

На правах рукописи



Никифоров Дьулустан Яковлевич

Многомасштабный метод на неструктурированных сетках для решения задач в неоднородных средах

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2023

Работа выполнена на кафедре вычислительных технологий Института математики и информатики и в ЯО РНОМЦ «Дальневосточный центр математических исследований» ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова».

Научный руководитель: **Ялчин Эфендиев,**
PhD, профессор, ведущий научный сотрудник
МНИЛ «Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления» Института математики и информатики СВФУ

Официальные оппоненты: **Наседкин Андрей Викторович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического моделирования Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ

Власов Александр Николаевич,
доктор технических наук, директор Института прикладной механики РАН

Ведущая организация: ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр СО РАН»

Защита состоится «19» апреля 2023 года в «16:30» часов на заседании диссертационного совета 24.2.396.02 на базе СВФУ им. М.К. Аммосова по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, д. 42, Библиотека ГУК, зал «Синергия».

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СВФУ им. М.К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58 и на сайте университета по адресу <https://www.s-vfu.ru>

Автореферат разослан «_____» _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н.



Степанов С.П.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Многие задачи, возникающие в связи с различными физическими и инженерными приложениями, имеют многомасштабный характер. Большие различия в пространственном и временном масштабах создают проблемы в адекватном представлении физических процессов естествознания. Из-за наличия мелких неоднородностей и неопределенностей, в этих задачах прямое моделирование затруднительно даже с появлением суперкомпьютеров. Следовательно, возникает необходимость в разработке новых вычислительных методов для расчёта на грубых вычислительных сетках на основе методов усреднения и многомасштабных методов.

Метод усреднения является одним из классических методов аппроксимации на грубой сетке. Данный метод является незаменимым математическим инструментом в обеспечении понимания многомасштабных задач. Свой вклад в становлении и развитии метода усреднения внесли И. Бабушка, Н.С. Бахвалов, А. Бенсуссан, Д.Б. Келлер, С.М. Козлов, Ж.-Л. Лионс, В.А. Марченко, О.А. Олейник, Г.П. Панасенко, Г. Папаниколау. Различные приложения метода усреднения рассматривались многими авторами, среди которых А.Н. Власов, Н.А. Наседкин, А.Л. Пятницкий, Ф. Ротерс, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев, Я. Эфендиев и другие.

Многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ) берет свое начало от работ К.Х. Ву и Т.Ю. Хоу. Данные методы разработаны путем преобразования микромасштабной неоднородной информации в макромасштабные параметры для снижения вычислительной сложности моделирования различных процессов в сильно неоднородных средах. ММКЭ используют многоуровневую структуру решения с помощью локальных базисных функций. Дальнейшее развитие данный метод получил в работах Й.Э. Аарнеса, Х. Гальвиса, К.А. Ли, Я. Эфендиева и других.

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) считается одним из первых многомасштабных методов, который был предложен в работах Р.П. Федоренко и Л.Г. Страховской. Идея метода заключается в разбиении всей области моделирования на специальные конечные носители - суперэлементы, где базисные функции строятся как решения исходного уравнения со специальными краевыми условиями. В работах М.К. Галанина, В.Т. Жукова, А.Б. Мазо, Н.Д. Новиковой, К.А. Поташева, В.В. Репях, Е.Б. Савенкова показана эффективность

МКСЭ при решении разнообразных физических задач.

Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ), разработанный Х. Гальвисом, Т.Ю. Хоу и Я. Эфендиевым, является более универсальным методом, предусматривающим систематическую основу дополнения локальных многомасштабных пространств. Многомасштабные базисные функции могут улавливать влияние трещин и других неоднородностей на грубой сетке и существенно уменьшать количество неизвестных в расчетах. Различные приложения данного метода хорошо представлены в работах И.Ю. Аккутлу, М.В. Васильевой, Э.Т. Чуна, Я. Эфендиева и других.

Во многих задачах целесообразно локально сгущать элементы сетки в местах, представляющих вычислительный интерес. Такой подход значительно снижает нагрузку на ЭВМ по сравнению с равномерным измельчением сетки. Несмотря на многочисленные расширения многомасштабных методов, большинство из них применялось к структурированным грубым сеткам.

Целью диссертационной работы является разработка эффективных алгоритмов построения вычислительных сеток в обобщенном многомасштабном методе конечных элементов. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- разработка, реализация и исследование эффективных вычислительных алгоритмов построения неструктурированных сеток на грубом масштабе для обобщенного многомасштабного метода конечных элементов;
- разработка, реализация и исследование вычислительного алгоритма обобщенного многомасштабного метода, который использует бессеточный метод для построения многомасштабного пространства;
- применение и исследование вычислительного алгоритма бессеточного обобщенного многомасштабного метода для решения задачи теплопереноса с фазовыми переходами.

Научная новизна и практическая значимость полученных результатов заключаются в следующем:

- предложены алгоритмы обобщенного многомасштабного метода конечных элементов на квазиструктурированной и неструктурированной сетках на грубом масштабе для решения задачи фильтрации в трещиноватых средах;
- предложен алгоритм бессеточного обобщенного многомасштабного метода

конечных элементов для решения задачи фильтрации в трещиноватых средах;

- предложен алгоритм бессеточного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с дополнительными упрощенными базисными функциями для решения задачи теплопереноса в системе грунт-труба.

Проведённые численные расчёты имеют практическое значение в моделировании процессов фильтрации и теплопроводности в неоднородных средах.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе для решения задач фильтрации и теплопроводности применялись следующие методы: метод конечных элементов, модель дискретных трещин, бессеточный метод и обобщённый многомасштабный метод конечных элементов.

Положения выносимые на защиту:

- Для численного решения задачи фильтрации в трещиноватой среде обобщенным многомасштабным методом конечных элементов применены квазиструктурированные и неструктурированные расчетные сетки на грубом масштабе. Расчеты показали эффективность и гибкость предлагаемых алгоритмов.
- Применен бессеточный подход при построении многомасштабного пространства в обобщенном многомасштабном методе конечных элементов. На примере многомерной задачи фильтрации в трещиноватой среде показана высокая эффективность такого подхода.
- Для построения многомасштабного пространства бессеточным обобщенным многомасштабным методом был применен алгоритм ЦМВ (центральные мозаики Вороного), позволяющий сгущать грубые элементы в областях скопления неоднородностей. Проведенные численные исследования показывают заметное повышение точности вычислений.
- Предложен алгоритм построения дополнительных упрощенных базисных функций, которые повышают вычислительную точность бессеточного обобщенного многомасштабного метода для решения трехмерной задачи теплопереноса в системе грунт-труба с фазовыми переходами.

Обоснованность и достоверность результатов. В диссертационной работе использованы научные методы для обоснования полученных результатов и выводов. Все решения полученные многомасштабными методами сравнены с решениями полученными на эталонных сетках. Приведенные результаты чис-

ленных исследований прошли научное рецензирование в процессе публикации в ведущих отечественных и зарубежных научных журналах. Материалы работы докладывались на ведущих российских и международных конференциях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Международная конференция "Вычислительная и прикладная математика 2017", ИВМиМГ СО РАН, Академгородок, г. Новосибирск, 25.06.2017 - 30.06.2017;
- Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 30.07.2017 - 04.08.2017;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 08.08.2018 - 10.08.2018;
- Двенадцатая международная конференция "Сеточные методы для краевых задач и приложения", П(К)ФУ, г. Казань, 20.09.2018 - 25.09.2018;
- IV Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования", Математический институт им. В.А. Стеклова, г. Москва, 19.06.2019 - 21.06.2019;
- II Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 24.06.2019 - 25.06.2019;
- Всероссийская конференция "Применение цифровых технологий в промышленности, бизнесе и здравоохранении Республики Саха (Якутия)", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 23.12.2019 - 25.12.2019;
- IV Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Сочи, 08.09.2020 - 13.09.2020;
- Международная конференция "Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 18.07.2021-25.07.2021;
- Международная конференция "Марчуковские научные чтения 2021", ИВМиМГ СО РАН, Академгородок, г. Новосибирск, 04.10.2021 - 08.10.2021;
- V Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования", Математический институт им. В.А. Стеклова,

г. Москва, 27.06.2022 – 30.06.2022;

- V Всероссийская научная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Якутск, 05.09.2022 - 07.09.2022.

Помимо этого результаты обсуждались на научных семинарах кафедры «Вычислительные технологии» ИМИ СВФУ и ЯО РНОМЦ «Дальневосточный центр математических исследований».

Публикации. По теме диссертации опубликованы 9 научных работ – в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК (ВАК, Scopus, Web of Science) [1–9] и получены 4 свидетельства о государственной регистрации программ для электронных вычислительных машин [10–13].

Личный вклад автора. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [2, 3, 6–9] автор принимал участие в разработке и реализации вычислительных алгоритмов, проведении расчетов и анализа результатов вычислительных экспериментов; в работах [4, 5] диссертант принимал участие в постановке задачи, внес основной вклад в построении и реализации вычислительного алгоритма и участвовал в численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта в работах [4, 5] был определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем работы составляет 141 страниц с 47 рисунками и 12 таблицами. Список литературы содержит 145 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантом РНФ №17-01-00732 и Министерством науки и высшего образования РФ, соглашение от 02.02.2022 №075-02-2022-881.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и задачи исследования, кратко излагается содержание диссертации по главам.

В **первой главе** рассматривается численное моделирование процесса однофазной фильтрации в трещиноватой среде. Течение в трещинах моделируется явным образом с использованием МДТ (модель дискретных трещин). Аппроксимация уравнения в трещинах производится на одну пространственную размерность ниже. Представляются результаты численных исследований в двумерных и трехмерных постановках методом конечных элементов.

Рассматривается следующее параболическое уравнение, разрешенное относительно функции от давления p :

$$c \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p \right) = q, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где k – проницаемость среды, μ – вязкость жидкости, q – источник/сток, $c = \phi^0 c_R$, ϕ^0 – пористость при давлении $p = p_0$, а c_R – коэффициент сжимаемости пористой среды.

Уравнение (1) дополняется начальным условием и граничным условием второго рода

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= p_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где n – внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$.

Для аппроксимации по времени используется чисто неявная дискретизация, а для пространственной дискретизации методом конечных элементов ставится следующая вариационная задача: найти функцию $p \in V$, которая для $\forall v \in \hat{V}$ удовлетворяет уравнению $a(p^{n+1}, v) = L(v)$, где

$$\begin{aligned} a(p^{n+1}, v) &= \int_{\Omega} c \frac{p^{n+1}}{\tau} v dx + \int_{\Omega} \left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p^{n+1}, \operatorname{grad} v \right) dx, \\ L(v) &= \int_{\Omega} c \frac{p^n}{\tau} v dx + \int_{\Omega} q^n v dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $V = \{p(x) \in H^1(\Omega)\}$ – пространство пробных функций, $\hat{V} = \{v(x) \in H^1(\Omega)\}$ – пространство тестовых функций, $H^1(\Omega)$ – пространство Соболева, содержащее функции v такие, что величины v^2 и $|\nabla v|^2$ интегрируемы в Ω .

Подход МДТ основан на представлении трещин на неструктурированной сетке гранями элементов. В данном методе толщина трещин достаточно маленького размера, так что по ней давление почти не меняется, поэтому дискретизация трещин производится на один уровень ниже пространственной размерности задачи. Далее результат аппроксимации уравнений на трещинах добавляется в глобальную матрицу.

Таким образом, уравнение (1) дискретизируется в пространстве размерности $d = 2, 3$ для пористой среды и в $(d - 1)$ -мерном пространстве для трещин. При моделировании трещин вся область Ω представляется в виде $\Omega = \Omega_m \cup (\cup_i \gamma_i)$, где индекс m относится к пористой среде, а индекс i к γ_i трещине. Билинейная и линейная формы, которые соответствуют равенствам (2) с учетом наличия трещин, выглядят как

$$\begin{aligned} a(p^{n+1}, v) &= \int_{\Omega_m} c_m \frac{p^{n+1}}{\tau} v dx + \int_{\Omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \text{grad } p^{n+1}, \text{grad } v \right) dx + \\ &+ \sum_i \alpha_i \int_{\gamma_i} c_f \frac{p^{n+1}}{\tau} v dx + \sum_i \alpha_i \int_{\gamma_i} \left(\frac{k_f}{\mu} \text{grad } p^{n+1}, \text{grad } v \right) dx, \quad (3) \\ L(v) &= \int_{\Omega_m} c_m \frac{p^n}{\tau} v dx + \sum_i \alpha_i \int_{\gamma_i} c_f \frac{p^n}{\tau} v dx + \int_{\Omega} q^n v dx. \end{aligned}$$

В этих выражениях α_i – толщина i -ой трещины, $c_f = \phi_f^0 c_R$, ϕ_f^0 – пористость трещин, k_f – проницаемость трещин.

В двумерной постановке расчетная область является квадратной со сторонами по 4 км. Правая часть в уравнении (1) является источником, которая моделирует скважину $q^n = -PI(p^n(x) - p_b)$, где p_b – призабойное давление, PI – коэффициент Писмана.

Пористая среда предполагается однородной, но за счет трещин вся область Ω является сильно неоднородной. Пусть $\eta = k_f/k_m$ – параметр неоднородности среды. Для численных расчетов меняется только k_f , а проницаемость пористой среды фиксированная $k_m = 10^{-15} \text{ м}^2$. Толщина трещин для всех трещин одинаковая $\alpha = 0,01$ м.

В МДТ трещины являются высокопроницаемыми пустотами, и они опреде-

ляют основное направление и плотность течения жидкости. На рис. 1 и рис. 2 показаны распределения поля давления p на конечный момент времени в зависимости от η , где при ее больших значениях основное течение идет по трещинам.

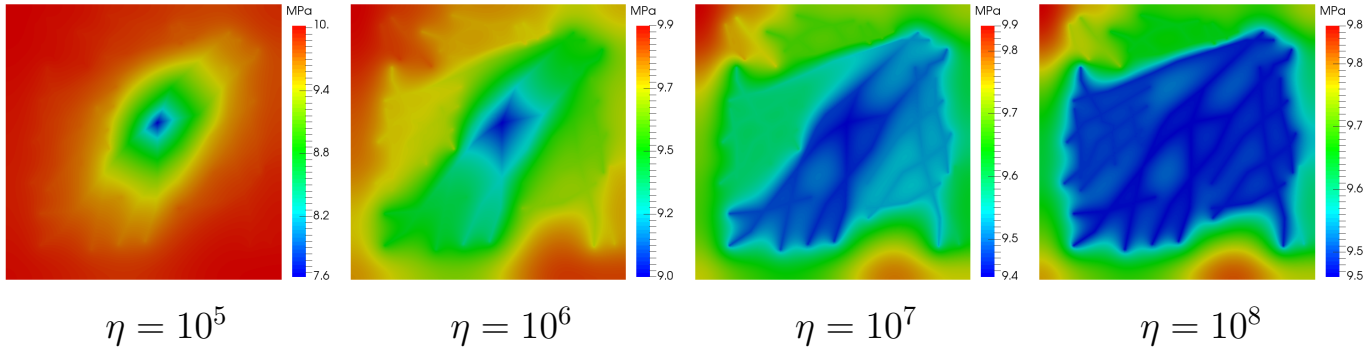


Рис. 1. Распределение давления в двумерном случае при $t = 10$ лет при разных η .

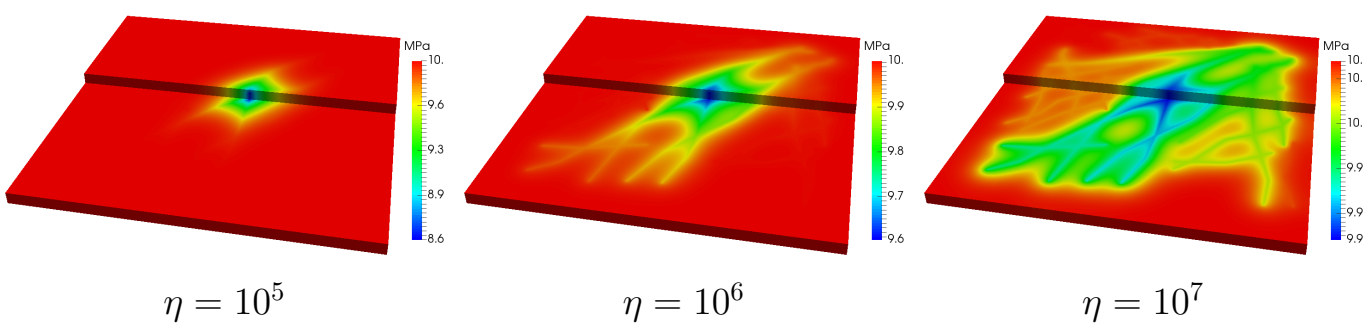


Рис. 2. Распределение давления в трехмерном случае при $t = 1$ год при разных η .

Во **второй главе** рассматривается численное решение задачи фильтрации в трещиноватой среде обобщенным многомасштабным методом конечных элементов. На примере задачи однофазной фильтрации приводится построение многомасштабного пространства базисных функций. Предлагаются два новых способа построения вычислительных сеток на грубом масштабе. Численно сравниваются решения, полученные с помощью предлагаемых многомасштабных методов, с решениями на мелкой (эталонной) сетке.

Рассматривается задача однофазной фильтрации в расчетной области Ω (см. рис. 3)

$$\begin{aligned}
c \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{k(x)}{\mu} \operatorname{grad} p \right) &= 0, \quad x \in \Omega, \\
p(x, 0) &= p_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\
p(x) &= p_D, \quad x \in \Gamma_D, \\
-\frac{k(x)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, \quad x \in \Gamma_N,
\end{aligned} \tag{4}$$

где коэффициент проницаемости $k(x)$ зависит от среды, который на трещинах имеет более высокое значение чем в пористой среде.

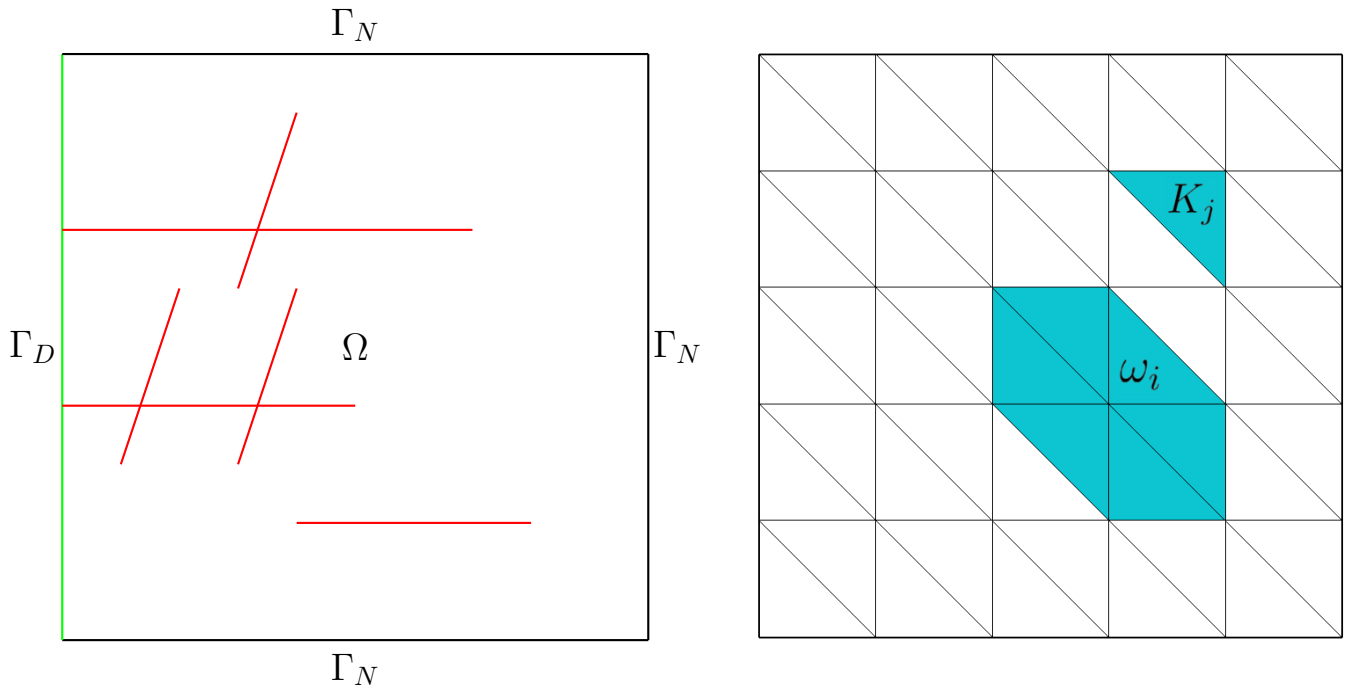


Рис. 3. Расчетная область Ω и пример грубой сетки.

Для дискретизации задачи (4) вводятся понятия грубой и мелкой сетки. Пусть \mathcal{T}_H конформное разбиение вычислительной области Ω на конечные элементы. Это разбиение обозначается как грубая сетка и предполагается, что каждый грубый элемент разбит на связное объединение элементов мелкой сетки. Мелкое разбиение сетки будет обозначаться через \mathcal{T}_h и по определению является измельчением грубой сетки \mathcal{T}_H . Через $\{x_i\}_{i=1}^N$ обозначаются вершины грубого разбиения \mathcal{T}_H , где N – количество грубых вершин, и определяются для каждой вершины x_i их окрестности через $\omega_i = \cup\{K_j \in \mathcal{T}_H; \quad x_i \in \bar{K}_j\}$. На рис. 3 иллюстрированы окрестность ω_i , который соответствует грубой вершине x_i , и некоторый элемент K_j .

Здесь рассматривается непрерывная формулировка Галеркина, где ω_i – носитель базисных функций. Базисные функции обозначаются через $\psi_k^{\omega_i}$, которые определены в ω_i , а индекс k представляет нумерацию этих базисных функций. В свою очередь, решение представляется как $p_{\text{ms}}(x) = \sum_{i,k} c_k^i \psi_k^{\omega_i}(x)$.

После определения многомасштабных базисных функций, глобальная связь задается через вариационную форму $a(p_{\text{ms}}, v) = L(v)$, $\forall v \in V_{\text{off}}$, где V_{off} – пространство, охватываемое этими базисными функциями, и билинейная и линейная формы имеют следующий вид:

$$a(p_{\text{ms}}^{n+1}, v) = \int_{\Omega} c \frac{p_{\text{ms}}^{n+1}}{\tau} v dx + \int_{\Omega} \left(\frac{k(x)}{\mu} \text{grad } p_{\text{ms}}^{n+1}, \text{grad } v \right) dx,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} c \frac{p_{\text{ms}}^n}{\tau} v dx.$$

Пусть V – пространство конечных элементов, который соответствует разбиению \mathcal{T}_h для мелкой сетки. Предполагается, что $p \in V$ – мелкомасштабное решение, удовлетворяющее

$$a(p, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (5)$$

где билинейная и линейная формы, с учетом течения в трещинах имеют вид как (3). Приближенное решение уравнения (5) находится как линейная комбинация известных простых функций для пористой среды $p(x) = \sum_i^N p_i \psi_i(x)$, $v(x) = \sum_i^N \psi_i(x)$ и для трещин $p(x) = \sum_i^N p_i \phi_i(x)$, $v(x) = \sum_i^N \phi_i(x)$, тогда получается СЛАУ вида $Ap = F$, где A и F выглядят следующим образом:

$$A = [a_{ij}] = \int_{\Omega_m} c_m \frac{\psi_i}{\tau} \psi_j dx + \int_{\Omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \text{grad } \psi_i, \text{grad } \psi_j \right) dx +$$

$$+ \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} c_f \frac{\phi_i}{\tau} \phi_j dx + \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu} \text{grad } \phi_i, \text{grad } \phi_j \right) dx,$$

$$F = [f_i] = \int_{\Omega_m} c_m \frac{p^n}{\tau} \psi_i dx + \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} c_f \frac{p^n}{\tau} \phi_i dx.$$

Численный алгоритм ОММКЭ выглядит следующим образом:

1. Построение многомасштабной сетки и локальных областей ω_i .
2. Построение вспомогательного пространства $V_{\text{snap}}^{\omega_i}$ для каждой локальной подобласти ω_i путем решения следующей задачи

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} \psi_j^{\omega_i, \text{snap}}) &= 0, \quad x \in \omega_i, \\ \psi_j^{\omega_i, \text{snap}} &= \delta_j^h(x), \quad x \in \partial\omega_i, \end{aligned} \quad (6)$$

где функция $\delta_j^h(x)$ принимает значение 1 при $x = x_j$, а в остальных точках обращается в 0. Опуская верхний индекс ω_i , вспомогательное пространство и оператор перехода для каждой ω_i определяются как

$$V_{\text{snap}} = \operatorname{span}\{\psi_j^{\text{snap}} : 1 \leq j \leq l_i\}, \quad R_{\text{snap}} = [\psi_1^{\text{snap}}, \dots, \psi_{l_i}^{\text{snap}}],$$

где l_i количество функций в V_{snap} .

3. Построение автономного пространства V_{off} в локальной подобласти ω_i посредством расчета следующей задачи на собственные значения в пространстве V_{snap} :

$$A^{\text{off}} \Psi_k^{\text{off}} = \lambda_k^{\text{off}} B^{\text{off}} \Psi_k^{\text{off}}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A^{\text{off}} &= R_{\text{snap}}^T A R_{\text{snap}}, \quad B^{\text{off}} = R_{\text{snap}}^T B R_{\text{snap}}, \\ A &= [a_{ij}] = \int_{\omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j \right) dx + \sum_l \alpha_l \int_{\omega, \gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} \phi_i, \operatorname{grad} \phi_j \right) dx, \\ B &= [s_{ij}] = \int_{\omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \psi_i \psi_j \right) dx + \sum_l \alpha_l \int_{\omega, \gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu} \phi_i, \phi_j \right) dx. \end{aligned}$$

Здесь ω_m - область пористой среды, ω, γ_l - трещины и l - количество трещин в области ω_i . Для построения автономного пространства выбираются первые M_{off}^{ω} собственные векторы, которые соответствуют первым наименьшим собственным числам и после решения задачи (7) определяются как $\psi_k^{\text{off}} = \sum_{j=1}^{\text{off}} \Psi_{kj}^{\text{off}} \psi_j^{\text{snap}}$, $k = 1, \dots, M_{\text{off}}^{\omega}$, где Ψ_{kj}^{off} - координаты вектора ψ_k^{off} .

4. Построение начального грубого пространства $V_0^{\text{init}} = \operatorname{span}\{\chi_i\}_{i=1}^N$. Здесь χ_i - стандартная многомасштабная базисная функция разбиения единицы, определяемая как решение задачи (см. рис. 4)

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} \chi_i) &= 0, \quad x \in K, \\ \chi_i &= g_i, \quad x \in \partial K, \end{aligned}$$

для всех $K \in \omega_i$. Здесь g_i непрерывная функция на ∂K и линейна для каждого ∂K . Функция g_i принимает значение 1 на вершине x_i и 0 на других.

5. Построение непрерывного спектрального многомасштабного пространства Галеркина как

$$V_{\text{off}} = \text{span}\{\psi_{i,k} : 1 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq M_{\text{off}}^{\omega_i}\},$$

где $\psi_{i,k} = \chi_i \psi_k^{\text{off}}$. Используя одну индексную запись, переходим к $V_{\text{off}} = \text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{N_c}$, где $N_c = \sum_{i=1}^N M_{\text{off}}^{\omega_i}$ обозначает общее количество базисных функций в пространстве V_{off} . Также строится операторная матрица

$$R^T = [\psi_1, \dots, \psi_{N_c}],$$

где ψ_i используется для обозначения узловых значений каждой базисной функции, определенной на мелкой сетке.

6. Решение задачи (4) на грубой сетке следующим образом:

$$A_c p_c = F_c, \quad A_c = R A R^T, \quad F_c = R F. \quad (8)$$

После решения системы (8) осуществляется переход от решения на грубой сетке к решению на мелкой сетке используя также оператор перехода R и решение p_c

$$p_{\text{ms}} = R^T p_c,$$

где p_{ms} – мелкомасштабное решение, полученное с помощью многомасштабного метода.

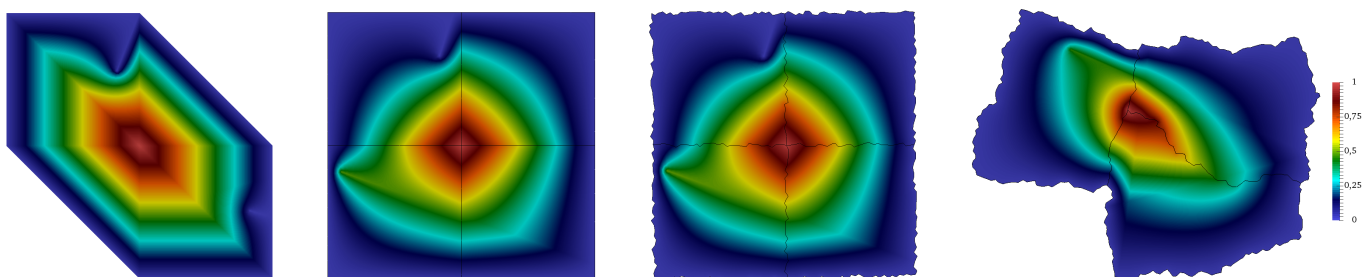


Рис. 4. Иллюстрация функции разбиения единицы χ_i в зависимости от грубой сетки (слева направо): треугольная, квадратная, квазиструктурированная и неструктурированная.

В численных расчетах рассмотрены четыре подхода грубомасштабных вычислительных сеток, два из которых были предложены автором (квазиструктурированный и неструктурированный). Наиболее точным является подход, когда

элементы грубой сетки являются прямоугольными, в нашем случае, квадратными. Подходы с квазиструктурированными и неструктурированными сетками на грубом масштабе также показали высокую точность (см. табл. 1).

M	Треугольная сетка		Квадратная сетка		Квазиструктурированная сетка		Неструктурированная сетка	
	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$
1	70.43	100	40.62	84.59	53.64	90.79	50.72	89.95
2	20.48	59.43	9.66	41.52	10.3	43.31	10.87	44.31
4	3.91	24.32	3.66	22.13	3.65	22.93	3.72	22.42
8	1.28	13.23	0.95	9.83	0.96	10.34	0.65	8.53
16	0.26	5.38	0.18	3.64	0.2	4.32	0.16	3.92
32	0.08	2.48	0.045	1.51	0.066	2.28	0.05	1.92

Таблица 1. Значения погрешности в конечный момент времени в зависимости от вида грубой сетки при $N = 121$.

В **третьей главе** предлагается бессеточный многомасштабный метод, где вместо структурированной грубой сетки используется облако точек с перекрывающимися опорными областями. Данный подход основан на ОММКЭ. При таком подходе применение многомасштабного метода не требует построения специальной расчетной сетки, содержащей элементы грубого и мелкого масштабов. Вместо этого облако точек и многомасштабное пространство строятся на мелкой сетке в зависимости от неоднородных параметров задачи. Представлены результаты численного решения для двумерной и трехмерной задач.

Для дискретизации задачи (4) бессеточным ОММКЭ так же вводятся понятия грубого разбиения и мелкой сетки. Пусть \mathcal{S}_H разбиение вычислительной области Ω на облако точек так, что $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N S_i$, где N – число грубых вершин, S_i – локальные области и носители базисных функций

$$S_i = \{y \in \mathcal{R}^N : \|y - x_i\| \leq r_i\},$$

где x_i – вершина и r_i – радиус сферы S_i . Здесь сначала находятся расположения узлов x_i , а потом на основе соседей вычисляются радиусы r_i так, чтобы все S_i перекрывали всю область Ω . Далее, все мелкосеточные элементы входящие в радиус питания r_i собираются и образуют подобласть S_i . Таким образом, все

вычисления связанные с построением базисных функций (решение задачи (6) для построение вспомогательного пространства и решение спектральной задачи (7)) проводятся в рамках каждой S_i .

В бессеточном ОММКЭ определенные в S_i функции формы $W_i(x)$ образуют начальное грубое пространство $V_0^{\text{init}} = \text{span}\{W_i(x)\}_{i=1}^N$, которые зависят от функции $\phi(x)$

$$W_i(x) = V_i \phi_i(x), \quad V_i^{-1} = \sum_{j=1}^{M_i} \phi_j(x), \quad S_i \cap S_j \neq \emptyset,$$

где V_i сумма всех M_i функций $\phi_j(x)$ отличных от нуля в подобласти S_i , включая саму $\phi_i(x)$. Здесь функции $\phi(x)$ берутся в качестве кубического сплайна

$$\phi(r) = 2 \begin{cases} 2/3 + 4 (r - 1) r^2, & r \leq 0.5, \\ 4/3 (1 - r)^3, & 0.5 \leq r \leq 1, \\ 0, & 1 \leq r, \end{cases}$$

где r - нормированное расстояние.

Далее, посредством умножения функции формы $W_i(x)$ на собственный вектор $\psi_k^{S_i, \text{off}}$ получаются базисные функции в автономном пространстве $V_{\text{off}}^{S_i}$

$$\psi_{i,k} = W_i \psi_k^{S_i, \text{off}}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq k \leq M_{\text{off}^{S_i}}.$$

Для численных расчетов были рассмотрены бессеточные ОММКЭ (см. рис. 5): а) с равномерным расположением узлов и одинаковыми размерами r_i для каждой S_i и б) подход с использованием ЦМВ при построении облака точек. Алгоритм ЦМВ позволяет сгущать грубые элементы в интересных местах вычислительной области и тем самым повышает точность вычислений. Данный алгоритм является итерационным и зависит от плотности распределения вероятностей $\rho(x)$, который для решения задачи (4) в трещиноватой среде зависит от расположения трещин.

На таб. 2 для сравнения бессеточного ОММКЭ с сеточными показаны значения погрешности в конечный момент времени при $N = 441$ и для бессеточного ОММКЭ при $\gamma = 2$, а для подхода с ЦМВ при $\beta = 5$. Из результатов видно, что при использовании четырех и выше многомасштабных базисных функций в каждой грубой подобласти ($M \geq 4$) точность бессеточного ОММКЭ с ЦМВ становится выше чем у всех остальных подходов. Таким образом, бессеточный ОММКЭ показал высокую точность и применимость при решении задач

с высоким контрастом коэффициентов и локальным расположением неоднородностей.

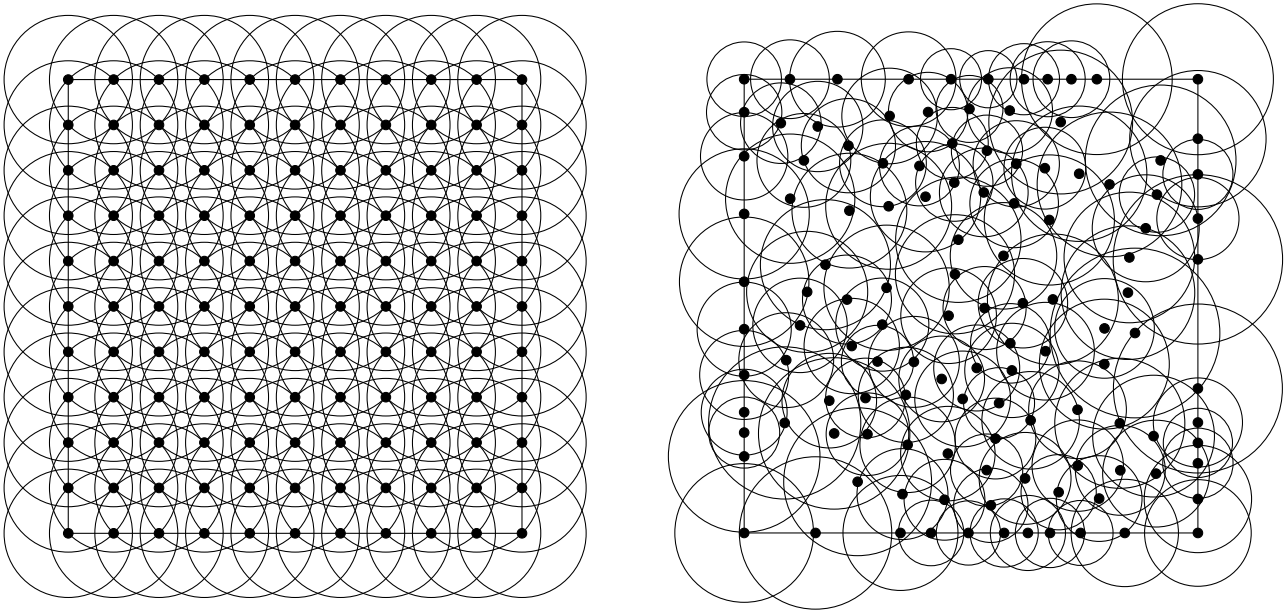


Рис. 5. Бессеточное облако точек с равномерным расположением узлов и облако точек с расположением узлов в зависимости от неоднородных параметров.

M	Треугольная сетка		Квадратная сетка		Бессеточный		Бессеточный с ЦМВ	
	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$
1	39.51	82.33	14.18	53.45	55.74	96.1	49.67	93.2
2	5.93	33.13	3.93	25.61	8.29	38.91	8.08	37.82
4	1.31	15.66	1.2	13.68	1.22	12.61	0.74	9.26
8	0.4	8.54	0.32	7.28	0.29	4.84	0.09	2.48
16	0.097	3.73	0.06	2.54	0.02	1.02	0.012	0.62
32	0.026	1.64	0.014	1.0	0.0056	0.47	0.003	0.25

Таблица 2. Значения погрешности различных подходов ОММКЭ в конечный момент времени при $N = 441$ и при $\beta = 5$, $\gamma = 2$ для бессеточного ОММКЭ.

В **четвертой главе** применяется разработанный ранее в предыдущей главе бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для решения задачи теплопроводности в системе грунт-труба. На грубом масштабе применяется бессеточный подход с ЦМВ, где плотность распределения $\rho(x)$ вычисляется с учетом системы труб. Трубы моделируются аналогично трещинам как в методе МДТ. Они рассматриваются в одномерном случае, когда как вычислительной областью является трехмерный грунт. Также для повышения точности вычислений применяются дополнительные базисные функции.

Рассматриваемая математическая модель описывается системой грунт-труба, которая описывает тепловое взаимодействие грунтов с проложенным в них трубопроводными системами

$$\begin{aligned} c\rho_{\Delta}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_{\Delta}(T)\operatorname{grad}T) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ b_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_{\xi}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) - S\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_p\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) &= 0, \quad \xi \in \gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

где $b_p = Sc_p\rho_p$, $S = \pi R^2$, γ – кривая, описывающая расположение системы труб.

Система уравнений (9) дополняется начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} T(x) &= T_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ T &= T_p, \quad x \in \xi_D, \\ T &= T_D, \quad x \in \Gamma_D, \\ -\lambda_{\Delta}(T)\frac{\partial T}{\partial n} &= \alpha(T - T_{air}), \quad x \in \Gamma_R, \\ -\lambda_{\Delta}(T)\frac{\partial T}{\partial n} &= 0, \quad x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

где α – коэффициент конвективного теплообмена, T_{air} – температура воздуха.

Для решения многомерных задач типа Стефана естественно использовать экономичные линеаризованные схемы по времени, когда коэффициенты берутся с предыдущего временного слоя. Вариационная задача с использованием подхода МДТ формулируется следующим образом: нужно найти такую функцию $T \in V$, которая для любой тестовой функции $v \in \hat{V}$ удовлетворяет следующему уравнению:

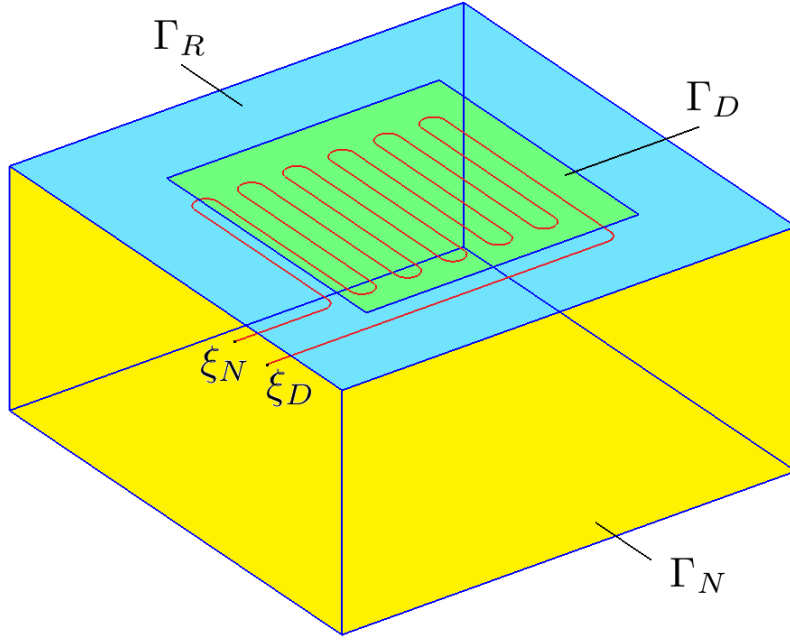


Рис. 6. Вычислительная область Ω .

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} c\rho_{\Delta}(\widehat{T}^{n+1}) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} v dx + \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(\widehat{T}^{n+1}) \operatorname{grad} T^{n+1} \cdot \operatorname{grad} v dx + \\
 & + \int_{\gamma} b_p \left(\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} + \nu_{\xi} \operatorname{grad}_{\xi} T^{n+1} \right) v d\xi + S \int_{\gamma} \lambda_p \operatorname{grad}_{\xi} T^{n+1} \cdot \operatorname{grad}_{\xi} v d\xi = 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
 V &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{x \in \xi_D} = T_p, v|_{x \in \Gamma_D} = T_D\}, \\
 \widehat{V} &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{x \in \xi_D} = 0, v|_{x \in \Gamma_D} = 0\}.
 \end{aligned}$$

Пусть \mathcal{T}_h – мелкая триангуляция вычислительной области Ω , тогда из уравнения (10) выводится дискретная система в матричной форме вида $A \cdot T = F$, где элементы матрицы и правой части вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{c\rho_{\Delta}(\widehat{T}^{n+1})}{\tau} \phi^j \phi^i dx + \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(\widehat{T}^{n+1}) \operatorname{grad} \phi^j \cdot \operatorname{grad} \phi^i dx + \\
 & + \int_{\gamma} b_p \left(\frac{\psi^j}{\tau} + \nu_{\xi} \operatorname{grad}_{\xi} \psi^j \right) \psi^i d\xi + S \int_{\gamma} \lambda_p \operatorname{grad}_{\xi} \psi^j \cdot \operatorname{grad}_{\xi} \psi^i d\xi, \\
 f_i &= \int_{\Omega} \frac{c\rho_{\Delta}(\widehat{T}^{n+1})}{\tau} T^n \phi^i dx + \int_{\gamma} \frac{b_p}{\tau} T^n \psi^i d\xi.
 \end{aligned}$$

Здесь базисные функции ϕ и ψ определены на тетраэдральных ячейках и на одномерных отрезках (ребрах), соответственно.

Здесь для повышения точности решения бессеточным ОММКЭ, алгоритм которого был представлен в предыдущей главе, строятся дополнительные упрощенные базисные функции в каждой S_i , содержащей трубы $\gamma \in S_i$ посредством решения следующей локальной задачи:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda(x) \operatorname{grad} \phi_{\text{add}}^i) &= 0, & x \in S_i, \\ \phi_{\text{add}}^i &= 0, & x \in \partial S_i \setminus \partial \gamma, \\ \phi_{\text{add}}^i &= 1, & x \in \gamma. \end{aligned} \tag{11}$$

После решения задачи (11) полученная функция ϕ_{add}^i умножается на функцию формы $W_i(x)$ для получения упрощенной дополнительной базисной функции $\psi_{\text{add}}^i = W_i \phi_{\text{add}}^i$. Таким образом, проекционная матрица дополняется следующим образом:

$$R^T = [\psi_1^1, \dots, \psi_{M^{S_1}}^1, \psi_{\text{add}}^1, \dots, \psi_1^N, \dots, \psi_{M^{S_N}}^N, \psi_{\text{add}}^N].$$

На таб. 3 отображены относительные погрешности в процентах при различных количествах базисных функций, а так же при использовании дополнительных базисных функций. Полученные результаты численного исследования показали высокую точность при сгущении элементов на грубом масштабе в местах расположения трубы и использовании дополнительных упрощенных базисных функций.

M	Без функций ψ_{add}^i			С функциями ψ_{add}^i		
	DOF	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$	DOF	$\ e\ _{L^2}$	$\ e\ _{H^1}$
1	1089	45.98	79.95	1717	9.83	31.57
2	2178	24.1	60.22	2806	7.39	26.52
4	4356	13.16	37.68	4984	3.98	19.82
8	8712	9.41	24.77	9340	1.65	11.79
16	17424	7.25	17.12	18052	0.55	5.08

Таблица 3. Относительные погрешности в L^2 и H^1 в процентах (%) с использованием разного количества базисных функций.

Основные результаты работы. Диссертационная работа посвящена разработке вычислительных алгоритмов обобщенного многомасштабного метода конечных элементов к неструктурированным сеткам и бессеточному методу. Вычислительные технологии реализованы на двумерной и трехмерной модельных задачах однофазной фильтрации и теплопроводности. Проведены исследования на масштабируемость задач при использовании различного количества многомасштабных базисных функций. Основные научные результаты, полученные в работе, формулируются следующим образом:

1. Проведено численное решение задачи фильтрации в трещиноватой среде с использованием метода МДТ, которая учитывает трещины в явном виде. Было показано сильное влияние трещин на скорость течения жидкости. Установлена прямая зависимость времени решения СЛАУ от величины контраста параметров задачи. Проведено численное исследование влияния проницаемости трещин на сходимость итерационного метода FGMRES для задачи фильтрации в двумерной и трехмерной постановках.
2. Предложены два новых алгоритма построения расчетных сеток на грубом масштабе для обобщенного многомасштабного метода конечных элементов: квазиструктурированный и неструктурированный. На примере задачи фильтрации проведено сравнение точности решения многомасштабным методом на предложенных сетках с решениями на структурированных сетках на грубом масштабе.
3. Предложен вычислительный алгоритм бессеточного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Рассмотрены структурированный бессеточный подход и бессеточный подход с использованием ЦМВ. Исследованы различные значения параметров алгоритма ЦМВ и установлены оптимальные значения для них. Полученные численные результаты показывают высокую точность.
4. Предложен вычислительный алгоритм бессеточного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов на примере задачи теплопереноса в системе грунт-труба. Для улучшения результатов построены дополнительные упрощенные базисные функции. Полученные результаты численного исследования показали высокую точность решений.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Nikiforov, D. Meshfree Generalized Multiscale Finite Element Method / D. Nikiforov // Journal of Computational Physics. – 2022. – V. 474. – P. 111798.*
2. *Stepanov, S. Multiscale Multiphysics Modeling of the Infiltration Process in the Permafrost / S. Stepanov, D. Nikiforov, A. Grigorev // Mathematics. – 2021. – V. 9. – No. 20. – P. 2545.*
3. **Вычислительная реализация модели смешанной размерности теплопереноса в системе грунт–труба в криолитозоне / В. И. Васильев, М. В. Васильева, Д. Я. Никифоров [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61. – №. 12. – С. 2060-2073.**
4. **GMsFEM on unstructured grids for single-phase flow in fractured porous media / D. Nikiforov, M. Vasilyeva, Y. Efendiev, V. Vasil'ev // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – V. 1392. – No. 1. – P. 012071.**
5. *Nikiforov, D. Y. Numerical simulation of the embedded discrete fractures by the finite element method / D. Y. Nikiforov, S. P. Stepanov // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – V. 1158. – No. 3. – P. 032038.*
6. **Multiscale model reduction of fluid flow based on the dual porosity model / S. Stepanov, A. Grigorev, M. Vasilyeva [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – V. 1158. – No. 4. – P. 042025.**
7. **Численное решение задачи фильтрации в трещиноватой среде с использованием декомпозиции областей / В. И. Васильев, М. В. Васильева, В. С. Гладких [и др.] // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2018. – Т. 21. – №. 4. – С. 15-27.**
8. **Численное моделирование течения однофазной жидкости в трещиноватых пористых средах / М. В. Васильева, В. И. Васильев, А. А. Красников, Д. Я. Никифоров // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159. – №. 1. – С. 100-115.**

9. **Васильев, В. И.** Решение задач однофазной фильтрации методом конечных элементов на вычислительном кластере / В. И. Васильев, М. В. Васильева, Д. Я. Никифоров // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. – 2016. – №. 6 (56). – С. 31-40.
10. **Никифоров, Д.Я.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программа генерации 3D геометрии с трещинами пониженного порядка для решения многомасштабных задач». №2018663110 от 22.10.2018 г.
11. **Никифоров, Д.Я.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программа генерации 3D геометрии со сферами (цилиндрами) для решения многомасштабных задач». №2018663109 от 22.10.2018 г.
12. **Никифоров, Д.Я.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Вычислительная библиотека для численного решения задачи фильтрации в трещиноватой неоднородной среде обобщенным многомасштабным методом конечных элементов». №2021615250 от 6.04.2021 г.
13. **Никифоров, Д.Я.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Вычислительная библиотека для решения задачи фильтрации бессеточным обобщенным многомасштабным методом конечных элементов». №2022681829 от 16.11.2022 г.