти результаты лучше, чем при использовании даже 8 офлайн базисных функций. Таким образом, онлайн подход обеспечивает лучшую точность при меньшем количестве



Относительные L₂ погрешности (%) для T и u (слева направо)



Относительные энергетические погрешности (%) для Т и и (слева направо)

Рисунок 1.12: Относительные L₂ и энергетические погрешности (%) для многомасштабных решений с использованием 4 офлайн базисных функций и 1 и 2 онлайн базисных функций (периодичность обогащения равна 5)

степеней свободы.

Рассмотрим погрешности при обновлении онлайн базисных функций каждые 10 временных шагов. Как и в случае с обновлением каждые 5 временных шагов, онлайн базисные функции значительно улучшают точность метода. Погрешности сравнимы с обновлением каждые 5 временных шагов, но в среднем немного больше. Более частое обновление дает заметный эффект при меньшем количестве офлайн базисных функций. Например, если добавить 2 онлайн базисные функции к 2 офлайн базисным функциям, то получаются следующие результаты по сравнению с обновлением раз в 5 временных шагов. Относительная L_2 погрешность температуры составляет 2.066% вместо 1.375%, а энергетическая погрешность составляет 4.003% вместо 2.45%. Для перемещений L_2 погрешность равна 9.043% вместо 6.824%, а энергетическая погрешность равна 11.896% вместо 11.413%. В целом, обновление каждые 10 временных шагов дает сопоставимые погрешности. Это


Относительные L₂ погрешности (%) для T и u (слева направо)



Относительные энергетические погрешности (%) для Т и и (слева направо)

Рисунок 1.13: Относительные L₂ и энергетические погрешности (%) для многомасштабных решений с использованием 4 офлайн базисных функций и 1 и 2 онлайн базисных функций (периодичность обогащения 10)

можно объяснить тем, что в таких задачах решение между временными шагами меняется не очень быстро.

С целью рассмотрения динамики погрешности были построены графики погрешностей по временным шагам. На Рисунке 1.12 показана динамика погрешностей для 4 офлайн базисных функций с онлайн базисными функциями и без них. Онлайн базисные функции обновляются каждые 5 временных шагов. Выше расположены L_2 погрешности, а ниже – энергетические погрешности. Видно, что погрешности уменьшаются с каждым обновлением онлайн базисных функций. В целом, погрешности падают или остаются примерно на одном уровне.

На Рисунке 1.13 показана динамика погрешностей при обновлении онлайн базисных функций каждые 10 шагов по времени. Выше расположены L_2 погрешности, а ниже – энергетические погрешности. Как и в случае обновления каждые 5 временных шагов, погрешности уменьшаются

с каждым обновлением онлайн базисных функций. Погрешности также либо уменьшаются, либо остаются примерно на том же уровне.

Таким образом, онлайн базисные функции могут значительно улучшить точность многомасштабного метода.

1.7 Выводы

В данной главе представлена модель термоупругости, учитывающая изменения упругих свойств среды, вызванные фазовым переходом. Для этой модели была разработана конечноэлементная аппроксимация на мелкой сетке. С целью уменьшения размерности дискретной задачи были предложены многомасштабные подходы. Был представлен офлайн многомасштабный подход, основанный на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов (ОММКЭ). Поскольку задача является нелинейной, был также разработан онлайн многомасштабный подход, основанный на невязке.

Для проверки математической модели и многомасштабных подходов была рассмотрена двумерная модельная задача, моделирующая процесс пучения неоднородного грунта с жестким включением. Поведение решения соответствует моделируемому процессу. Многомасштабные подходы хорошо аппроксимируют мелкосеточное решение с меньшим числом степеней свободы. Однако онлайн подход значительно повышает точность.

Глава 2

Многомасштабное моделирование термопороупругих процессов в неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых средах

Задача термопороупругости имеет множество приложений в науке и технике: геотермальные энергетические системы [96, 97], утилизация ядерных отходов [98, 99], анализ устойчивости ствола скважины [100, 101] и др. Математическая модель описывает сложный многофизичный процесс. Она определяется связанной системой уравнений для фильтрации жидкости, теплопереноса и геомеханических деформаций пористой среды. Одними из первых работ, в которых была представлена полностью связанная модель, являются [16, 102, 103].

В подземных резервуарах пористые среды зачастую являются неоднородными и трещиноватыми. Модели двойной пористости широко используются для численного моделирования трещиновато-пористых сред с плотным, сильно связанным распределением трещин [36, 37, 104]. Для пористых сред с разреженной сетью трещин необходимо моделировать трещины в явном виде. Для этого формулируется задача смешанной размерности с целью описания сложного взаимодействия между трещинами и пористой матрицей [105, 106]. Существуют две основные явные модели моделирования трещин: модель встроенных трещин [107–109] и модель дискретных трещин [110–112]. Они отличаются построением сетки для пористой матрицы и трещин. В модели встроенных трещин сетки для сети трещин и пористой матрицы строятся по отдельности. В модели дискретных трещин строятся согласованные сетки.

В данной главе обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ) применяется для решения двух- и трехмерных задач термопороупругости в неоднородных и трещиновато-пористых средах. Модель термопороупругости можно рассматривать как обобщение моделей пороупругости и термоупругости. Для аппроксимации на мелкой сетке используется метод конечных элементов и модель дискретных трещин. Многомасштабные базисные функции строятся по отдельности для давления, температуры и перемещений. Необходимо отметить, что ранее многомасштабные алгоритмы на основе ОММКЭ были реализованы только для задач термоупругости [44] и пороупругости [27, 46, 113–115], которые являются частными случаями задачи термопороупругости. Численные результаты представлены для неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых сред. Для каждой модельной задачи приводится численное исследование предложенного метода.

2.1 Математическая модель

В данном разделе представлена математическая модель задачи термопороупругости в трещиновато-пористых средах. Приводится вывод уравнений фильтрации жидкости и теплопереноса для пористой матрицы и трещин. Рассматриваются крупные гидравлические трещины; как следствие, формулируется задача смешанной размерности. Уравнения пористой матрицы задаются в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, а уравнения трещин в области $\gamma \subset \mathbb{R}^{d-1}$, которая на одно измерение меньше, чем Ω (d = 2, 3; см. Рисунок 2.1). В данной работе пренебрегаются гравитационные силы и предполагается, что фазовый переход не происходит. Вывод уравнений для пористой матрицы основан на выводе модели термопороупругости, представленной в [13].



Рисунок 2.1: Иллюстрация области Ω (серый цвет) и трещин γ (красный цвет) для двумерного случая

2.1.1 Фильтрация жидкости

Фильтрация жидкости в пористой матрице. Вывод проводится в предположении выполнения гипотезы малых возмущений, которая включает в себя гипотезы бесконечно малых преобразований, малых перемещений, малых изменений пористости Лагранжа, малых изменений массовой плотности жидкости. Используя закон сохранения массы и закон Дарси, можно получить следующие соотношения для фильтрации жидкости в пористой среде

$$\frac{\partial m_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathcal{V}_m) = 0, \quad \mathcal{V}_m = -\frac{\kappa_m}{\mu_w} \nabla p_m, \quad x \in \Omega,$$
(2.1)

где $m_w = \rho_w \phi$ – масса жидкости, ρ_w – массовая плотность жидкости, ϕ – пористость Лагранжа, \mathcal{V}_m – скорость Дарси в пористой матрице, κ_m – проницаемость пористой матрицы, p_m – давление в пористой матрице, μ_w – вязкость.

Для массы жидкости справедливо следующее соотношение

$$m_{w} - m_{w}^{0} = \rho_{w} \left(\alpha \varepsilon^{v} + \frac{1}{M} (p_{m} - p_{m}^{0}) - 3\xi_{m} (T_{m} - T_{m}^{0}) \right)$$
(2.2)

где верхний индекс 0 обозначает исходное состояние, α – коэффициент Био, $3\xi_m$ – коэффициент теплового расширения, $\varepsilon^{\nu} = \text{tr}\varepsilon = \nabla \cdot u$ – объемная деформация, M – модуль, определяемый по формуле

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \phi c_w, \quad \frac{1}{N} = \frac{\alpha - \phi_0}{K_s}, \quad c_w = \frac{1}{\rho_w} \frac{d\rho_w}{dp_m}.$$
(2.3)

Здесь K_s – объемный модуль упругости твердого материала, c_w – сжимаемость жидкости.

Если подставить (2.2) в (2.1), то, предполагая малое изменение массовой плотности жидкости, можно получить следующее параболическое уравнение для фильтрации жидкости в пористой среде

$$s_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \eta_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - \nabla \cdot (k_m \nabla p_m) = 0, \quad x \in \Omega,$$
(2.4)

где $s_m = 1/M, \, \eta_m = 3\xi_m, \, k_m = \kappa_m/\mu_w.$

В конце нужно добавить член массопереноса между пористой средой и трещинами

$$s_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \eta_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - \nabla \cdot (k_m \nabla p_m) + \zeta_{mf} (p_m - p_f) = 0, \quad x \in \Omega,$$
(2.5)

где p_f – давление в трещинах, ζ_{mf} – коэффициент массопереноса между матрицей и трещинами.

Фильтрация жидкости в трещинах. Уравнение фильтрации жидкости в трещинах выводится аналогичным образом. В данной работе предполагается, что ширина раскрытия трещин постоянна, а пористость трещин равна $\phi_f = 1$. Тогда с помощью закона сохранение массы и закона Дарси получаются следующие соотношения

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathcal{V}_f) = 0, \quad \mathcal{V}_f = -\frac{\kappa_f}{\mu_w} \nabla p_f, \quad x \in \gamma,$$
(2.6)

где \mathcal{V}_f – скорость Дарси в трещинах, κ_f – проницаемость трещин, p_f – давление в трещинах.

Предполагается, что механические деформации не влияют напрямую на фильтрацию жидкости в трещинах. Деформации воздействуют на фильтрацию жидкости в трещинах через пористую матрицу. В таком случае массовая плотность жидкости может быть выражена следующим образом [116]

$$\rho_w(p_f, T_f) = \rho_w^0 \left(1 - 3\xi_w(T_f - T_f^0) + c_w(p_f - p_f^0) \right),$$
(2.7)

где $3\xi_w$ – коэффициент теплового расширения жидкости.

Заметим, что производная массовой плотности жидкости ρ_w будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} = -3\xi_w \rho_w^0 \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_w^0 c_w \frac{\partial p}{\partial t}.$$
(2.8)

Далее с помощью подстановки (2.8) в (2.6) и предположения слабой сжимаемости жидкости получается следующее уравнение для фильтрации жидкости в трещинах

$$s_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \eta_f \frac{\partial T_f}{\partial t} - \nabla \cdot (k_f \nabla p_f) = 0, \quad x \in \gamma,$$
(2.9)

где $s_f = c_w, \eta_f = 3\xi_w, k_f = \kappa_f/\mu_w.$

В итоге остается добавить член массопереноса между трещинами и пористой матрицей

$$s_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \eta_f \frac{\partial T_f}{\partial t} - \nabla \cdot (k_f \nabla p_f) + \zeta_{fm} (p_f - p_m) = 0, \quad x \in \gamma,$$
(2.10)

где ζ_{fm} – коэффициент массопереноса между трещинами и пористой матрицей.

2.1.2 Теплоперенос

Теплоперенос в пористой матрице. Для вывода уравнения теплопереноса в пористой среде к гипотезе о малых возмущениях необходимо добавить гипотезу о малых изменениях температуры. Баланс энтропии и закон Фурье будут иметь следующий вид

$$T_m\left(\frac{\partial S_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{S}_w \rho_w \mathcal{V}_m)\right) = -\nabla \cdot q_m + \Phi_m, \quad q_m = -\varkappa_m \nabla T_m, \quad x \in \Omega,$$
(2.11)

где T_m – температура в пористой матрице, S_m – общая лагранжева плотность энтропии на единицу начального объема пористой матрицы, \tilde{S}_w – удельная энтропия жидкости в пористой матрице, Φ_m – диссипация механической энергии в пористой матрице, q_m – плотность теплового потока в пористой матрице, \varkappa_m – теплопроводность в пористой матрице.

Предполагается, что для диссипации механической энергии справедливо $\Phi_m \simeq \frac{V_m^2}{k_m}$. С помощью (2.1) и закона Фурье (2.11) может быть преобразована в

$$T_m\left(\frac{\partial S_m}{\partial t} - \tilde{S}_w \frac{\partial m_w}{\partial t}\right) = \nabla \cdot (\varkappa_m \nabla T_m) - \rho_w T_m^0 \mathcal{V}_m \cdot \nabla \tilde{S}_w + \frac{\mathcal{V}_m^2}{k_m}, \quad x \in \Omega,$$
(2.12)

Из уравнений состояния жидкости можно получить

$$\tilde{S}_{w} - \tilde{S}_{w}^{0} = -3\xi_{w} \frac{p_{m} - p_{m}^{0}}{\rho_{w}^{0}} + \frac{C_{w}}{T_{m}^{0}}(T_{m} - T_{m}^{0}), \qquad (2.13)$$

0

где \tilde{C}_w – удельная теплоемкость жидкости.

Для общей лагранжевой плотности энтропии справедливо следующее соотношение

$$S_m - S_m^0 = \tilde{S}_w (m_w - m_w^0) + 3\xi K \varepsilon^v - 3\xi_m (p_m - p_m^0) + C_m \frac{T_m - T_m^0}{T_m}, \qquad (2.14)$$

где 3*ξ* – коэффициент объемного теплового расширения скелета, *К* – модуль объемного расширения скелета, *С_m* – объемная теплоемкость пористой матрицы.

Предполагается, что число Бринкмана намного меньше 1, а тепло поступает в основном засчет диффузии и конвекции. В таком случаем уравнение для теплопереноса в пористой среде принимает вид

$$\beta T_m^0 \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \eta_m T_m^0 \frac{\partial p_m}{\partial t} + C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - \nabla \cdot (\varkappa_m \nabla T_m) + C_w \mathcal{V}_m \cdot \nabla T_m = 0, \qquad (2.15)$$

где $C_w = \rho_w \tilde{C}_w, \beta = 3\xi K.$

Затем нужно добавить член теплообмена между матрицей и трещинами

$$\beta T_m^0 \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \eta_m T_m^0 \frac{\partial p_m}{\partial t} + C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - \nabla \cdot (\varkappa_m \nabla T_m) + C_w \mathcal{V}_m \cdot \nabla T_m + \Upsilon_{mf} (T_m - T_f) = 0, \qquad (2.16)$$

где Υ_{mf} – коэффициент теплообмена между пористой средой и трещинами, T_f – температура в трещинах.

Теплоперенос в трещинах. Вывод уравнения теплопередачи в трещинах аналогичен выводу для пористой матрицы. Баланс энтропии и закон Фурье будут иметь следующий вид

$$T_f\left(\frac{\partial S_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{S}_w \rho_w \mathcal{V}_f)\right) = -\nabla \cdot q_f + \Phi_f, \quad q_f = -\varkappa_f \nabla T_f, \quad x \in \gamma,$$
(2.17)

где T_f – температура в трещинах, S_f – общая лагранжева плотность энтропии на единицу начального объема трещин, S_w – удельная энтропия жидкости в трещинах, Φ_f – диссипация механической энергии в трещинах, q_f – плотность теплового потока в трещинах, \varkappa_f – теплопроводность в трещинах.

Далее, в предположении $\Phi_f \simeq \frac{V_f^2}{k_f}$, с помощью (2.6) и закона Фурье получается следующее уравнение

$$T_f(\frac{\partial S_f}{\partial t} - \tilde{S}_w \frac{\partial \rho_w}{\partial t}) = \nabla \cdot (\varkappa_f \nabla T_f) - \rho_w T_f^0 \mathcal{V}_f \cdot \nabla \tilde{S}_w + \frac{\mathcal{V}_f^2}{k_f}, \quad x \in \gamma,$$
(2.18)

Из уравнений состояния жидкости получается

$$\tilde{S}_{w} - \tilde{S}_{w}^{0} = -3\xi_{w} \frac{p_{f} - p_{f}^{0}}{\rho_{w}^{0}} + \frac{\tilde{C}_{w}}{T_{f}^{0}} (T_{f} - T_{f}^{0}), \qquad (2.19)$$

где \tilde{C}_w – удельная теплоемкость жидкости.

Здесь предполагается, что механические деформации напрямую не влияют на теплоперенос в трещинах, а воздействуют только через пористую среду. Следовательно, общая лагранжева плотность энтропии будет иметь следующий вид

$$S_f - S_f^0 = \tilde{S}_w(\rho_w - \rho_w^0) - 3\xi_w(p_f - p_f^0) + C_f \frac{T_f - T_f^0}{T_f},$$
(2.20)

Как и в случае пористой матрицы, предполагается, что число Бринкмана намного меньше 1, и тепло в основном поступает засчет диффузии и конвекции. Таким образом, уравнение для теплопереноса в трещинах принимает следующий вид

$$-\eta_f T_f^0 \frac{\partial p_f}{\partial t} + C_f \frac{\partial T_f}{\partial t} - \nabla \cdot (\varkappa_f \nabla T_f) + C_w \mathcal{V}_f \cdot \nabla T_f = 0, \qquad (2.21)$$

В конце необходимо добавить член теплообмена между трещинами и пористой средой

$$-\eta_f T_f^0 \frac{\partial p_f}{\partial t} + C_f \frac{\partial T_f}{\partial t} - \nabla \cdot (\varkappa_f \nabla T_f) + C_w \mathcal{V}_f \cdot \nabla T_f + \Upsilon_{fm} (T_f - T_m) = 0, \qquad (2.22)$$

где Υ_{fm} – коэффициент теплообмена между трещинами и пористой средой.

2.1.3 Механические деформации

В данном разделе предполагается, что механические деформации не зависят напрямую от гидравлических трещин. Тепломассоперенос в трещинах влияет на деформации через пористую среду. Предполагается, что зоны неупругого поведения породы достаточно малы, чтобы использовать упругую модель и пренебречь локальной пластичной деформацией.

Согласно нашим предположениям, баланс линейного импульса имеет следующий вид

$$-\nabla \cdot \sigma_T = 0, \quad \sigma_T = \sigma - \alpha p_m I - \beta T_m I, \quad x \in \Omega, \tag{2.23}$$

где σ_T – общий тензор напряжений, σ – эффективное напряжение.

$$\sigma = \lambda (\nabla \cdot u) \mathcal{I} + 2\mu \varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = 0.5 (\nabla u + (\nabla u)^T), \quad (2.24)$$

где ε – тензор деформаций, *u* – вектор перемещений в пористой матрице, а λ и μ – коэффициенты Ламе, которые можно вычислить с помощью модуля упругости *E* и коэффициента Пуассона *v*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$
(2.25)

Таким образом, уравнение для механических деформаций в пористой среде будет иметь следующий вид

$$\nabla \cdot (\sigma - \alpha p_m I - \beta T_m I) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.26}$$

Далее полученная связанная система дополняется граничными и начальными условиями.

2.1.4 Связанная модель

В конечном итоге получается следующая связанная модель. Уравнения для пористой среды задаются в $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (d = 2, 3), на которой заданы давление p_m и температура T_m . Уравнения для

трещин даны в $\gamma \subset \mathbb{R}^{d-1}$, что на одно измерение меньше Ω , где заданы давление p_f и температура T_f . Уравнение для перемещений задается в Ω с помощью эффективного тензора напряжений. В результате получается следующая задача смешанной размерности

• Фильтрация жидкости

$$s_{m}\frac{\partial p_{m}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \eta_{m}\frac{\partial T_{m}}{\partial t} - \nabla \cdot (k_{m}\nabla p_{m}) + \zeta_{mf}(p_{m} - p_{f}) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$s_{f}\frac{\partial p_{f}}{\partial t} - \eta_{f}\frac{\partial T_{f}}{\partial t} - \nabla \cdot (k_{f}\nabla p_{f}) + \zeta_{fm}(p_{f} - p_{m}) = 0, \quad x \in \gamma$$
(2.27)

• Теплоперенос

$$C_{m}\frac{\partial T_{m}}{\partial t} + \beta T_{0}\frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \eta_{m}T_{0}\frac{\partial p_{m}}{\partial t} + C^{w}\mathcal{V}_{m}\cdot\nabla T_{m} - \nabla \cdot (\varkappa_{m}\nabla T_{m}) + \Upsilon_{mf}(T_{m} - T_{f}) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$C_{f}\frac{\partial T_{f}}{\partial t} - \eta_{f}T_{0}\frac{\partial p_{f}}{\partial t} + C^{w}\mathcal{V}_{f}\cdot\nabla T_{f} - \nabla \cdot (\varkappa_{f}\nabla T_{f}) + \Upsilon_{fm}(T_{f} - T_{m}) = 0, \quad x \in \gamma$$

$$(2.28)$$

• Механические деформации

$$-\nabla \cdot \sigma + \alpha \nabla p_m + \beta \nabla T_m = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.29}$$

где тензор напряжений σ определяется следующим образом

$$\sigma = \lambda (\nabla \cdot u) \mathcal{I} + 2\mu\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)$$

Система уравнений (2.27) - (2.29) дополняется следующими начальными условиями

$$u = u_0, \quad p_i = p_0, \quad T_i = T_0, \quad (i = m, f)$$
 (2.30)

и граничные условиями

$$\sigma \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma_2,$$

$$-k_m \frac{\partial p_m}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad -k_f \frac{\partial p_f}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_N, \quad p_f = g, \quad x \in \Gamma_D,$$

$$-\varkappa_m \frac{\partial T_m}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad -\varkappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_N, \quad T_f = q, \quad x \in \Gamma_D,$$

(2.31)

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial \Omega$, $\Gamma_D = \partial \gamma \cap \partial \Omega$, $\Gamma_N = \partial \gamma \setminus \Gamma_D$.

2.2 Конечно-элементная аппроксимация на мелкой сетке

Для аппроксимации на мелкой сетке используется метод конечных элементов со стандартными линейными базисными функциями. В данном разделе сначала выводится вариационная формулировка. Затем представляется дискретная формулировка в матричной форме. Вариационная формулировка. Определим следующие функциональные пространства

$$\begin{split} W &= \{ w \in [H(\Omega)]^d : w|_{\Gamma_2} = 0 \}, \quad V = H(\Omega), \\ V_0^f &= \{ v \in H(\gamma) : v|_{\Gamma_D} = 0 \}, \quad V_g^f = \{ v \in H(\gamma) : v|_{\Gamma_D} = g \}, \quad V_q^f = \{ v \in H(\gamma) : v|_{\Gamma_D} = q \}, \end{split}$$

причем $p_m \in V, p_f \in V_g^f, T_m \in V, T_f \in V_q^f, u \in W.$

Каждое уравнение системы (2.27) - (2.29) умножается на тестовые функции $v_m \in V, v_f \in V_0^f,$ $z_m \in V, z_f \in V_0^f, w \in W$, соответственно. С помощью интегрирования по частям получается следующая вариационная формулировка задачи термопороупругости в трещиновато-пористых средах: найти $(p_m, p_f, T_m, T_f, u) \in V \times V_g^f \times V \times V_q^f \times W$ такие, что

$$a_{p}^{m}(p_{m},v_{m}) + b_{p}^{m}(\frac{\partial p_{m}}{\partial t},v_{m}) + c_{p}^{m}(\frac{\partial u}{\partial t},v_{m}) + g_{p}^{m}(\frac{\partial T_{m}}{\partial t},v_{m}) + s_{p}^{mf}(p_{m} - p_{f},v_{f}) = 0,$$

$$a_{p}^{f}(p_{f},v_{f}) + b_{p}^{f}(\frac{\partial p_{f}}{\partial t},v_{f}) + g_{p}^{f}(\frac{\partial T_{f}}{\partial t},v_{f}) + s_{p}^{fm}(p_{f} - p_{m},v_{f}) = 0,$$

$$a_{T}^{m}(T_{m},z_{m}) + b_{T}^{m}(\frac{\partial T_{m}}{\partial t},z_{m}) + c_{T}^{m}(\frac{\partial u}{\partial t},z_{m}) + g_{T}^{m}(\frac{\partial p_{m}}{\partial t},z_{m}) + s_{T}^{mf}(T_{m} - T_{f},z_{f}) = 0,$$

$$a_{T}^{f}(T_{f},z_{f}) + b_{T}^{f}(\frac{\partial T_{f}}{\partial t},z_{f}) + g_{T}^{f}(\frac{\partial p_{f}}{\partial t},z_{f}) + s_{T}^{fm}(T_{f} - T_{m},z_{f}) = 0,$$

$$a_{u}(u,w) + \tilde{c}_{p}^{m}(p_{m},w) + \tilde{c}_{T}^{m}(T_{m},w) = 0,$$

$$(2.32)$$

где $(v_m, v_f, z_m, z_f, w) \in V \times V_0^f \times V \times V_0^f \times W.$

Билинейные формы имеют следующий вид

$$\begin{aligned} a_p^m(p_m, v_m) &= \int_{\Omega} k_m \nabla p_m \cdot \nabla v_m dx, \quad a_p^f(p_f, v_f) = \int_{\gamma} k_f \nabla p_f \cdot \nabla v_f ds, \\ b_p^m(p_m, v_m) &= \int_{\Omega} s_m p_m v_m dx, \quad b_p^f(p_f, v_f) = \int_{\gamma} s_f p_f v_f ds, \\ c_p^m(u, v_m) &= \int_{\Omega} \alpha (\nabla \cdot u) v_m dx, \quad g_p^m(T_m, v_m) = -\int_{\Omega} \eta_m T_m v_m dx, \\ g_p^f(T_f, v_f) &= -\int_{\gamma} \eta_f T_f v_f ds, \quad s_p^{mf}(p_m - p_f, v_f) = \int_{\gamma} \zeta_{mf}(p_m - p_f) v_f ds, \\ s_p^{fm}(p_f - p_m, v_f) &= \int_{\gamma} \zeta_{fm}(p_f - p_m) v_f ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_T^m(T_m, z_m) &= \int_{\Omega} \varkappa_m \nabla T_m \cdot \nabla z_m dx + \int_{\Omega} C_w (\mathcal{V}_m \cdot \nabla T_m) z_m dx, \\ a_T^f(T_f, z_f) &= \int_{\gamma} \varkappa_f \nabla T_f \cdot \nabla z_f ds + \int_{\gamma} C_w (\mathcal{V}_f \cdot \nabla T_f) z_f ds, \\ b_T^m(T_m, z_m) &= \int_{\Omega} C_m T_m z_m dx, \quad b_T^f(T_f, z_f) = \int_{\gamma} C_f T_f z_f ds, \\ c_T^m(u, z_m) &= \int_{\Omega} \beta T_m^0 (\nabla \cdot u) z_m dx, \quad g_T^m(p_m, z_m) = -\int_{\Omega} \eta_m T_m^0 p_m z_m dx, \\ g_T^f(p_f, z_f) &= -\int_{\gamma} \eta_f T_f^0 p_f z_f ds, \quad s_T^{mf}(T_m - T_f, z_f) = \int_{\gamma} \Upsilon_{mf}(T_m - T_f) z_f ds, \\ s_T^{fm}(T_f - T_m, z_f) &= \int_{\gamma} \Upsilon_{fm}(T_f - T_m) z_f ds, \end{aligned}$$

Дискретная форма. Строится неструктурированная сетка \mathcal{T}_h , в которой трещины находятся на интерфейсах ячеек (см. Рисунок 2.2). Аппроксимация трещин основана на методе конечных элементов со стандартными линейными базисными функциями и модели дискретных трещин. Для аппроксимации по времени используется неявная схема с временным шагом τ . Для конвективного члена в уравнениях теплопереноса скорость Дарси берется из решения предыдущего временного шага.



Рисунок 2.2: Неструктурированная сетка для модели дискретных трещин

В итоге получается следующая дискретная задача на мелкой сетке: найти вектор $y^h = (p_m^h, p_f^h, T_m^h, T_f^h, u^h)^T$ такой, что

$$M\frac{y^{h} - \check{y}^{h}}{\tau} + Ay^{h} = 0, (2.33)$$

где знак обозначает решение с предыдущего временного шага, а матрицы М и А определяются

следующим образом

$$M = \begin{pmatrix} B_p^m & 0 & G_p^m & 0 & C_p^m \\ 0 & B_p^f & 0 & G_p^f & 0 \\ G_T^m & 0 & B_T^m & 0 & C_T^m \\ 0 & G_T^f & 0 & B_T^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_p^m + S_p & -S_p & 0 & 0 & 0 \\ -S_p & A_p^f + S_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_T^m + S_T & -S_T & 0 \\ 0 & 0 & -S_T & A_T^f + S_T & 0 \\ \tilde{C}_p^m & 0 & \tilde{C}_T^m & 0 & A_u \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

где

$$\begin{split} A_p^m &= \{a_{p,ij}^m\}, \quad a_{p,ij}^m = \int_{\Omega} k_m \nabla \phi_j^m \cdot \nabla \phi_i^m dx, \\ A_p^f &= \{a_{p,ij}^f\}, \quad a_{p,ij}^f = \int_{\gamma} k_f \nabla \phi_j^f \cdot \nabla \phi_i^f ds, \quad B_p^m = \{b_{p,ij}^m\}, \quad b_{p,ij}^m = \int_{\Omega} s_m \phi_j^m \phi_i^m dx, \\ B_p^f &= \{b_{p,ij}^f\}, \quad b_{p,ij}^f = \int_{\gamma} s_f \phi_j^f \phi_i^f ds, \quad C_p^m = (\tilde{C}_p^m)^T \\ G_p^m &= \{g_{p,ij}^m\}, \quad g_{p,ij}^m = -\int_{\Omega} \eta_m \varrho_j^m \phi_i^m dx, \quad G_p^f = \{g_{p,ij}^f\}, \quad g_{p,ij}^f = -\int_{\gamma} \eta_f \varrho_j^f \phi_i^f ds, \\ S_p &= \{s_{p,ij}\}, \quad s_{p,ij} = \int_{\gamma} \zeta_m f \phi_j^f \phi_i^f ds, \quad S_T = \{s_{T,ij}\}, \quad s_{T,ij} = \int_{\gamma} \Upsilon_m f \varrho_j^f \varrho_i^f ds, \\ A_T^m &= \{a_{T,ij}^m\}, \quad a_{T,ij}^m = \int_{\Omega} \varkappa_m \nabla \varrho_j^m \cdot \nabla \varrho_i^m dx + \int_{\Omega} C_w (\check{V}_m \cdot \nabla \varrho_j^m) \varrho_i^m dx, \\ A_T^f &= \{a_{T,ij}^f\}, \quad a_{T,ij}^f = \int_{\gamma} \varkappa_f \nabla \varrho_j^f \cdot \nabla \varrho_i^f ds + \int_{\gamma} C_w (\check{V}_f \cdot \nabla \varrho_j^f) \varrho_i^f ds, \\ B_T^m &= \{b_{T,ij}^m\}, \quad b_{T,ij}^m = \int_{\Omega} C_m \varrho_j^m \varrho_i^m dx, \quad B_T^f = \{b_{T,ij}^f\}, \quad b_{T,ij}^f = \int_{\gamma} C_f \varrho_j^f \varrho_i^f ds, \\ C_T^m &= T_m^0 (\tilde{C}_T^m)^T, \quad G_T^m &= \{g_{T,ij}^m\}, \quad g_{T,ij}^m = -\int_{\Omega} \eta_m T_m^0 \phi_j^m \varrho_i^m dx, \\ \tilde{C}_p^m &= \int_{\Omega} \alpha \nabla \phi_j^m \cdot \Phi_i dx, \quad \tilde{C}_T^m = \int_{\Omega} \beta \nabla \varrho_j^m \cdot \Phi_i dx. \end{split}$$

Заметим, что $p_m = \sum_i p_{m,i}^h \phi_i^m$, $p_f = \sum_i p_{f,i}^h \phi_i^f$, $T_m = \sum_i T_{m,i}^h \varrho_i^m$, $T_f = \sum_i T_{f,i}^h \varrho_i^f$, $u = \sum_i u_i^h \Phi_i$, где ϕ_i^m , $\varrho_i^m - d$ -мерные линейные базисные функции для давления и температуры пористой матрицы, соответственно; ϕ_i^f , $\varrho_i^f - (d-1)$ -мерные линейные базисные функции для давления и температуры трещин, соответственно; Φ_i – линейные базисные функции для перемещений.

В данной работе используется модифицированный подход модели дискретных трещин. Для начала заметим, что узлы элемента трещины и элемента пористой среды совпадают на интерфейсе, поскольку неструктурированная мелкая сетка \mathcal{T}_h явно разрешает геометрию трещин (см. Рисунок 2.2). Предположим, что $p_f^h = p_m^h = p^h$ и $T_f^h = T_m^h = T^h$ на трещинах. На пористой среде предполагается, что $p^h = p_m^h$ и $T^h = T_m^h$. С помощью принципа суперпозиции (суммируя уравнения для трещин и узлов матрицы) получается дискретная задача для p^h , T^h вместо p_m^h , p_f^h и T_m^h , T_f^h . В таком случае решения для давления и температуры можно представить, используя только *d*-мерные базисные функции.

Таким образом, получается следующая дискретная задача: найти вектор $\tilde{y}^h = (p^h, T^h, u^h)^T$ такой, что

$$\tilde{M}\frac{\tilde{y}^h - \check{y}^h}{\tau} + \tilde{A}\tilde{y}^h = 0, \qquad (2.35)$$

где

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} B_p^m + B_p^f & G_p^m + G_p^f & C_p^m \\ G_T^m + G_T^f & B_T^m + B_T^f & C_T^m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_p^m + A_p^f & 0 & 0 \\ 0 & A_T^m + A_T^f & 0 \\ \tilde{C}_p^m & \tilde{C}_T^m & A_u \end{pmatrix}.$$
(2.36)

Полученная дискретная задача имеет размерность $(d+2) \cdot N_v^h$, где N_v^h обозначает количество узлов мелкой сетки. В следующем разделе рассматривается построение многомасштабного метода с целью получения системы пониженной размерности.

2.3 Аппроксимация на грубой сетке с использованием ОММКЭ

Пусть \mathcal{T}_H – грубая сетка, $K_i - i$ -ая ячейка \mathcal{T}_H , а N_v^H – число узлов \mathcal{T}_H . Для каждого *i*-го узла определяется локальная область ω_i (или ω), которая состоит из таких ячеек K_j , что каждая из них содержит *i*-ый узел.

С целью снижения вычислительных затрат офлайн этапа и облегчения реализации, многомасштабные базисные функции вычисляются по отдельности для давления, температуры и перемещений.

2.3.1 Многомасштабные базисные функции для давления и температуры

Вспомогательные пространства. Для построения вспомогательных пространств решаются следующие локальные задачи: для каждой ω найти φ_j^{ω} такие, что

$$\int_{\omega} k_m \nabla \varphi_j^{\omega} \cdot \nabla v dx + \int_{\gamma^{\omega}} k_f \nabla \varphi_j^{\omega} \cdot \nabla v_f ds = 0, \qquad (2.37)$$

с граничными условиями Дирихле

$$\varphi_j^{\omega} = \delta_j^h(x), \quad x \in \partial \omega, \tag{2.38}$$

где $\delta_j^h(x) = \delta_{j,k}, \forall j, k \in J_h(\omega)$, а $J_h(\omega)$ обозначает множество узлов мелкой сетки на $\partial \omega$. Всего нужно решить $N^{\partial \omega}$ локальных задач, где $N^{\partial \omega}$ – количество узлов мелкой сетки на $\partial \omega$. В итоге получается следующее вспомогательное пространство в локальной области ω

$$V_{snap}^{p}(\omega) = span\{\varphi_{j}^{\omega} : 1 \le j \le M_{p,snap}\},$$
(2.39)

где $M_{p,snap} = N^{\partial \omega}$.

Затем необходимо построить матрицу проекции в полученное вспомогательное пространство

$$R_{p,snap} = (\varphi_1^{\omega}, ..., \varphi_{M_{p,snap}}^{\omega})^T$$
(2.40)

Многомасштабное пространство. Далее для каждой локальной области решается следующая локальная спектральная задача во вспомогательном пространстве

$$\tilde{A}_p \tilde{\varphi}_k^{\omega} = \lambda_k^p \tilde{S}_p \tilde{\varphi}_k^{\omega}, \qquad (2.41)$$

где

$$\tilde{A}_{p} = R_{p,snap}A_{p}R_{p,snap}^{T}, \quad \tilde{S}_{p} = R_{p,snap}S_{p}R_{p,snap}^{T}$$

$$A_{p} = \{a_{p,ij}\}, \quad a_{p,ij} = \int_{\omega} k_{m}\nabla\phi_{i}\cdot\nabla\phi_{j}dx + \int_{\gamma^{\omega}} k_{f}\nabla\phi_{i}^{f}\cdot\nabla\phi_{j}^{f}ds,$$

$$S_{p} = \{s_{p,ij}\}, \quad s_{p,ij} = \int_{\omega} k_{m}\phi_{i}\phi_{j}dx + \int_{\gamma^{\omega}} k_{f}\phi_{i}^{f}\phi_{j}^{f}ds$$

Затем выбираются собственные векторы, соответствующие наименьшим собственным значениям M_p . После с помощью матрицы проекции данные собственные векторы переводятся в исходное пространство

$$\bar{\varphi}_k^{\omega} = R_{p,snap}^T \tilde{\varphi}_k^{\omega} \tag{2.42}$$

Далее собственные векторы умножаются на функцию разбиения единицы χ_i . Данная функция непрерывна и линейна в ω_i , равна 1 в главном узле ω_i и 0 во всех остальных узлах грубой сетки.

$$\varphi_{i,k} = \chi_i \bar{\varphi}_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M_p^{\omega_i}$$
(2.43)

Используя полученные базисные функции, можно построить следующее многомасштабное пространство

$$V_{ms}^{p} = span\{\varphi_{i,k} : 1 \le i \le N_{v}^{H} \quad \mathbf{u} \quad 1 \le k \le M_{p}^{\omega_{i}}\},$$

$$(2.44)$$

а также матрицу проекции на V^p_{ms}

$$R_{p} = (\varphi_{1,1}, ..., \varphi_{1,M_{p}^{\omega_{1}}}, ..., \varphi_{N_{v}^{H},1}, ..., \varphi_{N_{v}^{H},M_{p}^{\omega_{N_{v}^{H}}}})^{T},$$
(2.45)

где $M_p = M_p^{\omega_{N_v^H}}$.

Для температуры многомасштабное пространство и матрица проекции строятся аналогичным образом

$$V_{ms}^{T} = span\{\psi_{i,k} : 1 \le i \le N_{v}^{H} \quad \text{iv} \quad 1 \le k \le M_{T}^{\omega_{i}}\},\$$

$$R_{T} = (\psi_{1,1}, ..., \psi_{1,M_{T}^{\omega_{1}}}, ..., \psi_{N_{v}^{H},1}, ..., \psi_{N_{v}^{W},M_{T}^{\omega_{N_{v}}}})^{T}.$$
(2.46)

2.3.2 Многомасштабные базисные функции для перемещений

Вспомогательные пространства. Чтобы построить вспомогательные пространства, решаются следующие локальные задачи: для каждой ω найти Ψ_i^{ω} .

$$\int_{\omega} \sigma(\Psi_j^{\omega}) : \varepsilon(w) dx = 0, \qquad (2.47)$$

с граничными условиями Дирихле

$$\Psi_j^{\omega} = \bar{\delta}_j^h(x), \quad x \in \partial \omega, \tag{2.48}$$

где $\bar{\delta}_{j}^{h}(x) = \delta_{j,k} e_{l}, \forall j, k \in J_{h}(\omega_{i}), e_{l} - l$ -ый столбец единичной матрицы $I_{d}, l = 1, ..., d$. Таким образом, решается $d \cdot N^{\partial \omega}$ локальных задач. Используя найденные решения, можно построить следующие вспомогательное пространство и матрицу проекции

$$W_{snap}(\omega) = span\{\Psi_j^{\omega} : 1 \le j \le M_{u,snap}\},$$

$$R_{u,snap} = (\Psi_1^{\omega}, ..., \Psi_{M_{u,snap}}^{\omega})^T,$$
(2.49)

где $M_{u,snap} = d \cdot N^{\partial \omega}$.

Многомасштабное пространство. Далее для каждой локальной области решается следующая локальная спектральная задача во вспомогательном пространстве

$$\tilde{A}_{u}\tilde{\Psi}_{k}^{\omega} = \lambda_{k}^{u}\tilde{S}_{u}\tilde{\Psi}_{k}^{\omega}, \qquad (2.50)$$

где

$$\tilde{A}_{u} = R_{u,snap} A_{u} R_{u,snap}^{T}, \quad \tilde{S}_{u} = R_{u,snap} S_{u} R_{u,snap}^{T}$$
$$A_{u} = \{a_{u,ij}\}, \quad a_{u,ij} = \int_{\omega} \sigma(\Phi_{j}) : \varepsilon(\Phi_{i}) dx, \quad S_{u} = \{s_{u,ij}\}, \quad s_{u,ij} = \int_{\omega} (\lambda + 2\mu) \Phi_{i} \cdot \Phi_{j} dx$$

После этого выбираются собственные векторы, соответствующие наименьшим M_u^{ω} собственным значениям и переводятся обратно в исходное пространство

$$\bar{\Psi}_{k}^{\omega} = R_{u,snap}^{T} \tilde{\Psi}_{k}^{\omega}$$
(2.51)

Далее собственные векторы умножаются на функцию разбиения единицы, чтобы получить согласованные базисные функции

$$\Psi_{i,k} = \xi_i \bar{\Psi}_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M_u^{\omega_i}$$

$$(2.52)$$

В конце строятся многомасштабное пространство и матрица проекции

$$W_{ms} = span\{\Psi_{i,k} : 1 \le i \le N_{v}^{H} \quad \text{is} \quad 1 \le k \le M_{u}^{\omega_{i}}\},\$$

$$R_{u} = (\Psi_{1,1}, ..., \Psi_{1,M_{u}^{\omega_{1}}}, ..., \Psi_{N_{v}^{H},1}, ..., \Psi_{N_{v}^{H},M_{u}^{\omega_{N}}})^{T},$$
(2.53)

2.3.3 Система на грубой сетке

После вычисления многомасштабных базисных функций для давления, температуры и перемещений строится матрица проекции для всей задачи

$$R = \begin{pmatrix} R_p & 0 & 0\\ 0 & R_T & 0\\ 0 & 0 & R_u \end{pmatrix}$$
(2.54)

Данную матрицу проекции можно использовать для получения модели пониженной размерности

$$M^{H} \frac{y^{H} - \check{y}^{H}}{\tau} + A^{H} y^{H} = 0, \qquad (2.55)$$

где $M^H = R\tilde{M}R^T$, $A^H = R\tilde{A}R^T$. Мелкомасштабное решение может быть восстановлено следующим образом

$$y_{ms} = R^T y^H \tag{2.56}$$

Таким образом, решая систему пониженной размерности, можно получить решение на мелкой сетке. В следующем разделе будут представлены численные результаты и относительные погрешности данного метода.

2.4 Численные результаты

Для проверки эффективности предложенного метода рассматриваются модельные задачи, заданные в различных средах: неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых. Для разрешения сетей трещин на сетках строятся неструктурированные сетки с помощью программы Gmsh [64].

В данной работе рассматриваются двух- и трехмерные модельные задачи. В зависимости от геометрической размерности задачи, применяются следующие мелкие и грубые сетки.



Рисунок 2.3: Вычислительные сетки для двух- и трехмерных задач. Слева: двумерная область Ω. Посередине: трехмерная область Ω. Справа: сеть трещин γ для трехмерной области. Грубая сетка (черная), мелкая сетка (синяя) и трещины (красные).

- Двумерные задачи заданы в области Ω = [0, 10] × [0, 10] (м²) с мелкой сеткой, содержащей 13591 вершину и 26780 треугольных ячеек. В этих задачах используются две грубые сетки:
 а) с 36 вершинами и 25 квадратными ячейками; б) со 121 вершиной и 100 квадратными ячейками (см. Рисунок 2.3).
- Трехмерные задачи заданы в области Ω = [0, 10] × [0, 10] × [0, 10] (м³) с мелкой сеткой, содержащей 23730 вершин и 130620 тетраэдральных ячеек. Используется грубая сетка, содержащая 216 вершин и 125 кубических ячеек (см. Рисунок 2.3).

В качестве эталонного решения берется мелкомасштабное решение. Для сравнения многомасштабных и мелкомасштабных решений используются относительные L₂ погрешности

$$\varepsilon_{L_2}^p = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (p - p_{ms})^2 dx}{\int_{\Omega} p^2 dx}}, \quad \varepsilon_{L_2}^T = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (T - T_{ms})^2 dx}{\int_{\Omega} T^2 dx}}, \quad \varepsilon_{L_2}^u = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u - u_{ms})^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}}, \quad (2.57)$$

и относительные энергетические погрешности

$$\varepsilon_e^p = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} b(p - p_{ms}, p - p_{ms})dx}{\int_{\Omega} b(p, p)dx}}, \quad \varepsilon_e^T = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} c(T - T_{ms}, T - T_{ms})dx}{\int_{\Omega} c(T, T)dx}},$$

$$\varepsilon_e^u = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} a(u - u_{ms}, u - u_{ms})dx}{\int_{\Omega} a(u, u)dx}},$$
(2.58)

где билинейные формы имеют следующий вид

$$b(p,v) = \int_{\Omega} k_m \nabla p \cdot \nabla v dx + \int_{\gamma} k_f \nabla p \cdot \nabla v_f ds,$$

$$c(T,z) = \int_{\Omega} \varkappa_m \nabla T \cdot \nabla z dx + \int_{\gamma} \varkappa_f \nabla T \cdot \nabla z_f ds, \quad a(u,w) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(w) dx$$
(2.59)



Рисунок 2.4: Неоднородные коэффициенты: модуль упругости E, проницаемость κ_m , и теплопроводность κ_m (слева направо). Сверху вниз: двумерная задача, трехмерная задача

В следующих подразделах рассматриваются двух- и трехмерные задачи в различных средах. В данных подразделах представлены численные результаты, а также анализ погрешностей предложенного метода.

2.4.1 Неоднородные среды

В данном подразделе представлены численные результаты для неоднородных сред. Расчеты проводятся для $t_{max} = 30$ (дней) с 40 временными шагами для двумерной задачи и 20 временными шагами для трехмерной задачи. Неоднородные коэффициенты E (Па), κ_m (м²) и \varkappa_m (Вт · м⁻¹ · °C⁻¹) представлены на Рисунке 2.4.

Как для двухмерной, так и для трехмерной задачи остальные коэффициенты задаются следующим образом

- Фильтрация жидкости: $s_m = 6.2 \cdot 10^{-7} (\Pi a^{-1}), \mu_w = 10^{-3} (\Pi a \cdot c), \alpha = 0.7.$
- Теплоперенос: $C_m = 3 \cdot 10^6$, $C_w = 1.2 \cdot 10^7$ (Дж · м⁻³ · °C⁻¹).
- Геомеханические свойства: $\eta_m = \xi = 3 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C}^{-1}), \nu = 0.3.$

В качестве начальных значений используются $p_0 = 10^6$ (Па), $T_0 = 200$ (°C), $u_0 = 0$ (м). Задаются следующие граничные условия:



Рисунок 2.5: Распределения давления в различные моменты времени *t_n*, *n* = 5, 25 и 40 (слева направо) для двумерной задачи в неоднородной среде. Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке 10 × 10 при *M* = 20.

- Граничные условия для давления: слева p = g = 2 · 10⁶ (Па), на других границах нулевые граничные условия Неймана.
- Граничные условия для температуры: слева *T* = *q* = 20 (°С), на других границах нулевые граничные условия Неймана.
- Граничные условия перемещений:
 - Двумерная задача: справа u₁ = 0 (м) и (σ · n)₂ = 0 (Па); снизу u₂ = 0 (м) и (σ · n)₁ = 0 (Па); на других границах σ · n = 0 (Па).
 - Трехмерная задача: сзади u₁ = 0 (м), (σ · n)₂ = 0 (Па), (σ · n)₃ = 0 (Па); справа u₂ = 0 (м), (σ · n)₁ = 0 (Па), (σ · n)₃ = 0 (Па); снизу u₃ = 0 (м), (σ · n)₁ = 0 (Па), (σ · n)₂ = 0 (Па); на других границах σ · n = 0 (Па).

Результаты решения двумерной задачи показаны на Рисунках 2.5 - 2.7. Результаты перемещений были деформированы с коэффициентом масштабирования 100. Для давления и температуры результаты представлены в разные моменты времени. На всех рисунках мелкосеточное решение представлено в первом ряду, а многомасштабное решение – во втором. Видно, что распределения давления, температуры и перемещений, полученные многомасштабным методом, очень похожи на те, что получены при решении на мелкой сетке. Результаты многомасштабного решения представ-



Рисунок 2.6: Распределения температуры в различные моменты времени t_n , n = 5, 25 и 40 (слева направо) для двумерной задачи в неоднородной среде. Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке 10×10 при M = 20.

лены для 20 многомасштабных базисных функций и грубой сетки 10 × 10.

Относительные погрешности для двумерной задачи представлены в Таблице 2.1. Для грубой сетки 5×5 , видно, что при использовании 8 базисных функций L_2 погрешность давления и температуры меньше 5%, но в то же время, она немного больше 11% у перемещений. Применяя 12 базисных функций, можно получить менее 10% для перемещений, а уже при использовании 16 базисных функций L_2 погрешность менее 3% для всех полей, а для температуры меньше 1%. При использовании 20 базисных функций можно получить менее 1% для давления и температуры и менее 2% для перемещений. Однако, значения энергетических погрешностей намного выше, особенно для давления. Это можно объяснить тем, что контраст в коэффициенте проницаемости k_m выше, чем в теплопроводности z_m и модуле упругости *E*. При использовании 12 и 16 базисных функций можно получить хорошую энергетическую погрешность (менее 13% и 6%) для температуры и перемещений, но для давления при использовании 20 базисных функций энергетическая погрешность все еще около 30%.

Для грубой сетки 10×10 результаты намного лучше. Применяя 2 базисные функции, можно получить L_2 погрешности менее 3% во всех полях. Применение 4 базисных функций дает погрешности менее 1%. Используя 6 базисных функций, можно получить энергетические погрешности



Рисунок 2.7: Распределения перемещений по x₁ и x₂ в конечный момент времени для двумерной задачи в неоднородной среде (слева направо). Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке 10 × 10 при *M* = 20. Коэффициент масштабирования деформации: 100

менее 5% во всех полях. Начиная с 12 базисных функций, погрешности во всех полях менее 1%. Как видно, с помощью грубой сетки 10×10 можно получить лучшие результаты, чем с грубой сеткой 5×5 , даже с меньшим или сравнимым количеством степеней свободы.

На Рисунке 2.8 показаны графики динамики погрешностей по времени для грубой сетки 10×10 . Графики показывают хорошую сходимость при увеличении числа базисных функций. Во всех полях, начиная с определенного момента времени, погрешности остаются на том же уровне или немного уменьшаются.

Результаты трехмерной задачи показаны на Рисунках 2.9 - 2.11. Результаты перемещений также были деформированы с коэффициентом масштабирования 100. Как и в двумерной задаче, мелкосеточное решение представлено в первом ряду, а многомасштабное решение – во втором. Видно, что распределения давления, температуры и перемещений, полученные многомасштабным методом, очень похожи на те, что получены решением на мелкой сетке. На рисунках представленые ны результаты многомасштабного решения, полученные с использованием 20 многомасштабных

Μ	DOE	Давление		Температура		Перемещения			
	M DOF _c	$arepsilon_{L_2}^p$ (%)	ε_{e}^{p} (%)	$arepsilon_{L_2}^T(\%)$	ε_{e}^{T} (%)	$arepsilon_{L_2}^u$ (%)	ε_{e}^{u} (%)		
	Грубая сетка 5 × 5								
1	144	17.181	>100	53.793	>100	>100	>100		
2	288	14.093	>100	9.370	53.399	30.71	38.184		
4	576	14.175	>100	6.867	50.242	29.307	33.609		
6	864	8.310	88.597	5.447	44.239	16.558	20.156		
8	1152	4.422	66.716	2.368	17.824	11.184	12.698		
12	1728	2.771	53.286	1.635	12.944	7.134	8.125		
16	2304	1.330	37.282	0.672	5.923	2.805	3.467		
20	2880	0.906	30.522	0.466	4.341	1.550	2.130		
	Грубая сетка 10 × 10								
1	484	2.459	36.776	6.250	21.034	28.703	33.636		
2	968	0.644	16.844	1.540	9.79	2.341	9.659		
4	1936	0.147	7.143	0.293	3.694	0.566	3.652		
6	2904	0.057	3.717	0.064	1.975	0.159	2.248		
8	3872	0.025	2.231	0.030	1.339	0.059	1.388		
12	5808	0.008	0.949	0.010	0.632	0.018	0.730		
16	7744	0.005	0.618	0.005	0.366	0.008	0.517		
20	9680	0.003	0.480	0.003	0.312	0.006	0.428		

Таблица 2.1: Относительные погрешности (%) при различным числе многомасштабных базисных функций для двумерной задачи в неоднородной среде. Грубые сетки 5×5 и 10×10 , DOF_f = 54364.

базисных функций.

Относительные погрешности для трехмерной задачи представлены в Таблице 2.2. Видно, что начиная с 4 базисных функций, L_2 погрешности становятся меньше 5% для всех полей. Начиная с 8 базисных функций, они уже меньше 1%. С 8 базисных функций энергетические погрешности меньше 10% для всех полей. Энергетические погрешности уменьшаются по мере увеличения числа базисных функций и становятся меньше 4% для всех полей при 20 базисных функциях.

На Рисунке 2.12 изображены графики динамики погрешностей по времени. Как и в двумерном случае видна хорошая сходимость при увеличении числа базисных функций. Во всех областях, начиная с определенного момента времени, погрешности остаются на одном уровне или



Рисунок 2.8: Относительные погрешности по времени многомасштабных решений на грубой сетке 10 × 10 для давления, температуры и перемещений (слева направо) для двумерной задачи в неоднородной среде. Сверху вниз: относительные L₂ погрешности, относительные

энергетические погрешности



Рисунок 2.9: Распределения давления в различные моменты времени *t_n*, *n* = 5, 10 и 20 (слева направо) для трехмерной задачи в неоднородной среде. Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке 5 × 5 × 5 при *M* = 20.



Рисунок 2.10: Распределения температуры в различные моменты времени t_n , n = 5, 10 и 20 (слева направо) для трехмерной задачи в неоднородной среде. Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке $5 \times 5 \times 5$ при M = 20.

Μ	DOF _c	Давление		Температура		Перемещения	
		$arepsilon_{L_2}^p$ (%)	ε_{e}^{p} (%)	$arepsilon_{L_2}^T(\%)$	ε_{e}^{T} (%)	$arepsilon^u_{L_2}$ (%)	ε_e^u (%)
1	1080	2.859	36.142	6.773	29.508	46.703	59.167
2	2160	2.575	32.498	5.969	23.596	26.184	42.787
4	4320	1.143	22.058	2.964	11.507	3.800	9.808
6	6480	0.461	12.274	1.106	7.395	1.589	7.238
8	8640	0.27	9.064	0.630	6.270	0.936	5.551
12	12960	0.122	5.071	0.206	3.89	0.365	4.066
16	17280	0.084	4.014	0.137	3.128	0.209	2.920
20	21600	0.064	3.351	0.093	2.441	0.140	2.375

Таблица 2.2: Относительные погрешности (%) при различном числе многомасштабных базисных функций для трехмерной задачи в неоднородной среде. Грубая сетка $5 \times 5 \times 5$, DOF_f = 118650.



Рисунок 2.11: Распределения перемещений по x_1 , x_2 , x_3 в финальный момент времени для трехмерной задачи в неоднородной среде (слева направо). Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке $5 \times 5 \times 5$ при M = 20. Коэффициент масштабирования деформации: 100



Рисунок 2.12: Относительные погрешности по времени многомасштабных решений для давления, температуры и перемещений (слева направо) для трехмерной задачи в неоднородной среде. Сверху вниз: относительные L₂ погрешности, относительные энергетические погрешности

2.4.2 Неоднородные трещиновато-пористые среды

В данном подразделе представлены численные результаты для неоднородных трещиновато-

пористых сред. Расчеты проводятся для $t_{max} = 1$ (день) с 40 временными шагами для двумерной задачи и 20 временными шагами для трехмерной задачи. Неоднородные коэффициенты E (Па), κ_m (м²) и \varkappa_m (Вт · м⁻¹ · °C⁻¹) представлены на Рисунке 2.4. Остальные коэффициенты задаются следующим образом

- Двумерная задача. Фильтрация жидкости: κ_f = 10⁻¹² (м²), s_m = s_f = 10⁻⁷ (Па⁻¹), μ_w = 10⁻³ (Па · с), α = 0.7. Теплоперенос: κ_f = 400 (Вт · м⁻¹ · °С⁻¹), C_m = 2 · 10⁶, C_w = 10⁷, C_f = 10⁶ (Дж · м⁻³ · °С⁻¹). Геомеханические свойства: η_m = 3 · 10⁻⁵, η_f = 6 · 10⁻⁵, ξ = 3 · 10⁻⁵ (°С⁻¹), ν = 0.3.
- Трехмерная задача. Фильтрация жидкости: κ_f = 10⁻¹² (м²), s_m = s_f = 10⁻⁷ (Па⁻¹), μ_w = 10⁻³ (Па · с), α = 0.7. Теплоперенос: κ_f = 400 (Вт · м⁻¹ · °С⁻¹), C_m = C_f = 10⁶, C_w = 5 · 10⁶ (Дж · м⁻³ · °С⁻¹). Геомеханические свойства: η_m = η_f = ξ = 3 · 10⁻⁵ (°С⁻¹), ν = 0.3.



Рисунок 2.13: Распределения давления в различные моменты времени t_n , n = 5, 20 и 40 (слева направо) для двумерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде. Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке 10×10 при M = 20.

В качестве начальных значений используются $p_0 = 10^6$ (Па), $T_0 = 200$ (°C), $u_0 = 0$ (м). Задаются следующие граничные условия

- Граничные условия для давления: на входных областях трещин (∂Ω ∩ ∂γ) g = 2 · 10⁶ (Па); на других границах – нулевые граничные условия Неймана.
- Граничные условия для температуры: на входных областях трещин ($\partial \Omega \cap \partial \gamma$) q = 20 (°C);



Рисунок 2.14: Распределения температуры в различные моменты времени *t_n*, *n* = 5, 20 и 40 (слева направо) для двумерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде. Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке 10 × 10 при *M* = 20.

на других границах – нулевые граничные условия Неймана.

- Граничные условия для перемещений:
 - Двумерная задача: справа u₁ = 0 (м) и (σ · n)₂ = 0 (Па); снизу u₂ = 0 (м) и (σ · n)₁ = 0 (Па); на других границах σ · n = 0 (Па).
 - Трехмерная задача: сзади u₁ = 0 (м), (σ · n)₂ = 0 (Па), (σ · n)₃ = 0 (Па); справа u₂ = 0 (м), (σ · n)₁ = 0 (Па), (σ · n)₃ = 0 (Па); снизу u₃ = 0 (м), (σ · n)₁ = 0 (Па), (σ · n)₂ = 0 (Па); на других границах σ · n = 0 (Па).

Результаты двумерной задачи показаны на Рисунках 2.13 - 2.15. Результаты перемещений были деформированы с коэффициентом масштабирования 120. Для давления и температуры результаты показаны в разные моменты времени. На всех рисунках мелкосеточное решение представлено в первом ряду, а многомасштабное решение – во втором. Распределения давления, температуры и перемещений, полученные многомасштабным методом, очень похожи на те, что получены при решении на мелкой сетке. Результаты многомасштабного решения представлены для 20 многомасштабных базисных функций и грубой сетки 10 × 10.

Относительные погрешности для двумерной задачи представлены в Таблице 2.3. Для грубой сетки 5×5 , видно, что начиная с 8 базисных функций, можно получить L_2 погрешность менее



Рисунок 2.15: Распределения направлений перемещений по *x*₁ и *x*₂ в финальный момент времени для двумерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде (слева направо). Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке 10 × 10 при *M* = 20. Коэффициент масштабирования деформации: 120

5% для давления и температуры, и менее 7% для перемещений. Начиная с 12 базисных функций, можно получить погрешности менее 1% для давления и менее 3% для температуры, а также менее 5% для перемещений. Вплоть до 20 базисных функций L_2 погрешности постепенно уменьшаются. Значения энергетических погрешностей намного лучше, чем в неоднородных средах. От 12 до 20 базисных функций энергетические погрешности давления и перемещения уменьшаются примерно с 10-11% до 7%, а погрешности температуры – с 20% до 15%. Наибольшие энергетические погрешности дает температура, что можно объяснить сильным влиянием конвекции в трещиновато-пористых средах.

Для грубой сетки 10×10 результаты значительно лучше. Используя 4 базисные функции, можно получить L_2 погрешности менее 6% для всех полей. Применение 8 базисных функций дает погрешности менее 1% для давления и температуры и менее 2% для перемещений. Использование 20 базисных функций позволяет получить погрешности менее 1% для всех полей. Значения энергетических погрешностей также малы. Используя 12 базисных функций, можно получить

М	DOE	Давление		Температура		Перемещения			
	M DOF _c	$arepsilon_{L_2}^p$ (%)	ε_{e}^{p} (%)	$arepsilon_{L_2}^T$ (%)	ε_{e}^{T} (%)	$arepsilon_{L_2}^u$ (%)	ε_e^u (%)		
	Грубая сетка 5 × 5								
1	144	17.972	>100	38.377	>100	>100	>100		
2	288	12.542	72.495	18.926	87.429	>100	>100		
4	576	2.669	33.893	7.619	48.993	13.336	29.193		
6	864	1.694	20.708	5.786	37.262	10.693	21.33		
8	1152	1.223	16.284	4.800	32.076	6.638	16.777		
12	1728	0.674	10.512	2.735	20.086	4.406	10.929		
16	2304	0.448	8.183	2.073	16.481	4.399	8.732		
20	2880	0.397	7.378	1.986	14.978	4.219	7.949		
	Грубая сетка 10 × 10								
1	484	13.658	77.334	17.668	91.999	32.200	51.410		
2	968	3.418	38.483	8.023	46.764	11.814	25.184		
4	1936	1.064	17.963	3.127	26.448	5.494	11.421		
6	2904	0.361	9.463	1.356	14.732	1.205	6.293		
8	3872	0.196	6.031	0.796	9.437	1.918	4.705		
12	5808	0.082	3.379	0.715	6.673	2.386	3.754		
16	7744	0.056	2.415	0.464	5.262	1.362	2.743		
20	9680	0.045	1.994	0.293	4.409	0.780	2.244		

Таблица 2.3: Относительные погрешности (%) при различном числе многомасштабных базисных функций для двумерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде. Грубые сетки 5×5 и 10×10 , DOF_f = 54364

энергетические погрешности менее 7% во всех функциях решения. В то время как использование 20 базисных функций позволяет получить менее 5% для всех полей. Как и для грубой сетки 5×5 , наибольшие энергетические погрешности наблюдаются в температуре.

На Рисунке 2.16 изображены графики динамики погрешностей по времени для грубой сетки 10×10. Отметим хорошую сходимость при увеличении числа базисных функций. С определенного момента времени погрешности уменьшаются или остаются на том же уровне.

Результаты для трехмерной задачи показаны на Рисунках 2.17 - 2.19. Результаты перемещений были деформированы с коэффициентом масштабирования 120. На всех рисунках мел-



Рисунок 2.16: Относительные погрешности по времени для многомасштабных решений на грубой сетке 10 × 10 для давления, температуры и перемещений (слева направо) для двумерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде. Сверху вниз: относительные L₂ погрешности,

относительные энергетические погрешности



Рисунок 2.17: Распределения давления в различные моменты *t_n*, *n* = 1, 10 и 20 (слева направо) для трехмерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде. Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке 5 × 5 × 5 при *M* = 20.



Рисунок 2.18: Распределения температуры в различные моменты времени t_n , n = 1, 10 и 20 (слева направо) для трехмерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде. Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке $5 \times 5 \times 5$ при M = 20.

Μ	DOF _c	Давление		Температура		Перемещения	
		$arepsilon_{L_2}^p\left(\% ight)$	ε_{e}^{p} (%)	$arepsilon_{L_2}^T(\%)$	ε_{e}^{T} (%)	$arepsilon^{u}_{L_{2}}\left(\% ight)$	ε_{e}^{u} (%)
1	1080	17.194	88.908	26.377	98.348	50.976	>100
2	2160	10.144	67.788	14.448	72.443	68.911	87.783
4	4320	4.492	40.258	6.822	42.437	28.501	32.734
6	6480	3.279	32.426	6.212	35.114	25.699	27.956
8	8640	2.130	24.298	4.223	27.869	5.528	16.219
12	12960	1.256	15.583	2.515	18.378	2.032	10.497
16	17280	0.885	12.008	1.564	12.924	1.895	8.258
20	21600	0.602	9.507	1.252	10.936	1.492	7.298

Таблица 2.4: Относительные погрешности (%) при различном числе многомасштабных базисных функций для трехмерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде. Грубая сетка $5 \times 5 \times 5$, DOF_f = 118650.

косеточное решение представлено в первом ряду, а многомасштабное - во втором. Видно, что распределения давления, температуры и перемещений, полученные многомасштабным методом,



Рисунок 2.19: Распределения перемещений по x_1 , x_2 , x_3 в финальный момент времени для трехмерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде (слева направо). Сверху вниз: мелкомасштабное решение, многомасштабное решение на грубой сетке $5 \times 5 \times 5$ при M = 20. Коэффициент масштабирования деформации: 120



Рисунок 2.20: Относительные погрешности по времени для давления, температуры и смещений (слева направо) для трехмерной задачи в неоднородной трещиновато-пористой среде. Сверху вниз: относительные L_2 погрешности, относительные энергетические погрешности

очень похожи на те, что получены при решении на мелкой сетке. Таким образом, предложенный многомасштабный метод хорошо аппроксимирует мелкосеточное решение. Результаты многомас-

штабного решения получены с помощью 20 многомасштабных базисных функций.

Относительные погрешности в финальный момент времени для трехмерной задачи представлены в Таблице 2.4. Видно, что начиная с 8 базисных функций, L_2 погрешности становятся менее 6% для всех полей. Использование 12 базисных функций дает погрешность менее 3% для температуры и перемещений и менее 1% для давления. Используя 16-20 базисных функций, можно получить относительные погрешности менее 2% для всех полей. Применение 12 базисных функций позволяет получить энергетические погрешности менее 20% для давления и температуры и чуть более 10% для перемещений. Они уменьшаются по мере увеличения числа базисных функций и достигают уровня менее 11% для давления и температуры и менее 7.5% для перемещений при использовании 20 базисных функций.

На Рисунке 2.20 изображены графики динамики погрешностей по времени. Можно наблюдать хорошую сходимость при увеличении числа базисных функций. Начиная с определенного момента времени, погрешности уменьшаются или остаются на одном уровне.

2.5 Выводы

Рассмотрена задача термопороупругости в неоднородных и трещиновато-пористых средах. Был применен многомасштабный подход для уменьшения размерности дискретной задачи. Для аппроксимации на мелкой сетке был использован метод конечных элементов с моделью дискретных трещин. Для аппроксимации на грубой сетке был применен обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ). Численные результаты представлены для двух- и трехмерных модельных задач в неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых средах. Вычислены относительные погрешности между эталонным решением на мелкой сетке и многомасштабным решением для различного числа многомасштабных базисных функций. Результаты показывают, что предложенный метод обеспечивает хорошую точность при небольшом числе степеней свободы.

Глава 3

Многомасштабное моделирование неоднородных пьезоэлектрических материалов

Пьезоэлектрические композитные материалы широко используются во многих приложениях. Для производства пьезокерамических материалов требуются специальные этапы изготовления, которые состоят из подготовки исходных порошков, их прессования, спекания и поляризации. Контроль свойств композитного материала важен для промышленности и может быть осуществлен путем добавления других фракций или порообразователей к исходным порошкам. Это приводит к пьезокомпозитным материалам с различным составом, связностью, пористостью и другими геометрическими характеристиками.

Наиболее часто используемые пьезоэлектрические композиты состоят из двух компонентов и известны как двухкомпонентные (двухфазные, бинарные) пьезокерамические композиты, которые включают первую активную пьезокерамическую фазу и вторую фазу, которая может быть представлена либо включениями из другого пьезокерамического или упругого материала, либо порами [26,117–120]. Классификация композитов на основе их типа связности произведена в [121]. В этой классификации цифры обозначают количество осей декартовой системы координат, вдоль которых можно построить связный путь через композит для материала данной фазы. Таким образом, связность двухфазного композита может быть описана двумя цифрами, которые варьируются от 0 до 3. В данной работе будут использоваться упрощенные геометрии для проверки эффективности предлагаемых методов.

В общем случае бинарные пьезокомпозиты могут иметь сложную неоднородную структуру. Для расчета эффективных свойств бинарных пьезокомпозитов были предложены подходы усреднения. Эти подходы выведены и обобщены для композитных материалов [1,18,122–125]. Для расчета эффективных свойств бинарных композитов разработаны различные вычислительные пакеты [17,126,127]. Например, пакет ACELAN-COMPOS направлен на конечно-элементное решение задач усреднения двухфазных пьезокомпозитов с использованием метода эффективных модулей и компьютерного моделирования представительных объемов, учитывающего их внутреннюю структуру. Однако реальные пьезоэлектрические композиты часто имеют очень сложную внутреннюю структуру, что существенно влияет на их эффективные характеристики [128,129]. Необходимо отметить, что для пьезоэлектрических неоднородных материалов ранее были применены некоторые многомасштабные подходы [130–133]. В данной главе рассматривается стационарная математическая модель пьезоэлектричества, которая состоит из связанных дифференциальных уравнений с частными производными. Первое уравнение описывает поле напряжений и включает член, возникающий из-за электрического поля, а второе уравнение описывает электрическое поле и включает член из задачи упругости. Предлагаемые вычислительные многомасштабные подходы основаны на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов (ОММКЭ). Рассматривается два подхода построения многомасштабных базисных функций: расщепленный и связанный. В первом подходе базисные функции строятся по отдельности для каждого поля решения. Во втором подходе многомасштабные базисные функции путем решения связанных задач, тем самым учитывая их взаимовлияние. Численные результаты представлены для композитной и стохастически неоднородной сред.

3.1 Постановка задачи

Математическая модель пьезоэлектричества состоит из полностью связанной системы уравнений для перемещений и электрического потенциала. Векторное уравнение для перемещений описывает эластостатику линейно упругого материала. Скалярное уравнение для электрического потенциала описывает электростатическое поведение диэлектрического материала.

div
$$\sigma = 0$$
, $\sigma = C : \varepsilon - e^T \cdot E$, $\varepsilon = (\nabla u + \nabla u^T)/2$,
div $D = 0$, $D = e : \varepsilon + k \cdot E$, $E = -\nabla \phi$,
(3.1)

где σ – тензор напряжений, ε – тензор деформаций, D – электрическое перемещение, E – вектор электрического поля, u – механическое перемещение, ϕ – электрический потенциал, C, e и k – тензор упругих модулей жесткости четвертого порядка, тензор пьезомодулей третьего порядка, тензор диэлектрических проницаемостей второго порядка, соответственно.

Пьезоэлектрическая задача рассматривается со следующими граничными условиями

$$u = u_0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \sigma \cdot n = g_u, \quad x \in \Gamma_2,$$

$$\phi = \phi_0, \quad x \in \Gamma_A, \quad D \cdot n = g_\phi, \quad x \in \Gamma_B,$$
(3.2)

где $\Gamma_A \cup \Gamma_B = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial \Omega$ и *n* – вектор внешней нормали к границе $\partial \Omega$.

Необходимо отметить, что уравнения (3.1) могут быть записаны в следующем виде

$$div \Sigma(u, \phi) = 0,$$

$$\Sigma(u, \phi) = B\zeta(u, \phi),$$
(3.3)

где для двумерного случая справедливо

$$B = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & -e_{11} & -e_{12} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & -e_{21} & -e_{22} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & -e_{31} & -e_{32} \\ e_{11} & e_{21} & e_{31} & k_{11} & k_{12} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad \zeta(u,\phi) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12}$$

при $u = (u_1, u_2)$. Здесь вместо тензорных обозначений для модулей материала используются матричные обозначения, $C_{ij} = C_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$. Эти обозначения соответствуют общепринятым в литературе по теории пьезоэлектричества [134–136]: $C_{11} = c_{11}^E$, $C_{12} = c_{12}^E$, $C_{22} = c_{22}^E$, $C_{13} = c_{16}^E$, $C_{23} = c_{26}^E$, $C_{33} = c_{66}^E$, $k_{ij} = \varepsilon_{ij}^S$. Аналогичная форма может быть получена для трехмерной задачи.

3.2 Конечно-элементная аппроксимация на мелкой сетке

Для численного решения на мелкой сетке используется метод конечных элементов со стандартными линейными базисными функциями. Определим следующие функциональные пространства:

$$V = \{ v \in [H^1(\Omega)]^2 : v = u_0, x \in \Gamma_1 \}, \quad Q = \{ q \in H^1(\Omega) : q = \phi_0, x \in \Gamma_A \},$$
$$\hat{V} = \{ v \in [H^1(\Omega)]^2 : v = 0, x \in \Gamma_1 \}, \quad \hat{Q} = \{ q \in H^1(\Omega) : q = 0, x \in \Gamma_A \}.$$

Вариационная формулировка будет иметь вид: найти $(u, \phi) \in V \times Q$ такие, что

$$a(u,\phi;v,q) = L(v,q), \quad \forall (v,q) \in \hat{V} \times \hat{Q}, \tag{3.5}$$

где

$$a(u,\phi;v,q) = \int_{\Omega} \Sigma(u,\phi) \cdot \zeta(v,q) \, dx, \quad L(v,q) = \int_{\Gamma_2} g_u \cdot v \, ds + \int_{\Gamma_B} g_\phi q \, ds. \tag{3.6}$$

Пусть \mathcal{T}^h – сеточное разбиение вычислительной области Ω на конечные элементы K_i^h .

$$\mathcal{T}^h = \cup_i K_i^h, \quad i = 1, \dots N_c^h,$$

где N_c^h – число ячеек сетки. Пространства пробных функций V и Q, тестовые пространства \hat{V} и \hat{Q} заменяются на конечномерные подпространства $V_h \subset V$ и $Q_h \subset Q$, $\hat{V}_h \subset \hat{V}$ и $\hat{Q}_h \subset \hat{Q}$. Предполагается, что все пространства состоят из кусочно-линейных базисных функций на ячейках сетки. Тогда, получается следующее разложение u_h и ϕ_h по базисам V_h и Q_h

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_u^h} U_j \psi_j(x), \quad \phi_h(x) = \sum_{j=1}^{N_v^h} \Phi_j \varphi_j(x),$$
где φ_j и ψ_j – линейные базисные функции, определенные на \mathcal{T}^h , $N_u = 2 \cdot N_v^h$, N_v^h – число вершин. Получается следующая дискретная система в матричной форме для $Y = (U_1, ..., U_{N_u}, \Phi_1, ..., \Phi_{N_v^h})^T$

$$AY = F, (3.7)$$

где

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = a(\psi_i, \varphi_i; \psi_j, \varphi_j), \quad F = \{f_j\}, \quad f_j = L(\psi_j, \varphi_j)$$

Необходимо отметить, что система (3.5) может быть записана в другой форме: найти $(u, \phi) \in V \times Q$ такие, что

$$a_{uu}(u,v) + a_{u\phi}(\phi,v) = L_u(v), \quad \forall v \in \hat{V},$$
$$a_{\phi u}(u,q) + a_{\phi \phi}(\phi,q) = L_{\phi}(q), \quad \forall q \in \hat{Q},$$

и соответствующая конечно-элементная система может быть представлена в следующей блочноматричной форме (3.7)

$$\begin{pmatrix} A_{uu} & A_{u\phi} \\ A_{\phi u} & A_{\phi \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_u \\ F_\phi \end{pmatrix},$$

где $A_{\phi u} = A_{u\phi}^T$. Размерность представленной дискретной системы составляет $DOF_f = 3 \cdot N_v^h$.

3.3 Аппроксимация на грубой сетке с использованием ОММКЭ

Прежде чем приступить к описанию алгоритма ОММКЭ, введем обозначения, используемые в дальнейшем. Пусть \mathcal{T}^H – грубая сетка, K_i – i-я ячейка \mathcal{T}^H , а N_v^H – число узлов \mathcal{T}^H . Для каждого грубого узла x_i^H определяется локальная область $\omega_i = \{K_j^H \subset \mathcal{T}^H : x_i^H \in K_j^H\}$.

Рассматриваются два подхода построения многомасштабных базисных функций: связанный и расщепленный. Связанный подход решает связанные локальные задачи, тем самым учитывая взаимное влияние полей. При расщепленном подходе многомасштабные базисные функции для электрического потенциала и перемещений вычисляются независимо друг от друга.

3.3.1 Расщепленные многомасштабные базисные функции

В данном подразделе представлено расщепленное построение многомасштабных базисных функций для полей электрического потенциала и перемещений. Данный метод не учитывает взаимное влияние полей, но требует меньших вычислительных затрат.

Многомасштабные базисные функции для электрического потенциала

Вспомогательные пространства. Для построения вспомогательных пространств для электрического потенциала решаются следующие локальные задачи (далее, для простоты изложения, где это возможно, индекс локальной области *i* будет опускаться): для каждой ω необходимо найти φ_i^{ω} такие, что

$$a_{\phi\phi}(\varphi_j^{\omega}, q) = 0, \quad a_{\phi\phi}(\phi, q) = \int_{\omega} k \nabla \phi \cdot \nabla q \, dx \tag{3.8}$$

с граничными условиями Дирихле

$$\varphi_j^{\omega} = \delta_j^h(x), \quad x \in \partial \omega, \tag{3.9}$$

где $\delta_j^h(x) = \delta_{jk}, \forall k \in J_h(\omega)$, а $J_h(\omega)$ обозначает множество узлов мелкой сетки на $\partial \omega$. Таким образом, необходимо решить $N^{\partial \omega}$ локальных задач, где $N^{\partial \omega}$ – количество узлов мелкой сетки на $\partial \omega$. В результате для каждой локальной области ω строится следующее вспомогательное пространство

$$Q_{snap}(\omega) = span\{\varphi_j^{\omega} : 1 \le j \le N^{\partial\omega}\},\tag{3.10}$$

а также его матрица проекции

$$R^{snap}_{\phi\phi} = (\varphi^{\omega}_1, ..., \varphi^{\omega}_{N^{\partial\omega}})^T.$$
(3.11)

Многомасштабное пространство. Далее для каждой локальной области решается следующая локальная спектральная задача во вспомогательном пространстве

$$\tilde{A}^{\omega}_{\phi\phi}\tilde{\varphi}^{\omega}_{k} = \lambda^{p}_{k}\tilde{S}^{\omega}_{\phi\phi}\tilde{\varphi}^{\omega}_{k}, \qquad (3.12)$$

где

$$\tilde{A}_{\phi\phi}^{\omega} = R_{\phi\phi}^{snap} A_{\phi\phi}^{\omega} (R_{\phi\phi}^{snap})^{T}, \quad \tilde{S}_{\phi\phi}^{\omega} = R_{\phi\phi}^{snap} S_{\phi\phi}^{\omega} (R_{\phi\phi}^{snap})^{T}$$
$$A_{\phi\phi}^{\omega} = [a_{\phi\phi,ij}^{\omega}], \quad a_{\phi\phi,ij}^{\omega} = \int_{\omega} k \nabla \varphi_{i} \cdot \nabla \varphi_{j} dx, \quad S_{\phi\phi}^{\omega} = [s_{\phi\phi,ij}^{\omega}], \quad s_{\phi\phi,ij}^{\omega} = \int_{\omega} k_{11} \varphi_{i} \varphi_{j} dx.$$

После выбираются собственные векторы, соответствующие M_{ϕ} наименьшим собственным значениям. Затем с помощью матрицы проекции получаются собственные векторы в исходном пространстве

$$\bar{\varphi}_k^{\omega} = (R_{\phi\phi}^{snap})^T \tilde{\varphi}_k^{\omega}. \tag{3.13}$$

Для обеспечения согласованности базисных функций собственные векторы умножаются на функцию разбиения единицы χ_i . Эта функция непрерывна и линейна в ω_i , равна 1 в главном узле ω_i и 0 во всех остальных грубых узлах.

$$\varphi_{i,k}^{ms} = \chi_i \bar{\varphi}_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M_\phi.$$
(3.14)

Используя полученные базисные функции, можно построить многомасштабное пространство

$$Q_{ms} = span\{\varphi_{i,k}^{ms} : 1 \le i \le N_v^H \quad \text{if } 1 \le k \le M_\phi\}$$

$$(3.15)$$

и матрицу проекции

$$R_{\phi\phi} = (\varphi_{1,1}^{ms}, ..., \varphi_{1,M_{\phi}}^{ms}, ..., \varphi_{N_{\nu}^{H},1}^{ms}, ..., \varphi_{N_{\nu}^{H},M_{\phi}}^{ms})^{T}.$$
(3.16)

Многомасштабные базисные функции для перемещений

Вспомогательные пространства. Как и в случае с электрическим потенциалом, сначала необходимо построить вспомогательные пространства. Для этого необходимо решить следующие локальные задачи: для каждой ω найти $\psi_i^{\omega} \forall j \in J_h(\omega)$

$$a_{uu}(\psi_j^{\omega}, v) = 0, \quad a_{uu}(u, v) = \int_{\omega} \sigma_{uu}(u) : \varepsilon(v) dx, \quad \sigma_{uu} = C : \varepsilon(u), \quad (3.17)$$

с граничными условиями Дирихле

$$\psi_j^{\omega} = \bar{\delta}_j^h(x), \quad x \in \partial \omega. \tag{3.18}$$

Здесь $\bar{\delta}_{j}^{h}(x) = \delta_{jk} e_{l}, \forall k \in J_{h}(\omega)$, где $e_{l} - l$ -ый столбец единичной матрицы $I_{2}, l = 1, 2$. Таким образом, необходимо решить $2 \cdot N^{\partial \omega}$ локальных задач. Используя полученные решения, строится вспомогательное пространство, а также матрица проекции

$$W_{snap}(\omega) = span\{\psi_j^{\omega} : 1 \le j \le N^{\partial \omega}\},$$

$$R_u^{snap} = (\psi_1^{\omega}, ..., \psi_{N^{\partial \omega}}^{\omega})^T.$$
(3.19)

Многомасштабное пространство. Далее для каждой локальной области решается следующая локальная спектральная задача во вспомогательном пространстве

$$\tilde{A}^{\omega}_{uu}\tilde{\psi}^{\omega}_{k} = \lambda^{u}_{k}\tilde{S}^{\omega}_{uu}\tilde{\psi}^{\omega}_{k}, \qquad (3.20)$$

где

$$\tilde{A}_{uu}^{\omega} = R_{u}^{snap} A_{uu}^{\omega} (R_{u}^{snap})^{T}, \quad \tilde{S}_{uu}^{\omega} = R_{u}^{snap} S_{uu}^{\omega} (R_{u}^{snap})^{T},$$
$$A_{uu}^{\omega} = [a_{uu,ij}^{\omega}], \quad a_{uu,ij}^{\omega} = \int_{\omega} \sigma_{uu}(\psi_{j}) : \varepsilon(\psi_{i}) dx, \quad S_{uu}^{\omega} = [s_{uu,ij}^{\omega}], \quad s_{uu,ij}^{\omega} = \int_{\omega} C_{11} \psi_{i} \cdot \psi_{j} dx.$$

Как и раньше, выбираются собственные векторы, соответствующие M_u наименьшим собственным значениям, и переводятся обратно в исходное пространство

$$\bar{\psi}_k^{\omega} = (R_u^{snap})^T \tilde{\psi}_k^{\omega}. \tag{3.21}$$

Полученные собственные векторы умножаются на функцию разбиения единицы χ_i

$$\psi_{i,k}^{ms} = \chi_i \bar{\psi}_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M_u.$$
(3.22)

С помощью полученных базисных функций строятся многомасштабное пространство и матрица проекции

$$W_{ms} = span\{\psi_{i,k}^{ms}: 1 \le i \le N_{\nu}^{H}, 1 \le k \le M_{u}\},\$$

$$R_{uu} = (\psi_{1,1}^{ms}, ..., \psi_{1,M_{u}}^{ms}, ..., \psi_{N_{\nu}^{H},1}^{ms}, ..., \psi_{N_{\nu}^{H},M_{u}}^{ms})^{T}.$$
(3.23)

Генерация глобальной матрицы проекции

После вычисления многомасштабных базисных функций для электрического потенциала и перемещения, строится матрица проекции для всей задачи

$$R = \begin{pmatrix} R_{uu} & 0\\ 0 & R_{\phi\phi} \end{pmatrix}.$$
 (3.24)

Как видно из формы матрицы проекции, она не учитывает взаимное влияние полей.

3.3.2 Связанные многомасштабные базисные функции

Вспомогательные пространства. Определим $W = V \times Q$, $w = (v_1, v_2, q)^T$, и $\Psi_j = (\psi_{j,1}, \psi_{j,2}, \varphi_j)^T$, где v_i и $\psi_{j,i} - i$ -ые компоненты v и ψ , соответственно. Для построения вспомогательных пространств решается следующая локальная задача в каждой локальной ω : для l = 1, ..., 3и $\forall j \in J_h(\omega_i)$ найти $\Psi_i^{l,\omega}$

$$a(\Psi_{i}^{l,\omega};w) = 0,$$
 (3.25)

с граничными условиями Дирихле

$$\Psi_j^{l,\omega} = \bar{\delta}_j^h(x), \quad x \in \partial \omega.$$
(3.26)

Здесь $\bar{\delta}_m^h(x) = \delta_{jk} e_l$, где $e_l - l$ -ый столбец единичной матрицы I_3 . Таким образом, всего решается $3 \cdot N^{\partial \omega}$ локальных задач. С помощью полученных решений строятся вспомогательные пространства и матрицы проекции

$$W_{snap}^{l}(\omega) = span\{\Psi_{j}^{l,\omega} : 1 \le j \le N^{\partial\omega}\},$$

$$R_{l}^{snap} = (\Psi_{1}^{l,\omega}, ..., \Psi_{N^{\partial\omega}}^{l,\omega})^{T}.$$
(3.27)

Многомасштабное пространство. Для l = 1, ..., 3 решается следующая локальная спектральная задача во вспомогательном пространстве

$$\tilde{A}^{\omega}\tilde{\Psi}_{k}^{l,\omega} = \lambda_{k}^{u}\tilde{S}^{\omega}\tilde{\Psi}_{k}^{l,\omega}, \qquad (3.28)$$

где

$$\tilde{A} = R_l^{snap} A^{\omega} (R_l^{snap})^T, \quad \tilde{S} = R_l^{snap} S^{\omega} (R_l^{snap})^T.$$

Затем выбираются доминирующие собственные векторы, соответствующие *М* наименьшим собственным значениям, и переводятся обратно из вспомогательного пространства

$$\bar{\Psi}_k^{l,\omega} = (R_l^{snap})^T \tilde{\Psi}_k^{l,\omega}.$$
(3.29)

После полученные доминирующие собственные векторы умножаются их на функцию разбиения единицы

$$\Psi_{i,k}^{l,ms} = \chi_i \bar{\Psi}_k^{l,\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M.$$
(3.30)

Затем строятся многомасштабное пространство и матрица проекции

$$W_{ms} = span\{\Psi_{i,k}^{l,ms} : 1 \le i \le N_{\nu}^{H} , 1 \le k \le M, \quad 1 \le l \le 3\},$$

$$R = (\Psi_{1,1}^{1,ms}, ..., \Psi_{1,M}^{1,ms}, ..., \Psi_{N_{\nu}^{H},1}^{3,ms}, ..., \Psi_{N_{\nu}^{V},M}^{3,ms})^{T}.$$
(3.31)

Необходимо заметить, что *R* можно представить в следующем виде

$$R = \begin{pmatrix} R_{uu} & R_{u\phi} \\ R_{\phi u} & R_{\phi \phi} \end{pmatrix}.$$
 (3.32)

Как видно из формы матрицы проекции, она учитывает взаимодействие между упругим и электрическим полями.

3.3.3 Система на грубой сетке

Алгоритм получения модели пониженного порядка одинаков как для расщепленных, так и для связанных многомасштабных базисных функций. С помощью матрицы проекции дискретная система переводится с мелкой сетки на грубую сетку

$$A^H Y^H = F^H, (3.33)$$

где

$$A^H = RAR^T, \quad F^H = RF.$$

Мелкомасштабное решение может быть восстановлено следующим образом

$$Y^{ms} = R^T Y^H. aga{3.34}$$

Таким образом, решая систему пониженной размерности, можно получить решение на мелкой сетке. В следующем разделе представлены численные результаты и относительные погрешности предложенных методов.

3.4 Численные результаты

В данном разделе представлены численные результаты. Раздел состоит из двух подразделов. В первом подразделе проводится проверка мелкосеточного метода с помощью аналитического решения. Во втором подразделе представлены результаты многомасштабных подходов.

3.4.1 Проверка решения на мелкой сетке

В данном подразделе проводится проверка мелкосеточного решения с помощью аналитического решения. Рассматривается задача об изгибе пьезоэлектрической полосы. Аналитическое решение было получено Борисейко и др. в [137]. Определяется вычислительная область $\Omega = [0, 2h] \times [-h, h]$ [мм²] и задаются следующие граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= 0, \quad u_1 = 0, \quad x \in \Gamma_L, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= 0, \quad \sigma_{11} = g, \quad \sigma_{12} = 0, \quad x \in \Gamma_R, \\ \phi &= V_0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad x \in \Gamma_T, \\ \phi &= -V_0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad x \in \Gamma_B, \\ u_2 &= 0, \quad x = (0, 0)^T. \end{aligned}$$

$$(3.35)$$

Для аналитического решения пьезоэлектрических задач обычно используются соотношения "деформация-заряд". Параметрами вида "деформация-заряд"являются матрица упругой податливости *S* [мм²/H], матрица пьезоэлектрических коэффициентов *d* [мм/B] и диэлектрическая матрица ϵ [H/B²]. Они преобразуются в параметры вида "напряжение-заряд"(используемые в данной работе) по формулам $C = S^{-1}$, $e = dS^{-1}$, $k = \epsilon - dS^{-1}d^T$. Аналитическое решение может быть представлено с помощью параметров формы "деформация-заряд"следующим образом

$$\begin{split} u_1 &= S_{11}(\sigma_0 - \frac{d_{12}V_0}{S_{11}h})x_1 + S_{11}(1 - \frac{d_{12}^2}{S_{11}\epsilon_{22}})\sigma_1x_1x_2, \\ u_2 &= S_{12}(\sigma_0 - \frac{d_{22}V_0}{S_{12}h})x_2 + S_{12}(1 - \frac{d_{22}d_{31}}{S_{12}\epsilon_{22}})\sigma_1\frac{x_2^2}{2} - S_{11}(1 - \frac{d_{12}^2}{S_{11}\epsilon_{22}})\sigma_1\frac{x_1^2}{2} \\ \phi &= V_0\frac{x_2}{h} - \frac{d_{12}\sigma_1}{2\epsilon_{22}}(h^2 - x_2^2). \end{split}$$

В качестве параметров задачи задаются h = 0.5 [мм], $g = (\sigma_0 + \sigma_1 x_2, 0)^T$, $\sigma_0 = -5$ [H/мм²], $\sigma_1 = 20$ [H/мм²], $V_0 = 1000$ [B]. Моделируется полоса ЦТС-5 (цирконат-титанат свинца) со

следующими свойствами

$$S = \begin{pmatrix} 16.4 \cdot 10^{-6} & -7.22 \cdot 10^{-6} & 0\\ -7.22 \cdot 10^{-6} & 18.8 \cdot 10^{-6} & 0\\ 0 & 0 & 47.5 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 584 \cdot 10^{-9}\\ -172 \cdot 10^{-9} & 374 \cdot 10^{-9} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1.53105 \cdot 10^{-8} & 0\\ 0 & 1.505 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}.$$

Распределения электрического потенциала, перемещений по x_1 и x_2 (слева направо) представлены на Рисунке 3.1. В первом ряду изображено аналитическое решение. Во втором ряду представлено численное решение. Видно, что они очень похожи, что говорит о том, что мелкосеточное решение обеспечивает хорошую точность.



Решение на мелкой сетке

Рисунок 3.1: Распределения электрического потенциала, перемещений по *x*₁ и *x*₂ (слева направо) для пьезоэлектрической полосы при изгибе. Сверху вниз: аналитическое решение, решение на мелкой сетке с 13364 вершинами Сравним мелкосеточное решение с аналитическим решением с помощью следующих относительных L₂ погрешностей

$$\varepsilon_{L_2}^{\phi} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\phi_{exact} - \phi_{num})^2 dx}{\int_{\Omega} \phi_{exact}^2 dx}} \times 100\%, \quad \varepsilon_{L_2}^{u} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u_{exact} - u_{num})^2 dx}{\int_{\Omega} u_{exact}^2 dx}} \times 100\%, \quad (3.36)$$

Относительные L_2 погрешности для различных размеров сетки представлены в Таблице 3.1. Относительные погрешности для перемещений и электрического потенциала составляют менее 1 % для всех сеток. Можно заметить, что погрешности уменьшаются с увеличением плотности сетки, как и ожидалось.

Количество вершин	$arepsilon_{L_2}^u\left(\% ight)$	$arepsilon_{L_2}^{\phi}\left(\% ight)$
358	0.18509	0.00216971
1236	0.0547564	0.000612151
4819	0.0132369	0.000158501
8578	0.00777742	9.29079e-05
13364	0.00554009	5.80405e-05

Таблица 3.1: Пьезоэлектрическая полоса при изгибе, численное решение. Относительные погрешности (%) для различных сеток

3.4.2 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов

В данном подразделе представлены численные результаты предлагаемых многомасштабных подходов. Рассматриваются двумерные задачи в области $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ (м²) с мелкой сеткой, содержащей 14773 вершин и 29144 треугольных ячеек. В данных задачах используются две грубые сетки (см. Рисунок 3.2):

- а) грубая сетка 5×5 , содержащая 36 вершин и 25 квадратных ячеек;
- б) грубая сетка 10×10 , содержащая 121 вершину и 100 квадратных ячеек.

Для сравнения многомасштабных и мелкомасштабных решений используются относительные L₂ погрешности

$$\varepsilon_{L_{2}}^{\phi} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\phi - \phi_{ms})^{2} dx}{\int_{\Omega} \phi^{2} dx}} \times 100\%, \quad \varepsilon_{L_{2}}^{u} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u - u_{ms})^{2} dx}{\int_{\Omega} u^{2} dx}} \times 100\%, \quad (3.37)$$

и относительные энергетические погрешности

$$\varepsilon_e^{\phi} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} a_{\phi\phi}(\phi - \phi_{ms}, \phi - \phi_{ms})dx}{\int_{\Omega} a_{\phi\phi}(\phi, \phi)dx}} \times 100\%, \quad \varepsilon_e^u = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} a_{uu}(u - u_{ms}, u - u_{ms})dx}{\int_{\Omega} a_{uu}(u, u)dx}} \times 100\%.$$
(3.38)



Рисунок 3.2: Вычислительная сетка. Грубая сетка (черный цвет) и мелкая сетка (Ω_1 - синий цвет и Ω_2 - красный цвет)

Далее рассматриваются два различных случая неоднородности. Первый случай соответствует пьезоэлектрическому композитному материалу. Второй случай – пьезоэлектрическая среда со стохастической двухточечной корреляционной неоднородностью гауссовского поля.

Пьезоэлектрический композитный материал

В качестве примера пьезоэлектрического композита рассматривается пьезокерамический материал ЦТС-5А с волокнистыми порами вдоль оси x_3 . Для такого композита можно рассмотреть пьезоэлектрическую задачу плоской деформации в плоскости x_1x_3 , и в соответствии с обозначениями данной работы заменить оси x_3 на x_2 . Для матриц упругих составляющих и матриц пьезоэлектрических коэффициентов определен контраст $\alpha = 10^{-10}$ для второй пористой фазы. В данном случае значения для двух фаз модулей материала пористой пьезокерамики ЦТС-5А основаны на [124].

• Упругие определяющие матрицы [Па]

$$C_1 = C_0 \begin{pmatrix} 121 & 75.2 & 0 \\ 75.2 & 111 & 0 \\ 0 & 0 & 5.275 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \alpha C_1,$$

где $C_0 = 10^9$.

• Матрицы пьезоэлектрических коэффициентов [Кл/м²]

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6.15 \\ -5.4 & 15.8 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \alpha e_1.$$

• Диэлектрические матрицы [Ф/м]

$$k_1 = k_0 \begin{pmatrix} 919 & 0 \\ 0 & 826.6 \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{pmatrix},$$

где $k_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ – постоянная Фарадея.

Предполагается, что материалы композита жестко связаны, т.е. интерфейсные условия следуют из дифференциальных уравнений по непрерывности. В качестве граничных условий перемещений прикладывается механическое напряжение на правой и верхней границах и фиксируются перемещения на левой и нижней границах. Для электрического потенциала задаются нулевые граничные условия Дирихле.

$$\phi = 0, \quad u_1 = 0, \quad (\sigma \cdot n)_2 = 0, \quad x \in \Gamma_L,
\phi = 0, \quad \sigma \cdot n = g_R, \quad x \in \Gamma_R,
\phi = 0, \quad \sigma \cdot n = g_T, \quad x \in \Gamma_T,
\phi = 0, \quad u_2 = 0, \quad (\sigma \cdot n)_1 = 0, \quad x \in \Gamma_B,$$
(3.39)

где $g_R = (-10^8, 0)^T$ [Па] и $g_T = (0, -10^8)^T$ [Па].

На Рисунке 3.3 представлены численные результаты, представляющие распределения электрического потенциала, перемещений по x_1 и x_2 (слева направо). На этом рисунке показаны решения на мелкой и грубой сетках с расщепленными и связанными многомасштабными базисными функциями (сверху вниз). Во всех многомасштабных решениях использовалась грубая сетка 10×10 и 16 базисных функций на элемент. Как можно заметить, все решения очень похожи, что говорит о том, что предложенный многомасштабный подход может обеспечить точную аппроксимацию мелкосеточного решения. Необходимо отметить, что число степеней свободы дискретной задачи на мелкой сетке составляет 44319, а число степеней свободы дискретной задачи на грубой сетке – 5808. Следовательно, получена точная аппроксимация с использованием меньшего количества степеней свободы.

Относительные погрешности для расщепленных многомасштабных базисных функций представлены в Таблице 3.2. Для грубой сетки 5×5 видно, что при использовании 8 базисных функций относительная L_2 погрешность для электрического потенциала составляет менее 10% и менее 3% для перемещения. При использовании 16 базисных функций относительная L_2 погрешность составляет менее 5% для электрического потенциала и чуть более 1.5% для перемещения. При использовании 24 базисных функций относительная L_2 погрешность составляет менее 4% для электрического потенциала и менее 1.5% для перемещения. Энергетические погрешности больше, так как они представляют градиент решения. Из этой таблицы видно, что энергетическая погрешность для перемещения составляет менее 10%, когда мы выбираем 8 базисных функций на грубый элемент. Отметим, что каждый грубый элемент содержит около 1000 мелких элементов. Более того, предложенные методы имеют погрешность, зависящую от сетки, в дополнение к многомас-



Многомасштабное решение с расщепленными базисными функциями



Многомасштабное решение со связанными базисными функциями

Рисунок 3.3: Распределения электрического потенциала, перемещений по x₁ и x₂ (слева направо). Сверху вниз: мелкосеточное решение, многомасштабные решения с использованием 16 расщепленных и связанных базисных функций на грубой сетке 10 × 10. Пьезоэлектрический композитный материал

штабной погрешности. Погрешность, зависящая от сетки, для сетки 5×5 масштабируется с *H*. Мы наблюдаем большую погрешность для электрического поля. Эта погрешность может быть улучшена добавлением дополнительных базисных функций или использованием связанного подхода, как будет показано далее.

Применение грубой сетки 10×10 дает лучшую погрешность. При использовании 4 базисных функций относительная L_2 погрешность составляет менее 9% для электрического потенциала и чуть более 1.5% для перемещения. При использовании 12 базисных функций относительная L_2 погрешность составляет менее 3% для электрического потенциала и чуть более 1% для перемещения. Относительные энергетические погрешности лучше по сравнению с результатами 5 × 5. При использовании 8 базисных функций относительная энергетическая погрешность составляет менее 17% для электрического потенциала и менее 8% для перемещения. Следует отметить, что ОММКЭ представляет собой спектральный подход и, следовательно, не гарантирует уменьшения погрешности при измельчении грубой сетки. По этой причине в [49] был разработан ОММКЭ с ограничениями, минимизирующими энергию. Позже будет показано, что использование связанных базисных функций позволяет уменьшить погрешность.

Видно, что погрешности получаются довольно большими при выборе небольшого числа базисных функций, например, 1 или 3. Это говорит о том, что необходимо большее количество базисных функций. Отметим, что малое число базисных функций соответствует усреднению и более классическим подходам. Сильной стороной предлагаемого в данной работе подхода является определение дополнительных степеней свободы с точки зрения многомасштабных базисных функций. В работе показано, что для уменьшения погрешности необходимо большее количество базисных функций и тщательное построение этих базисных функций.

Далее рассматриваются связанные многомасштабные базисные функции. Их относительные погрешности представлены в Таблице 3.3. Многомасштабные базисные функции были рассчитаны с помощью связанного метода и, следовательно, лучше представляют взаимодействие между различными физическими процессами. Полученные погрешности значительно меньше, чем у предыдущего метода, что особенно верно для относительных энергетических погрешностей. Для грубой сетки 5×5 уже при 12 базисных функциях относительная L_2 погрешность для перемещений составляет менее 1%. Более того, при использовании 16 базисных функций относительные L_2 погрешности составляют менее 1% для всех полей. Относительная энергетическая погрешность в сетке 5×5 для электрического потенциала не опускалась ниже 15% даже при использовании 24 базисных функций в расщепленном случае. В связанном подходе при использовании 12 базисных функций относительная энергетическая погрешности также становятся меньше. Эти исследования показывают, что (1) необходимо использовать связанные многомасштабные базисные функции и (2) необходимо более одной базисной функции на

Μ	DOF _c	Электрический потенциал		Перемещение			
		$arepsilon_{L_2}^{\phi}$ (%)	$arepsilon_{e}^{\phi}$ (%)	$arepsilon_{L_2}^u$ (%)	ε_{e}^{u} (%)		
	 Грубая сетка 5 × 5						
1	108	91.393	99.257	32.113	43.175		
2	216	85.349	93.948	18.415	37.655		
4	432	21.019	36.437	4.421	13.383		
6	648	13.446	29.165	2.762	10.726		
8	864	9.445	24.624	2.538	9.816		
12	1296	6.539	20.615	1.658	7.422		
16	1728	4.884	18.377	1.562	5.998		
20	2160	4.728	17.104	1.443	5.510		
24	2592	3.756	15.970	1.393	4.965		
		Гру	бая сетка 10 × 10				
1	363	92.479	97.738	29.098	41.838		
2	726	35.122	69.116	8.454	25.374		
4	1452	8.331	25.728	1.593	11.474		
6	2178	6.783	20.540	1.701	9.308		
8	2904	6.758	16.764	1.274	7.794		
12	4356	2.844	12.670	1.037	5.684		
16	5808	2.016	11.264	0.818	4.874		
20	7260	1.854	10.374	0.813	4.209		
24	8712	1.759	9.825	0.528	3.849		

Таблица 3.2: Относительные погрешности (%) для электрического потенциала и перемещения с различным количеством расщепленных базисных функций. Пьезоэлектрический композитный материал, грубые сетки 5 × 5 и 10 × 10, DOF_f = 44319.

элемент для достижения хорошей аппроксимации решения.

Видно, что хотя погрешности малы, сходимость довольно медленная. Медленное затухание погрешности ОММКЭ связано со спектральным затуханием [40]. Такой анализ погрешностей обычно демонстрируется для простых модельных задач и затруднен для демонстрации в более сложных многофизичных задачах. По этой причине здесь основное внимание уделяется разработке методов построения многомасштабных базисных функций и исследованию расщепленных и

м	DOF	Электрический потенциал		Перемещение	
	DOF	$arepsilon_{L_2}^{\phi}$ (%)	$arepsilon_{e}^{\phi}$ (%)	$\varepsilon^{u}_{L_{2}}$ (%)	ε_e^u (%)
		Гр	убая сетка 5 × 5		
1	108	93.613	99.344	30.527	42.183
2	216	113.092	115.653	32.857	41.684
4	432	77.038	97.455	26.900	37.799
6	648	23.129	38.239	4.363	19.823
8	864	8.293	14.373	2.589	11.049
12	1296	2.319	5.378	0.711	4.405
16	1728	0.679	2.145	0.289	1.734
20	2160	0.519	1.464	0.208	1.347
24	2592	0.355	0.916	0.110	0.850
		Гру	бая сетка 10 × 10		
1	363	92.557	97.754	29.122	41.814
2	726	111.354	117.191	30.106	41.233
4	1452	38.016	65.691	11.882	27.543
6	2178	9.851	25.607	2.574	14.397
8	2904	2.844	9.880	1.296	6.223
12	4356	0.933	3.496	0.557	2.594
16	5808	0.336	1.719	0.484	1.206
20	7260	0.234	0.976	0.095	0.638
24	8712	0.181	0.753	0.047	0.480

Таблица 3.3: Относительные погрешности (%) для электрического потенциала и перемещения с различным количеством связанных базисных функций. Пьезоэлектрический композитный материал, грубые сетки 5 × 5 и 10 × 10, DOF_f = 44319.

Рисунок 3.4 является графическим представлением Таблицы 3.3. На нем можно наглядно наблюдать сходимость по связанным базисным функциям для электрического потенциала и перемещения как на грубой сетке 5×5 , так и на грубой сетке 10×10 . Графики показывают, что относительные погрешности для грубой сетки 10×10 меньше, чем для грубой сетки 5×5 . Более того, график демонстрирует, что погрешность быстро уменьшается, и для точного решения требуется

более 1 базисной функции. Как упоминалось во введении, одна базисная функция соответствует классическим подходам по типу усреднения.



Рисунок 3.4: Относительные погрешности в зависимости от числа связанных базисных функций для электрического потенциала и перемещения (слева направо). Первый ряд: относительные L_2 погрешности. Второй ряд: относительные энергетические погрешности.

Вычисления проводились на компьютере с процессором Intel Core i5-10210U 1,60 ГГц \times 8 и 8 Гб оперативной памяти. Для решения дискретных систем использовался решатель MUMPS. Процессорное время мелкосеточной системы составляет 0,677 секунды. Система на грубой сетке 5×5 с использованием 8 расщепленных базисных функций имеет процессорное время равное 0.061 секунды. Для грубосеточной системы на грубой сетке 5×5 , использующей 8 связанных базисных функций, время работы процессора равно 0.058 секунды. В целом, время вычислений системы на грубой сетке будет значительно меньше, чем у системы на мелкой сетке, по мере измельчения мелкой сетки.

Неоднородный пьезоэлектрический материал

Рассматривается стохастический случай неоднородности гауссовского поля с двухточечной корреляцией. Для получения параметров неоднородного материала каждый коэффициент умножается на функцию неоднородности, изображенную на Рисунке 3.5. Рассматривается материал ЦТС-4 [138]; поэтому на функцию неоднородности умножаются следующие параметры

$$C = C_0 \begin{pmatrix} 14.1 & 7.57 & 0 \\ 7.57 & 11.6 & 0 \\ 0 & 0 & 2.53 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13.0 \\ -5.3 & 15.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = k_0 \begin{pmatrix} 6.37 & 0 \\ 0 & 5.53 \end{pmatrix},$$

где $C_0 = 10^{10}, k_0 = 10^{-9}.$



Рисунок 3.5: Функция неоднородности

Используются те же граничные условия, что и для предыдущей задачи, за исключением электрического потенциала. Для него на всех границах задаются неоднородные граничные условия Дирихле $\phi = G \cdot x$, где $G = (-1000, -1000)^T$.

Распределения электрического потенциала, перемещений по x_1 и x_2 (слева направо) представлены на Рисунке 3.6. В первом ряду изображено мелкомасштабное решение. Во втором и третьем рядах представлены многомасштабные решения с использованием 16 расщепленных и связанных базисных функций на грубой сетке 10×10 , соответственно. Видно, что все решения очень похожи.

Относительные погрешности для расщепленных базисных функций на грубых сетках 5×5 и 10×10 представлены в Таблице 3.4. Для грубой сетки 5×5 видно, что относительные L_2 и энергетические погрешности уменьшаются по мере увеличения числа базисных функций. Относительные L_2 погрешности для перемещения становятся меньше 1%, начиная с 8 базисных функций на узел грубой сетки. Начиная с 12 базисных функций на узел грубой сетки, относительные L_2 погрешности для электрического потенциала становятся меньше 5.5%. Как и в предыдущей задаче, относительные энергетические погрешности больше относительных L_2 погрешностей, особенно для электрического потенциала.

Результаты для грубой сетки 10×10 лучше, особенно для электрического потенциала. Например, относительные L_2 погрешности электрического потенциала составляют менее 5%, начиная



Эталонное решение



Многомасштабное решение с расщепленными базисными функциями



Многомасштабное решение со связанными базисными функциями

Рисунок 3.6: Распределения электрического потенциала, перемещений по x₁ и x₂ (слева направо). Сверху вниз, мелкосеточное решение, многомасштабные решения с использованием 16 расщепленных и связанных базисных функций на грубой сетке 10 × 10. Неоднородный пьезоэлектрический материал.

с 8 расщепленных базисных функций на элемент грубой сетки. Относительные энергетические погрешности для электрического потенциала и перемещения также меньше, чем для грубой сетки 5 × 5. Как и для грубой сетки 5 × 5, наблюдается сходимость по количеству базисных функций.

Μ	DOF _c	Электрический потенциал		Перемещение		
		$arepsilon_{L_2}^{\phi}$ (%)	$arepsilon_{e}^{\phi}$ (%)	$arepsilon_{L_2}^u$ (%)	ε_{e}^{u} (%)	
 Грубая сетка 5 × 5						
1	108	72.876	118.296	37.591	50.698	
2	216	42.379	86.598	14.939	28.873	
4	432	24.240	65.441	4.366	15.495	
6	648	15.878	50.000	1.560	9.043	
8	864	12.040	42.020	0.885	6.757	
12	1296	5.307	25.627	0.368	3.902	
16	1728	3.787	19.556	0.249	3.109	
20	2160	2.397	14.294	0.164	2.474	
24	2592	1.813	11.881	0.122	2.066	
Грубая сетка 10 × 10						
1	363	50.613	90.659	31.651	44.204	
2	726	25.985	71.891	14.926	25.328	
4	1452	15.530	49.417	5.694	14.046	
6	2178	10.770	39.158	3.195	9.559	
8	2904	4.539	23.170	1.177	6.267	
12	4356	2.113	13.652	0.443	3.854	
16	5808	1.323	10.095	0.249	2.820	
20	7260	1.041	8.999	0.165	2.272	
24	8712	0.854	8.083	0.121	1.952	

Таблица 3.4: Относительные погрешности (%) для электрического потенциала и перемещения с различным числом расщепленных базисных функций. Неоднородный пьезоэлектрический материал, грубые сетки 5 × 5 и 10 × 10, DOF_f = 44319.

Далее рассмотрим относительные погрешности для связанных многомасштабных базисных функций (Таблица 3.5). Видно, что в среднем погрешности меньше, чем у расщепленных базисных функций. Для грубой сетки 5×5 , относительные L_2 погрешности для электрического потенциала становятся меньше 9%, начиная с 6 базисных функций. Относительные L_2 погрешности перемещения становятся меньше 1%, начиная с 8 базисных функций. Относительные энергетические погрешности меньше, чем у расщепленных базисных функций.

мере увеличения числа базисных функций на узел грубой сетки.

Как и ожидалось, относительные погрешности для грубой сетки 10×10 лучше, чем для грубой сетки 5×5 . Начиная с 6 базисных функций, относительные L_2 погрешности становятся меньше 5%. Начиная с 8 базисных функций, относительные L_2 погрешности перемещения становятся меньше 1%. Начиная с 12 базисных функций, все относительные L_2 погрешности становятся меньше 1%, а относительные энергетические погрешности меньше 10%. Наблюдается сходимость по количеству базисных функций.

Μ	DOF _c	Электрический потенциал		Перемещение		
		$arepsilon_{L_2}^{\phi}$ (%)	$arepsilon_{e}^{\phi}$ (%)	$arepsilon^{u}_{L_{2}}\left(\% ight)$	ε_{e}^{u} (%)	
 Грубая сетка 5 × 5						
1	108	57.530	91.796	31.370	48.329	
2	216	67.573	107.633	24.346	40.600	
4	432	23.039	77.493	6.208	20.948	
6	648	8.869	41.507	1.098	8.373	
8	864	6.769	30.959	0.529	5.490	
12	1296	1.658	10.238	0.173	2.033	
16	1728	0.953	6.670	0.095	1.351	
20	2160	0.610	4.555	0.048	0.920	
24	2592	0.345	2.990	0.027	0.628	
Грубая сетка 10 × 10						
1	363	30.995	73.538	27.072	39.764	
2	726	31.766	100.772	21.077	34.269	
4	1452	12.919	74.902	4.989	15.140	
6	2178	4.193	33.598	1.280	6.724	
8	2904	2.509	24.538	0.578	4.328	
12	4356	0.835	9.619	0.173	2.332	
16	5808	0.441	6.307	0.106	1.740	
20	7260	0.304	5.504	0.059	1.269	
24	8712	0.226	4.935	0.040	1.024	

Таблица 3.5: Относительные погрешности (%) для электрического потенциала и перемещения с различным числом связанных базисных функций. Неоднородный пьезоэлектрический материал, грубые сетки 5 × 5 и 10 × 10, DOF_f = 44319.

Решение мелкосеточной системы занимает процессорное время, равное 0.665 секунды. Решение системы на грубой сетке 5×5 с использованием 8 расщепленных базисных функций занимает 0.068 секунды. Решение грубосеточной системы на грубой сетке 5×5 с использованием 8 связанных базисных функций занимает 0.060 секунд. Как уже упоминалось ранее, время вычислений грубосеточной системы будет значительно меньше, чем для мелкосеточной, по мере измельчения мелкой сетки.

Было показано, что использование одной многомасштабной базисной функции недостаточно (см., например, Таблицы 3.2-3.5), поскольку оно соответствует классическому усреднению [34]. В этом смысле для представления сложных неоднородностей требуется большее количество многомасштабных базисных функций. Предложенный подход более эффективен, когда речь идет о сложных неоднородностях и отсутствии статистической однородности.

3.5 Выводы

В данной главе рассмотрены модельные стационарные задачи пьезоэлектричества, состоящие из связанных дифференциальных уравнений, где первое векторное уравнение описывает упругие перемещения, а второе – электрический потенциал. Для аппроксимации мелкой сетки был использован метод конечных элементов со стандартными линейными базисными функциями. Для аппроксимации на грубой сетке был применен обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ). Рассмотрены как связанные, так и расщепленные базисные функции. При использовании расщепленных многомасштабных базисных функций наблюдались большие погрешности по сравнению с использованием связанных базисных функций. Полученные численные результаты показывают, что для достижения хорошей точности необходимо более одной базисной функции на грубый элемент, что указывает на то, что классические подходы, основанные на численном усреднении, могут не обеспечить точного прогноза. Следует отметить, что предложенные подходы имеют некоторые общие концепции с бессеточными методами, поскольку они решают сложные задачи без адаптации сетки. Поскольку многомасштабное взаимодействие является в основном пространственным, был рассмотрен стационарный случай.

93

Многомасштабное моделирование неоднородной упругой среды Коссера

Классическая модель упругости Коши широко применяется для описания упругих деформаций твердых тел, но во многих случаях требуется использование более сложных моделей. Модели упругости Коссера часто применяются для описания механического поведения материалов с внутренними вращательными степенями свободы. Наличие таких дополнительных степеней свободы делает модели Коссера похожими на многофизичные математические модели. В качестве примеров таких материалов можно отметить жидкие кристаллы, гранулированные среды и твердые тела с сотовой структурой [139–142]. Все они играют важную роль в различных областях науки и техники [143–145]. Однако среды Коссера часто содержат неоднородности, что приводит к вычислительно затратным численным расчетам. По этой причине существует много работ, посвященных изучению способов построения макромасштабных моделей Коссера [141, 146–150].

Среди ранних работ по усреднению и численному усреднению сред Коссера можно выделить [146,151–153]. В данных работах использовался формальный асимптотический анализ в предположении, что среда имеет разделение по масштабам, например, пространственную периодичность. С помощью формального асимптотического анализа относительно малых пространственных масштабов в работах [146, 151, 152] выведены макроскопические уравнения и формулы для вычисления макроскопических параметров. В зависимости от масштаба характерной длины среды Коссера были получены несколько макроскопических моделей [146]. В частности, было показано, что когда масштаб характерной длины неоднородностей (размер периодичности) сопоставим с характерными длинами Коссера, эффективная среда является средой Коши, а когда характерная длина Коссера больше (и сравнима с размером области), то эффективная среда является средой Коссера. Поскольку формальное асимптотическое разложение устраняет параметр малого масштаба на макромасштабном уровне, возникают различные случаи. Формальное асимптотическое разложение не позволяет рассмотреть промежуточные модели, и по этой причине может быть предпочтительнее использовать подходы, выходящие за рамки периодичного усреднения. Цель данной главы – вывести макроскопические модели для случая, когда нет разделения масштабов. При этом предлагаемые подходы позволяют избежать формальных процедур усреднения.

В данной главе рассматривается математическая модель Коссера, состоящая из связанных дифференциальных уравнений с неоднородными коэффициентами, в которых первое уравнение

описывает вектор перемещений, а второе – микровращение. Предлагаемые вычислительные многомасштабные подходы основаны на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов (ОММКЭ). Рассматриваются различные виды неоднородных сред: перфорированные, композитные и стохастически неоднородные среды. Для построения многомасштабных пространств решаются связанные локальные задачи и определяются локальные спектральные задачи для получения многомасштабных базисных функций, соответствующих доминирующим собственным значениям. При помощи данных базисных функций формулируются макромасштабные уравнения, которые решаются на грубой сетке. Рассматриваются как связанные, так и расщепленные многомасштабные базисные функции.

4.1 Определяющие уравнения

В данном разделе приводится модель упругости Коссера согласно формулировке, изложенной в [154]. Модель формулируется как в тензорных, так и в индексных обозначениях. В начале представляется общая модель упругости Коссера, а затем выводится двумерная модель.

4.1.1 Общая модель упругости Коссера

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ является вычислительной областью, где *d* обозначает геометрическую размерность задачи. Математическая модель описывается системой уравнений для векторов перемещений *u* и микровращений ϕ в Ω . Пусть e_i является стандартным ортонормальным базисом, τ – тензором силовых напряжений Коши, *m* – тензором моментных напряжений. Сначала сформулируем кинематические соотношения

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + e_{jik}\phi_k$$

$$\chi_{ij} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i},$$
(4.1)

где ϵ_{ij} – тензор деформаций, χ_{ij} – тензор кривизны, e_{jik} – перестановочный тензор. Тензор силовых напряжений τ и тензор моментных напряжений m в изотропном случае определяются следующими линейными определяющими уравнениями

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= D_{ijkl} \epsilon_{kl} \qquad (\tau = D : (\nabla u + \phi \times I)), \\ m_{ij} &= E_{ijkl} \chi_{kl} \qquad (m = E : \nabla \phi), \end{aligned}$$

$$\end{aligned}$$

где I – единичный тензор, а тензоры четвертого порядка D и E являются изотропными и задаются

следующим образом

$$D_{ijkl} = (\mu + \kappa)\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} = (G + \frac{\kappa}{2})\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk} + G\frac{2\nu}{1 - 2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl},$$

$$E_{ijkl} = \gamma\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk} + \alpha\delta_{ij}\delta_{kl}.$$
(4.3)

Здесь δ_{ik} – символ Кронекера, κ , α , β и γ – микрополярные материальные константы, λ и μ – параметры Ламе. Микрополярный модуль сдвига *G* и микрополярный коэффициент Пуассона ν определяются следующим образом

$$G = \frac{2\mu + \kappa}{2}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu + \kappa}.$$
(4.4)

В итоге стационарные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0$$

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_i} + e_{jik}\tau_{ik} + g_j = 0,$$
(4.5)

где f и g – массовые плотности внешних сил и момента, соответственно.

В непосредственном тензорном представлении стационарный закон баланса сил может быть записан как

$$\nabla \cdot \tau + f = 0, \tag{4.6}$$

а баланс моментов в статике имеет вид

$$\nabla \cdot m + \tau_{\mathsf{X}} + g = 0. \tag{4.7}$$

Здесь $\tau_{\times} = \tau_{ij} e_i \times e_j$.

4.1.2 Двумерная модель упругости Коссера

Далее рассмотрим двумерный случай, сделав следующее предположение

$$u = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0)$$

$$\phi = (0, 0, \Phi(x_1, x_2)).$$
(4.8)

Тогда

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + e_{ji}\Phi$$

$$\chi_{i3} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$
(4.9)

где $i, j = \overline{1, 2}$. Причем ϵ – двумерный тензор, $e = e_3 \times I = e_1 e_2 - e_2 e_1$, и $\chi = \tilde{\nabla} \Phi(x_1, x_2) e_3$, где $\tilde{\nabla}$ – плоский оператор, определенный как $\tilde{\nabla} = e_1 \partial_{x_1} + e_2 \partial_{x_2}$. Мы будем использовать (тильда) для

обозначения двумерной величины, например, наше предположение приводит к тому, что поступательное перемещение $u = \tilde{u}(x_1, x_2)$ является двумерным вектором, а для единичного тензора на плоскости мы будем использовать обозначение $\tilde{I} = e_1e_1 + e_2e_2$.

Убедимся, что такой вид деформации и линейных микрополярных определяющих уравнений согласуется с балансом сил и моментов, т.е. что такая кинематическая гипотеза не вызывает никаких дополнительных напряжений в среде. Определяющие уравнения (4.2) для тензора напряжений дают нам в плоском случае

$$\tau = D : (\tilde{\nabla}\tilde{u} + \Phi e_3 \times I) = (G + \frac{\kappa}{2})(\tilde{\nabla}\tilde{u} + \Phi e_3 \times \tilde{I}) + \mu(\tilde{\nabla}\tilde{u} + \Phi e_3 \times \tilde{I})^\top + \frac{2G\nu}{1 - 2\nu}\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}\tilde{I}.$$
(4.10)

Можно заметить, что $e_3 \cdot \tau = \tau \cdot e_3 = 0$, т.е. τ – плоский тензор.

Тензор моментных напряжений *m*, задаваемый определяющими соотношениями (4.2), имеет вид

$$m = E: \nabla \Phi e_3 = \gamma \nabla \Phi e_3 + \beta e_3 \nabla \Phi.$$
(4.11)

Заметим, что \tilde{u} и Φ зависят только от x_1, x_2 .

Баланс сил

$$\nabla \cdot \tau + f = 0 \tag{4.12}$$

в двумерном случае сводится к

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\tau} + f = \tilde{\nabla} \left(2G \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}\right) - \tilde{\nabla} \times \left((G + \frac{\kappa}{2})(\tilde{\nabla} \times \tilde{u})\right) + \tilde{\nabla} \times (\kappa \Phi)e_3 + f = 0.$$
(4.13)

Это уравнение является двумерным, если $f = \tilde{f}$ и упругие компоненты не зависят от x_3 . В компонентах оно может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left((G+\frac{\kappa}{2})\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\kappa\Phi\right) + f_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left((G+\frac{\kappa}{2})\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\kappa\Phi\right) + f_2 = 0.$$
(4.14)

Здесь (4.13) – уравнения поля упругости в тензорных обозначениях, а (4.14) – уравнения поля упругости в индексных обозначениях.

Баланс моментов в статике определяется следующим образом

$$\nabla \cdot m + \tau_{\mathsf{X}} + g = 0. \tag{4.15}$$

Действительно,

$$\tau_{\mathsf{X}} = -2\kappa(\Phi e_3 - \nabla \times \tilde{u}/2) \tag{4.16}$$

содержит только компоненту по e_3 так же, как и

$$\nabla \cdot m = \nabla \cdot (\gamma \tilde{\nabla} \Phi(x_1, x_2) e_3 + \beta e_3 \tilde{\nabla} \Phi(x_1, x_2)) = \tilde{\nabla} \cdot (\gamma \tilde{\nabla} \Phi) e_3, \tag{4.17}$$

если упругие постоянные не зависят от x_3 . Баланс моментов в перемещениях, если массовая плотность внешнего момента g направлена по e_3 , сводится к

$$\tilde{\nabla} \cdot (\gamma \tilde{\nabla} \Phi) e_3 - 2\kappa (\Phi e_3 - \tilde{\nabla} \times \tilde{u}/2) + g = 0, \qquad (4.18)$$

что можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}) + \kappa (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 - 2\Phi) + g_3 = 0.$$
(4.19)

Здесь (4.18) и (4.19) – уравнения поля микровращения в тензорных и индексных обозначениях, соответственно. Также стоит отметить, что модули α , β не входят в уравнения перемещений в рассматриваемом случае.

Уравнения упругости Коссера в двумерном случае. Таким образом, получаем следующую систему уравнений для двумерной модели упругости Коссера

$$\tilde{\nabla}(2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{u}) - \tilde{\nabla}\times((G+\frac{\kappa}{2})(\tilde{\nabla}\times\tilde{u})) + \tilde{\nabla}\times(\kappa\Phi)e_3 + f = 0,$$

$$\tilde{\nabla}\cdot(\gamma\tilde{\nabla}\Phi)e_3 - 2\kappa(\Phi e_3 - \tilde{\nabla}\times\tilde{u}/2) + g = 0,$$
(4.20)

или в индексных обозначениях

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left(G + \frac{\kappa}{2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \kappa\Phi\right) + f_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(G + \frac{\kappa}{2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \kappa\Phi\right) + f_2 = 0,$$
(4.21)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) + \kappa\left(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 - 2\Phi\right) + g_3 = 0.$$

Заметим, что если мы хотим рассмотреть динамику, то правую часть баланса сил следует заменить на $\rho \ddot{u}$, а правая часть баланса моментов будет равна $\rho I_0 \dot{\Phi} e_3$, где ρI_0 – плотность момента инерции точек тела. Скорости продольных и сдвигово-вращательных акустических ветвей в пределе низких частот равны $\sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ и $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Поэтому при сравнении стационарных решений для классической среды и среды Коссера имеет смысл выбирать одинаковые константы $G = \mu + \frac{\kappa}{2}$ и $\nu = \frac{\lambda}{2\lambda+2\mu+\kappa}$ для обоих типов континуума.

4.2 Конечно-элементная аппроксимация на мелкой сетке

Рассмотрим конечно-элементную аппроксимацию двумерной модели Коссера на мелкой сетке. Пусть $V = [H^1(\Omega)]^2$ и $Q = H^1(\Omega)$ – функциональные пространства для вектора перемещений и микровращения, $u \in V$ и $\Phi \in Q$. Первое и второе уравнения из системы (4.20) умножим на тестовые функции $v \in V$ и $\Psi \in Q$, соответственно, и интегрируем по частям. В результате получаем следующую вариационную формулировку

$$a_{uu}(u,v) + a_{u\Phi}(\Phi,v) = L_u(v), \quad \forall v \in V,$$

$$a_{\Phi u}(u,\Psi) + a_{\Phi\Phi}(\Phi,\Psi) + \bar{a}_{\Phi\Phi}(\Phi,\Psi) = L_{\Phi}(\Psi), \quad \forall \Psi \in Q.$$
(4.22)

Билинейные и линейные формы имеют следующий вид

$$a_{uu}(u,v) = \int_{\Omega} (D:\nabla u): \nabla v dx, \quad a_{u\Phi}(\Phi,v) = \int_{\Omega} k\Phi(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}) dx,$$

$$a_{\Phi\Phi}(\Phi,\Psi) = \int_{\Omega} \gamma \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi dx, \quad \bar{a}_{\Phi\Phi}(\Phi,\Psi) = 2\kappa \Phi \Psi,$$

$$a_{\Phi u}(u,\Psi) = -\kappa \nabla \times u \Psi dx, \quad L_u(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx, \quad L_{\Phi}(\Psi) = \int_{\Omega} g_3 \Psi dx,$$

(4.23)

или в индексных обозначениях

$$a_{uu}(u,v) = \int_{\Omega} D_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad a_{u\Phi}(\Phi,v) = \int_{\Omega} D_{ijkl} e_{lk} \Phi \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx,$$

$$a_{\Phi u}(u,\Psi) = -\int_{\Omega} e_{ij} D_{ijkl} \Psi \frac{\partial u_l}{\partial x_k} dx, \quad a_{\Phi\Phi}(\Phi,\Psi) = \int_{\Omega} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} dx,$$

$$\bar{a}_{\Phi\Phi}(\Phi,\Psi) = 2\kappa \Phi \Psi dx, \quad L_u(v) = \int_{\Omega} f_j v_j dx, \quad L_{\Phi}(\Psi) = \int_{\Omega} g_3 \Psi dx,$$

(4.24)

Здесь не используется \tilde{v} в качестве индикатора двумерного случая, так как предполагается, что $\nabla = \tilde{\nabla}$ и $u = \tilde{u}$. Отметим, что $a_{uu}(u, v)$ можно записать, используя параметры G, v и κ , но в данном случае выбран более компактный способ записи с использованием тензора D.

Далее, если провести конечно-элементную дискретизацию с помощью стандартных линейных базисных функций, дискретная система примет следующий вид

$$AY = B$$
,

или

$$\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{u\Phi} \\ A_{\Phi u}^T & A_{\Phi\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}.$$

Здесь U и Φ обозначают узловые значения перемещений и микровращения, соответственно. Что касается матриц, A_{uu} соответствует дискретизации упругости, $A_{\Phi\Phi}$ соответствует дискретизации эллиптического оператора, а $A_{u\Phi}$ задается с помощью $a_{u\Phi}(\zeta, \xi)$, где ζ и ξ – стандартные линейные базисные функции. Размер полученной дискретной системы составляет $3 \cdot N_v^h$, где N_v^h – количество узлов мелкой сетки \mathcal{T}^h .

4.3 Аппроксимация на грубой сетке с использованием ОММКЭ

Для построения макроскопической модели на грубой сетке используется обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ). Пусть \mathcal{T}^{H} является грубой сеткой, K_{i} обозначает *i*-ую ячейку \mathcal{T}^{H} , а N_{v}^{H} обозначает количество узлов грубой сетки. Далее определим локальную область $\omega_{i} = \{K_{i}^{H} \subset \mathcal{T}^{H} : x_{i}^{H} \in K_{i}^{H}\}$ для каждого грубосеточного узла x_{i}^{H} .

В данной главе рассматриваются как связанные, так и расщепленные многомасштабные базисные функции. Связанные базисные функции вычисляются путем решения связанных локальных задач, таким образом, учитывается взаимное влияние полей. Для вычисления расщепленных базисных функций локальные задачи решаются по отдельности для микровращения и перемещений.

4.3.1 Расщепленные многомасштабные базисные функции

Многомасштабные базисные функции для микровращения

Вспомогательные пространства. В каждой локальной области ω_i необходимо построить вспомогательное пространство, которое будет использоваться для вычисления многомасштабных базисных функций. Для простоты изложения нижний индекс *i* будет опускаться там, где это возможно. Чтобы построить вспомогательное пространство в ω , необходимо решить следующие локальные задачи: найти $\xi_i^{\omega} \forall j \in J_h(\omega)$ такую, что

$$a_{\Phi\Phi}(\xi_j^{\omega}, \Psi) = 0, \quad x \in \omega,$$

$$\xi_j^{\omega} = \delta_j^h(x), \quad x \in \partial\omega,$$
(4.25)

где $\delta_j^h(x) = \delta_{jk} \ \forall k \in J_h(\omega)$, а $J_h(\omega)$ – множество узлов мелкой сетки на $\partial \omega$. Таким образом, решается $D_{\Phi}^{\omega} = N^{\partial \omega}$ локальных задач, где $N^{\partial \omega}$ – количество узлов мелкой сетки на $\partial \omega$. Отсюда и далее используются билинейные формы, определенные в предыдущем разделе, однако в качестве области интегрирования берется ω .

После решения локальных задач для каждой локальной области ω строятся вспомогательное пространство и соответствующая ему матрица проекции

$$Q_{snap}(\omega) = \operatorname{span}\{\xi_j^{\omega} : 1 \le j \le D_{\Phi}^{\omega}\}, \quad R_{\Phi\Phi}^{snap} = (\xi_1^{\omega}, ..., \xi_{D_{\Phi}^{\omega}}^{\omega})^T.$$
(4.26)

Многомасштабное пространство. Далее решаются локальные спектральные задачи в построенных вспомогательных пространствах. В каждой локальной области *ω* необходимо решить следующую задачу

$$\tilde{A}^{\omega}_{\Phi\Phi}\tilde{\xi}^{\omega}_{k} = \lambda^{p}_{k}\tilde{S}^{\omega}_{\Phi\Phi}\tilde{\xi}^{\omega}_{k}, \qquad (4.27)$$

где

$$\tilde{A}^{\omega}_{\Phi\Phi} = R^{snap}_{\Phi\Phi} A^{\omega}_{\Phi\Phi} (R^{snap}_{\Phi\Phi})^T, \quad \tilde{S}^{\omega}_{\Phi\Phi} = R^{snap}_{\Phi\Phi} S^{\omega}_{\Phi\Phi} (R^{snap}_{\Phi\Phi})^T$$

$$A_{\Phi\Phi}^{\omega} = [a_{\Phi\Phi,mn}^{\omega}], \quad a_{\Phi\Phi,mn}^{\omega} = a_{\Phi\Phi}(\xi_m, \xi_n),$$
$$S_{\Phi\Phi}^{\omega} = [s_{\Phi\Phi,mn}^{\omega}], \quad s_{\Phi\Phi,mn}^{\omega} = s_{\Phi\Phi}(\xi_m, \xi_n), \quad s_{\Phi\Phi}(\xi_m, \xi_n) = \int_{\omega} \gamma \xi_m \xi_n dx$$

После этого выбираются собственные векторы, соответствующие M_{Φ} наименьшим собственным значениям. Затем при помощи матрицы проекции вспомогательного пространства собственные векторы переводятся обратно из вспомогательного пространства в исходное пространство $\bar{\xi}_{k}^{\omega} = (R_{\Phi\Phi}^{snap})^{T} \tilde{\xi}_{k}^{\omega}$.

Чтобы получить согласованные базисные функции, собственные векторы нужно умножить на функцию разбиения единицы η_i . Функция разбиения единицы η_i непрерывна и линейна в ω_i , равна 1 в главном узле ω_i и 0 во всех остальных грубосеточных узлах.

$$\xi_{i,k}^{ms} = \eta_i \bar{\xi}_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M_\Phi.$$

$$(4.28)$$

Используя базисные функции из всех локальных областей, мы можем построить многомасштабное пространство и его матрицу проекции

$$Q_{ms} = \operatorname{span}\{\xi_{i,k}^{ms} : 1 \le i \le N_{\nu}^{H} \quad \mu \quad 1 \le k \le M_{\Phi}\},\$$

$$R_{\Phi\Phi} = (\xi_{1,1}^{ms}, ..., \xi_{1,M_{\Phi}}^{ms}, ..., \xi_{N_{\nu}^{H},1}^{ms}, ..., \xi_{N_{\nu}^{H},M_{\Phi}}^{ms})^{T}.$$
(4.29)

Многомасштабные базисные функции для перемещений

Вспомогательные пространства. Как и для микровращения, сначала необходимо построить вспомогательное пространство в каждой локальной области ω . Для этого нужно решить следующие локальные задачи с различными граничными условиями: найти $\zeta_j^{\omega} \forall j \in J_h(\omega)$ такую, что

$$a_{uu}(\zeta_j^{\omega}, v) = 0, \quad x \in \omega,$$

$$\zeta_j^{\omega} = \bar{\delta}_j^h(x), \quad x \in \partial \omega,$$
(4.30)

где $\bar{\delta}_{j}^{h}(x) = \delta_{jk} e_l \ \forall k \in J_h(\omega)$, где $e_l - l$ -ый столбец единичной матрицы I_2 и l = 1, 2. Таким образом, решается $D_u^{\omega} = 2 \cdot N^{\partial \omega}$ локальных задач.

После решения локальных задач для каждой локальной области строятся вспомогательное пространство и его матрица проекции

$$V_{snap}(\omega) = \operatorname{span}\{\zeta_j^{\omega} : 1 \le j \le D_u^{\omega}\}, \quad R_u^{snap} = (\zeta_1^{\omega}, ..., \zeta_{D_u^{\omega}}^{\omega})^T.$$
(4.31)

Многомасштабное пространство. Затем для каждой локальной области *ω* решается следующая локальная спектральная задача во вспомогательном пространстве

$$\tilde{A}^{\omega}_{uu}\tilde{\zeta}^{\omega}_{k} = \lambda^{u}_{k}\tilde{S}^{\omega}_{uu}\tilde{\zeta}^{\omega}_{k}, \qquad (4.32)$$

где

$$\tilde{A}_{uu}^{\omega} = R_{u}^{snap} A_{uu}^{\omega} (R_{u}^{snap})^{T}, \quad \tilde{S}_{uu}^{\omega} = R_{u}^{snap} S_{uu}^{\omega} (R_{u}^{snap})^{T},$$
$$A_{uu}^{\omega} = [a_{uu,mn}^{\omega}], \quad a_{uu,mn}^{\omega} = a_{uu}(\zeta_{m}, \zeta_{n}), \quad S_{uu}^{\omega} = [s_{uu,mn}^{\omega}], \quad s_{uu,mn}^{\omega} = s_{uu}(\zeta_{m}, \zeta_{n}),$$
$$s_{uu}(\zeta_{m}, \zeta_{n}) = \int_{\omega} G \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \zeta_{m} \cdot \zeta_{n} dx.$$

Как и для микровращения, выбираются собственные векторы, соответствующие M_u наименьшим собственным значениям, и переводятся обратно из вспомогательного пространства $\bar{\zeta}_k^{\omega} = (R_u^{snap})^T \tilde{\zeta}_k^{\omega}$.

Вычисленные собственные векторы умножаются на функцию разбиения единицы η_i для получения согласованных базисных функций

$$\zeta_{i,k}^{ms} = \eta_i \bar{\zeta}_k^{\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_u, \quad 1 \le k \le M_u, \tag{4.33}$$

где $N_u = 2 \cdot N_v^H$. При помощи полученные базисные функции из всех локальных областей строятся многомасштабное пространство и соответствующая ему матрица проекции.

$$V_{ms} = \operatorname{span}\{\zeta_{i,k}^{ms} : 1 \le i \le N_u, 1 \le k \le M_u\},\$$

$$R_{uu} = (\zeta_{1,1}^{ms}, ..., \zeta_{1,M_u}^{ms}, ..., \zeta_{N_u,1}^{ms}, ..., \zeta_{N_u,M_u}^{ms})^T.$$
(4.34)

Построение глобальной матрицы проекции

После получения матриц проекции многомасштабных пространств для микровращения и перемещений необходимо построить глобальную матрицу проекции

$$R = \begin{pmatrix} R_{uu} & 0\\ 0 & R_{\Phi\Phi} \end{pmatrix}.$$
 (4.35)

Из вида матрицы проекции можно заметить, что она не учитывает взаимодействия между микровращением и перемещениями.

4.3.2 Связанные многомасштабные базисные функции

Вспомогательные пространства. Определим $W = V \times Q$, $w = (v_1, ..., v_d, \Psi)^T$, и $\Upsilon_j = (\zeta_{j,1}, \zeta_{j,2}, \xi_j)^T$, а также билинейную форму $\Sigma(\Upsilon_j^{l,\omega}, w) = a_{uu}(\zeta_j, v) + a_{u\Phi}(\xi_j, v) + a_{\Phi u}(\zeta_j, \Psi) + a_{\Phi \Phi}(\xi_j, \Psi) + \bar{a}_{\Phi \Phi}(\xi_j, \Psi)$. В каждой локальной области ω необходимо решить следующие локальные задачи: для всех l = 1, ..., 3 и $j \in J_h(\omega_i)$ найти $\Upsilon_j^{l,\omega}$ такую, что

$$\Sigma(\Upsilon_{j}^{l,\omega}, w) = 0, \quad x \in \omega,$$

$$\Upsilon_{j}^{l,\omega} = \bar{\delta}_{j}^{h}(x), \quad x \in \partial \omega.$$
(4.36)

В качестве граничных условий задается $\bar{\delta}_m^h(x) = \delta_{jk} e_l$, где $e_l - l$ -ый столбец единичной матрицы *I*₃. Таким образом, всего решается $D_{\Upsilon}^{\omega} = 3 \cdot N^{\partial \omega}$ локальных задач.

Здесь $\Upsilon_{j,1}^{l,\omega}$, $\Upsilon_{j,2}^{l,\omega}$ и $\Upsilon_{j,3}^{l,\omega}$ соответствуют вспомогательным функциям для перемещений по x_1 и x_2 и микровращения, соответственно. Используя полученные вспомогательные функции, можно построить следующие вспомогательные пространства и матрицы проекции в ω

$$W_{snap}^{l}(\omega) = \operatorname{span}\{\Upsilon_{j}^{l,\omega} : 1 \le j \le N^{\partial\omega}\},$$

$$R_{l}^{snap} = (\Upsilon_{1}^{l,\omega}, ..., \Upsilon_{N^{\partial\omega}}^{l,\omega})^{T}.$$
(4.37)

Многомасштабное пространство. Для каждой локальной области ω и l = 1, ..., 3, необходимо решить следующую локальную спектральную задачу во вспомогательном пространстве

$$\tilde{A}^{\omega}\tilde{\Upsilon}_{k}^{l,\omega} = \lambda_{k}^{u}\tilde{S}^{\omega}\tilde{\Upsilon}_{k}^{l,\omega},\tag{4.38}$$

где

$$\tilde{A} = R_l^{snap} A^{\omega} (R_l^{snap})^T, \quad \tilde{S} = R_l^{snap} S^{\omega} (R_l^{snap})^T,$$
$$A^{\omega} = [a_{mn}^{\omega}], \quad a_{mn}^{\omega} = \Sigma(\Upsilon_m, \Upsilon_n),$$
$$S^{\omega} = [s_{mn}^{\omega}], \quad s_{mn}^{\omega}(\Upsilon_m, \Upsilon_n) = s_{uu}(\zeta_m, \zeta_n) + s_{\Phi\Phi}(\xi_m, \xi_n)$$

Затем выбираются собственные векторы, соответствующие M наименьшим собственным значениям, и переводятся обратно из вспомогательного пространства $\bar{\Upsilon}_k^{l,\omega} = (R_l^{snap})^T \tilde{\Upsilon}_k^{l,\omega}$.

Далее собственные векторы умножаются на функцию разбиения единицы η_i

$$\Upsilon_{i,k}^{l,ms} = \eta_i \bar{\Upsilon}_k^{l,\omega_i}, \quad 1 \le i \le N_v^H, \quad 1 \le k \le M.$$

$$(4.39)$$

После этого строятся многомасштабное пространство и его матрица проекции

$$W_{ms} = \operatorname{span}\{\Upsilon_{i,k}^{l,ms} : 1 \le i \le N_{\nu}^{H} , 1 \le k \le M, \quad 1 \le l \le 3\},\$$

$$R = (\Upsilon_{1,1}^{1,ms}, ..., \Upsilon_{1,M}^{1,ms}, ..., \Upsilon_{N_{\nu}^{H},1}^{3,ms}, ..., \Upsilon_{N_{\nu}^{H},M}^{3,ms})^{T}.$$
(4.40)

Заметим, что *R* может быть представлена в следующем виде

$$R = \begin{pmatrix} R_{uu} & R_{u\Phi} \\ R_{\Phi u} & R_{\Phi\Phi} \end{pmatrix}.$$
 (4.41)

Как видно из формы матрицы проекции, она учитывает взаимодействие между упругими и вращательными полями.

4.3.3 Система на грубой сетке

Алгоритм получения макромасштабной модели одинаков как для расщепленных, так и для связанных многомасштабных базисных функций. Дискретная система на мелкой сетке может быть переведена на грубую сетку следующим образом

$$A^H Y^H = B^H, (4.42)$$

где

$$A^H = RAR^T, \quad B^H = RB.$$

Мелкомасштабное решение можно восстановить из макромасштабного решения следующим образом

$$Y^{ms} = R^T Y^H. ag{4.43}$$

Таким образом, решая систему пониженной размерности, можно получить решение на мелкой сетке. В следующем разделе будут представлены численные результаты и относительные погрешности предложенных многомасштабных подходов.

4.4 Численные результаты

Численные результаты разделены на две части. В первой части производится проверка решения на мелкой сетке в двух тестовых задачах с аналитическими решениями и в одной тестовой задаче, поставленной в сложной среде. Аналитические решения для первых двух тестовых задач были приведены в [155, 156], соответственно. В первой задаче решение на мелкой сетке модели упругости Коссера сравнивается с аналитическим решением классической модели упругости. Заметим, что эта задача почти сводится к классической упругой среде; тем не менее, она может служить инструментом проверки вычислительного кода. Вторая тестовая задача поставлена в среде Коссера. В ней решение на мелкой сетке сравнивается с аналитическим решением в среде Коссера. Третья задача представляет собой более реалистичный случай и не имеет аналитического решения. В ней решение на мелкой сетке упругости Коссера сравнивается с решением на мелкой сетке классической упругости.

Во второй части представлены результаты предложенных многомасштабных подходов для трех различных видов среды. Отметим, что для данных задач не представляется возможным найти точные решения. По этой причине многомасштабные решения сравниваются с решениями на мелкой сетке.

4.4.1 Проверка решения на мелкой сетке

Изгиб квадратной пластины: "квазиклассический" тест

Рассмотрим задачу об изгибе квадратной пластины. Как будет видно далее, эта задача практически сводится к классическому случаю. Аналитическое решение было впервые получено в [157]. В данной работе будем придерживаться двумерной формулировки, которая была представлена в [155]. Определим вычислительную область $\Omega = [0, 2h] \times [-h, h]$ (м²) и зададим следующие граничные условия

$$u_{1} = 0, \quad \tau_{j2}n_{j} = 0, \quad \Phi = 0, \quad x \in \Gamma_{L},$$

$$\tau_{ji}n_{j} = 0, \quad m_{j3}n_{j} = 0, \quad x \in \Gamma_{T} \cup \Gamma_{B},$$

$$\tau_{j1}n_{j} = \sigma_{0}x_{2}, \quad \tau_{j2}n_{j} = 0, \quad m_{j3}n_{j} = -m_{0}, \quad x \in \Gamma_{R},$$

$$u_{2} = -\frac{1}{2}c_{0}\left[(2h)^{2} + \frac{\nu}{1-\nu}h^{2}\right], \quad x = x_{tr}$$
(4.44)

где x_{tr} – правая верхняя точка и

$$\sigma_0 = \frac{2G}{1 - \nu} c_0, \quad m_0 = \gamma c_0. \tag{4.45}$$

Аналитическое решение выглядит следующим образом

$$u_1 = c_0 x_1 x_2, \quad u_2 = -\frac{1}{2} c_0 \left(x_1^2 + \frac{\nu}{1 - \nu} x_2^2 \right), \quad \Phi = -c_0 x_1.$$
(4.46)

Несложно заметить, что это решение является почти классическим. Действительно, определяющее уравнение (4.11) дает

$$m = -c_0(\gamma e_1 e_3 + \beta e_3 e_1) = \text{const},$$
 (4.47)

таким образом $\nabla \cdot m = 0$, а микрополярные упругие константы β , γ не входят в баланс сил и моментов. При попытке измерить деформации становится понятным, что их не получается определить (как и моментные напряжения *m*). В то же время тензор напряжений τ в данном случае симметричен. Уравнение (4.16) для этого решения имеет вид

$$\tau_{\times} = \kappa e_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - 2\Phi \right) = -2\kappa c_0 (-x_1 - x_1 + 2x_1) e_3 = 0.$$
(4.48)

Видно, что κ не влияет ни на баланс сил, ни на баланс моментов. Баланс моментов сводится к равенству 0 = 0, а баланс сил включает дивергенцию симметричного тензора напряжений, полностью определяемого классическими константами G, v. Микровращение не входит в баланс сил. Поле поступательных перемещений u такое же, как и в классической теории. Проверим, как себя ведет решение на мелкой сетки в рассматриваемой "квазиклассической" задачи. Параметры материала для модели Коссера представлены в Таблице 4.1. Зададим $c_0 = 3.327 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ и h = 0.1 м. Проведем расчеты для различных размеров сетки. Для классической упругости используются те же граничные условия для τ и u и те же упругие параметры G, v.

Параметр	Единица измерения	Значение
γ	Н	$3 \cdot 10^7$
К	Па	$3 \cdot 10^7$
G	Па	$2.5\cdot 10^7$
ν		3/11

Таблица 4.1: Параметры материала

Для измерения точности решения вычисляются относительные погрешности, отражающие разницу между численным и аналитическим решениями

$$\varepsilon_{L_2}^{\Phi} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\Phi_{exact} - \Phi_{num})^2 dx}{\int_{\Omega} \Phi_{exact}^2 dx}} \times 100\%, \quad \varepsilon_{L_2}^u = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u_{exact} - u_{num})^2 dx}{\int_{\Omega} u_{exact}^2 dx}} \times 100\%, \tag{4.49}$$

Относительные погрешности представлены в Таблице 4.2.

I <i>(</i>	Упругость Коссера		Классическая упругость
количество вершин	$arepsilon_{L_2}^u$	$arepsilon_{L_2}^{\Phi}$	$arepsilon_{L_2}^u$
381	0.192813	0.0044989	1.07537
1442	0.0536634	0.00110759	0.296633
4011	0.0134146	0.000396015	0.115334
7687	0.0158033	0.000202811	0.0756014
12805	0.00361118	0.000123043	0.0360048

Таблица 4.2: Изгиб квадратной пластины, численное решение. Относительные погрешности (%) для различных сеток

Из таблицы видно, что для выбранных констант оба численных решения (упругости Коссера и классической упругости) приближаются к аналитическому решению. Следовательно решение на мелкой сетке проходит данный "квазиклассический" тест.

Пластина с круглым отверстием: "микрополярный" тест

Рассмотрим квадратную пластину со стороной a = 4 [м] и с одним круглым отверстием (перфорацией) радиуса R = 0, 1 [м] в центре. На верхней и нижней границах прикладывается вертикальное напряжение. На других границах, включая перфорацию, задается нулевой вектор напряжений и нулевое моментное напряжение. В силу симметричности задачи рассматривается только правая верхняя четверть области. Таким образом, задаются следующие граничные условия.

$$u_{1} = 0, \quad \tau_{j2}n_{j} = 0, \quad \Phi = 0, \quad x \in \Gamma_{L},$$

$$u_{2} = 0, \quad \tau_{j1}n_{j} = 0, \quad \Phi = 0, \quad x \in \Gamma_{B},$$

$$\tau_{ji}n_{j} = t_{i}, \quad m_{j3}n_{j} = 0, \quad x \in \Gamma_{T},$$

$$\tau_{ji}n_{j} = 0, \quad m_{j3}n_{j} = 0, \quad x \in \Gamma_{R},$$
(4.50)

Используются те же параметры материала, что и в предыдущей задаче (см. Таблицу 4.1). Для вертикального напряжения задается $t = (0, 10^6)^T$ Па.

В данной задаче рассчитывается коэффициент концентрации напряжения вокруг перфорации. Коэффициент концентрации напряжения может быть вычислен аналитически в плоских полярных координатах по следующим формулам [156]

$$F_{1} \equiv 8(1-\nu)N^{2} \left[4 + \frac{R^{2}}{c^{2}} + \frac{2R}{c} \frac{K_{0}(R/c)}{K_{1}(R/c)} \right]^{-1},$$

$$\tau_{\theta\theta} = t_{2} \left(1 + \frac{2\cos 2\theta}{1+F_{1}} \right),$$

SCF = $\tau_{\theta\theta\max}/t_{2} = (3+F_{1})/(1+F_{1}),$
(4.51)

где K_n – модифицированная функция Бесселя второго рода или порядка n, $\tau_{\theta\theta}$ – значение соответствующей компоненты напряжения на периферии перфорации, $\tau_{\theta\theta max}$ – максимальное значение $\tau_{\theta\theta}$, которое возникает при $\theta = \pm \pi/2$, l, N и c – микрополярные константы материала, которые определяются следующим образом

$$l = \sqrt{\frac{\gamma}{2(2\mu + \kappa)}} = \sqrt{\frac{\gamma}{4G}}, \quad N = \sqrt{\frac{\kappa}{2(\mu + \kappa)}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2G + \kappa}}, \quad c = \frac{l}{N} = \sqrt{\frac{\gamma(G + \kappa/2)}{2G\kappa}}.$$
 (4.52)

Результаты численного решения представлены на Рисунках 4.1 – 4.5. На Рисунках 4.1, 4.2 представлены распределения модуля, x_1 и x_2 компонентов вектора перемещений *и* для классической модели и модели упругости Коссера. Распределение микровращения Ф для упругой среды Коссера отображено на Рисунке 4.3. На Рисунках 4.4, 4.5 представлены распределения ($\tau_{11}+\tau_{22}$)/2, ($\tau_{11}-\tau_{22}$)/2, ($\tau_{12}+\tau_{21}$)/2, ($\tau_{12}-\tau_{21}$)/2 для классической модели и модели упругости Коссера. Как и ожидалось, можно заметить, что $\tau_{12} - \tau_{21} = 0$ в случае классической упругости, но не в случае среды Коссера. Девиатор симметричной части напряжений также чувствителен к микрополярной природе среды вблизи отверстия, тогда как tr $\tau = \tau_{11} + \tau_{22}$ менее подвержен ее влиянию.



Разница между упругостью Коссера и классической упругостью

Рисунок 4.1: Распределения модуля, *x*₁ и *x*₂ компонент вектора перемещений (слева направо). Сверху вниз: классическая упругость, упругость Коссера, разница между упругостью Коссера и классической упругостью. Пластина с круглым отверстием

Далее производится сравнение напряжения вокруг перфорации в численных результатах с напряжением, полученным аналитическим способом. Сравнение производится для набора вычислительных сеток с различной плотностью. Для измерения точности численных результатов вычисляется относительная погрешность, определяемая следующим образом

$$\varepsilon_{scf} = \frac{|\text{SCF}_{exact} - \text{SCF}_{num}|}{|\text{SCF}_{exact}|} \times 100\%.$$
(4.53)



Разница между упругостью Коссера и классической упругостью

Рисунок 4.2: Распределения модуля, *x*₁ и *x*₂ компонент вектора перемещений (слева направо). Сверху вниз: классическая упругость, упругость Коссера, разница между упругостью Коссера и классической упругостью. Пластина с круглым отверстием, увеличенный вид



Рисунок 4.3: Распределение микровращения Ф для упругости Коссера. Пластина с круглым отверстием

Разница между численными решениями для двух моделей упругости и аналитическим решением для среды Коссера представлена в Таблице 4.3. Точное значение коэффициента концентрации
109



Упругость Коссера

Рисунок 4.4: Распределения ($\tau_{11} + \tau_{22}$)/2, ($\tau_{11} - \tau_{22}$)/2, ($\tau_{12} + \tau_{21}$)/2, ($\tau_{12} - \tau_{21}$)/2 (слева направо). Первый ряд – классическая упругость, второй ряд – упругость Коссера. Пластина с круглым отверстием



Упругость Коссера

Рисунок 4.5: Распределения ($\tau_{11} + \tau_{22}$)/2, ($\tau_{11} - \tau_{22}$)/2, ($\tau_{12} + \tau_{21}$)/2, ($\tau_{12} - \tau_{21}$)/2 (слева направо). Первый ряд – классическая упругость, второй ряд – упругость Коссера. Пластина с круглым отверстием, увеличенный вид

напряжения для среды Коссера равна 2.30219. Для классической и микрополярной моделей используются одинаковые параметры *G*, *v*.

Количество вершин	Упруг	ость Коссера	Классическая упругость		
	SCF _{cosserat}	Погрешность (%)	SCF _{classical}	Разница (%)	
414	2.08811	9.29899	2.41797	5.02919	
1496	2.09462	9.01602	2.62944	14.2148	
4098	2.19416	4.69207	2.7199	18.1445	
7782	2.27678	1.10345	2.92764	27.1679	
13227	2.26403	1.6573	2.85892	24.1827	

Таблица 4.3: Разница (%) численного SCF для различных сеток и точного SCF для среды Коссера. Пластина с круглым отверстием, SCF_{exact} = 2.30219

Видно, что по мере измельчения вычислительной сетки численное решение упругости Коссера приближается к аналитическому решению. Таким образом, метод решения на мелкой проходит данный "микрополярный"тест, для которого вращательные степени свободы точек тела играют важную роль.

Разница между численным решением классической упругости и аналитическим результатом для среды Коссера показывает, что микрополярная природа среды играет особенно важную роль вблизи неоднородностей, как это часто и бывает. В дальней области решения приближаются друг к другу (см. Рисунок 4.1).

Сложная перфорированная пластина: приложение метода

В двух предыдущих разделах была проведена проверка того, что метод решения на мелкой сетке работает в двух различных тестах, в первом из которых микрополярная природа среды не играет роли, а во втором она имеет важное значение. В данном подразделе метод решения на мелкой сетке применяется для случая сложных перфорированных сред. Рассматривается квадрат со стороной a = 2 [м] с несколькими перфорациями. Задаются граничные условия (4.50) и материальные константы, представленные в Таблице 4.1. Для классической упругости используются те же G, v, что и для микрополярной среды.

Численные результаты представлены на Рисунках 4.6, 4.7 и 4.8. На Рисунке 4.6 показаны распределения модуля, x_1 и x_2 компонент вектора перемещений *и* для классической модели и модели упругости Коссера. На Рисунке 4.7 изображено распределение микровращения Φ для упругости Коссера. На Рисунке 4.8 представлены распределения ($\tau_{11} + \tau_{22}$)/2, ($\tau_{11} - \tau_{22}$)/2, ($\tau_{12} + \tau_{21}$)/2, ($\tau_{12} - \tau_{21}$)/2 для классической модели и модели упругости Коссера. Снова, как и в случае

одной перфорации, видно, что антисимметричная часть напряжений, характеризуемая $\tau_{21} - \tau_{12}$, присутствующая для среды Коссера, равна нулю для классической упругости; dev τ^{S} чувствительна к микрополярной природе среды, и давление не так сильно зависит от нее. Видно, что разница между классическим решением и решением Коссера в основном существенна вблизи перфораций.







0.000866







Разница между упругостью Коссера и классической упругостью

Рисунок 4.6: Распределения модуля, x₁ и x₂ компонент вектора перемещений (слева направо) в сложной перфорированной среде. Сверху вниз: классическая упругость, упругость Коссера, разница между упругостью Коссера и классической упругостью



Рисунок 4.7: Распределение микровращения Ф для упругости Коссера в сложной

перфорированной среде





Рисунок 4.8: Распределения $(\tau_{11} + \tau_{22})/2$, $(\tau_{11} - \tau_{22})/2$, $(\tau_{12} + \tau_{21})/2$, $(\tau_{12} - \tau_{21})/2$ (слева направо). Первый ряд – классическая упругость, второй ряд – упругость Коссера

Из этих рисунков видно, что микрополярная природа среды очень важна при наличии распределенных неоднородностей. В этом случае предлагаемый многомасштабный метод позволяет уловить это различие и представить микрополярность на грубой сетке. Предлагаемый подход правильно идентифицирует природу среды Коссера и правильно находит макроскопические параметры. Более того, в предлагаемом подходе не нужно выделять различные диапазоны параметров (как в усреднении) для идентификации макромасштабных сред и нет необходимости в предположении разделения масштабов. Из-за высокого контраста по отношению к вычислительной сетке макромасштабные модели требуют дополнительных степеней свободы.

4.4.2 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов

В данном разделе представлены численные результаты предлагаемого многомасштабного подхода. Рассматриваются три варианта среды: перфорированная, композитная и стохастически неоднородная. Для каждого из данных случаев задается область $\Omega = [0, 2] \times [0, 2] \text{ м}^2$. Для всех случаев среды задаются граничные условия (4.50). Отметим, что предлагаемый многомасштабный подход работает для любых граничных условий [40]. Для перфорированной среды применяется неструктурированная мелкая сетка, содержащая 6101 вершину и 11608 треугольных ячеек. Для композитной и неоднородной сред используется неструктурированная мелкая сетка с 14773 вершинами и 29144 треугольными ячейками (см. Рисунок 4.9). Для грубых сеток во всех случаях среды используются две равномерные сетки:

- a) равномерная грубая сетка 5 × 5 с 36 вершинами и 25 прямоугольными ячейками;
- б) равномерная грубая сетка 10×10 с 121 вершиной и 100 прямоугольными ячейками.



Рисунок 4.9: Грубая сетка 10 × 10, мелкая сетка для перфорированной среды, мелкая сетка для композитной и неоднородной сред (слева направо)

Для сравнения многомасштабного решения и мелкомасштабного решения используются относительные L₂ нормы погрешностей

$$\varepsilon_{L_{2}}^{u} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u - u_{ms})^{2} dx}{\int_{\Omega} u^{2} dx}} \times 100\%, \quad \varepsilon_{L_{2}}^{\Phi} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\Phi - \Phi_{ms})^{2} dx}{\int_{\Omega} \Phi^{2} dx}} \times 100\%, \quad (4.54)$$

и относительная энергетическая норма

$$\varepsilon_e = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y_{ms}, y - y_{ms})dx}{\Sigma(y, y)}} \times 100\%, \tag{4.55}$$

где $y = (u, \Phi)^T$ и $y_{ms} = (u_{ms}, \Phi_{ms})^T$, а билинейная форма $\Sigma(y, y)$ определена в разделе 4.3.2.

В численных результатах рассматриваются как связанные, так и расщепленные многомасштабные базисные функции. Связанные многомасштабные базисные функции учитывают взаимное влияние полей и, в целом, обеспечивают более высокую точность. Расщепленные многомасштабные базисные функции не учитывают взаимодействия полей, но требуют меньше вычислительных ресурсов. Также необходимо отметить, что здесь не используется метод избыточной дискретизации, однако его тоже можно использовать и при этом получать более точные решения. Например, можно использовать ОММКЭ с ограничением минимизации энергии [49].

Сложная перфорированная пластина

В данной задаче неоднородность среды задается перфорациями. Используются параметры материала, определенные в Таблице 4.1.

На Рисунке 4.10 представлены распределения микровращения, перемещений по x_1 и x_2 (слева направо). На данном рисунке показаны решения на мелкой и грубой сетках с использованием расщепленных и связанных многомасштабных базисных функций (сверху вниз). Для получения этих многомасштабных решений использовалась грубая сетка 10×10 с 16 базисными функциями в каждом элементе. Видно, что все решения очень похожи, что говорит о том, что предложенный многомасштабный подход может обеспечить точную аппроксимацию мелкосеточного решения.

Относительные погрешности для связанных и расщепленных многомасштабных базисных функций представлены в Таблице 4.4. Если рассматривать грубую сетку 5×5 , то можно заметить, что как связанные, так и расщепленные многомасштабные базисные функции дают хорошие результаты с использованием меньшего количества степеней свободы. Например, использование 8 связанных или расщепленных базисных функций дает относительные L_2 погрешности для микровращения меньше 3.5 %, а относительные L_2 погрешности для перемещений меньше 1 %, при этом решается дискретная система всего с 864 степенями свободы. Видно, что относительные энергетические погрешности уменьшаются как для связанных, так и для расщепленных базисных функций по мере увеличения числа базисных функций, как и ожидалось. Можно заметить, что в среднем, связанные базисные функции дают меньшие погрешности.

Использование грубой сетки 10×10 дает меньшие относительные погрешности, чем применение грубой сетки 5×5 . Например, применение 8 связанных базисных функций дает относительные L_2 погрешности для микровращения и перемещений меньше 1 %. Использование 8 расщепленных базисных функций дает относительную L_2 погрешность для микровращения около 1 % и относительную L_2 погрешность для перемещений менее 1 %. Как и для грубой сетки 5×5 , видно, что относительные энергетические погрешности уменьшаются с увеличением числа базисных функций. Многомасштабное решение, полученное с помощью связанных базисных функций, обеспечивает лучшую аппроксимацию решения на мелкой сетке по сравнению с использованием

114









Многомасштабное решение с использованием связанных базисных функций

Рисунок 4.10: Распределения микровращения, перемещений по *x*₁ и *x*₂ (слева направо) для сложной перфорированной пластины. Сверху вниз: решение на мелкой сетке, многомасштабные решения с использованием 16 расщепленных и связанных базисных функций на грубой сетке

 10×10 . DOF_f = 18303, DOF_c = 5808.

расщепленных базисных функций. Что касается времени вычислений, то для решения на грубой сетке с 5×5 с 8 связанными базисными функциями требуется в два раза меньше времени, чем на мелкой. В целом, по мере измельчения мелкой сетки время вычислений на грубой сетке будет становиться значительно меньше по сравнению с мелкой сеткой.

M DOF _c	Связанные базисные функции			Расщепленные базисные функции				
	DOF _c	$arepsilon_{L_2}^{oldsymbol{\Phi}}(\%)$	$arepsilon^{u}_{L_{2}}\left(\% ight)$	$arepsilon_e$ (%)	$arepsilon_{L_2}^{oldsymbol{\Phi}}(\%)$	$arepsilon_{L_2}^u$ (%)	ε_{e} (%)	
Грубая сетка 5 × 5								
1	108	53.688	7.036	25.712	54.575	7.036	25.713	
6	648	4.955	0.486	6.416	5.995	1.249,	9.889	
8	864	3.488	0.310	5.018	3.473	0.585	7.400	
12	1296	2.415	0.193	3.375	1.886	0.320 5.057		
16	1728	1.236	0.069	1.999	1.378	0.211	4.202	
Грубая сетка 10 × 10								
1	363	47.269	6.690	25.319	47.415	6.690	25.319	
6	2178	1.274	0.126	3.308	1.459	0.310	5.003	
8	2904	0.727	0.072	2.380	1.019	0.134	3.703	
12	4356	0.347	0.033	1.390	0.559	0.079	2.611	
16	5808	0.115	0.013	0.756	0.270	0.050	2.001	

Таблица 4.4: Относительные погрешности (%) для сложной перфорированной пластины при использовании различного количества базисных функций. Грубые сетки 5 × 5 и 10 × 10,

 $DOF_f = 18303.$

Композитная пластина

Данная задача представляет собой случай возникновения неоднородности среды вследствие наличия включений. Для матрицы используются параметры, определенные в Таблице 4.1. Для включений используются параметры, равные произведению параметров матрицы на контраст 10³.

На Рисунке 4.11 представлены численные результаты, представляющие собой распределения микровращения, перемещений по x_1 и x_2 (слева направо). На этом рисунке показаны решения на мелкой и грубой сетках со связанными многомасштабными базисными функциями (сверху вниз). Здесь используется грубая сетка 10×10 с 16 базисными функциями на каждый узел грубой сетки. Как и в случае предыдущей задачи, видно, что многомасштабное решение обеспечивает хорошую точность.

В Таблице 4.5 представлены относительные погрешности для связанных многомасштабных базисных функций. В этой и следующей задачах приводятся относительные погрешности только для связанных базисных функций. Расщепленные базисные функции, в среднем, дают большие относительные погрешности, как и в предыдущей задаче. Например, можно получить относительную



Многомасштабное решение с использованием связанных базисных функций

Рисунок 4.11: Распределения микровращения, перемещений по *x*₁ и *x*₂ (слева направо) для композитной пластины. Сверху вниз: решение на мелкой сетке, многомасштабное решение с использованием 16 связанных базисных функций на грубой сетке 10 × 10. DOF_f = 44319,

 $DOF_c = 5808.$

 L_2 погрешность для микровращения менее 5 % и относительную L_2 погрешность для перемещения менее 1 %, используя 8 связанных базисных функций на грубой сетке 5 × 5. Использование 8 расщепленных базисных функций дает относительную L_2 погрешность для микровращения около 13 % и относительную L_2 погрешность для перемещения менее 1 %. Как и в предыдущей задаче, видно, что относительные энергетические погрешности уменьшаются с увеличением числа базисных функций.

Как и ожидалось, результаты с использованием грубой сетки 10×10 точнее, чем с применением грубой сетки 5×5 . Используя 12 связанных базисных функций, можно получить относительные L_2 и энергетические погрешности меньше 1 %. Можно заметить, что относительные энергетические погрешности уменьшаются по мере увеличения числа базисных функций. Для решения системы на грубой сетке 5×5 с 8 связанными базисными функциями, время вычислений более чем в десять раз меньше, чем на мелкой. В целом, время вычислений будет становиться намного

Μ	DOF _c	Связанные базисные функции						
		$arepsilon_{L_2}^{oldsymbol{\Phi}}\left(\% ight)$	$arepsilon_{L_2}^u\left(\% ight)$	$arepsilon_{e}$ (%)				
	Грубая сетка 5 × 5							
1	108	83.857	90.496	94.854				
6	648	14.823	1.799	11.649				
8	864	4.601	0.320	5.107				
12	1296	0.879	0.083	2.073				
16	1728	0.695	0.037	0.821				
Грубая сетка 10 × 10								
1	363	55.773	77.799	85.822				
6	2178	3.423	0.194	4.094				
8	2904	3.475	0.056	1.961				
12	4356	0.404	0.012	0.702				
16	5808	0.106	0.006	0.420				

меньше по мере измельчения мелкой сетки.

Таблица 4.5: Относительные погрешности (%) для композитной пластины при использовании различного количества базисных функций. Грубые сетки 5 × 5 и 10 × 10, DOF_f = 44319.

Неоднородная пластина

В данной задаче неоднородность задается через функцию неоднородности, представленную на Рисунке 4.12. Коэффициенты неоднородности получаются путем умножения *G*, *γ*, *к* из Таблицы 4.1 на функцию неоднородности.

На Рисунке 4.13 представлены распределения микровращения, перемещений по x_1 и x_2 (слева направо). Сверху вниз изображены решения на мелкой сетке и грубой сетке со связанными многомасштабными базисными функциями. Для многомасштабного решения использовалась грубая сетка 10×10 с 16 базисными функциями на узел грубой сетки. Как и в предыдущих задачах, все решения очень похожи.

Относительные погрешности для связанных многомасштабных базисных функций представлены в Таблице 4.6. Следует отметить, что метод сходится быстрее, чем для предыдущей задачи. Это можно объяснить тем, что неоднородность в данной задаче более гладкая, чем в случае с композитным материалом. Например, можно получить относительные L_2 погрешности около 1 %,



Рисунок 4.12: Функция неоднородности



Многомасштабное решение со связанными базисными функциями

Рисунок 4.13: Распределения микровращения, перемещений по x₁ и x₂ (слева направо) для неоднородной пластины. Сверху вниз: решение на мелкой сетке, многомасштабное решение с использованием 16 связанных базисных функций на грубой сетке 10 × 10. DOF_f = 44319, DOF_c = 5808.

используя только 8 связанных базисных функций на грубой сетке 5 × 5. Видно, что относительные энергетические погрешности уменьшаются с увеличением числа базисных функций.

Как и ожидалось, применение грубой сетки 10×10 дает меньшие погрешности. Используя

119

только 6 связанных базисных функций, можно получить относительную L_2 погрешность около 1 % для микровращения и относительную L_2 погрешность менее 1 % для перемещений. Относительные энергетические погрешности уменьшаются с увеличением числа базисных функций. Что касается времени вычислений, то для решения системы на грубой сетке 5×5 с 8 связанными базисными функциями время вычислений в два раза меньше, чем на мелкой сетке. В целом, время вычислений будет становиться намного меньше по мере измельчения мелкой сетки.

Μ	DOF _c	Связанные базисные функции					
		$arepsilon_{L_2}^{oldsymbol{\Phi}}\left(\% ight)$	$arepsilon^{u}_{L_{2}}\left(\% ight)$	$arepsilon_{e}$ (%)			
Грубая сетка 5 × 5							
1	108	67.759	23.364	54.316			
6	648	3.132	3.156	19.203			
8	864	1.395	1.081	10.942			
12	1296	0.362	0.272	4.217			
16	1728	0.292	0.164	2.841			
Грубая сетка 10 × 10							
1	363	39.816	11.324	35.209			
6	2178	1.138	0.361	5.391			
8	2904	0.385	0.203	3.552			
12	4356	0.079	0.053	1.428			
16	5808	0.034	0.028	0.887			

Таблица 4.6: Относительные погрешности (%) для неоднородной пластины при использовании различного количества базисных функций. Грубые сетки 5 × 5 и 10 × 10, DOF_f = 44319.

Влияние силы взаимодействия. Коэффициент взаимодействия $N = \sqrt{\frac{\kappa}{2G+\kappa}}$ представляет собой меру силы взаимодействия между перемещениями и микровращением. В данном тесте сравниваются различные случаи коэффициента взаимодействия с целью анализа его влияния на предложенный многомасштабный подход. Для получения слабой связи $\kappa = 3 \cdot 10^6$ Па умножается на функцию неоднородности, что ведет к N = 0.238. Умножение $\kappa = 3 \cdot 10^8$ Па на функцию неоднородности дает N = 0.926, что представляет собой случай сильного взаимодействия. Также рассматривается случай неоднородного коэффициента взаимодействия ($0.0492 \le N \le 0.924$), который получается при использовании $\kappa = 3 \cdot 10^8$ Па (постоянное значение).

Относительные погрешности для различных случаев коэффициента взаимодействия N пред-

ставлены в Таблице 4.7. Как связанные, так и расщепленные базисные функции обеспечивают хорошую аппроксимацию мелкомасштабного решения для всех случаев силы взаимодействия. Однако связанные базисные функции дают лучшие результаты, чем расщепленные. Можно заметить, что случай сильного взаимодействия дает наиболее значительные погрешности для расщепленных базисных функций. С другой стороны, связанные базисные функции дают наименьшие энергетические ошибки для данного случая силы взаимодействия.

Случай	Связ. базисные функции			Расщ. базисные функции		
	$arepsilon_{L_2}^{oldsymbol{\Phi}}(\%)$	$arepsilon_{L_2}^u\left(\% ight)$	ε_{e} (%)	$arepsilon_{L_2}^{oldsymbol{\Phi}}(\%)$	$arepsilon_{L_2}^u\left(\% ight)$	ε_{e} (%)
N = 0.238	0.120	0.077	2.080	0.165	0.160	3.411
N = 0.926	0.185	0.053	1.786	0.631	0.236	3.684
$0.0492 \leq N \leq 0.924$	0.134	0.069	1.914	0.311	0.103	2.790

Таблица 4.7: Относительные погрешности (%) для неоднородной пластины с различными случаями силы взаимодействия. Грубая сетка 10 × 10, *M* = 12, DOF_c = 4356.



Рисунок 4.14: Коэффициент взаимодействия, разница между мелкомасштабными и многомасштабными решениями микровращения, перемещения по x_1 и x_2 (слева направо). Грубая сетка 10×10 , M = 12.

На Рисунке 4.14 изображены распределения разницы между мелкомасштабным и многомасштабным решениями для случая неоднородного коэффициента взаимодействия. Для расщепленных базисных функций видно, что погрешности больше в областях с большим значением коэффициента взаимодействия. Особенно это заметно для распределения разности микровращения. Многомасштабное решение с использованием связанных базисных функций имеет более однородное распределение разности.

4.5 Выводы

В данной главе разработан многомасштабный подход для численного исследования сред Коссера без разделения масштабов и с высоким контрастом. Предыдущие результаты в основном были сосредоточены на подходах с разделением масштабов и использовали аналитические методы для формулировки усредненных моделей. В этой главе с помощью тщательно разработанных многомасштабных базисных функций была представлена вычислительная макроскопическая модель, которая показывает, что подходы усреднения недостаточны для сложных неоднородных сред. Рассмотрены перфорированная, композитная и стохастически неоднородная среды. Предложенные подходы используют обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ) для получения макроскопической модели на грубой вычислительной сетке, которая не разрешает мелкие масштабы и контраст. Для описания мелких масштабов используется несколько многомасштабных базисных функций, представляющих собой несколько макроскопических параметров. Полученная макроскопическая модель похожа на многоконтинуальную модель, поскольку она содержит несколько макроскопических параметров в каждой макроскопической точке. Численные результаты показали, что используя несколько многомасштабных базисных функций (т.е. макроскопических параметров), можно добиться хорошей точности.

Заключение

Диссертационная работа посвящена численной реализации многомасштабных моделей некоторых многофизичных процессов с упругими деформациями в неоднородных средах. В работе получены следующие основные результаты:

- Предложены офлайн и онлайн многомасштабные алгоритмы на основе обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задачи термоупругости с фазовым переходом.
 В математической модели деформации грунта происходят из-за роста пористости, вызванного разницей плотности льда и воды. Многомасштабные подходы хорошо аппроксимируют мелкосеточное решение с меньшим числом степеней свободы. Онлайн подход позволяет добиться лучшей точности, так как учитывает изменения неоднородности, вызванные фазовым переходом.
- Предложен многомасштабный алгоритм на основе обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задачи термопороупругости в неоднородных и неоднородных трещиновато-пористых средах. Математическая модель описывается связанной системой уравнений для давления, температуры и перемещений. Для описания трещин применялась модель дискретных трещин. Многомасштабные базисные функции строились по отдельности для каждого поля решения. Численные результаты показывают, что предложенный многомасштабный подход может обеспечить хорошую точность при малом числе степеней свободы.
- Предложен многомасштабный алгоритм на основе обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с расщепленными и связанными базисными функциями для пьезокомпозитов. Математическая модель описывается системой связанных дифференциальных уравнений с частными производными для механических перемещений и электрического потенциала. Рассмотрены расщепленный и связанный способы построения многомасштабных базисных функций. Для проверки предложенных многомасштабных подходов были рассмотрены два случая неоднородных сред: композитный и стохастически неоднородный. Численные результаты показывают, что оба вида базисных функций позволяют добиться хорошей аппроксимации мелкомасштабного решения. Связанные базисные функции в среднем дают лучшую точность вследствие учета взаимовлияния перемещений и электрического потенциала.
- Предложен многомасштабный алгоритм на основе обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с расщепленными и связанными базисными функциями для неоднород-

ной упругой среды Коссера. Математическая модель описывается системой дифференциальных уравнений для перемещений и микровращения. Рассмотрены алгоритмы расщепленного и связанного построения многомасштабных базисных функций. Проверка точности многомасштабных подходов проведена на модельных задачах на перфорированной, композитной, стохастически неоднородной средах. Результаты показали, что оба многомасштабных подхода позволяют добиться хорошей точности при меньшем числе степеней свободы. Связанные базисные функции дают более точные результаты вследствие учета взаимовлияния перемещений и микровращения.

Литература

- Dunn, M. L. An analysis of piezoelectric composite materials containing ellipsoidal inhomogeneities / M. L. Dunn, M. Taya // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. — 1993. — V. 443, No. 1918. — Pp. 265–287.
- Shi, C. An analysis of the ground deformation caused by shield tunnel construction combining an elastic half-space model and stochastic medium theory / C. Shi, C. Cao, M. Lei // KSCE Journal of Civil Engineering. 2017. V. 21. Pp. 1933–1944.
- Petroleum related rock mechanics / E. Fjaer, R. M. Holt, P. Horsrud, A. M. Raaen. Elsevier, 2008.
- Numerical models for ground deformation and gravity changes during volcanic unrest: simulating the hydrothermal system dynamics of a restless caldera / A. Coco, J. Gottsmann, F. Whitaker [et al.] // Solid Earth. — 2016. — V. 7, No. 2. — Pp. 557–577.
- On the influence of a geothermal system on ground deformation during a volcanic eruption / G. Zarin, O. Melnik, Y. D. Tsvetkova, A. Afanasyev // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* — 2016. — V. 57. — Pp. 1151–1158.
- Afanasyev, A. Modelling ground displacement and gravity changes with the MUFITS simulator / A. Afanasyev, I. Utkin // Advances in Geosciences. — 2020. — V. 54. — Pp. 89–98.
- Lazarev, N. Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition / N. Lazarev, E. Rudoy // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2014. — V. 94, No. 9. — Pp. 730–739.
- Lazarev, N. Existence of an optimal size of a rigid inclusion for an equilibrium problem of a Timoshenko plate with Signorini-type boundary condition / N. Lazarev, T. Popova, G. Semenova // Journal of Inequalities and Applications. — 2016. — V. 2016, No. 1. — Pp. 1–13.
- Chugainova, A. Longitudinal and torsional shock waves in anisotropic elastic cylinders / A. Chugainova, A. Kulikovskii // Zeitschrift f
 ür angewandte Mathematik und Physik. — 2020. — V. 71. — Pp. 1–15.
- Куликовский, А. Структуры разрывов в решениях уравнений, описывающих продольнокрутильные волны в упругих стержнях / А. Куликовский, А. Чугайнова // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. — 2021. — Т. 497, № 1. — С. 49–52.

- Chugainova, A. Structures of longitudinal-torsional shock waves and special discontinuities in nonlinearly viscoelastic media with dispersion / A. Chugainova, A. Kulikovskii // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2023. — Pp. 1–15.
- Chugainova, A. Stability of shock wave structures in nonlinear elastic media / A. Chugainova, A. Il'ichev, V. Shargatov // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2019. — V. 24, No. 11. — Pp. 3456–3471.
- 13. Coussy, O. Poromechanics / O. Coussy. John Wiley & Sons, 2004.
- Murakami, Y. Theory of elasticity and stress concentration / Y. Murakami. John Wiley & Sons, 2016.
- Vabishchevich, P. N. Splitting scheme for poroelasticity and thermoelasticity problems / P. N. Vabishchevich, M. V. Vasil'eva, A. E. Kolesov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — V. 54, No. 8. — Pp. 1305–1315.
- Smith, D. W. Green's functions for a fully coupled thermoporoelastic material / D. W. Smith,
 J. R. Booker // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. —
 1993. V. 17, No. 3. Pp. 139–163.
- Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package / T. E. Gerasimenko, N. V. Kurbatova, D. K. Nadolin [et al.] // Advanced Structured Materials. — 2019. — V. 109. — Pp. 113–131.
- Finite element approach for composite magneto-piezoelectric materials modeling in ACELAN-COMPOS package / N. V. Kurbatova, D. K. Nadolin, A. V. Nasedkin [et al.] // Advanced Structured Materials. — 2018. — V. 81. — Pp. 69–88.
- Il'ichev, A. T. Unsteady Flows in Deformable Pipes: The Energy Conservation Law / A. T. Il'ichev,
 S. I. Sumskoi, V. A. Shargatov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2018. —
 V. 300. Pp. 68–77.
- Kolesov, A. E. Numerical solution of thermoporoelasticity problems / A. E. Kolesov,
 P. N. Vabishchevich // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2017. V. 10187 LNCS. Pp. 422–429.

- Kim, J. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Fixedstress and fixed-strain splits / J. Kim, H. A. Tchelepi, R. Juanes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2011. — V. 200, No. 13-16. — Pp. 1591–1606.
- 22. Самарский, А. Аддитивные схемы для задач математической физики. 2001.
- 23. Kelley, C. T. Solving nonlinear equations with Newton's method / C. T. Kelley. SIAM, 2003.
- Madzvamuse, A. Fully implicit time-stepping schemes and non-linear solvers for systems of reaction-diffusion equations / A. Madzvamuse, A. H. Chung // Applied Mathematics and Computation. — 2014. — V. 244. — Pp. 361–374.
- Mathematical modeling of heat transfer problems in the permafrost / V. Gornov, S. Stepanov,
 M. Vasilyeva, V. Vasilyev // AIP Conference Proceedings / American Institute of Physics. —
 V. 1629. 2014. Pp. 424–431.
- Topolov, V. Y. Piezo-Active Composites: Microgeometry–Sensitivity Relations / V. Y. Topolov, C. R. Bowen, P. Bisegna. — Springer, 2018. — V. 271.
- Brown, D. L. A Generalized Multiscale Finite Element Method for poroelasticity problems I: Linear problems / D. L. Brown, M. Vasilyeva // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. V. 294. Pp. 372–388.
- Papanicolau, G. Asymptotic analysis for periodic structures / G. Papanicolau, A. Bensoussan, J.-L. Lions. — Elsevier, 1978.
- Lipton, R. Homogenization and field concentrations in heterogeneous media / R. Lipton // SIAM journal on mathematical analysis. 2006. V. 38, No. 4. Pp. 1048–1059.
- Жиков, В. В. Усреднение дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов,
 О. А. Олейник. Издательская фирма Физико-математическая литература, 1993.
- Durlofsky, L. J. Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media / L. J. Durlofsky // Water resources research. 1991. V. 27, No. 5. Pp. 699–708.
- *Efendiev, Y.* Numerical homogenization of nonlinear random parabolic operators / Y. Efendiev,
 A. Pankov // *Multiscale Modeling & Simulation.* 2004. V. 2, No. 2. Pp. 237–268.

- 33. *Hou, T. Y.* A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media / T. Y. Hou, X.-H. Wu // *Journal of computational physics*. 1997. V. 134, No. 1. Pp. 169–189.
- *Efendiev, Y.* Multiscale finite element methods: theory and applications / Y. Efendiev, T. Y. Hou. Springer Science & Business Media, 2009. — V. 4.
- 35. *Рубинштейн, Л.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах / Л. Рубинштейн // Изв. АН СССР. Сер. геогр. — 1948. — Т. 12, № 1. — С. 27–45.
- 36. Баренблатт, Г. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г. Баренблатт, Ю. Желтов, И. Кочина // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.
- Arbogast, T. Derivation of the Double Porosity Model of Single Phase Flow via Homogenization Theory / T. Arbogast, J. Douglas Jim, U. Hornung // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1990. — V. 21, No. 4. — Pp. 823–836.
- Showalter, R. Micro-structure models of diffusion in fissured media / R. Showalter, N. Walkington // Journal of mathematical analysis and applications. — 1991. — V. 155, No. 1. — Pp. 1–20.
- 39. *Efendiev, Y.* Multicontinuum homogenization and its relation to nonlocal multicontinuum theories /
 Y. Efendiev, W. T. Leung // *Journal of Computational Physics.* 2023. V. 474. P. 111761.
- 40. *Efendiev, Y.* Generalized multiscale finite element methods (GMsFEM) / Y. Efendiev, J. Galvis,
 T. Y. Hou // *Journal of Computational Physics.* 2013. V. 251. Pp. 116–135.
- 41. *Chung, E. T.* Generalized multiscale finite element method for elasticity equations / E. T. Chung,
 Y. Efendiev, S. Fu // *GEM-International Journal on Geomathematics.* 2014. V. 5, No. 2. —
 Pp. 225–254.
- Generalized multiscale finite-element method (GMsFEM) for elastic wave propagation in heterogeneous, anisotropic media / K. Gao, S. Fu, R. L. Gibson Jr [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2015. — V. 295. — Pp. 161–188.
- 43. Generalized multiscale finite element methods for problems in perforated heterogeneous domains /
 E. T. Chung, Y. Efendiev, G. Li, M. Vasilyeva // *Applicable Analysis*. 2016. V. 95, No. 10. —
 Pp. 2254–2279.

- 44. Vasilyeva, M. A generalized multiscale finite element method for thermoelasticity problems / M. Vasilyeva, D. Stalnov // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2017. V. 10187 LNCS. Pp. 713–720.
- Multiscale modeling of heat and mass transfer in fractured media for enhanced geothermal systems applications / M. Vasilyeva, M. Babaei, E. T. Chung, D. Spiridonov // Applied Mathematical Modelling. 2019. V. 67. Pp. 159–178.
- 46. Tyrylgin, A. Embedded fracture model in numerical simulation of the fluid flow and geo-mechanics using Generalized Multiscale Finite Element Method / A. Tyrylgin, M. Vasilyeva, E. T. Chung // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — V. 1392, No. 1.
- 47. *Chung, E. T.* Residual-driven online generalized multiscale finite element methods / E. T. Chung,
 Y. Efendiev, W. T. Leung // *Journal of Computational Physics*. 2015. V. 302. Pp. 176–190.
- Nikiforov, D. Meshfree Generalized Multiscale Finite Element Method / D. Nikiforov // Journal of Computational Physics. — 2023. — V. 474. — P. 111798.
- 49. Chung, E. T. Constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method / E. T. Chung, Y. Efendiev, W. T. Leung // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2018. V. 339. Pp. 298–319.
- 50. Non-local multi-continua upscaling for flows in heterogeneous fractured media / E. T. Chung,
 Y. Efendiev, W. T. Leung [et al.] // Journal of Computational Physics. 2018. V. 372. —
 Pp. 22–34.
- Muravleva, E. Application of machine learning to viscoplastic flow modeling / E. Muravleva,
 I. Oseledets, D. Koroteev // Physics of Fluids. 2018. V. 30, No. 10. P. 103102.
- Garcia-Teijeiro, X. Combined Machine-Learning and Finite-Element Approach for Multiscale 3D Stress Modeling / X. Garcia-Teijeiro, A. Rodriguez-Herrera // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. — 2021. — V. 24, No. 04. — Pp. 827–846.
- Machine learning methods for prediction of breakthrough curves in reactive porous media / D. Fokina, P. Toktaliev, O. Iliev, I. Oseledets // arXiv preprint arXiv:2301.04998. — 2023.

- Vasilyeva, M. Convolutional neural network for fast prediction of the effective properties of domains with random inclusions / M. Vasilyeva, A. Tyrylgin // Journal of Physics: Conference Series / IOP Publishing. — V. 1158. — 2019. — P. 042034.
- 55. Learning macroscopic parameters in nonlinear multiscale simulations using nonlocal multicontinua upscaling techniques / M. Vasilyeva, W. T. Leung, E. T. Chung [et al.] // Journal of Computational Physics. 2020. V. 412. P. 109323.
- Vasilyeva, M. Machine learning for accelerating macroscopic parameters prediction for poroelasticity problem in stochastic media / M. Vasilyeva, A. Tyrylgin // Computers & Mathematics with Applications. — 2021. — V. 84. — Pp. 185–202.
- 57. Stepanov, S. Prediction of numerical homogenization using deep learning for the Richards equation / S. Stepanov, D. Spiridonov, T. Mai // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023.
 V. 424. P. 114980.
- 58. Prediction of discretization of gmsfem using deep learning / M. Wang, S. W. Cheung, E. T. Chung [et al.] // *Mathematics.* — 2019. — V. 7, No. 5. — P. 412.
- Coupling of multiscale and multi-continuum approaches / E. T. Chung, Y. Efendiev, T. Leung, M. Vasilyeva // *GEM-International Journal on Geomathematics*. — 2017. — V. 8. — Pp. 9–41.
- Spiridonov, D. Generalized Multiscale Finite Element method for multicontinua unsaturated flow problems in fractured porous media / D. Spiridonov, M. Vasilyeva, E. T. Chung // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2020. — V. 370. — P. 112594.
- 61. Multiscale simulations for upscaled multi-continuum flows / J. S. R. Park, S. W. Cheung, T. Mai,
 V. H. Hoang // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. V. 374. —
 P. 112782.
- 62. Park, J. S. R. Multiscale simulations for multi-continuum Richards equations / J. S. R. Park, S. W. Cheung, T. Mai // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. V. 397. P. 113648.
- 63. Multiscale model reduction for transport and flow problems in perforated domains / E. T. Chung,
 W. T. Leung, M. Vasilyeva, Y. Wang // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. —
 2018. V. 330. Pp. 519–535.

- Geuzaine, C. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and postprocessing facilities / C. Geuzaine, J.-F. Remacle // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2009. — V. 79, No. 11. — Pp. 1309–1331.
- 65. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method / A. Logg, K.-A. Mardal,G. N. Wells, Others. Springer, 2012.
- 66. A coupled dual continuum and discrete fracture model for subsurface heat recovery with thermoporoelastic effects / D. A. Ammosov, M. V. Vasilyeva, M. Babaei, E. T. Chung // Mathematical Notes of NEFU. — 2019. — V. 29, No. 1. — Pp. 94–106.
- 67. Splitting schemes for the thermoporoelasticity problem in fractured media / D. A. Ammosov,
 M. V. Vasilyeva, M. Babaei, E. T. Chung // Mathematical Notes of NEFU. 2019. V. 26, No. 4.
 Pp. 98–118.
- Vasilyeva, M. Finite element simulation of thermo-mechanical model with phase change / M. Vasilyeva, D. Ammosov, V. Vasil'ev // Computation. 2021. V. 9, No. 1. P. 5.
- 69. Online Coupled Generalized Multiscale Finite Element Method for the Poroelasticity Problem in Fractured and Heterogeneous Media / A. Tyrylgin, M. Vasilyeva, D. Ammosov [et al.] // *Fluids.* 2021. V. 6, No. 8. P. 298.
- 70. Multiscale model reduction for a thermoelastic model with phase change using a generalized multiscale finite-element method / D. Ammosov, V. Vasil'ev, M. Vasil'eva, S. Stepanov // *Theoretical and Mathematical Physics.* 2022. V. 211, No. 2. Pp. 595–610.
- 71. Generalized multiscale finite element method for piezoelectric problem in heterogeneous media / D. Ammosov, M. Vasilyeva, A. Nasedkin, Y. Efendiev // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2022. V. 135. Pp. 12–25.
- Ammosov, D. Generalized Multiscale Finite Element Method for thermoporoelasticity problems in heterogeneous and fractured media / D. Ammosov, M. Vasilyeva, E. T. Chung // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2022. — V. 407. — P. 113995.
- 73. Generalized macroscale model for Cosserat elasticity using Generalized Multiscale Finite Element Method / D. Ammosov, Y. Efendiev, E. Grekova, M. Vasilyeva // *Journal of Computational Physics*. — 2022. — V. 461. — P. 111011.

- Partial Learning Using Partially Explicit Discretization for Multicontinuum/Multiscale Problems with Limited Observation: Dual Continuum Heterogeneous Poroelastic Media Simulation / A. Tyrylgin, S. Stepanov, D. Ammosov [et al.] // Mathematics. — 2022. — V. 10, No. 15. — P. 2629.
- 75. Partial learning using partially explicit discretization for multicontinuum/multiscale problems. Fractured poroelastic media simulation / D. Ammosov, A. Grigorev, S. Stepanov, A. Tyrylgin // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2023. — V. 424. — P. 115003.
- 76. *Ammosov, D.* Online Multiscale Finite Element Simulation of Thermo-Mechanical Model with Phase Change / D. Ammosov, M. Vasilyeva // *Computation.* 2023. V. 11, No. 4. P. 71.
- 77. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Вычислительная библиотека для многомасштабного моделирования задачи термоупругости с фазовым переходом / Д. А. Аммосов, М. В. Васильева; СВФУ. №2021680993; опубл. 16.12.2021.
- 78. Xu, G. Model test study on influence of freezing and thawing on the crude oil pipeline in cold regions / G. Xu, J. Qi, H. Jin // Cold regions science and technology. 2010. V. 64, No. 3. Pp. 262–270.
- 79. *Zhou, M.* A three-phase thermo-hydro-mechanical finite element model for freezing soils / M. Zhou,
 G. Meschke // *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics.* 2013.
 V. 37, No. 18. Pp. 3173–3193.
- Sweidan, A. H. A unified water/ice kinematics approach for phase-field thermo-hydro-mechanical modeling of frost action in porous media / A. H. Sweidan, Y. Heider, B. Markert // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. V. 372. P. 113358.
- Nixon, J. Effect of climatic warming on pile creep in permafrost / J. Nixon // Journal of cold regions engineering. — 1990. — V. 4, No. 1. — Pp. 67–73.
- 82. *Foriero, A.* Finite element simulation of behavior of laterally loaded piles in permafrost / A. Foriero,
 B. Ladanyi // *Journal of geotechnical engineering.* 1990. V. 116, No. 2. Pp. 266–284.
- A novel refrigerant system to reduce refreezing time of cast-in-place pile foundation in permafrost regions / Y. Shang, F. Niu, X. Wu, M. Liu // *Applied Thermal Engineering*. — 2018. — V. 128. — Pp. 1151–1158.
- Jessberger, H. L. Theory and application of ground freezing in civil engineering / H. L. Jessberger // Cold Regions Science and Technology. — 1980. — V. 3, No. 1. — Pp. 3–27.

- 85. Harris, J. S. Ground freezing in practice / J. S. Harris. Thomas Telford, 1995.
- Andersland, O. B. Frozen ground engineering / O. B. Andersland, B. Ladanyi. John Wiley & Sons, 2003.
- 87. *Zhang, Y.* Thermal-Hydro-Mechanical Model for Freezing and Thawing of Soils.: Ph.D. thesis. 2014.
- 88. *Zhang, Y.* Thermal-hydro-mechanical analysis of frost heave and thaw settlement / Y. Zhang,
 R. L. Michalowski // *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering.* 2015. V. 141, No. 7. P. 04015027.
- Thermo-hydro-mechanical modeling of artificial ground freezing: application in mining engineering / H. Tounsi, A. Rouabhi, M. Tijani, F. Guérin // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2019. V. 52, No. 10. Pp. 3889–3907.
- 90. A novel simple practical thermal-hydraulic-mechanical (THM) coupling model with water-ice phase change / G. Li, N. Li, Y. Bai [et al.] // *Computers and Geotechnics.* 2020. V. 118. P. 103357.
- Suh, H. S. Multi-phase-field microporomechanics model for simulating ice-lens growth in frozen soil / H. S. Suh, W. Sun // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. — 2022.
- 92. Multiscale Finite Element Method for heat transfer problem during artificial ground freezing / M. Vasilyeva, S. Stepanov, D. Spiridonov, V. Vasil'ev // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. V. 371. P. 112605.
- 93. Spiridonov, D. An Online Generalized Multiscale finite element method for heat and mass transfer problem with artificial ground freezing / D. Spiridonov, S. Stepanov [et al.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2023. — V. 417. — P. 114561.
- 94. *Michalowski, R. L.* Frost heave modelling using porosity rate function / R. L. Michalowski, M. Zhu // *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics.* — 2006. — V. 30, No. 8. — Pp. 703–722.
- 95. Online adaptive local multiscale model reduction for heterogeneous problems in perforated domains / E. T. Chung, Y. Efendiev, W. T. Leung [et al.] // Applicable Analysis. 2017. V. 96, No. 12. Pp. 2002–2031.

- Ghassemi, A. Effects of heat extraction on fracture aperture: A poro-thermoelastic analysis / A. Ghassemi, A. Nygren, A. Cheng // Geothermics. 2008. V. 37, No. 5. Pp. 525–539.
- 97. *Ghassemi, A.* A three-dimensional thermo-poroelastic model for fracture response to injection/extraction in enhanced geothermal systems / A. Ghassemi, X. Zhou // *Geothermics.* 2011.
 V. 40, No. 1. Pp. 39–49.
- 98. Palciauskas, V. V. Domenico, P. A. Characterization of drained and undrained response of thermally loaded repository rocks / P. A. Palciauskas, V. V. Domenico // Water Resources Research. 1982.
 V. 18, No. 2. Pp. 281–290.
- 99. Smith, D. W. Boundary element analysis of linear thermoelastic consolidation / D. W. Smith,
 J. R. Booker // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. —
 1996. V. 20, No. 7. Pp. 457–488.
- 100. Chen, G. Thermoporoelastic Effect on Wellbore Stability / G. Chen, R. T. Ewy // SPE Journal. —
 2005. V. 10, No. 02. Pp. 121–129.
- Tao, Q. Poro-thermoelastic borehole stress analysis for determination of the in situ stress and rock strength / Q. Tao, A. Ghassemi // *Geothermics.* — 2010. — V. 39, No. 3. — Pp. 250–259.
- 102. Bear, J. A mathematical model for consolidation in a thermoelastic aquifer due to hot water injection or pumping / J. Bear, M. Y. Corapcioglu // Water Resources Research. — 1981. — V. 17, No. 3. — Pp. 723–736.
- 103. Kurashige, M. A thermoelastic theory of fluid-filled porous materials / M. Kurashige // International Journal of Solids and Structures. — 1989. — V. 25, No. 9. — Pp. 1039–1052.
- 104. Warren, J. E. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs / J. E. Warren, P. J. Root // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1963. — V. 3, No. 03. — Pp. 245–255.
- 105. Martin, V. Modeling Fractures and Barriers as Interfaces for Flow in Porous Media / V. Martin,
 J. Jaffré, J. E. Roberts // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. V. 26, No. 5. —
 Pp. 1667–1691.
- 106. Dimensionally reduced flow models in fractured porous media: crossings and boundaries / N. Schwenck, B. Flemisch, R. Helmig, B. I. Wohlmuth // *Computational Geosciences*. 2015. V. 19, No. 6. Pp. 1219–1230.

- Lee, S. H. An Efficient Finite Difference Model For Flow In a Reservoir With Multiple Length-Scale Fractures. — 1999.
- 108. Lee, S. H. Hierarchical modeling of flow in naturally fractured formations with multiple length scales / S. H. Lee, M. F. Lough, C. L. Jensen // Water Resources Research. — 2001. — V. 37, No. 3. — Pp. 443–455.
- 109. Li, L. Efficient Field-Scale Simulation of Black Oil in a Naturally Fractured Reservoir Through Discrete Fracture Networks and Homogenized Media / L. Li, S. H. Lee // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. — 2008. — V. 11, No. 04. — Pp. 750–758.
- Noorishad, J. An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media / J. Noorishad, M. Mehran // Water Resources Research. — 1982. — V. 18, No. 3. — Pp. 588–596.
- 111. Baca, R. G. Modelling fluid flow in fractured-porous rock masses by finite-element techniques / R. G. Baca, R. C. Arnett, D. W. Langford // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1984. V. 4, No. 4. Pp. 337–348.
- Karimi-Fard, M. An Efficient Discrete Fracture Model Applicable for General Purpose Reservoir Simulators. — 2003.
- 113. Mathematical modeling of the fluid flow and geo-mechanics in the fractured porous media using generalized multiscale finite element method / A. Tyrylgin, M. Vasilyeva, Q. Zhang [et al.] // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 2025.
- 114. *Tyrylgin, A.* Generalized Multiscale Finite Element Method for Poroelasticity Problems in Heterogeneous Media BT Finite Difference Methods. Theory and Applications / A. Tyrylgin, M. Vasilyeva, D. Brown / Ed. by I. Dimov, I. Faragó, L. Vulkov. Cham: Springer International Publishing, 2019. Pp. 566–573.
- 115. Generalized Multiscale Finite Element Method for the poroelasticity problem in multicontinuum media / A. Tyrylgin, M. Vasilyeva, D. Spiridonov, E. T. Chung // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2020. — V. 374. — P. 112783.
- 116. Tambue, A. Efficient simulation of geothermal processes in heterogeneous porous media based on the exponential Rosenbrock–Euler and Rosenbrock-type methods / A. Tambue, I. Berre, J. M. Nordbotten // Advances in water resources. — 2013. — V. 53. — Pp. 250–262.

- 117. Mercadelli, E. Porous piezoelectric ceramics / E. Mercadelli, A. Sanson, C. Galassi. INTECH Open Access Publisher, 2010.
- 118. Development of porous piezoceramics for medical and sensor applications / E. Ringgaard,
 F. Lautzenhiser, L. M. Bierregaard [et al.] // *Materials.* 2015. V. 8, No. 12. Pp. 8877–8889.
- 119. *Rybyanets, A.* Porous ceramic and piezocomposites: Modeling, technology, and characterization /
 A. Rybyanets // Advances in Porous Ceramics. 2016. Pp. 53–109.
- 120. Deng, M.-x. Two-scale finite element method for piezoelectric problem in periodic structure / M.-x. Deng, Y.-p. Feng // Applied Mathematics and Mechanics. 2011. V. 32, No. 12. Pp. 1525–1540.
- 121. Newnham, R. Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites / R. Newnham, D. Skinner,
 L. Cross // Materials Research Bulletin. 1978. V. 13, No. 5. Pp. 525–536.
- Nemat-Nasser, S. Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials / S. Nemat-Nasser, M. Hori. — Elsevier, 1993.
- 123. Computational homogenization of fibrous piezoelectric materials / C. Maruccio, L. De Lorenzis,
 L. Persano, D. Pisignano // *Computational Mechanics*. 2015. V. 55, No. 5. Pp. 983–998.
- 124. Homogenization of porous piezoelectric materials / G. Martínez-Ayuso, M. I. Friswell, S. Adhikari [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2017. — V. 113-114. — Pp. 218–229.
- 125. An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites / H. Berger, S. Kari, U. Gabbert [et al.] // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42, No. 21-22. Pp. 5692–5714.
- 126. Wenbin, Y. SwiftComp. 2020.
- 127. DIGIMAT User Manual. Release 5 edition. MSC Software Company, 2014.
- Iyer, S. Electromechanical response of porous piezoelectric materials: Effects of porosity connectivity / S. Iyer, T. Venkatesh // Applied Physics Letters. 2010. V. 97, No. 7. P. 072904.
- 129. *Iyer, S.* Electromechanical response of (3–0, 3–1) particulate, fibrous, and porous piezoelectric composites with anisotropic constituents: A model based on the homogenization method / S. Iyer, T. Venkatesh // *International Journal of Solids and Structures.* 2014. V. 51, No. 6. Pp. 1221–1234.

- 130. Application of multi-scale modelling to some elastic, piezoelectric and electromagnetic composites /
 B. Miara, E. Rohan, G. Griso [et al.] // *Mechanics of advanced materials and structures*. 2007.
 V. 14, No. 1. Pp. 33–42.
- 131. A new multiscale computational method for electromechanically coupled analysis of heterogeneous piezoelectric composites / J. Lv, H. Zhang, X. Gao, Y. Huang // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. — 2015. — V. 26, No. 4. — Pp. 434–449.
- 132. Multiscale finite element simulations of piezoelectric materials based on two-and three-dimensional electron backscatter diffraction-measured microstructures / Y. Uetsuji, S. Kimura, H. Kuramae [et al.] // Journal of intelligent material systems and structures. 2012. V. 23, No. 5. Pp. 563–573.
- 133. Uetsuji, Y. Optimization of crystal microstructure in piezoelectric ceramics by multiscale finite element analysis / Y. Uetsuji, M. Horio, K. Tsuchiya // Acta materialia. 2008. V. 56, No. 9. Pp. 1991–2002.
- Parton, V. Z. Electromagnetoelasticity: piezoelectrics and electrically conductive solids / V. Z. Parton, B. A. Kudryavtsev. Taylor & Francis, 1988.
- 135. Berlincourt, D. A. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers / D. A. Berlincourt, D. R. Curran, H. Jaffe // Physical Acoustics: Principles and Methods. 1964. V. 1, No. Part A. P. 247.
- 136. *Dieulesaint, E.* Elastic waves in solids: applications to signal processing / E. Dieulesaint, D. Royer.
 John Wiley & Sons, 1980.
- 137. Parton, V. Applied Mechanics: Soviet Reviews. Vol. 2: Electromagnetoelasticity. 1989.
- 138. Lee, J. S. Boundary element method for electroelastic interaction in piezoceramics / J. S. Lee // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 1995. — V. 15, No. 4. — Pp. 321–328.
- Lee, J. D. Continuum theory of smectic liquid crystals / J. D. Lee, A. C. Eringen // The Journal of Chemical Physics. — 1973. — V. 58, No. 10. — Pp. 4203–4211.
- 140. Besdo, D. Inelastic behaviour of plane frictionless block-systems described as Cosserat media / D. Besdo // Arch. Mech. 1985. V. 37, No. 6. Pp. 603–619.
- 141. Onck, P. R. Cosserat modeling of cellular solids / P. R. Onck // Comptes Rendus Mécanique. —
 2002. V. 330, No. 11. Pp. 717–722.

- 142. Mixed FEM-crushable DEM nested scheme in second-order computational homogenization for granular materials / X. Li, Z. Wang, Y. Liang, Q. Duan // International Journal of Geomechanics.
 2016. V. 16, No. 5. P. C4016004.
- 143. Lagerwall, J. P. F. A new era for liquid crystal research: Applications of liquid crystals in soft matter nano-, bio- and microtechnology / J. P. F. Lagerwall, G. Scalia // Current Applied Physics. 2012. V. 12, No. 6. Pp. 1387–1412.
- 144. de Gennes, P.-G. Granular matter: a tentative view / P.-G. de Gennes // Reviews of modern physics.
 1999. V. 71, No. 2. P. S374.
- 145. *Gibson, L. J.* Cellular Solids / L. J. Gibson // MRS Bulletin. 2003. V. 28, No. 4. Pp. 270–274.
- 146. Forest, S. Asymptotic analysis of heterogeneous Cosserat media / S. Forest, F. Pradel, K. Sab // International Journal of Solids and Structures. — 2001. — V. 38, No. 26. — Pp. 4585–4608.
- 147. Kouznetsova, V. Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy / V. Kouznetsova, M. G. Geers, W. Brekelmans // Computer methods in applied Mechanics and Engineering. — 2004. — V. 193, No. 48-51. — Pp. 5525–5550.
- 148. Chang, C. S. On virtual work and stress in granular media / C. S. Chang, M. R. Kuhn // International Journal of Solids and Structures. — 2005. — V. 42, No. 13. — Pp. 3773–3793.
- 149. Li, X. A micro-macro homogenization approach for discrete particle assembly Cosserat continuum modeling of granular materials / X. Li, Q. Liu, J. Zhang // International Journal of Solids and Structures. — 2010. — V. 47, No. 2. — Pp. 291–303.
- Li, X. Micro-macro homogenization of gradient-enhanced Cosserat media / X. Li, J. Zhang,
 X. Zhang // European Journal of Mechanics A/Solids. 2011. V. 30, No. 3. Pp. 362–372.
- 151. Forest, S. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials / S. Forest, K. Sab // Mechanics Research Communications. — 1998. — V. 25, No. 4. — Pp. 449–454.
- 152. Forest, S. Estimating the overall properties of heterogeneous Cosserat materials / S. Forest,
 R. Dendievel, G. R. Canova // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. —
 1999. V. 7, No. 5. P. 829.
- 153. Yuan, X. Effective properties of cosserat composites with periodic microstructure / X. Yuan, Y. Tomita // Mechanics Research Communications. — 2001. — V. 28, No. 3. — Pp. 265–270.

- 154. Providas, E. Finite element method in plane Cosserat elasticity / E. Providas, M. Kattis // Computers
 & structures. 2002. V. 80, No. 27-30. Pp. 2059–2069.
- 155. Atroshchenko, E. Fundamental solutions and dual boundary element methods for fracture in plane Cosserat elasticity / E. Atroshchenko, S. P. Bordas // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2015. — V. 471, No. 2179. — P. 20150216.
- 156. Kaloni, P. N. Stress concentration effects in micropolar elasticity / P. N. Kaloni, T. Ariman // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. — 1967. — V. 18, No. 1. — Pp. 136– 141.
- 157. *Gauthier, R. D.* A Quest for Micropolar Elastic Constants / R. D. Gauthier, W. E. Jahsman // Journal of Applied Mechanics. 1975. V. 42, No. 2. Pp. 369–374.

Приложение А

Свидетельство о государственной регистрации программы для

ЭВМ

