Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет
имени М. К. Аммосова»

На правах рукописи

Никифоров Дьулустан Яковлевич

Многомасштабный метод на неструктурированных сетках для решения задач в неоднородных средах

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
PhD, профессор
Ялчин Эфендиев

Якутск 2022

Содержание

Введение

Математическое моделирование является неотъемлемой частью науки для познания объективного мира. Наряду с теорией и экспериментом является третьим необходимым методом исследования. Точность математического моделирования при описании явления или процесса порой ограничивается лишь доступной вычислительной мощностью [1].

С развитием науки и техники возрастает возможность учитывать все больше информации при проведении вычислительных экспериментов. С ростом мощностей ЭВМ, растут и практические требования, а понятие «большая задача» со временем сравнительно расширяется. Современные прикладные и/или междисциплинарные задачи являются наиболее требовательными [2].

Объединяя в себе научный и инженерные подходы, метод конечных элементов (МКЭ) на текущий момент является эталоном численных методов для решения прикладных задач [3—7]. Естественно, что для каждого набора задач следует использовать наиболее подходящие для него численные методы или их комбинации [8, 9]. Но в задачах, которые наиболее естественно описываются пространственно-неоднородной сеткой, и в задачах, которые ставятся в терминах вариационного принципа, следует использовать метод конечных элементов [10—12].

Многие задачи, возникающие в связи с различными физическими и инженерными приложениями, имеют многомасштабный характер. Большие различия в пространственном и временном масштабах создают проблемы в адекватном представлении физических процессов естествознания. Из-за наличия мелких масштабов и неопределенностей, в этих задачах прямое моделирование обходится дорого в плане вычислительных затрат. Такое неравенство проявляется во многих областях современной науки и техники, например, в композитных материалах, пористых средах, течениях с большими числами Рей-

нольдса и т.д. Полный анализ и решение этих задач чрезвычайно сложен. Например, сложность моделирования течения жидкостей и газов в основном вызвана неоднородностью подземных пластов, охватывающих многие масштабы. Эта неоднородность часто представлена многомасштабными колебаниями проницаемости среды [13].

В МКЭ решение представляется в виде суммы относительно простых базисных функций, как правило полиномиальных, которые определены на некоторых элементах. Точность вычислений МКЭ в большинстве зависит от размеров h этих самых элементов [14]. При сеточном разрешении всех неоднородностей и особенностей прямое численное решение многомасштабных задач затруднительно даже с появлением суперкомпьютеров. Основная трудность при решении таких задач заключается в размере вычислений. Требуется огромный объем компьютерной памяти и процессорного времени, и это может превысить предел современных вычислительных ресурсов. Ситуацию до некоторой степени могут решить параллельные вычисления, но стоит заметить, что размер дискретной задачи не уменьшается. При разрешении всех мелкомасштабных особенностей сложной задачи, прямые вычисления обеспечивают количественную информацию о физических процессах на всех масштабах.

С другой стороны, с прикладной точки зрения часто бывает достаточно предсказать макроскопические свойства многомасштабных задач [13]. Поэтому разрабатываются многомасштабные методы, которые улавливают мелкомасштабный эффект на больших масштабах, но не требуют разрешения всех мелкомасштабных особенностей на сеточном уровне. В них задачи решаются на грубой сетке с размерами элементов $H \gg h$, которые не позволяют разрешить всех мелких особенностей. Эти численные методы используют многоуровневую структуру решения с помощью локализованных базисных функций. Эти базисные функции содержат важную многомасштабную информацию и связаны через глобальную формулировку, чтобы обеспечить точную аппроксима-

цию решения. Полученное грубое решение интерполируется обратно к мелкомасштабному решению с использованием тех же базисных функций. Таким образом, многомасштабные методы обеспечивают приближенные решения, сохраняя при этом мелкомасштабную информацию.

Многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ, на англ. Multiscale Finite Element Method) берет свое начало от работ [15, 16]. В данных работах авторы предлагают использовать многомасштабные базисные функции для эллиптических уравнений со специальным коэффициентом при операторе Лапласа. Этот подход позже повлиял на разработку нового ММКЭ в работах [17—19], где авторы показали, что граничные условия для построения базисных функций имеют важную роль. Позже ММКЭ были обобщены на нелинейные задачи в работах [20, 21].

Одним из первых и численно простых таких методов, которые решают задачу на грубой сетке является численное усреднение (осреднение). Данный метод является незаменимым математическим инструментом в обеспечении понимания многомасштабных задач. В данном методе мелкомасштабные неоднородные свойства среды учитываются в основном для вычисления тензора проницаемости для аналогичной грубосеточной задачи [22]. Если некоторые идеи по усреднению восходят к более ранним временам, то разработки 1970-х годов имеют фундаментальное значение. Это хорошо представлено Бенсуссаном, Лионсом и Папаниколау [23], которые разрабатывают систематическую основу для асимптотического анализа. Одним из первых, кто анализировал усреднение случайных операторов в случае непериодических микроструктур был Козлов [24]. Влиятельными достижениями в теории усреднения являются анализ в работе [25], методы усреднения Бабушка [26], Бахвалова и Панасенко [27, 28], анализ Мюрата и Тартара [29]. Методы, основанные на теории усреднения, успешно применяются для определения эффективных свойств неоднородных материалов. Однако область их практического применения обычно

ограничена некоторыми допущениями в отношении среды [23, 30].

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) считается одним из первых многомасштабных методов, который был предложен в работах [31—36]. МКСЭ направлен для решения сложных задач кинетики, диффузии, теории упругости и т.д. Идея метода заключается на разбиении всей области моделирования на специальные конечные носители – суперэлементы. Основное отличие МКСЭ от метода конечных элементов (МКЭ) состоит в том, что базисные функции строятся как решение исходного уравнения со специальными краевыми условиями. Базисные функции на суперэлементах улавливают мелкомасштабные неоднородные свойства, которые играют важную роль в решаемых задачах. В работах [37—40] показана эффективность МКСЭ при решении разнообразных физических задач.

Важно отметить, что наряду с ММКЭ независимо были разработаны и изучены множество аналогичных подходов, которые повлияли на развитие многомасштабных методов. Например, обобщенные методы конечных элементов [15, 16, 41, 42], методы численного усреднения на основе вейвлетов [43—46], методы, основанные на теории усреднения [47—49], вариационные многомасштабные методы [50—54], неоднородные многомасштабные методы [55, 56], обобщенные p-версии метода конечных элементов в усреднении [57, 58], методы апскейлинга [59, 60], сетевые методы [61—63] и другие методы [64—71].

В рассмотренных ранее методах обычно строится аппроксимация на грубом масштабе на основе локальных решений, но эти подходы не обеспечивают систематической процедуры для дополнения локальных многомасштабных пространств. Важно отметить, что необходимо систематически дополнять локальные пространства, чтобы решения на грубой сетке сходились к решениям на мелкой сетке. С этой идеей в работе [72] впервые был разработан и предложен обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ), на английском Generalized Multiscale Finite Element Method, GMsFEEM.

Основная идея состоит в том, чтобы вычислительным путем определить локальные вспомогательные пространства (на англ. snapshot spaces), которые является множествами локальных решений с разнообразными граничными условиями. Размер вспомогательного пространства можно уменьшить с помощью рандомизированных алгоритмов без потери точности решения [73]. Далее, путем проведения спектрального разложения в этих вспомогательных пространствах выбираются доминирующие собственные векторы и определяются многомасштабные базисные функции. Так же в ОММКЭ активно применяется подход избыточной дискретизации локальной области (на англ. oversampling), который помогает учитывать неоднородные параметры в соседних элементах [73—76]. Данный метод имеет приложения для решения различных задач с высоким контрастом неоднородных параметров, например, для моделирования процессов фильтрации в трещиноватых средах [77—80], для моделирования распространения упругих волн [81—87], для решения задач упругости [88—92] и т.д.

При многомасштабном численном моделировании обычно сперва строится вычислительная сетка на грубом масштабе, а сетка на мелком масштабе является результатом его измельчения. Полученная вычислительная сетка является многомасштабной, т.е. содержит элементы обоих масштабов. Но на практике такой подход со структурированной сеткой на грубом масштабе не всегда применим. Реальные объекты исследования имеют неструктурированную неоднородную форму и имеют негладкие границы, например, многослойный грунт. Детализация таких объектов имеет важное значение, например, при моделировании добычи углеводородов необходимо иметь детальное сеточное представление около скважин и трещин.

Построение специальных структурированных сеток при многомасштабном решении задачи может быть затруднено в случаях, когда необходимо использовать уже существующие сложные подробные сетки на мелком масштабе, а

построение новой сетки (передискретизация) с учетом всех мелких неоднородностей задачи затруднено и требует много временных затрат. В таком случае, практически невозможно построить многомасштабную расчетную сетку в короткие сроки. Очевидно, что грубая сетка в таких моментах должна быть адаптивно построена поверх уже существующей мелкой расчетной сетки.

В соответствии с вышеописанными проблемами разрабатываются различные модификации многомасштабных методов. Например, в работах [93] и [94] авторами была разработана динамическая стратегия укрупнения сетки для смешанного потока, где грубая сетка отделяла области с высоким потоком от областей с низким потоком. В работе [95] используются неструктурированные сетки на грубом масштабе в многомасштабном методе конечных объемов (на англ. Multiscale Finite Volume Method, MSFVM) для моделирования процессов течения в трещиноватой среде. Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов с разрывным методом Галеркина на неструктурированной грубой сетке был представлен в работе [96] для решения задач в перфорированных областях. В работе [97] авторы строят дополнительные базисные функции для учета влияния граничных условий на неровных поверхностях при ненасыщенной фильтрации в неоднородных пористых средах. Авторы работы [98] представили метод многомасштабного моделирования на основе ОММКЭ для численного моделирования просачивания жидкости в условиях вечной мерзлоты в неоднородных грунтах с неровными границами. В работе [99] разработан неструктурированный ОММКЭ для задачи фильтрации в трещиноватой среде с произвольными полигональными крупномасштабными элементами. Многомасштабное математическое моделирование потоков и задач переноса в тонкой области рассматривается в работе [100]. ММКЭ разрабатывается для решения уравнения диффузии на деформированной поверхности в работе [101].

Во многих задачах, где неоднородности располагаются только в некоторых локальных местах расчетной области следует локально сгущать элемен-

ты вычислительной сетки. Такой подход значительно снижает нагрузку на ЭВМ по сравнению с равномерным измельчением всей сетки. Предыдущие рассмотренные многомасштабные подходы не учитывают это и сильно сгущают грубую сетку или добавляют многомасштабные базисные функции для всех локальных областей для повышения точности решения. На данный момент единственным многомасштабным методом, который может справиться с вышеописанным является ОММКЭ с разрывным методом Галеркина на грубом масштабе, но разрывный метод Галеркина сам по себе является вычислительно дорогостоящим и практически применим лишь для ограниченного класса задач.

Таким образом, в научной литературе не существует единого эффективного многомасштабного метода, который можно было бы использовать на практике при решении прикладных задач с высоким контрастом параметров. Такой многомасштабный метод должен быстро применяться на уже существующей сложной трехмерной расчетной сетке с высоким измельчением элементов, в соответствии с требованиями задачи легко детализировать отдельные области решения и варьировать размеры ячеек на грубом масштабе.

Целью диссертационной работы является разработка эффективных алгоритмов построения вычислительных сеток в обобщенном многомасштабном методе конечных элементов. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- разработать, реализовать и исследовать эффективные вычислительные алгоритмы построения неструктурированных сеток на грубом масштабе для обобщенного многомасштабного метода конечных элементов;
- разработать, реализовать и исследовать вычислительный алгоритм обобщенного многомасштабного метода, который использует бессеточный метод для построения многомасштабного пространства;
- примененить и исследовать вычислительный алгоритм бессеточного

обобщенного многомасштабного метода для решения задачи теплопереноса с фазовыми переходами.

Научная новизна и практическая значимость полученных результатов заключается в следующем:

- предложены алгоритмы обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с квази-структурированной и неструктурированной сетками на грубом масштабе для решения задачи фильтрации в трещиноватых средах;
- предложен алгоритм бессеточного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для решения задачи фильтрации в трещиноватых средах;
- предложен алгоритм бессеточного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов с дополнительными упрощенными базисными функциями для решения задачи теплопереноса в системе грунт-труба.

Проведённые численные расчёты имеют практическое значение в моделировании процессов фильтрации и теплопроводности в неоднородных средах.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе для решения задач фильтрации и теплопроводности применялись следующие методы: метод конечных элементов, модель дискретных трещин, бессеточный метод и обобщённый многомасштабный метод конечных элементов.

Основные положения, выносимые на защиту:

- для численного решения задачи фильтрации в трещиноватой среде обобщенным многомасштабным методом конечных элементов применены квази-структурированные и неструктурированные расчетные сетки на грубом масштабе. Расчеты показали эффективность и гибкость предлагаемых алгоритмов;
- применен бессеточный подход при построении многомасштабного пространства для обобщенного многомасштабного метода конечных элемен-

тов. На примере многомерной задачи фильтрации в трещиноватой среде показана высокая эффективность такого подхода;

- для построения многомасштабного пространства бессеточным обобщенным многомасштабным методом был применен алгоритм CVT (на англ. Centroidal Voronoi Tessellations), который позволяет сгущать грубые элементы в областях скопления неоднородностей. Проведенные численные исследования показывают заметное повышение точности вычислений;
- предложен алгоритм построения дополнительных упрощенных базисных функции, которые повышают вычислительную точность бессеточного обобщенного многомасштабного метода для трехмерной задачи теплопереноса в системе грунт-труба с фазовыми переходами.

Обоснованность и достоверность результатов. В диссертационной работе использованы научные методы для обоснования полученных результатов и выводов. Все решения полученные многомасштабными методами были сравнены с решениями на эталонных сетках. Приведенные результаты численных исследований прошли научное рецензирование в процессе публикации в ведущих научных отечественных и зарубежных журналах, а также свидетельствами о регистрации программного обеспечения. Материалы работы докладывались и обсуждались со специалистами в области многомасштабного моделирования на ведущих российских и международных конференциях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Международная конференция "Вычислительная и прикладная математика 2017", ИВМиМГ СО РАН, Академгородок, г. Новосибирск, 25.06.2017 - 30.06.2017;
- Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 30.07.2017 - 04.08.2017;

- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 08.08.2018 - 10.08.2018;
- Двенадцатая международная конференция "Сеточные методы для краевых задач и приложения", П(К)ФУ, г. Казань, 20.09.2018 - 25.09.2018;
- IV Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования", Математический институт им. В.А. Стеклова, г. Москва, 19.06.2019 - 21.06.2019;
- II Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 24.06.2019 - 25.06.2019;
- Всероссийская конференция "Применение цифровых технологий в промышленности, бизнесе и здравоохранении Республики Саха (Якутия)", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 23.12.2019 - 25.12.2019;
- IV Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Сочи, 08.09.2020 - 13.09.2020;
- Международная конференция "Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные", СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, 18.07.2021-25.07.2021;
- Международная конференция "Марчуковские научные чтения 2021", ИВМиМГ СО РАН, Академгородок, г. Новосибирск, 04.10.2021 - 08.10.2021;
- V Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования", Математический институт им. В.А. Стеклова, г. Москва, 27.06.2022 – 30.06.2022;
- V Всероссийская научная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Якутск, 05.09.2022 - 07.09.2022.

Помимо этого результаты обсуждались в семинарских занятиях кафедры «Вычислительные технологии» ИМИ СВФУ и ЯО РНОМЦ «Дальневосточный центр математических исследований».

Публикации. По теме диссертации опубликованы 9 научных работ – в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК (ВАК, Scopus, Web of Science) [98, 99, 102—108], а также 4 свидетельства о государственной регистрации программ для электронных вычислительных машин [109—112].

Личный вклад автора. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [98, 102—104, 106, 107] автор принимал участие в разработке и реализовации вычислительных алгоритмов, проведении расчетов и анализа результатов вычислительных экспериментов; в работах [99, 105] диссертант принимал участие в постановке задачи, внес основной вклад в построении и реализации вычислительного алгоритма и участвовал в численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта в работах [99, 105] был определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объём работы составляет 141 страниц с 47 рисунками и 12 таблицами. Список литературы содержит 145 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантом РНФ №17-01-00732 и Минобрнауки РФ, соглашение от 02.02.2022 №075-02-2022-881.

В **первой главе** рассматривается задача однофазной нестационарной фильтрации в трещиноватой среде. Дискретизация проводится методом конечных элементов в смешанной размерности по пространству, где поток по трещинам аппроксимируется на один пространственный порядок ниже чем дискретизация в матричной горной породе. Для моделирования скважин ис-

пользуется модель Писмана [113]. Подробно описывается модель дискретных трещин (на англ. Discrete Fracture Model, DFM), где задача исследуется в двумерной и трехмерной постановках. Так же исследуется зависимость времени решения СЛАУ от контраста коэффициентов задачи.

Во **второй главе** дается численный алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Для разрешения течения по трещинам используется DFM, который также используется для вычисления многомасштабных базисных функций. Базисные функции вычисляются в автономном не зависящем от времени вспомогательном пространстве. Предлагаются различные алгоритмы построения вычислительных сеток на грубом масштабе. Решения, полученные с помощью предложенных подходов построения грубых сеток, сравниваются с решением на эталонной сетке.

В **третьей главе** разрабатывается бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов. Здесь, на грубом масштабе вместо вычислительной сетки строится облако точек с перекрывающимися опорными областями, т.е. применяется бессеточный метод. При таком подходе применение многомасштабного метода не требует построения специальной расчетной сетки, содержащей элементы грубого и мелкого масштабов. Вместо этого облако точек и многомасштабное пространство строятся поверх существующей вычислительной сетки на мелком масштабе. Многомасштабные базисные функции вычисляются локально на элементах облака точек. Так же предлагается использовать подход CVT для вычисления расположения узлов и размеров элементов облака точек в зависимости от неоднородных параметров задачи, а именно от расположения дискретных трещин. Приводятся результаты численных исследований многомерных задач фильтрации в трещиноватой среде.

В **четвертой главе** применяется разработанный ранее в предыдущей главе бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для решения задачи теплопроводности в системе грунт-труба. В грубосеточном

масштабе применяется бессеточный подход с CVT, где плотность распределения вычисляется с учетом системы труб. Трубы моделируются аналогично трещинам как в методе DFM. Они рассматриваются в одномерном случае, когда как вычислительной областью является трехмерный грунт. Так же для повышения точности вычислений применяются дополнительные упрощенные базисные функции.

В **заключении** сформулированы основные научные результаты диссертационной работы.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, профессору Ялчину Эфендиеву за научное руководство, полезные замечания и советы и кандидату физико-математических наук, доценту Васильевой Марии Васильевне за научное наставничество и оказание всесторонней поддержки. Автор также выражает благодарность сотрудникам научно-исследовательской кафедры «Вычислительные технологии», ЯО РНОМЦ «Дальневосточный центр математических исследований» и Международной научно-исследовательской лаборатории «Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления» за полезные советы и всевозможную поддержку.

Глава 1

Численное решение задачи фильтрации в трещиноватых средах

В данной главе рассматривается численное моделирование процессов однофазной фильтрации в трещиноватых средах. Течение в трещинах моделируется явным образом с использованием модели дискретных трещин DFM. Аппроксимация уравнения в трещинах производится на одну пространственную размерность ниже. Представляются результаты численных исследований в двумерных и трехмерных постановках методом конечных элементов.

1.1 Введение

Математическому моделированию течения жидкости в трещиновато-пористых средах посвящено немалое количество научных работ. На практике широко применяется модель двойной пористости, которая была предложена Баренблаттом, Желтовым и Кочиной [114]. В этой модели трещиновато-пористая среда состоит из двух сплошных сред: матрицы пористой среды и трещин. Так же в основном предполагается, что интенсивность трещин является однородной во всем резервуаре и, следовательно, размер блока матрицы является постоянным. Тем не менее, геологические исследования природных трещиноватых коллекторов указывают на появление неоднородных структур внутри пласта.

В связи с вышеописанным были разработаны дискретные модели трещин DFM и его некоторые модификации для уменьшения числа ряда ограничений, присущих моделям двойной пористости или мультиконтинуума. Здесь предполагается, что трещины оказывают доминирующее влияние на потоки жидкости, хотя общий объем трещин очень мал, так как их апертура низкая

и в них нефть практически не хранится, но за счет большей проницаемости основное течение происходит именно по трещинам. Как правило, трещины представляются явным образом объектами размерностью на порядок ниже пространственной размерности коллектора.

Большинство моделей DFM базируются на соответствии неструктурированных сеток к расположению трещин, так чтобы они соответствовали геометрии и местоположению сетей трещин. По сравнению с моделями с двойной пористостью, DFM имеют ряд преимуществ. В них явно учитывается влияние отдельных трещин на течение жидкости. Кроме того, они не слишком ограничены геометриями трещин, определенными сеткой, поэтому модель дискретных трещины легко адаптируется и обновляется. Однако одним из недостатков является то, что, в общем случае, моделирование на основе DFM численно трудно реализуемо и вычислительно затратно. Кроме того, возникает необходимость в идентификации местоположения и ориентации дискретных трещин с тем, чтобы модель точно описывала процессы в месторождении.

Модель дискретных трещин рассматривается как метод, который имеет хорошую применимость для пласта с низкой степенью развития трещин, особенно когда резервуар имеет несколько крупных трещин, которые контролируют основные направления потока. Концептуальная модель дискретных трещин была введена в работе [115]. Модель, которая в данное время активно применяется, была представлена в работе [116], где задача решалась с использованием метода конечных элементов, в предположении, что пористая среда является двумерной плоскостью, а трещины – одномерными отрезками с высокой проницаемостью. Применение дискретной модели трещин и методов численного решения задач двухфазной фильтрации рассматривалось в работах [115, 117—124].

После аппроксимации дифференциальной задачи необходимо решать СЛАУ с большим количеством неизвестных. В силу наличия трещин рас-

сматриваемая задача становится идентичной задаче с сильно неоднородными коэффициентами. Следовательно, число обусловленности результирующей матрицы возрастает за счет большой разницы между коэффициентами проницаемости пористой среды и сети трещин, и чем больше разница между коэффициентами, тем больше становится число обусловленности. Известно, что обусловленность матрицы напрямую влияет на количество итераций при решении системы уравнений итерационными методами [125].

Внимание уделено численному исследованию особенностей решения СЛАУ, возникающих в результате неявной конечно-элементной аппроксимации плохо обусловленной задачи, с использованием итерационных методов декомпозиции областей в подпространствах Крылова [126]. При численной реализации СЛАУ использованы двухуровневые итерационные методы из библиотеки параллельных алгоритмов Krylov [104, 125, 127, 128]. Для решения задач использовался аддитивный метод Шварца, выступающий в роли предобуславливателя исходной матрицы в методе FGMRes. Приводятся результаты численных экспериментов с различным контрастом коэффициентов проницаемости пористой среды и трещин.

1.2 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение неразрывности в области Ω, описывающее однофазное движение жидкости в пористой среде

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho u) + \rho q,\ \boldsymbol{x} \in \Omega,\ 0 < t \leq T, \tag{1.1}$$

где ϕ – коэффициент пористости коллектора, ρ – плотность жидкости, u – скорость течения жидкости, которая описывается законом Дарси

$$u = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1.2}$$

Здесь p – давление, $k = k(\boldsymbol{x})$ – тензор проницаемости среды, μ – вязкость жидкости, а $q = \sum_i q_i \delta_\varepsilon(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)$ – совокупная интенсивность источников/стоков

в окрестности $\boldsymbol{x}_i$, причем

$$\delta_\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i) = \begin{cases} 1/(\pi\varepsilon^2), & \mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i \mid \leq \varepsilon, \\ 0, & \mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i \mid > \varepsilon, \end{cases}$$

где ε – радиус скважины.

Подставляя закон Дарси (1.2) в уравнение неразрывности (1.1), приходим к следующему параболическому уравнению, разрешенному относительно давления p:

$$c\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p\right) = q, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1.3}$$

Здесь $c = \phi^0 c_R$, ϕ^0 – пористость при давлении $p = p_0$, а c_R – коэффициент сжимаемости пористой среды. Отметим, что мы рассматриваем течение несжимаемой жидкости в упругой деформируемой пористой среде.

Уравнение (1.3) дополним начальным условием и граничным условием Неймана

$$p(\boldsymbol{x}, 0) = p_0(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}, \tag{1.4}$$

$$-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$.

1.3 Конечно - элементная аппроксимация

Для аппроксимации по времени воспользуемся чисто неявной дискретизацией уравнения (1.3):

$$c\frac{p^{n+1} - u^n}{\tau} - \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p^{n+1}\right) = q^n. \tag{1.6}$$

Для пространственной дискретизации (1.6) методом конечных элементов получаем следующую вариационную задачу: найти функцию $p \in V$, которая

для $\forall v \in \hat{V}$ удовлетворяет уравнению $a(p^{n+1}, v) = L(v)$, где

$$
\begin{aligned}
a(p^{n+1}, v) &= \int_\Omega c\frac{p^{n+1}}{\tau} v d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \left(\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p^{n+1}, \operatorname{grad} v\right) d\boldsymbol{x}, \\
L(v) &= \int_\Omega c\frac{p^n}{\tau} v d\boldsymbol{x} + \int_\Omega q^n v d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Здесь $V = \{p(\boldsymbol{x}) \in H^1(\Omega)\}$ – пространство пробных функций, $\hat{V} = \{v(\boldsymbol{x}) \in H^1(\Omega)\}$ – пространство тестовых функций, $H^1(\Omega)$ – пространство Соболева, содержащее функции v такие, что величины v^2 и $|\nabla v|^2$ интегрируемы в Ω.

Для численного решения нашей задачи перейдем от непрерывной вариационной задачи (1.7) к дискретной при некотором разбиении $\mathcal{T}_h$ области Ω. Для этого введем конечномерные пространства $V_h \subset V$ и $\hat{V}_h \subset \hat{V}$ и определим в них следующую дискретную задачу: найти $p_h \in V_h$ такую, что для $\forall v_h \in \hat{V}_h$ удовлетворяет $a(p_h^{n+1}, v_h) = L(v_h)$, где

$$
\begin{aligned}
a(p_h^{n+1}, v_h) &= \int_\Omega c\frac{p_h^{n+1}}{\tau} v_h d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \left(\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p_h^{n+1}, \operatorname{grad} v_h\right) d\boldsymbol{x}, \\
L(v_h) &= \int_\Omega c\frac{p_h^n}{\tau} v_h d\boldsymbol{x} + \int_\Omega q^n v_h d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

В качестве базисных функций будем использовать простейшие непрерывные линейные финитные функции первого порядка. Для стандартного метода Галеркина, решение задачи и тестовые функции запишем в виде

$$
p_h = \sum_{i=1}^{N} p_i \phi_i, \;\; v_h = \sum_{i=1}^{N} \phi_i,
$$

где ϕ_i – кусочно-линейные базисные функции, а N – количество узлов расчетной сетки $\mathcal{T}_h$. Таким образом, соотношения (1.8) сводятся к системе алгебраических уравнений

$$
(M + \tau A)p^{n+1} = \tau g + Mp^n, \tag{1.9}
$$

где M и A – соответственно симметричные матрицы масс и жесткости, имею-

щие вид

$$M = \{m_{ij} = \int_\Omega c\phi_i\phi_j\,dx\},$$
$$A = \{a_{ij} = \int_\Omega \frac{k}{\mu}\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j\,dx\},$$
$$g = \{g_i = \int_\Omega q^n\phi_i\,dx\}.$$

Подход DFM основан на представлении трещин на неструктурированной сетке гранями конечных элементов. Предполагается, что толщина трещин очень тонкая и по ней давление не меняется, поэтому дискретизация трещин производится на одну размерность ниже с учетом толщины трещины. Далее результат аппроксимации уравнений на трещинах добавляется в глобальную матрицу.

Таким образом, уравнение (1.3) дискретизируется в пространстве размерности $d = 2, 3$ для пористой среды и в $(d-1)$-мерном пространстве для трещин (см. рис. 1.1). При моделировании трещин вся область Ω представляется в виде $\Omega = \Omega_m \cup (\cup_i\gamma_i)$, где индекс m относится к пористой среде, а индекс γ_i – к трещине. Запишем билинейную и линейную формы, которые соответствуют (1.7) с учетом наличия трещин:

$$\begin{aligned} a(p^{n+1}, v) &= \int_{\Omega_m} c_m\frac{p^{n+1}}{\tau}v d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_m}\left(\frac{k_m}{\mu}\operatorname{grad}p^{n+1}, \operatorname{grad}v\right)d\boldsymbol{x} \\ &+ \sum_i \alpha_i\int_{\gamma_i} c_f\frac{p^{n+1}}{\tau}v d\boldsymbol{x} + \sum_i\alpha_i\int_{\gamma_i}\left(\frac{k_f}{\mu}\operatorname{grad}p^{n+1}, \operatorname{grad}v\right)d\boldsymbol{x}, \\ L(v) &= \int_{\Omega_m} c_m\frac{p^n}{\tau}v d\boldsymbol{x} + \sum_i\alpha_i\int_{\gamma_i} c_f\frac{p^n}{\tau}v d\boldsymbol{x} + \int_\Omega q^n v d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

В этих выражениях γ_i и α_i – область и толщина i-ой трещины, $c_f = \phi_f^0 c_R$, ϕ_f^0 – пористость трещины γ_i, k_f – проницаемость среды трещин, а дискретные функции решения и тестовые функции для трещин имеют вид

$$p_h = \sum_{i=1}^N p_i\psi_i,\ v_h = \sum_{i=1}^N \psi_i,$$

где ψ_i – линейные базисные функции, которые определены только на трещинах.

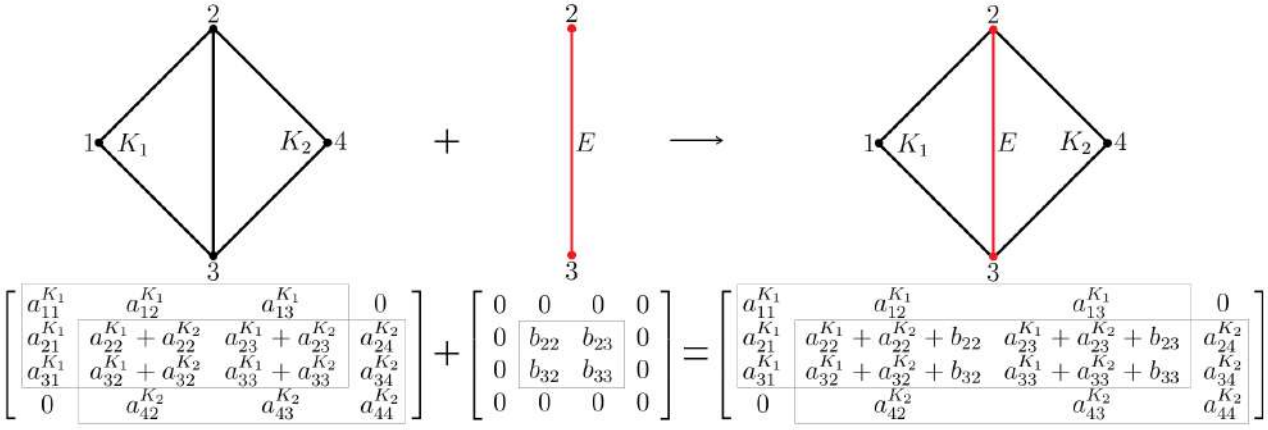


Рисунок 1.1: Иллюстрация аппроксимации DFM

Для понимания метода DFM рассмотрим на рис. 1.1 аппроксимацию матрицы масс двух треугольных конечных элементов K_1 и K_2, на пересечении которых имеется одномерная трещина E. Здесь элементы матрицы имеют следующий вид:

$$m_{ij}^{K_1} = \int_{K_1} c_m \phi_i \phi_j dx, \ i,j = 1,2,3,$$
$$m_{ij}^{K_2} = \int_{K_1} c_m \phi_i \phi_j dx, \ i,j = 2,3,4,$$
$$m_{ij}^{E} = \alpha \int_{E} c_f \psi_i \psi_j dx, \ i,j = 2,3.$$

Данные величины составляют в совокупности элементы локальных матриц масс, как это указано в схеме рис. 1.1.

1.4 Решение алгебраических систем

На каждом n-м шаге численного интегрирования по времени исходной начально-краевой задачи необходимо решать СЛАУ вида (1.9). Данная процедура осуществляется итерационно до выполнения условия достаточной мало-

сти евклидовой нормы вектора невязки

$$||r^{n+1,k}|| \leq \varepsilon_n ||r^{n+1,0}||, \quad \varepsilon_n \ll 1, \quad k = 1, ..., m_{n+1}, \tag{1.11}$$

где k есть номер текущей итерации, и

$$r^{n+1,k} = f^n - \Big(\frac{1}{\tau}M + A\Big)p^{n+1,k}, \quad f^n = g - \frac{1}{\tau}Mp^n \tag{1.12}$$

В силу (1.12), для приближенного решения $p_\epsilon^{n+1} = p^{n+1,m+1}$ алгебраической системы (1.9) справедливо соотношение [128]

$$\frac{1}{\tau}M + Ap_\varepsilon^{n+1} = g + \frac{1}{r}Mp^n - r_\varepsilon^{n+1}, \quad r_\varepsilon^{n+1} = r_\varepsilon^{n+1,m_n}. \tag{1.13}$$

С другой стороны для вектора $(p)_h^{n+1}$, компоненты которого суть значения точного решения в узлах пространственно-временной сетки, выполняется равенство

$$\Big(\frac{1}{\tau}M + A\Big)p_h^{n+1} = g + \frac{1}{\tau}Mp_h^n + \psi^n, \tag{1.14}$$

где $\psi^n = \psi_\tau^n + \psi_n^n = O(\tau + h)$ есть вектор суммарной временной и пространственной погрешностей аппроксимации. Отсюда для вектора полной ошибки численного решения z^{n+1} имеем:

$$\Big(\frac{1}{\tau}M + A\Big)z^{n+1} = \frac{1}{\tau}Mz^n + \psi^n + r_\varepsilon^{n+1}, \quad z^{n+1} = p_h^{n+1} - p_\varepsilon^{n+1}. \tag{1.15}$$

Из этого равенства следуют рекуррентные неравенства для векторных норм

$$||z^{n+1}|| \leq ||(I + \tau M^{-1}A)^{-1}||(||z^n|| + \tau||M|| \cdot ||\psi^n + r_\varepsilon^{n+1}||), \tag{1.16}$$

откуда при естественных предположениях о положительной полуопределенности матрицы $M^{-1}A$ и ограниченности нормы M^{-1} следует ограниченность нормы ошибки $||z^{n+1}||$ при численном интегрировании исходной задачи на ограниченном интервале по времени, поскольку $n = T/\tau$.

Из рассматриваемых соотношений определяется необходимость выполнения балансировки между величинами пространственной и временной аппроксимаций, а также итоговой невязки итерационного решения СЛАУ для каждого n. Для уменьшения количества итераций m_n актуальным является вопрос

выбора хорошего начального приближения $p^{n+1,0}$. При достаточно малом шаге τ простейшим способом является определение $p^{n+1,0} = p^n$. Естественным развитием данного подхода является использование схемы предиктор-корректор, т.е. предварительное применение явной схемы вместо (1.9):

$$p^{n+1} = p^n + \tau M^{-1}(g - Ap^n). \tag{1.17}$$

Дальнейшим усилением данного подхода может быть применение метода наименьших квадратов для уменьшения нормы начальной невязки $r^{n+1,0}$ путем дополнительного использования нескольких приближенных решений $p^n, p^{n-1}, ...$ с предыдущих временных слоев. При использовании только одного дополнительного шага (фактически тогда мы имеем трехслойную схему) получаем формулы:

$$p^{n+1,0} = p^n + c(p^n - p^{n-1}), \tag{1.18}$$

$$r^{n+1,0} = r^{n,m_n} - cA(p^n - p^{n-1}). \tag{1.19}$$

Отсюда по условию минимума $r^{n+1,0}$ для коэффициента c имеем

$$c = (w^n, r^{n,m_n})/(w^n, w^n), \quad w^n = A(p^n - p^{n-1}), \tag{1.20}$$

а начальное приближение вычисляется с помощью (1.18).

Для решения заданной достаточно большой СЛАУ с разреженной матрицей, хранящейся изначально в сжатом формате (конкретно, CSR — Compressed Sparse Row) в памяти одного процессора, применяется библиотека KRYLOV, которая предусматривает следующие технологические этапы:

- сбалансированная алгебро-геометрическая декомпозиция расчетной области (с заданным количеством сеточных слоев пересечения подобластей), то есть фактически проведение разбиения матрицы на блочные строки примерно одинакового размера и распределение полученных подсистем по различным MPI-процессам, при одновременной модификации околограничных уравнений для реализации различных типов интер-

фейсных условий (Дирихле, Неймана или Ньютона-Робена) на смежных узлах контактирующих подобластей;

- организация синхронного решения сформированных алгебраических подсистем в подобластях на соответствующих многоядерных процессорах, с реализацией "внутреннего" распараллеливания с помощью многопотоковых вычислений, при этом используются предобусловленные итерационные алгоритмы в подпространствах Крылова, а также осуществляется буферизация интерфейстных данных для подготовки последующих экономичных обменов между соседними MPI-процессами;
- выполнение внешнего итерационного процесса по подобластям на основе блочного метода Шварца-Якоби в подпространствах Крылова, с применением ускоряющих процедур грубосеточной коррекции, или агрегации, на основе малоранговой аппроксимации исходной матрицы.

Очевидно, что при многократном решении СЛАУ на различных шагах по времени повторяющиеся процедуры выполняются один раз до начала основных вычислений. Естественно также, что в массовых расчетах однотипных задач оптимальное планирование машинного эксперимента требует предварительных исследований по подбору алгоритмических параметров с выработкой практических рекомендаций, которые могут значительно повысить эффективность моделирования.

1.5 Вычислительные технологии

Существует множество вычислительных пакетов для численного моделирования задач фильтрации, одним из которых является вычислительная платформа FEniCS [129]. FEniCS – это платформа для автоматизированных решений дифференциальных уравнений с частными производными на основе метода конечных элементов. FEniCS был создан в 2003 году и разработан в сотрудничестве между исследователями из ряда университетов и исследовательских

институтов по всему миру. Пользователь должен указать в программе вариационную форму конечных элементов с соответствующей геометрией и информацией о сетке. Программное обеспечение FEniCS выполняет расчеты и сборку матрицы жесткости элементов для получения глобальной матрицы жесткости. Еще одним преимуществом FEniCS является относительная легкость расширения двумерного анализа до трехмерного. FEniCS состоит из программных компонентов, которые вместе образуют программное обеспечение: DOLFIN, FFC, FIAT, UFL, и другие. DOLFIN – это высокопроизводительный вычислительный сервер на C++ для FEniCS. DOLFIN реализует структуры данных, такие как сетки, функциональные пространства и функции, алгоритмы с интенсивными вычислениями, такие как сборка конечных элементов и уточнение сетки, а также интерфейсы с решателями линейной алгебры и структурами данных, такими как PETSc. DOLFIN также реализует среду решения проблем FEniCS как на C++, так и на Python. FFC – это механизм генерации кода FEniCS (компилятор форм), отвечающий за генерацию эффективного кода C++ из высокоуровневых математических абстракций. FIAT – это конечный элемент системы FEniCS, отвечающий за создание базисных функций конечных элементов, UFL реализует абстрактный математический язык, с помощью которого пользователи могут выражать вариационные задачи.

Для построения геометрической области используется программа Gmsh [130]. Gmsh является генератором сеток конечных элементов, разработанный Кристофом Геузеном и Жаном-Франсуа Ремаклем. Выпущенная под Стандартной общественной лицензией GNU, Gmsh является свободным программным обеспечением. Его цель разработки – предоставить быстрый, легкий и удобный инструмент для построения сеток с параметрическим вводом и расширенными возможностями визуализации. Gmsh построен на четырех модулях: геометрии, сетке, решателе и постобработке. Спецификация любого ввода в эти модули выполняется либо в интерактивном режиме с использованием

графического пользовательского интерфейса, в текстовых файлах ASCII с использованием собственного языка скриптов Gmsh (.geo файлы), либо с использованием интерфейса прикладного программирования (API) C++, C, Python или Julia.

Визуализация полученных результатов происходит с использованием программы Paraview [131]. ParaView – это многоплатформенное приложение для анализа и визуализации данных с открытым исходным кодом. В этой программе пользователи могут быстро создавать визуализации для анализа своих данных с использованием качественных и количественных методов. Исследование данных может выполняться в интерактивном режиме в 3D или программно с использованием возможностей пакетной обработки ParaView. ParaView был разработан для анализа чрезвычайно больших наборов данных с использованием вычислительных ресурсов с распределенной памятью. Его можно запускать на суперкомпьютерах для анализа наборов данных в петафлопсе, а также на портативных компьютерах для небольших данных.

1.6 Численное решение в двумерном случае

В данном пункте рассмотрим численное решение задачи (1.3)–(1.5) однофазной фильтрации с сетью трещин в двумерной и трехмерной постановках. Пористая среда предполагается однородной, но за счет трещин вся область Ω является сильно неоднородной. Разница между проницаемостью пористой среды и проницаемостью трещин задает эту неоднородность. Пусть $\eta = k_f/k_m$ – параметр неоднородности среды. Для исследования влияния этого параметра на сходимость итерационного метода, рассмотрим его с разными значениями $\eta = 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$, увеличивая только k_f по формуле $k_f = K_m\eta$. Толщину трещин α_i возьмем для всех трещин одинаковым $\alpha = 0,01$ м.

В данной работе аппроксимация уравнений и построение матриц происходит на вычислительной платформе FEniCS [129] с открытым исходным кодом

(LGPLv3). Решение СЛАУ осуществляется двухуровневыми итерационными процессами в подпространствах Крылова, предобуславливаемые с помощью аддитивного метода Шварца и декомпозиции расчетной области (при параллельных вычислениях) с параметризованными пересечениями подобластей, реализованные в библиотеке KRYLOV [104, 125, 127, 128]. Внешним и внутренним итерационным методом выступает FGMRES, а в подобластях использовался предобуславливатель Eisen (модификация алгоритма неполной факторизации Айзенштата).

Для численных экспериментов входные данные возьмем следующими: $\phi_m = 0.4$, $\phi_f = 1$, $c_R = 10^{-9}\text{Па}^{-1}$, $k_m = 10^{-15}\text{м}^2$, $\mu = 2 \cdot 10^{-3}\text{Па} \cdot \text{с}$, $\tau = 1$ сутки, $p_0 = 10$ МПа.

В данной задаче используется реальная модель пласта, которая находится на северо-западе Китая из работы [132]. Рассмотрим задачу в двумерной постановке с одним источником, моделирующую скважину (см. рис. 1.2. Область является квадратной со сторонами по 4 км. и имеет сеть трещин. Построим сетку с 13568 вершинами и 26814 треугольными элементами (см. рис. 1.2) с помощью свободно распространяемой программы Gmsh [133]. Сетка строится таким образом, что трещины являются гранями треугольных элементов.

Правая часть в уравнении (1.3) является источником $q = -PI(p^n(\boldsymbol{x}) - p_b)$, где $p_b = 10^5$ Па – призабойное давление, PI – коэффициент Писмана, которая имеет вид

$$PI = \frac{2\pi k H_3}{\mu log(r_e/r_w)}, \tag{1.21}$$

где $r_w = 0,1$ м – радиус скважины, $r_e = He^{-\pi/2} \approx 0.20788H$ – эквивалентный радиус (радиус Писмана) – радиус контура питания скважины, H_3 – высота скважины, H – расстояние от центра скважины до ближайщего узла.

Зависимость количества итераций N_{iter} в зависимости от параметра контрастности среды η представлена в таб. 1.1 и на рис. 1.3 а, б. Как известно, неоднородность среды влечет за собой увеличение числа обусловленности и

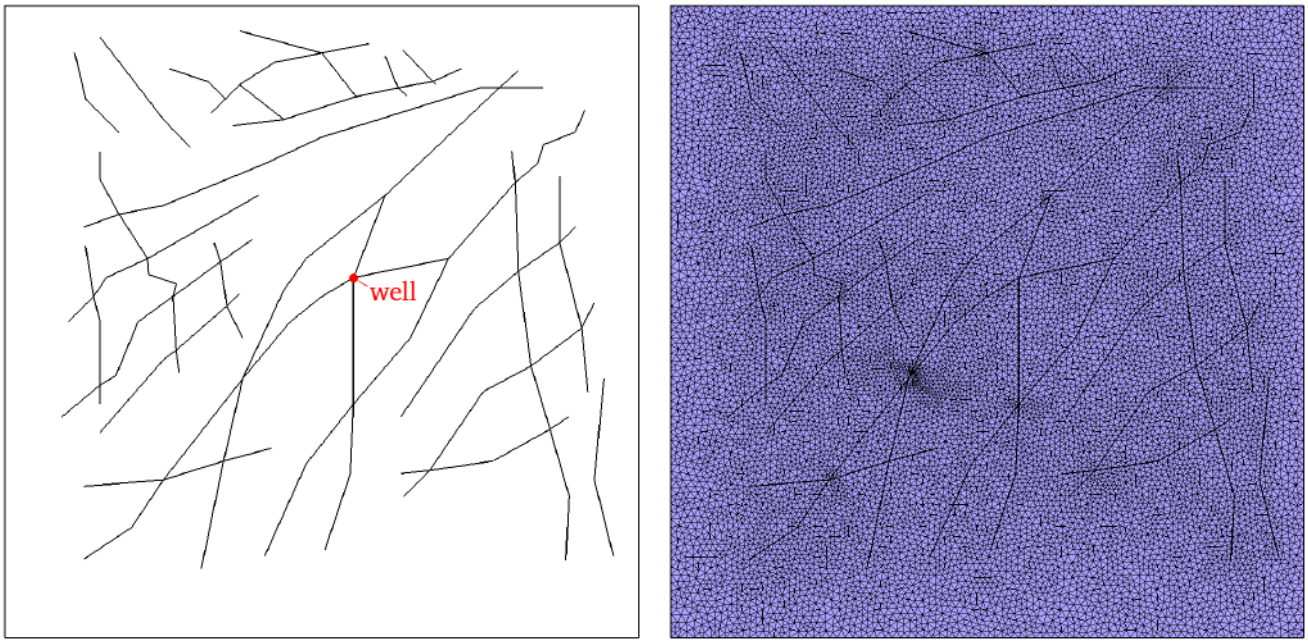


Рисунок 1.2: Геометрия и расчетная сетка.

количества итераций, что подтверждается приведенными данными.

№	**1**	**2**	**3**	**4**
N_{iter}	3.11	6.12	19.35	53

Таблица 1.1: Среднее количество итераций в зависимости от η

На Рис. 1.3 c, d показаны графики зависимости дебита и среднего давления, соответственно, от параметра η в каждый момент времени.

В DFM трещины являются высокопроницаемыми пустотами, и они определяют основное направление и плотность течения жидкости. На рис. 1.4 показано распределение поля давления p на конечный момент времени в зависимости от η, где при ее больших значениях основное течение идет по трещинам.

1.7 Численные результаты в трехмерном случае

В случае трехмерного моделирования трещины представляются в виде двумерных плоскостей. При построении трехмерной геометрии за основу была

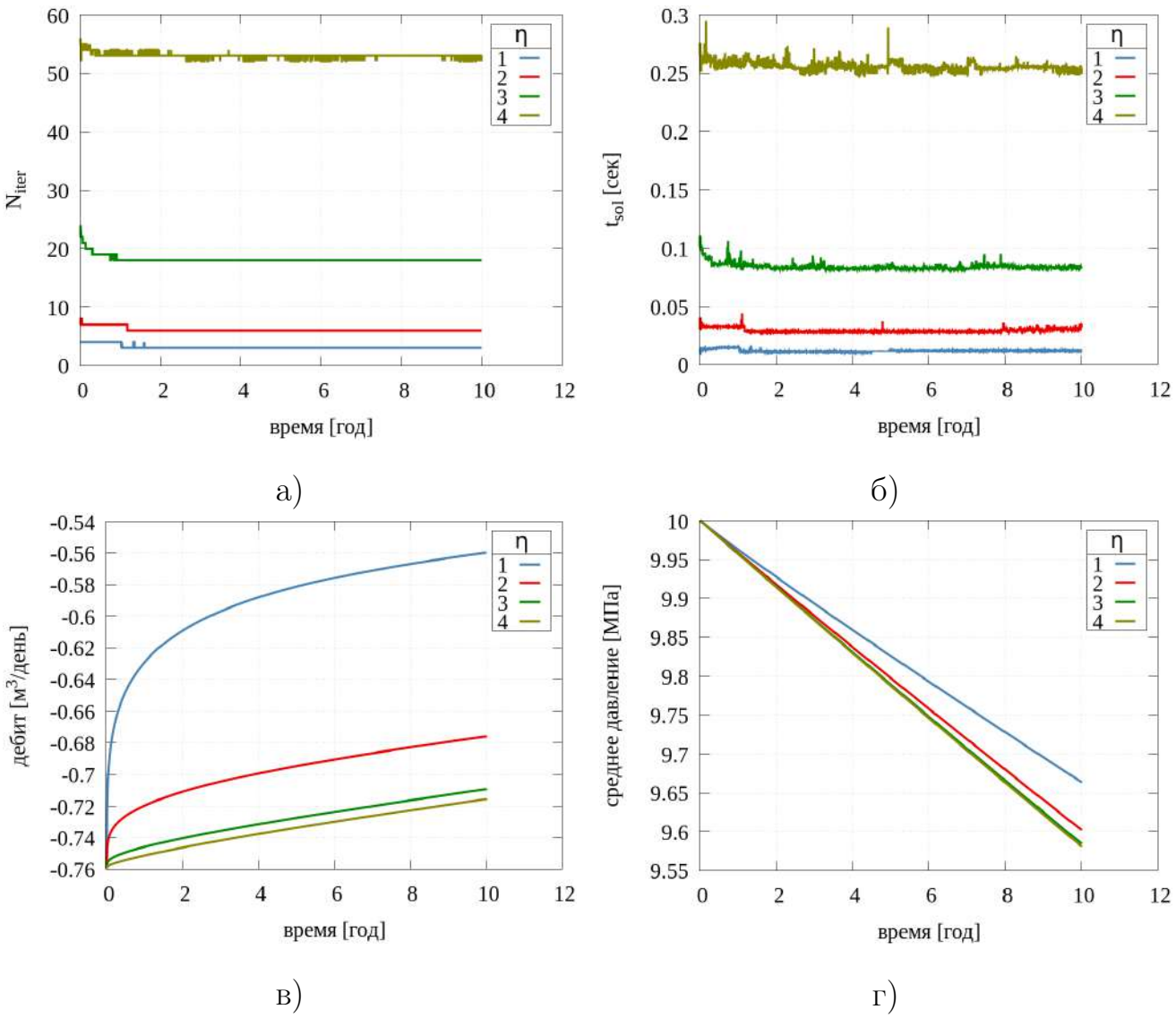


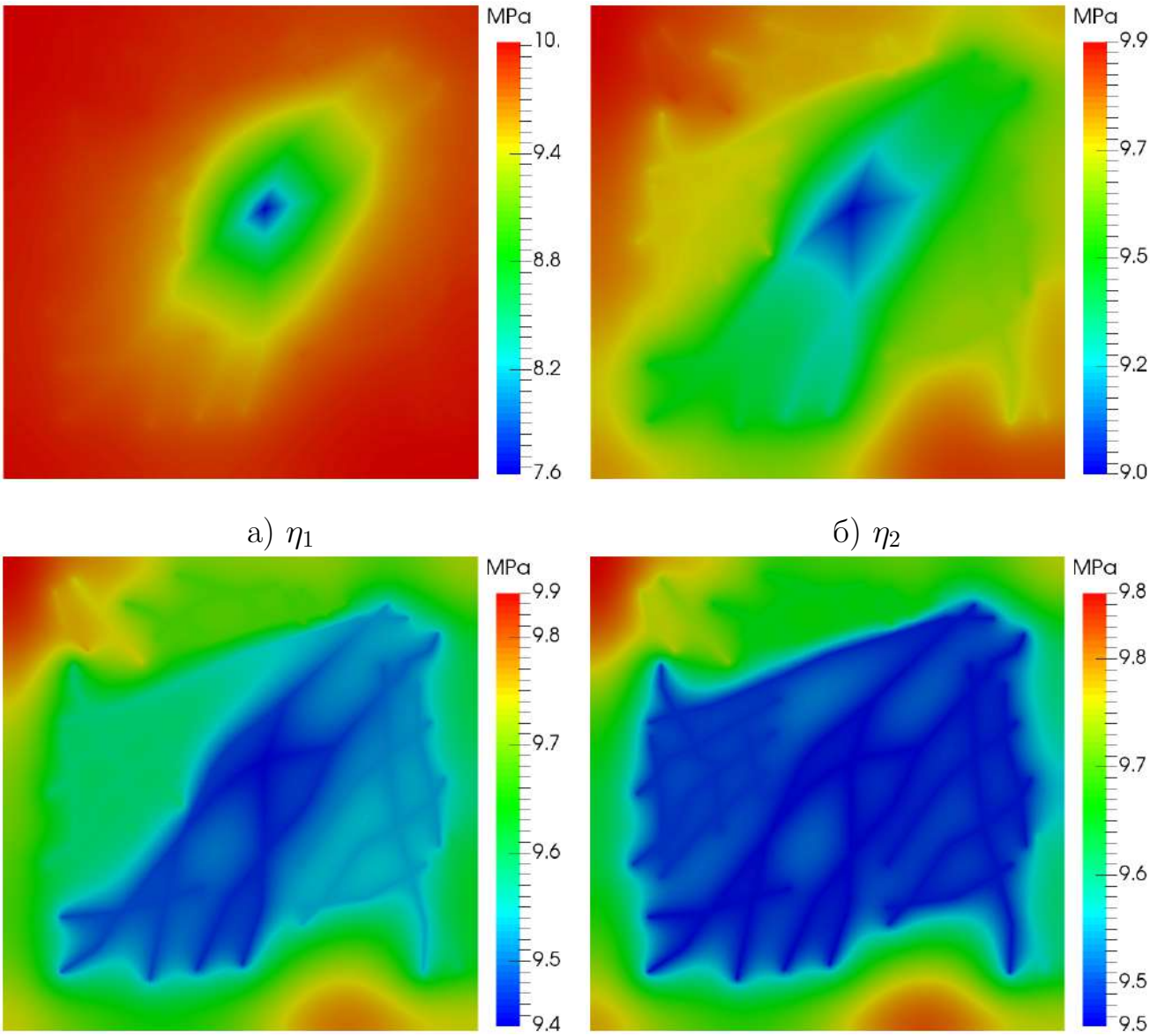
Рисунок 1.3: Графики количества итераций (а), времени решения (б), дебита скважины (в) и среднего давления (г) в зависимости от η

взята геометрия двумерной задачи (см. рис. 1.2). Область является параллелепипедом со сторонами по 4 км. и с высотой 300 м. Трещины распологаются вертикально по середине области и имеют высоту 200 м. (см. рис. 1.5 а).

Для исследования влияния параметра η на решение задачи сгенерируем следующие две сетки с разными количествами узлов и тетраэдральных элементов:

mesh 1: 720822 узлов и 3759775 элементов (см. Рис 1.5 б) и;

mesh 2: 1621228 узлов и 9358641 элементов (см. Рис 1.5 в).



а) η_1 б) η_2

в) η_3 г) η_4

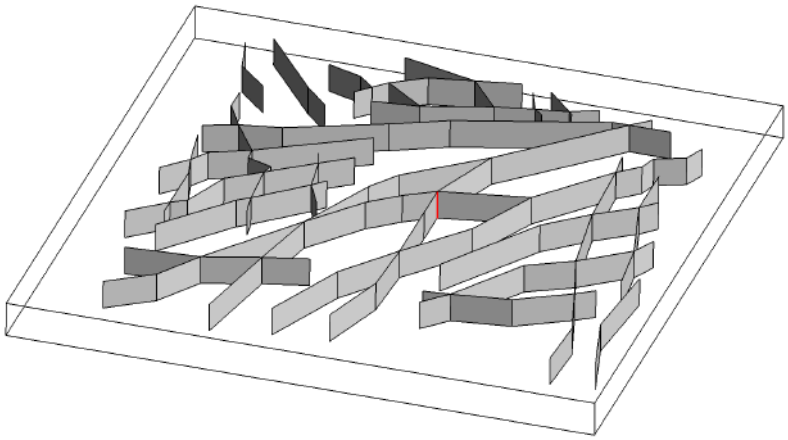
Рисунок 1.4: Распределение давления при $t = 10$ лет

Задача (1.3)–(1.5) решалась на вычислительном кластере НКС-1П Сибирского СуперКомпютерного Центра, использовались 20 узлов с Intel Xeon E5-2697v4 (2.6 Ггц, 16 ядер). Область разбивается на подобласти, количество которых равно количеству параллельных MPI-процессов. В таб. 1.2 представлены средние числа итераций и времена решения (в секундах) в зависимости от параметра η, где мы видим, что задача, запущенная на 16 MPI-процессах, показывает более быструю работу. При увеличении количества MPI-процессов

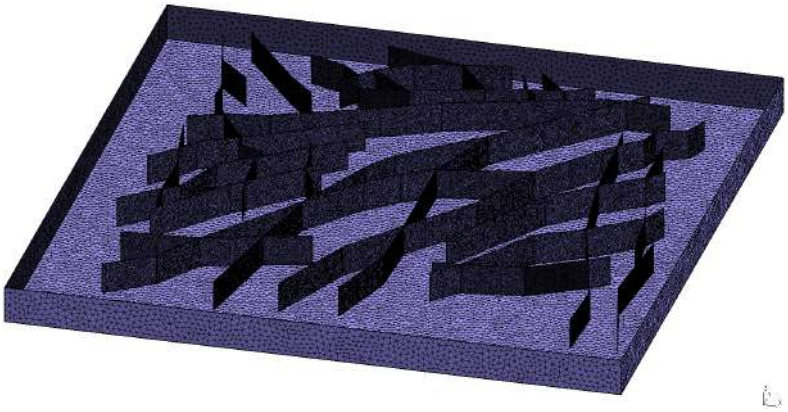
увеличивается количество итераций, но уменьшается время решения СЛАУ. Также из результатов следует, что при увеличении количества MPI-процессов уменьшается разрыв времени решения при различных параметрах проницаемости трещин k_f. На рис. 1.6 представлены решения задачи в момент времени 1 год при различных значениях параметра η на сетке **mesh 2**.

Сетка	η		**Количество процессов**					
			1	**2**	**4**	**8**	**12**	**16**
mesh 1 N = 720822	1	N_{iter}	7.31	8.31	19.79	19.82	19.8	19.77
		t_{sol}	8.18	2.28	2.67	1.57	1.3	1.2
	2	N_{iter}	20.86	20.77	56.35	55.21	54.66	52.72
		t_{sol}	22.01	5.71	7.73	3.9	2.79	2.14
	3	N_{iter}	63.35	62.01	194.59	191.27	184.71	177.79
		t_{sol}	68.1	17.08	27.2	12.7	8.34	5.79
mesh 2 N = 1621228	1	N_{iter}	8.47	26.63	30.86	37.82	38.27	37.31
		t_{sol}	24.38	19.45	10.01	7.04	6.25	4.34
	2	N_{iter}	24.73	33.55	49.28	90.1	91.24	91.37
		t_{sol}	67.05	24.03	15.69	16.03	13.42	8.6
	3	N_{iter}	73.36	77.76	199.84	564.15	416.8	347.4
		t_{sol}	202.03	61.43	65.29	95.24	56.75	28.07

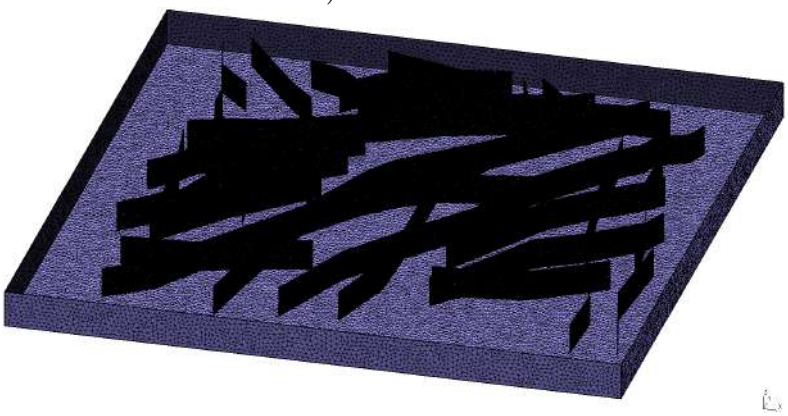
Таблица 1.2: Среднее количество итераций N_{iter} и время решения t_{sol} в зависимости от η



а) Геометрия

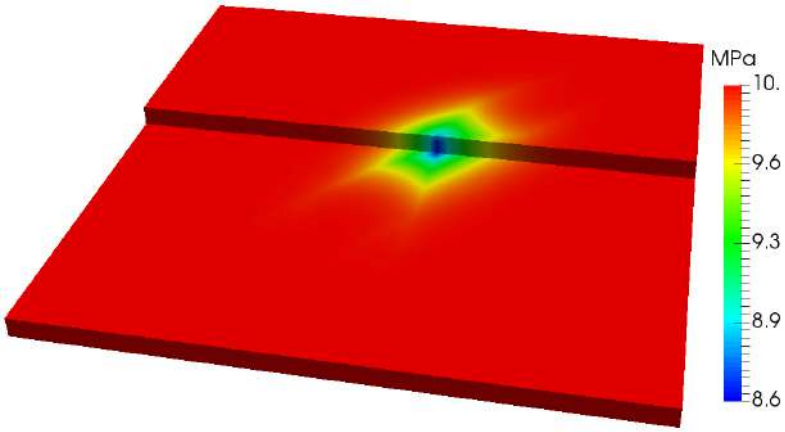


б) **mesh 1**

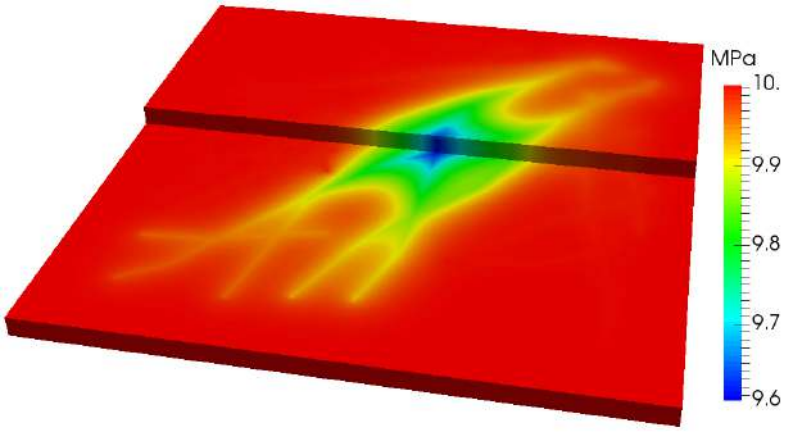


в) **mesh 2**

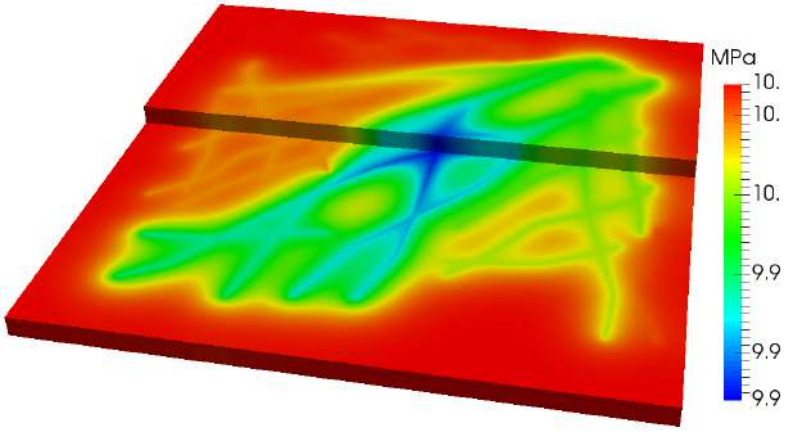
Рисунок 1.5: Геометрия и сетки в области 3D



а) η_1



б) η_2



в) η_3

Рисунок 1.6: Распределение давления при $t = 1$ год на сетке **mesh 2** при разных η

1.8 Выводы

Рассмотрена модель дискретных трещин DFM, которая моделирует трещины в явном виде. Было показано сильное влияние трещин на скорость течения жидкости при больших значениях проницаемости.

Для решения СЛАУ использовалась библиотека параллельных алгоритмов Krylov. Показана прямая зависимость числа итераций и времени решения от проницаемости трещин. Проведено численное исследование влияния проницаемости трещины на сходимость итерационного метода для задачи фильтрации в двумерной и трехмерной постановках.

Глава 2

Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов

В данной главе рассматривается численное решение задачи фильтрации в трещиноватой среде обобщенным многомасштабным методом конечных элементов. На примере задачи однофазной фильтрации приводится построение многомасштабного пространства базисных функций. Предлагаются два новых способа построения вычислительных сеток на грубом масштабе. Численно сравниваются решения, полученные с помощью предлагаемых многомасштабных методов, с решениями на мелкой (эталонной) сетке.

2.1 Постановка задачи

Рассматривается задача однофазной фильтрации в расчетной области Ω (рис. 2.1)

$$\begin{aligned} c\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{k(x)}{\mu}\operatorname{grad} p\right) = 0, \quad x \in \Omega, \\ p(x,0) = p_0(x), \quad x \in \Omega, \\ p(x) = p_D, \quad x \in \Gamma_D, \\ -\frac{k(x)}{\mu}\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_N, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где коэффициент проницаемости $k(x)$ зависит от среды, который на трещинах имеет более высокое значение чем в пористой среде.

Для дискретизации уравнения (2.1) введем понятия грубой и мелкой сетки. Пусть $\mathcal{T}_H$ конформное разбиение вычислительной области Ω на конечные элементы. Обозначим это разбиение как грубую сетку и предположим, что каждый грубый элемент разбит на связное объединение элементов мелкой сетки. Мелкое разбиение сетки будет обозначаться через $\mathcal{T}_h$ и по определению являет-

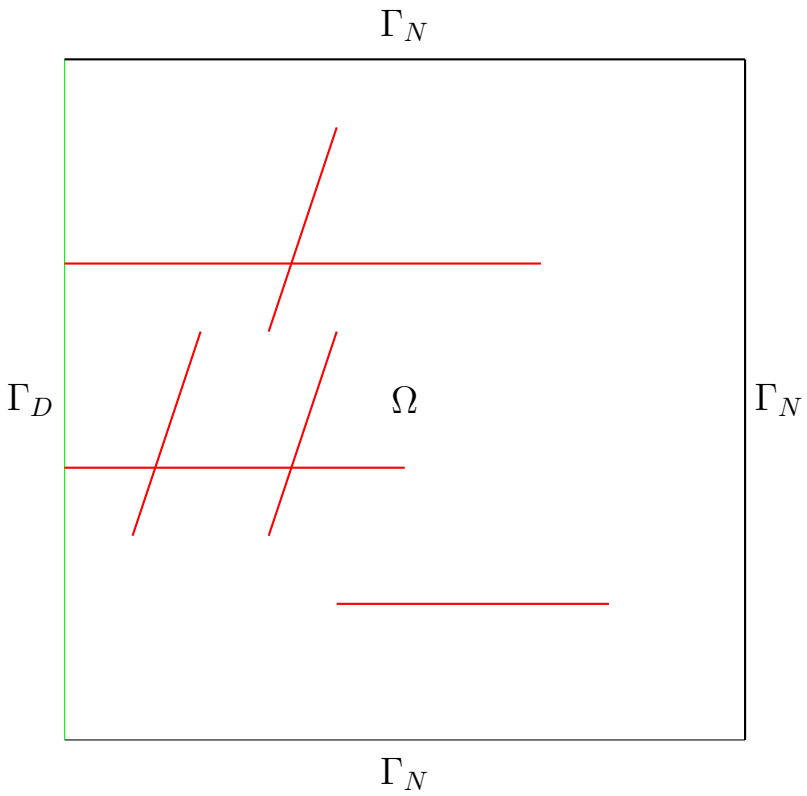


Рисунок 2.1: Область Ω.

ся измельчением грубой сетки $\mathcal{T}_H$. Обозначим через $\{x_i\}_{i=1}^N$ вершины грубого разбиения $\mathcal{T}_H$, где N – количество грубых вершин, и определим для каждой вершины x_i их окрестности через

$$\omega_i = \cup\{K_j \in \mathcal{T}_H; \quad x_i \in \overline{K_j}\}.$$

На рис. 2.2 иллюстрированы окрестность ω_i, который соответствует грубой вершине x_i и элемент K_j. Объединение грубых ячеек вокруг вершины x_i является локальной областью ω_i. Мы подчеркиваем использование ω_i для обозначения грубой окрестности, а K_j для обозначения грубого элемента на протяжении всей диссертации.

Здесь рассматривается непрерывная формулировка Галеркина (CG). ω_i обозначается как носитель базисных функций. Базисные функции обозначаются через $\psi_k^{\omega_i}$, которые определены в ω_i, а индекс k представляет нумерацию этих базисных функций. В свою очередь, решение представляется в следую-

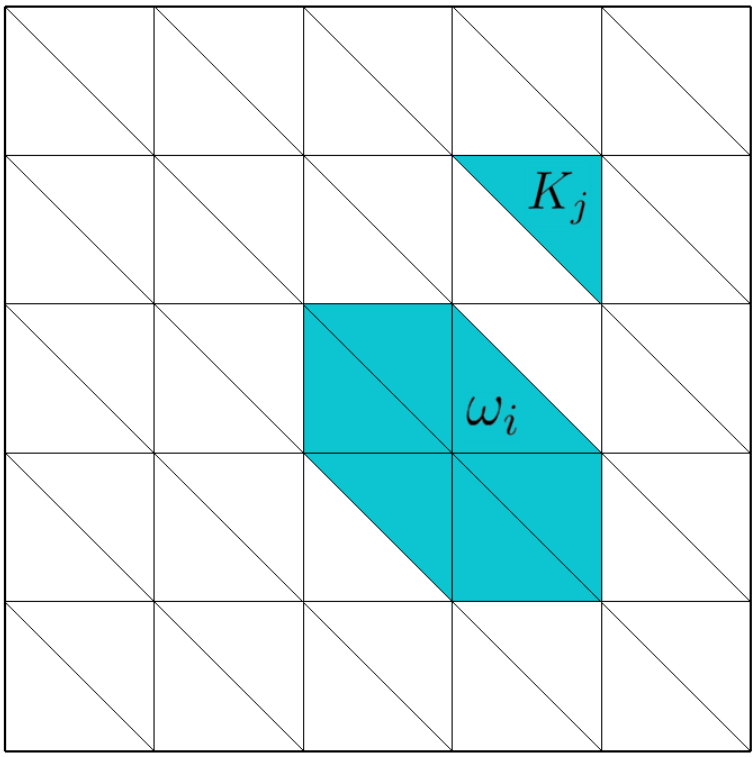


Рисунок 2.2: Пример грубой сетки, локальной подобласти ω_i и грубого элемента K_j.

щем виде

$$p_{\text{ms}}(x) = \sum_{i,k} c_k^i \psi_k^{\omega_i}(x).$$

После определения многомасштабных базисных функций, глобальная связь CG задается через вариационную форму

$$a(p_{\text{ms}}, v) = L(v), \quad \forall v \in V_{\text{off}},$$

где V_{off} – пространство, охватываемое этими базисными функциями, и билинейная и линейная формы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a(p_{\text{ms}}^{n+1}, v) &= \int_\Omega c\frac{p_{\text{ms}}^{n+1}}{\tau} v d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \left(\frac{k(x)}{\mu} \operatorname{grad} p_{\text{ms}}^{n+1}, \operatorname{grad} v \right) dx, \\ L(v) &= \int_\Omega c\frac{p_{\text{ms}}^{n}}{\tau} v dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Пусть V – пространство конечных элементов, который соответствует разбиению $\mathcal{T}_h$ для мелкой сетки. Предположим, что $p \in V$ - мелкомасштабное

решение, удовлетворяющее

$$a(p, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \tag{2.3}$$

где билинейная и линейная формы, с учетом течения в трещинах как было показано ранее, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} a(p^{n+1}, v) = \int_{\Omega_m} c_m \frac{p^{n+1}}{\tau} v dx + \int_{\Omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \operatorname{grad} p^{n+1}, \operatorname{grad} v \right) dx \\ + \sum_i \alpha_i \int_{\gamma_i} c_f \frac{p^{n+1}}{\tau} v dx + \sum_i \alpha_i \int_{\gamma_i} \left(\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} p^{n+1}, \operatorname{grad} v \right) dx, \\ L(v) = \int_{\Omega_m} c_m \frac{p^n}{\tau} v dx + \sum_i \alpha_i \int_{\gamma_i} c_f \frac{p^n}{\tau} v dx. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Приближенное решение уравнения (2.3) находится как линейная комбинация известных простых функций для пористой среды

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_i^N p_i \psi_i(\boldsymbol{x}), \quad v(\boldsymbol{x}) = \sum_i^N \psi_i(\boldsymbol{x}), \tag{2.5}$$

и для трещин

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_i^N p_i \phi_i(\boldsymbol{x}), \quad v(\boldsymbol{x}) = \sum_i^N \phi_i(\boldsymbol{x}), \tag{2.6}$$

тогда подставляя (2.5) и (2.6) в (2.3) и учитывая (2.4) получим следующую СЛАУ:

$$Ap = F,$$

где A и F выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered} A = [a_{ij}] = \int_{\Omega_m} c_m \frac{\psi_i}{\tau} \psi_j dx + \int_{\Omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \operatorname{grad} \psi_i, \operatorname{grad} \psi_j \right) dx \\ + \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} c_f \frac{\phi_i}{\tau} \phi_j dx + \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} \phi_i, \operatorname{grad} \phi_j \right) dx, \\ F = [f_i] = \int_{\Omega_m} c_m \frac{p^n}{\tau} \psi_i dx + \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} c_f \frac{p^n}{\tau} \phi_i dx. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Полученные элементы матрицы A и правой части F в последующем будут применяться для численных алгоритмов решения задачи многомасштабными методами.

2.2 Численный алгоритм ОММКЭ

В данной главе описывается алгоритм ОММКЭ для задачи фильтрации в неоднородных, в нашем случае, в трещиноватых средах. Более детально про ОММКЭ можно найти в следующих работах [72, 75]. Далее дается общее описание ОММКЭ [134]:

- построение вычислительной сетки на грубом масштабе;
- построение вспомогательного пространства, которое будет использоваться для вычисления автономного пространства;
- построение автономного пространства путем уменьшения размерности во вспомогательном пространстве.

В приведенном выше алгоритме автономное пространство можно использовать повторно, если изменить граничные и начальные условия задачи (2.1). Грубая сетка строится с учётом вычислительной области. Локальные задачи вычисляются на локальных подобластях ω_i, чтобы получить вспомогательные пространства. Затем из этих вспомогательных пространств получаются автономные пространства путем уменьшения размерности дискретной задачи с помощью некоторых спектральных задач.

Локальные базисные функции

Здесь рассматривается алгоритм построение многомасштабных базисных функций путем решения спектральных задач во вспомогательном пространстве. Во-первых, строится вспомогательное пространство $V_{\text{snap}}^{\omega_i}$ для каждой локальной подобласти ω_i. Вспомогательное пространство может быть пространством всех мелкомасштабных базисных функций или решений некоторых локальных задач с различными вариантами граничных условий. Для задачи фильтрации в трещиноватых средах функции вспомогательного пространства вычисляются используя соответствующую дискретизацию на мелкой сетке с учетом распределения трещин. В частности, с учетом мелкомасштабной

кусочно-линейной функции $\delta_j^h(x)$, определенной на $\partial\omega_i$, определяются $\psi_j^{\omega_i,\mathrm{snap}}$, как решения следующего уравнения:

$$-\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}\psi_j^{\omega_i,\mathrm{snap}}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \omega_i, \tag{2.8}$$

с граничным условием Дирихле

$$\psi_j^{\omega_i,\mathrm{snap}} = \delta_j^h(x), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\omega_i. \tag{2.9}$$

Здесь функция $\delta_j^h(x)$ принимает значение 1 при $x = x_j$, а в остальных точках обращается в ноль. Задача (2.8)–(2.9) имеет столько решений, сколько имеется вершин на границе $\partial\omega_i$. Локальная задача решается с учетом распределения трещин.

Для краткости обозначений опускается верхний индекс ω_i, однако предполагается, что вычисления автономного пространства локализованы для соответствующих грубых подобластей. Пусть l_i будет количеством функций во вспомогательном пространстве в области ω_i, тогда вспомогательное пространство будет следующим:

$$V_{\mathrm{snap}} = \operatorname{span}\{\psi_j^{\mathrm{snap}} : 1 \le j \le l_i\}.$$

Далее определяется оператор перехода

$$R_{\mathrm{snap}} = [\psi_1^{\mathrm{snap}}, \ldots, \psi_{l_i}^{\mathrm{snap}}].$$

Для построения автономного пространства V_{off} в локальной подобласти ω_i, выполняется уменьшение размера в локальном вспомогательном пространстве, используя вспомогательное спектральное разложение. Анализ в работе [135] мотивирует на следующую задачу на собственные значения в пространстве V_{snap}:

$$A^{\mathrm{off}}\Psi_k^{\mathrm{off}} = \lambda_k^{\mathrm{off}} B^{\mathrm{off}}\Psi_k^{\mathrm{off}}, \tag{2.10}$$

где

$$A^{\text{off}} = R_{\text{snap}}^T A R_{\text{snap}},$$
$$B^{\text{off}} = R_{\text{snap}}^T B R_{\text{snap}}.$$

Здесь A и B мелкомасштабные матрицы как

$$A = [a_{ij}] = \int_{\omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j \right) dx + \sum_l \alpha_l \int_{\omega,\gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} \phi_i, \operatorname{grad} \phi_j \right) dx,$$
$$B = [s_{ij}] = \int_{\omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \psi_i \psi_j \right) dx + \sum_l \alpha_l \int_{\omega,\gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu} \phi_i, \phi_j \right) dx.$$

Для построения автономного пространства мы должны выбрать первые M_{off}^{ω} наименьшие собственные значения после решения задачи (2.10) и сформируются соответствующие собственные векторы во вспомогательном пространстве, задав

$$\psi_k^{\text{off}} = \sum_{j=1}^{\text{off}} \Psi_{kj}^{\text{off}} \psi_j^{\text{snap}}, \quad k = 1, \ldots, M_{\text{off}}^{\omega},$$

где Ψ_{kj}^{off} - координаты вектора ψ_k^{off}.

Глобальная формулировка

Здесь обсуждается построение автономного пространства и вариационная формулировка непрерывного приближения уравнения (2.2). Алгоритм начинается с начального грубого пространства

$$V_0^{\text{init}} = \operatorname{span}\{\chi_i\}_{i=1}^N.$$

Через N обозначается число грубосеточных вершин. Здесь χ_i – стандартная многомасштабная базисная функция разбиения единицы (рис. 2.4), определяемая как решение следующего уравнения

$$-\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} \chi_i) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in K, \tag{2.11}$$

с граничным условием

$$\chi_i = g_i, \quad \boldsymbol{x} \in \partial K, \tag{2.12}$$

для всех $K \in \omega_i$. Здесь, g_i непрерывная функция на ∂K и линейна для каждого ∂K. Функция g_i принимает значение 1 на грубомасштабной вершине x_i и 0 на других вершинах.

Далее, для получения базисных функций (рис. 2.4), функции χ_i умножаются на собственные векторы ψ_k^{off} (рис. 2.4) в автономном пространстве V_{off}

$$\psi_{i,k} = \chi_i \psi_k^{\omega_i,\text{off}},\ 1 \le i \le N,\ 1 \le k \le M_{\text{off}^{\omega_i}}, \tag{2.13}$$

где M_{off} – число собственных векторов, которое может быть различным в каждой ω_i. Отметим, что построение в формуле (2.13) дает непрерывные базисные функции. Далее, определяется непрерывное спектральное многомасштабное пространство Галеркина как

$$V_{\text{off}} = \text{span}\{\psi_{i,k} : 1 \le i \le N,\ 1 \le k \le M_{\text{off}}^{\omega_i}\}.$$

Используя одну индексную запись, мы можем записать $V_{\text{off}} = \text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{N_c}$, где $N_c = \sum_{i=1}^{N} M_{\text{off}}^{\omega_i}$ обозначает общее количество базисных функций в пространстве V_{off}. Также для дальнейшего использования построим операторную матрицу

$$R^T = [\psi_1, \ldots, \psi_{N_c}],$$

где ψ_i используются для обозначения узловых значений каждой базисной функции, определенной на мелкой сетке.

Далее, матрица перехода R и аппроксимация на мелком масштабе (2.4) используются, чтобы решить следующую систему алгебраических уравнений на грубом масштабе:

$$A_c p_c = F_c,\ A_c = RAR^T,\ F_c = RF, \tag{2.14}$$

где элементы матрицы A и правой части F используются из (2.7).

После решения системы (2.14) можно перейти от решения на грубом масштабе к решению на мелком масштабе используя также оператор перехода R

и решение p_c

$$p_{\text{ms}} = R^T p_c, \tag{2.15}$$

где p_{ms} – мелкомасштабное решение, полученное с помощью многомасштабного метода.

2.3 Численное решение на грубых сетках с треугольными элементами

Для численного решения задачи обобщенным многомасштабным методом сначала построим мелкую сетку, которой соответствуют две грубые сетки. Мелкая сетка построена с учетом элементов грубых сеток. Как видно на рис. 2.3, грубые сетки не разрешают трещины и являются структурированными с треугольными элементами. Грубая **сетка 1** имеет 121 вершин и 200 грубых треугольных элементов, а грубая **сетка 2** имеет 441 вершин и 800 элементов. Мелкая сетка имеет 101178 вершин и 201232 элементов. Сеть трещин изображена красными отрезками, которые являются гранями элементов подробной сетки.

Вычислительная область является квадратной и имеет размер 80. Все коэффициенты имеют обезразмеренную величину, которые имеют следующие значения: $c_m = 0.1,\ k_m = 1 \times 10^{-2},\ \mu = 1,\ \alpha = 1,\ c_f = 0.01,\ k_f = 1 \times 10^3,\ p_0 = 1,\ p_D = 10$.

Для данных грубых сеток функции разбиения единицы имеют вид, как показано на рис. 2.4. Так как грубые сетки являются структурированными, то стандартные многомасштабные функции разбиения единицы χ_i являются аналогами стандартных базисных функций Лагранжа первой степени с учетом трещин. Для той же подобласти ω_i на рис. 2.4 показан второй собственный вектор, т.к. первый собственный вектор всегда является постоянным. После умножения функции χ_i на второй собственный вектор получаем вторую мно-

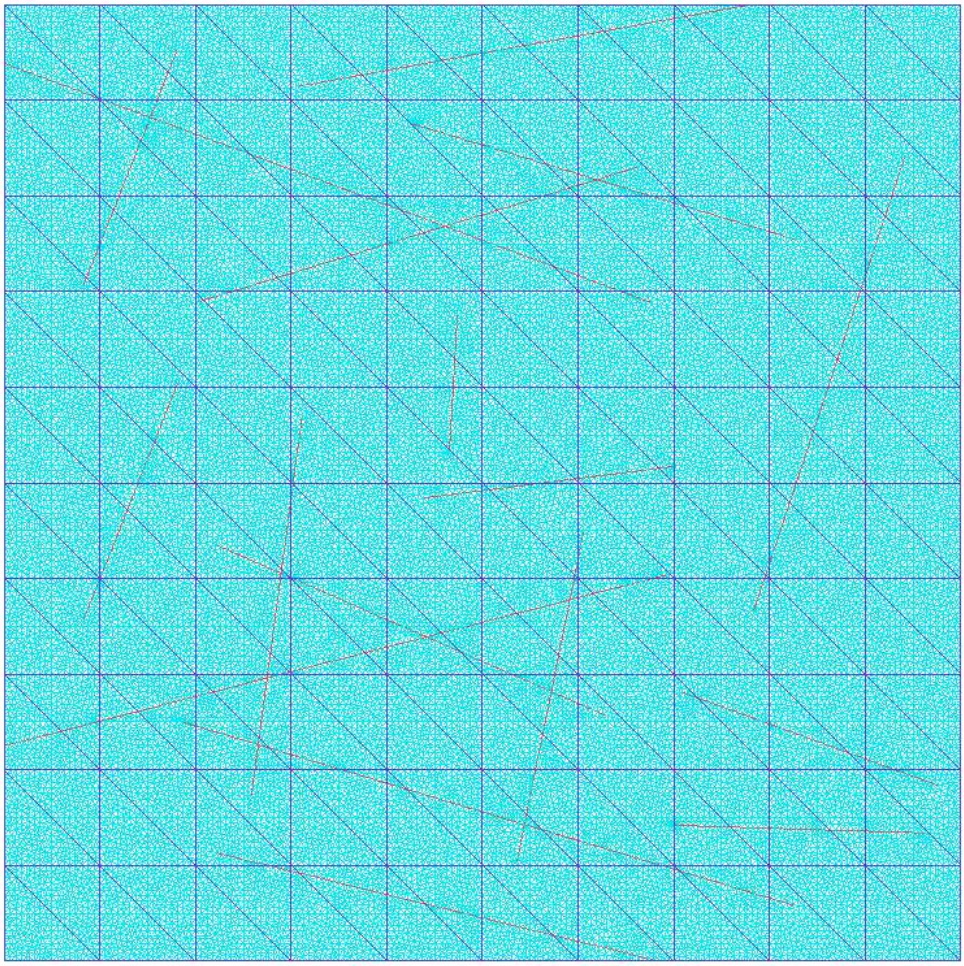


Рисунок 2.3: Иллюстрация грубой **сетки 1**.

гомасштабную базисную функцию (см. рис. 2.4).

Для апробации многомасштабного подхода сравниваем решение, полученное на грубой сетке, с решением на мелкой сетке. Относительную погрешность в L^2 и H^1 вычисляем в каждый момент времени следующим образом:

$$||e||_{L^2} = ||p_1 - p_2||_{L^2}/||p_1||_{L^2},\ ||e||_{H^1} = ||p_1 - p_2||_{H^1}/||p_1||_{H^1}$$

где $||p||_{L^2} = \int_{\Omega_m} p^2 dx,\ ||p||_{H^1} = \int_{\Omega_m} (\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} p) dx$, p_1 – решение на мелкой сетке и p_2 – многомасштабное решение.

На таб. 2.1 и 2.2 дана погрешность в конечный момент времени в зависимости от используемого количества базисных функций для грубой **сетки 1** и грубой **сетки 2**, соответственно. Видно, что при увеличении количества применяемых базисных функций падает погрешность, что показывает сходимость

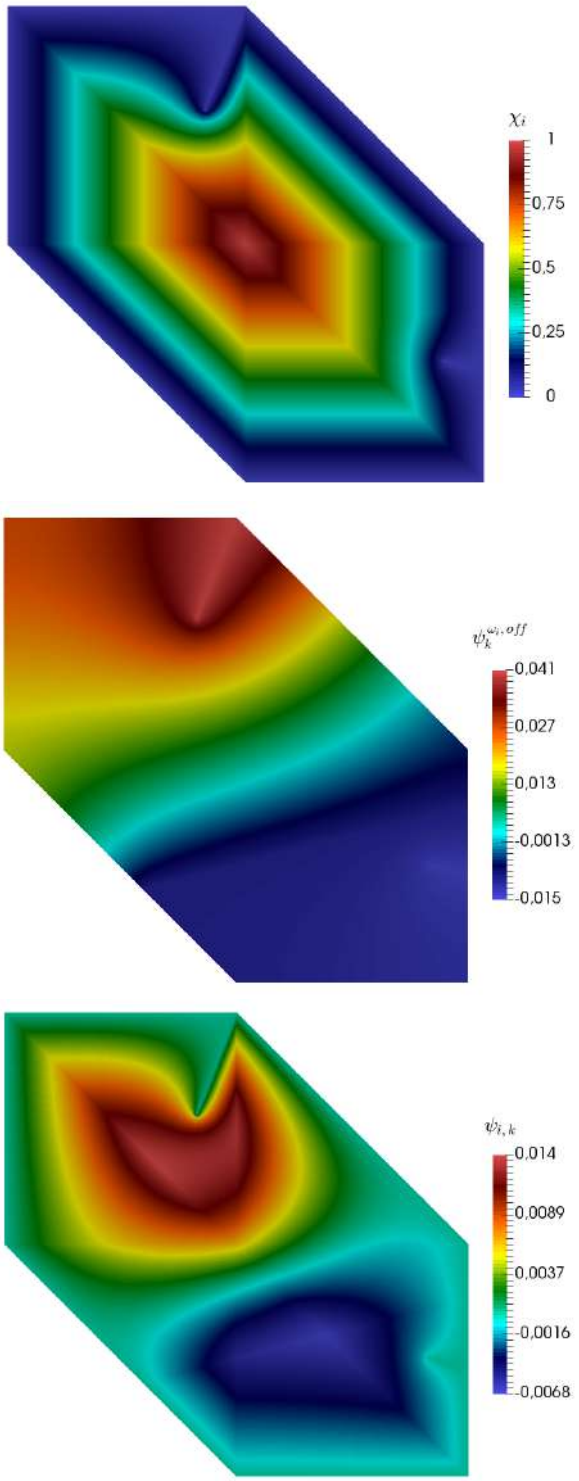


Рисунок 2.4: Иллюстрация (сверху вниз): функции разбиения единицы, некоторого собственного вектора и результата их умножения – многомасштабной базисной функции.

по базисам. Для грубой **сетки 1** нужно 16 базисных функций для достижения приемлемых результатов, в то время как для грубой **сетки 2** достаточно 8 базисов. При переходе с 2 базисов к 4 базисам особенно сильно увеличивается прирост точности решения. На рис. 2.5 показаны решения на момент времени $t = 5$ на мелкой сетке и на грубой **сетке 1**, где M – показывает количество используемых базисных функций. Видно, что при $M = 16$ решение полученное многомасштабным методом практически одинаково с решением на мелкой сетке. На рис. 2.6 также показаны решения на грубой **сетке 2**, где при $M = 8$ получаем достаточно точные результаты.

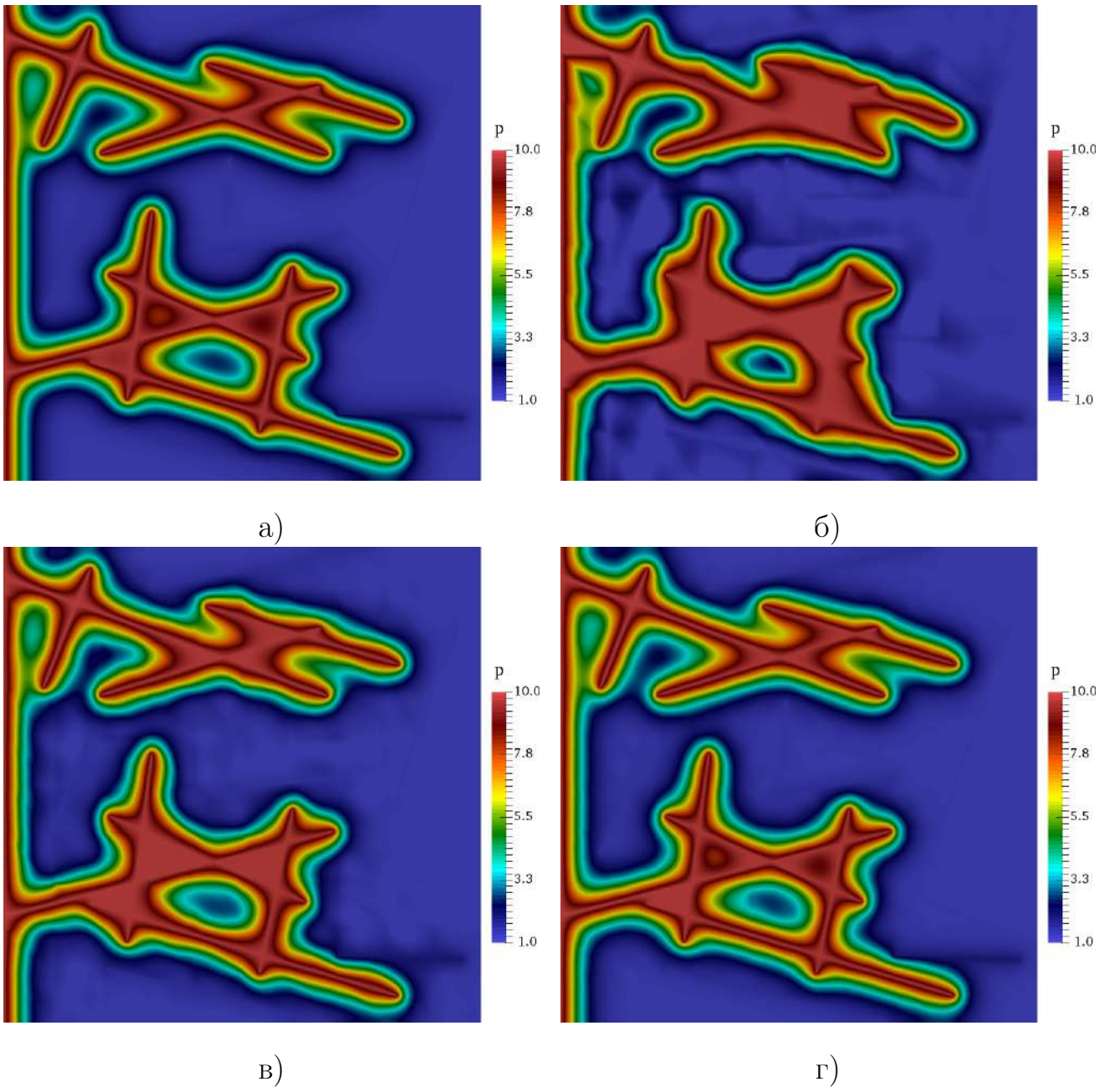


Рисунок 2.5: Распределения давления на грубой **сетке 1** при $t = 5$: а) на мелкой сетке, б) $M = 4$, в) $M = 8$ и г) $M = 16$.

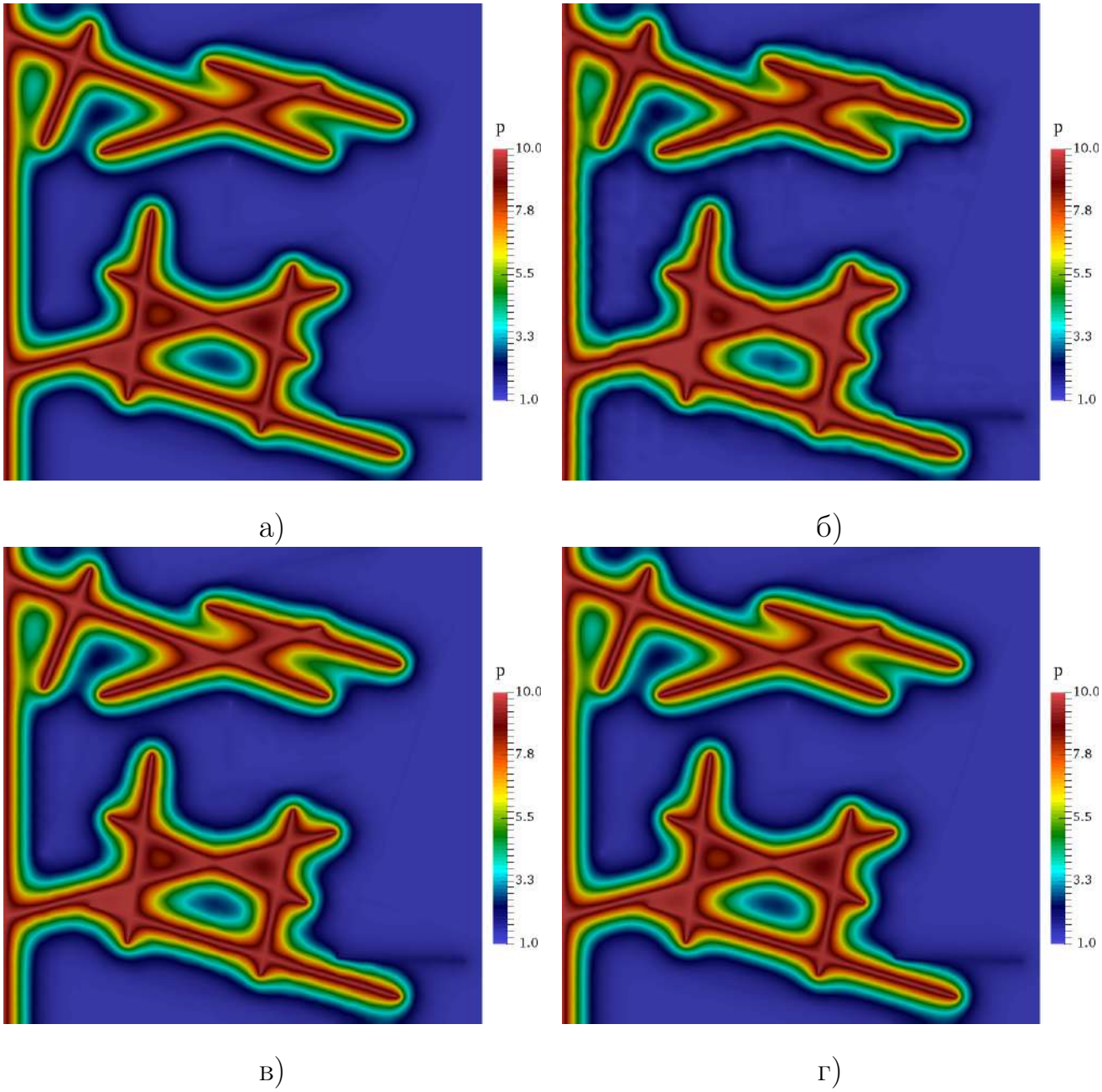


Рисунок 2.6: Распределения давления на грубой **сетке 2** при $t = 5$: а) на мелкой сетке, б) $M = 4$, в) $M = 8$ и г) $M = 16$.

2.4 Численное решение на грубых сетках с квадратными элементами

Рассмотрим другой подход построения грубой сетки. В частности, рассмотрим случай, когда элементы грубой сетки являются прямоугольными, в нашем случае, квадратными (см. рис. 2.7). Как и в случае стандартных конечных элементов, при многомасштабном численном моделировании можно использовать треугольные, прямоугольные, криволинейные и т.п. элементы. Преимуществом квадратных грубых элементов является то, что такие грубые элементы содержат больше мелких элементов относительно треугольных, а значит хранят больше информации мелкого масштаба. Таким образом, предполагается, что такой подход должен давать более точные результаты относительно треугольных. Важно отметить, что элементы мелкой сетки могут быть какими угодно, главное они должны разрешать (содержать) элементы и грани грубой сетки. В нашем случае, мы также будем использовать треугольные элементы на мелком масштабе. Грубая **сетка 1** имеет 121 вершин и 100 грубых квадратных элементов, а грубая **сетка 2** имеет 441 вершин и 400 элементов. Мелкая сетка имеет 105024 вершин и 208924 элементов.

Как и в случае треугольных грубых элементов, функции разбиения единицы χ_i имеют вид, как показано на рис. 2.8 а). Для той же подобласти ω_i рассмотрим второй собственный вектор рис. 2.8 б). После умножения функции χ_i на второй собственный вектор получаем вторую многомасштабную базисную функцию рис. 2.8 в).

Как видно на таб. 2.1 и 2.2, погрешность падает при увеличении количества применяемых базисных функций и увеличении количества грубых элементов. Как и предполагалось, данный подход немного лучше чем подход при использовании треугольных грубых элементов. Это особенно заметно при использовании меньшего количества базисных функций. На рисунках 2.9 также

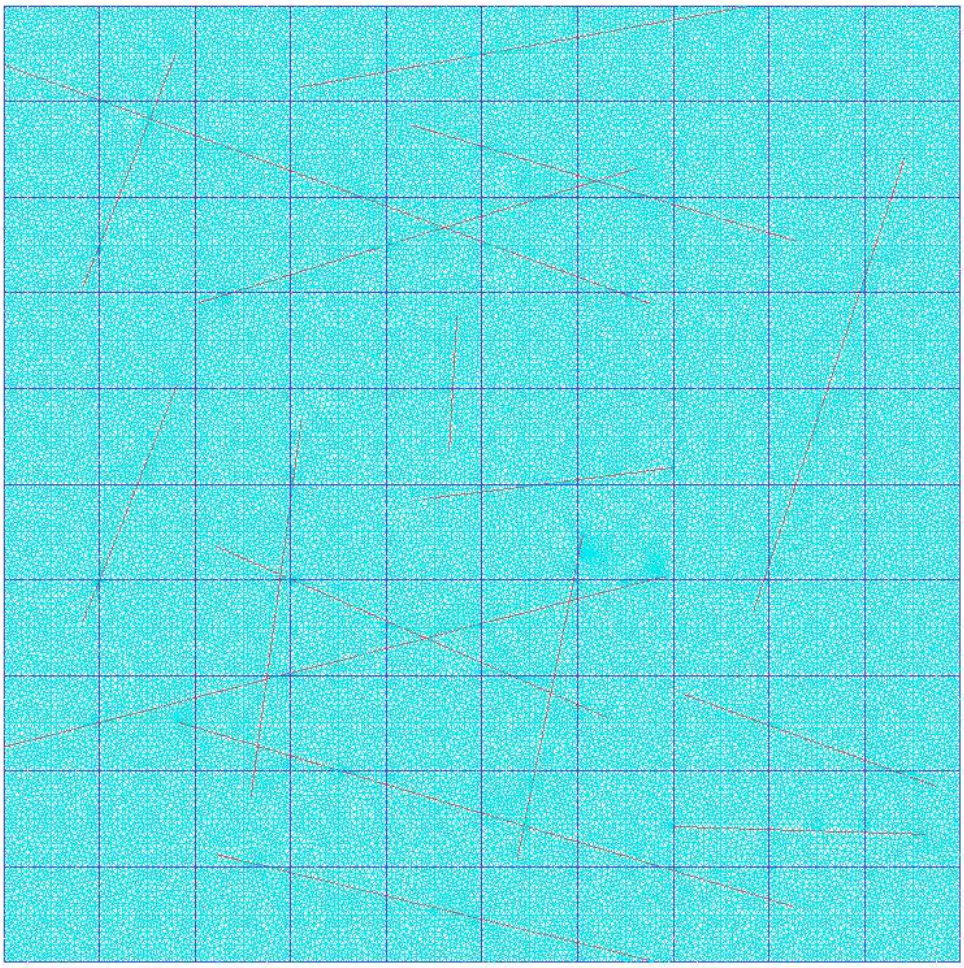


Рисунок 2.7: Иллюстрация грубой **сетки 1**.

показаны решения на момент времени $t = 5$ на мелкой сетке и на грубой **сетке 1** и на рис. 2.10 также показаны решения на грубой **сетке 2**.

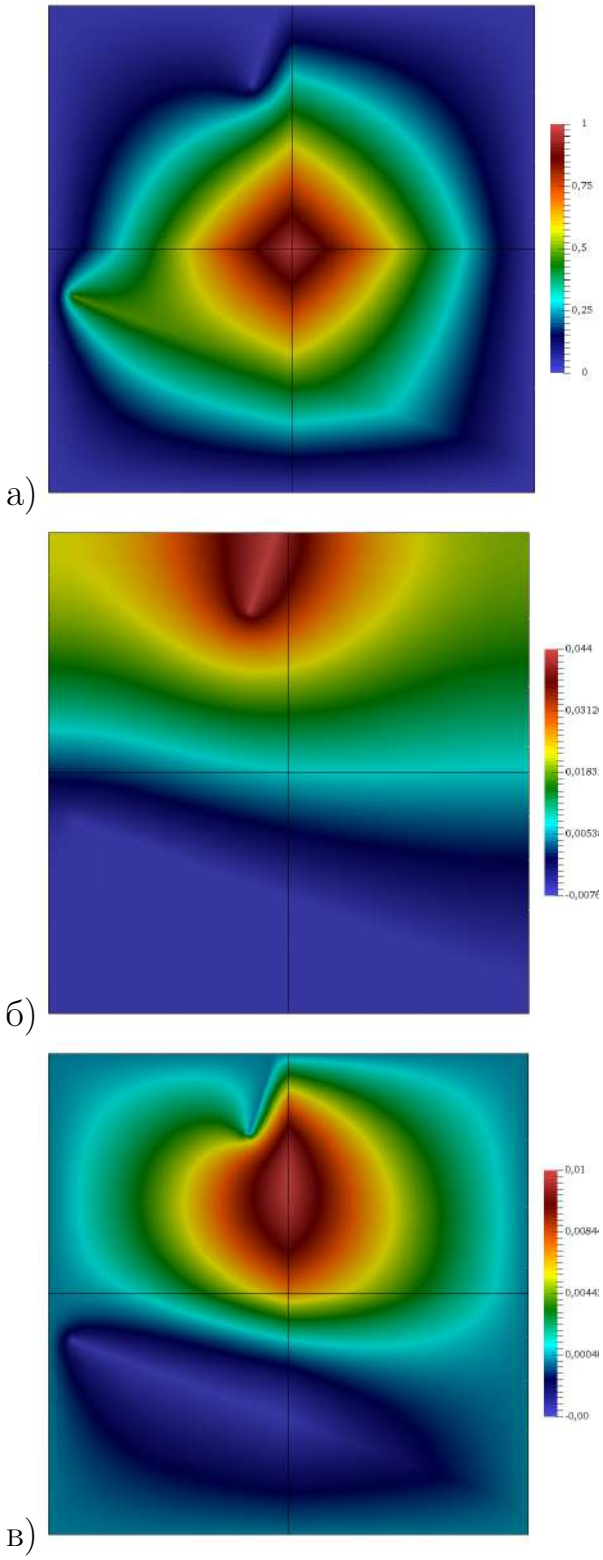


Рисунок 2.8: Иллюстрация (сверху вниз): функции разбиения единицы, некоторого собственного вектора и результата их умножения – многомасштабной базисной функции.

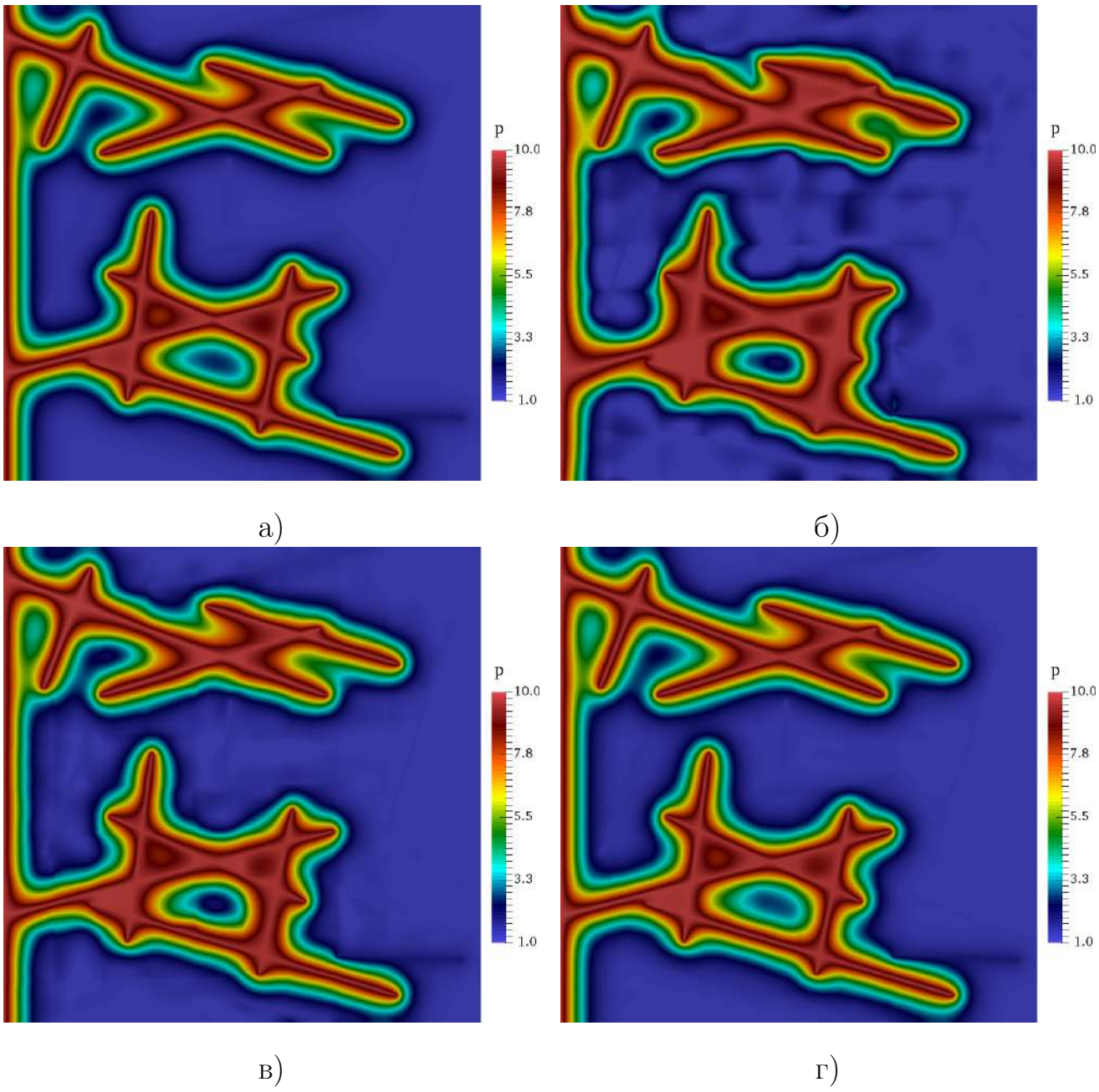


Рисунок 2.9: Распределения давления на грубой **сетке 1** при $t = 5$: а) на мелкой сетке, б) $M = 4$, в) $M = 8$ и г) $M = 16$.

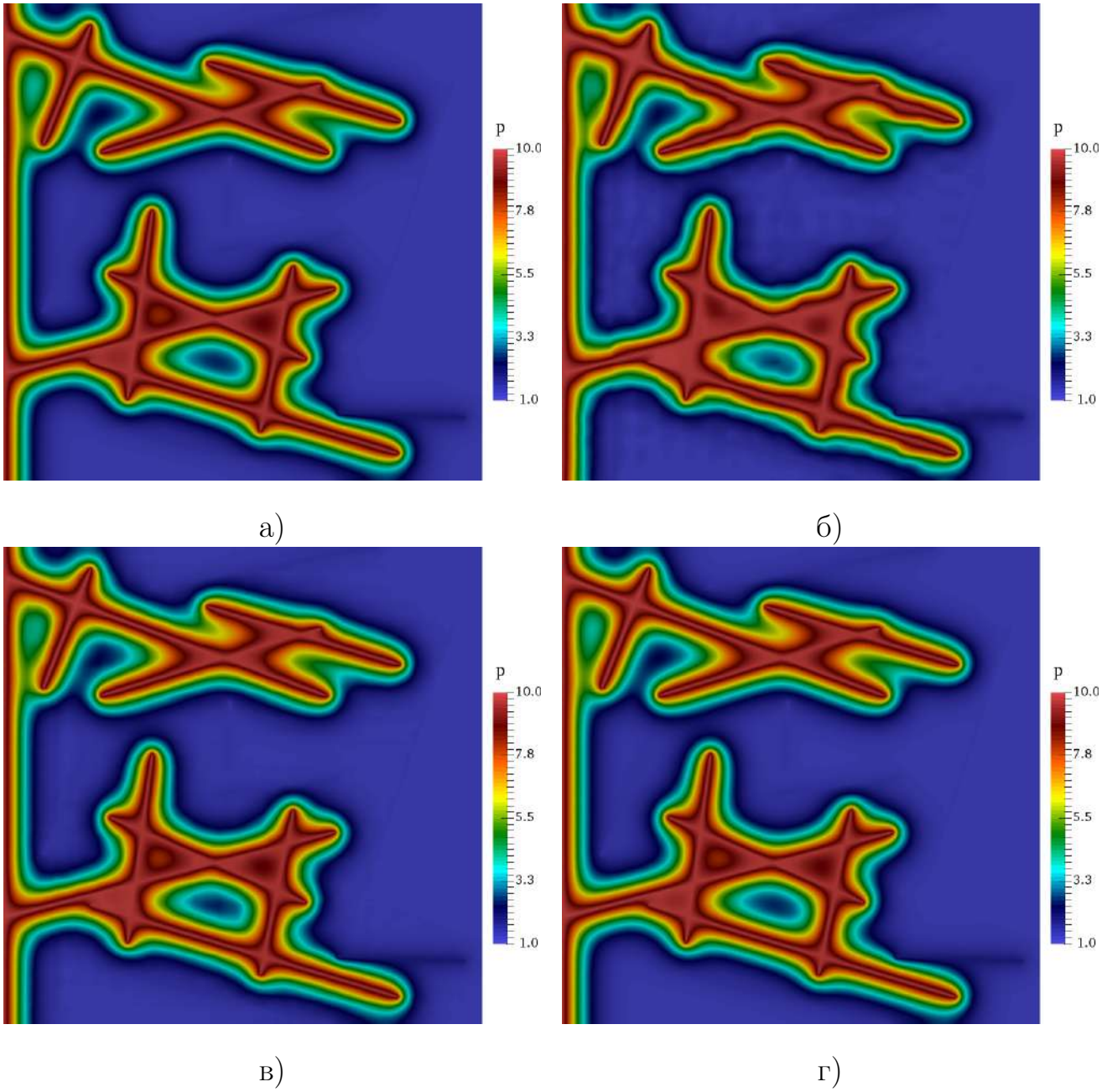


Рисунок 2.10: Распределения давления на грубой **сетке 2** при $t = 5$: а) на мелкой сетке, б) $M = 4$, в) $M = 8$ и г) $M = 16$.

2.5 Численное решение на квази-структурированных грубых сетках

В прикладных задачах бывают моменты, когда построение специальных вычислительных сеток имеет сложности с учетом элементов грубой сетки. Например, когда имеются достаточно много мелких элементов, раскрывающих неоднородности мелкого масштаба. Ситуация ухудшается, когда они граничат с гранями элементов грубой сетки. В таком случае появляются дополнительные элементы на мелкой сетке, что увеличивает количество неизвестных. При создании сетки для задачи фильтрации в трещиноватых средах с использованием, например, DFM, трещины могут создавать очень острые углы с гранями грубой сетки (см. рис. 2.11). Это приводит к плохим элементам на мелком масштабе и низкой точности решения.

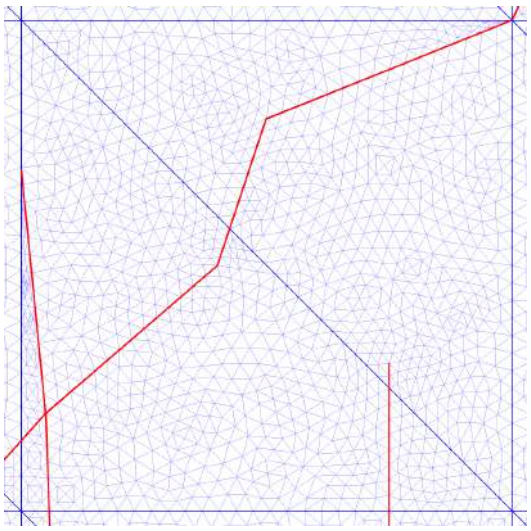


Рисунок 2.11: Пример двух треугольных грубых элементов с трещинами.

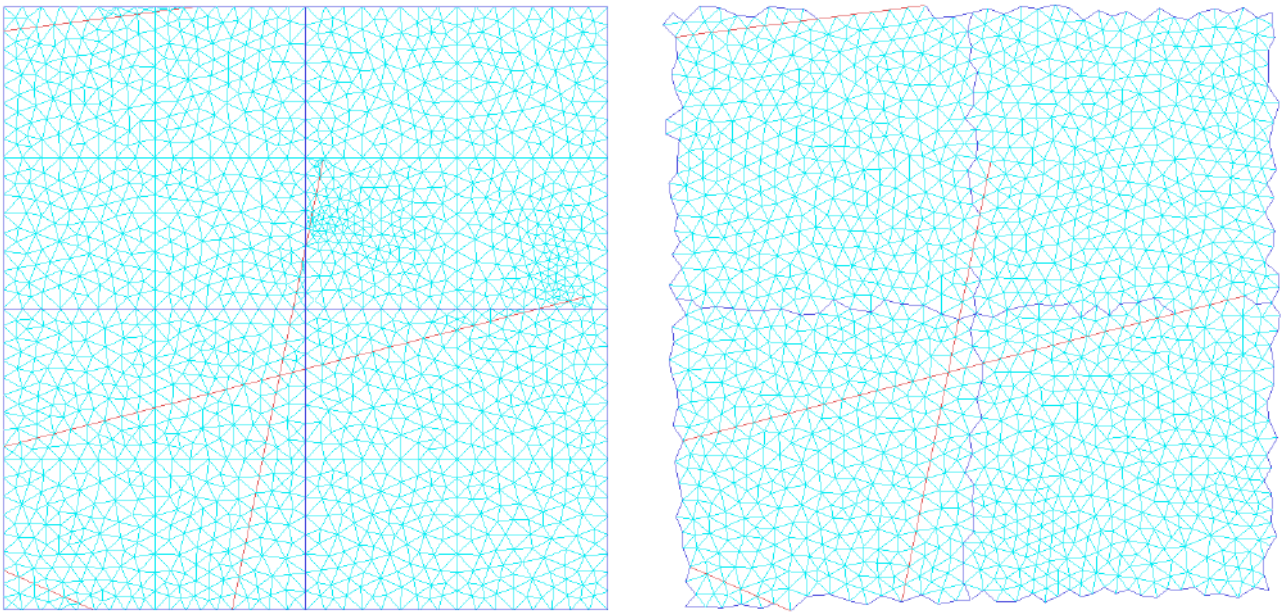
Еще одним случаем, когда построение расчетных сеток для многомасштабных методов может быть затруднено, является необходимость использования уже существующих вычислительных сеток на мелком масштабе. В ситуации, когда необходимо внедрить в прикладную задачу многомасштабный метод. В таком случае, практически невозможно построить многомасштабную сетку с

учетом всех неоднородностей и включений на мелком масштабе.

Одним из решений вышеописанных проблем является использование грубых сеток с криволинейными ломаными гранями, которые можно построить поверх сетки на мелком масштабе. В многомасштабном методе это можно сделать, так как границы грубых элементов состоят из границ элементов мелкой сетки (см. рис. 2.12). В данном случае мы построили грубую сетку с аналогией на квадратные грубые элементы. Мелкая сетка построена без учета грубых элементов. На этой мелкой сетке строятся грани грубых элементов путем последовательного соединения граней мелкой сетки, которые имеют наиболее низкий угол отклонения от осей координат. На рис. 2.12 видно, что при таком подходе грубые элементы имеют немного меньше мелких элементов и вершин. Как показано на рис. 2.13 **сетка 1** имеет 121 вершин и 100 элементов, а 441 вершин и 400 элементов, соответственно. Мелкая сетка имеет 96894 вершин и 192716 элементов, что немного меньше чем у мелких сеток в предыдущих примерах.

В данном случае, важным моментом помимо построения сетки является вычисление функции разбиения единицы χ_i рис. 2.14 а). В граничном условии (2.12) функция g_i задается таким образом, чтобы она линейно и непрерывно меняла значение от центральной вершины x_i до соседних грубомасштабных узлов в области ω_i от единицы до нуля. Далее, с таким граничным условием решение уравнения (2.11) даст нам функцию разбиения единицы χ_i. Способ вычислений собственного вектора и базисной функции не меняется рис. 2.14.

При таком подходе **на сетке 1** точность ниже чем у квадратных, но немного выше чем у треугольных (см. таб. 2.1). На **сетке 2** точность немного ниже чем у двух других подходов (см. таб. 2.2). Стоит отметить, что разница в точности не критичная и значения погрешности имеют одинаковый порядок. На рис. 2.15 и 2.16 также показаны сравнения решений.



а) б)

Рисунок 2.12: а) Квадратные и б) квази-структурированные грубые элементы.

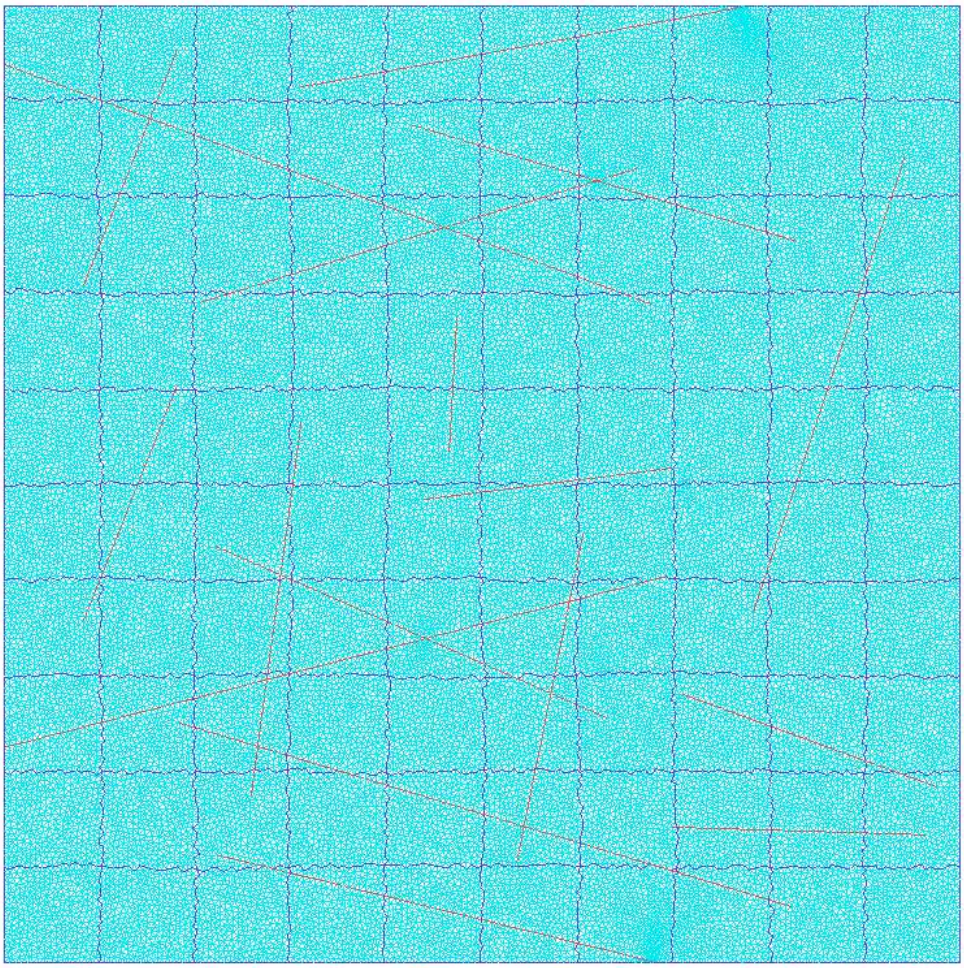


Рисунок 2.13: Иллюстрация грубой **сетки 1**.

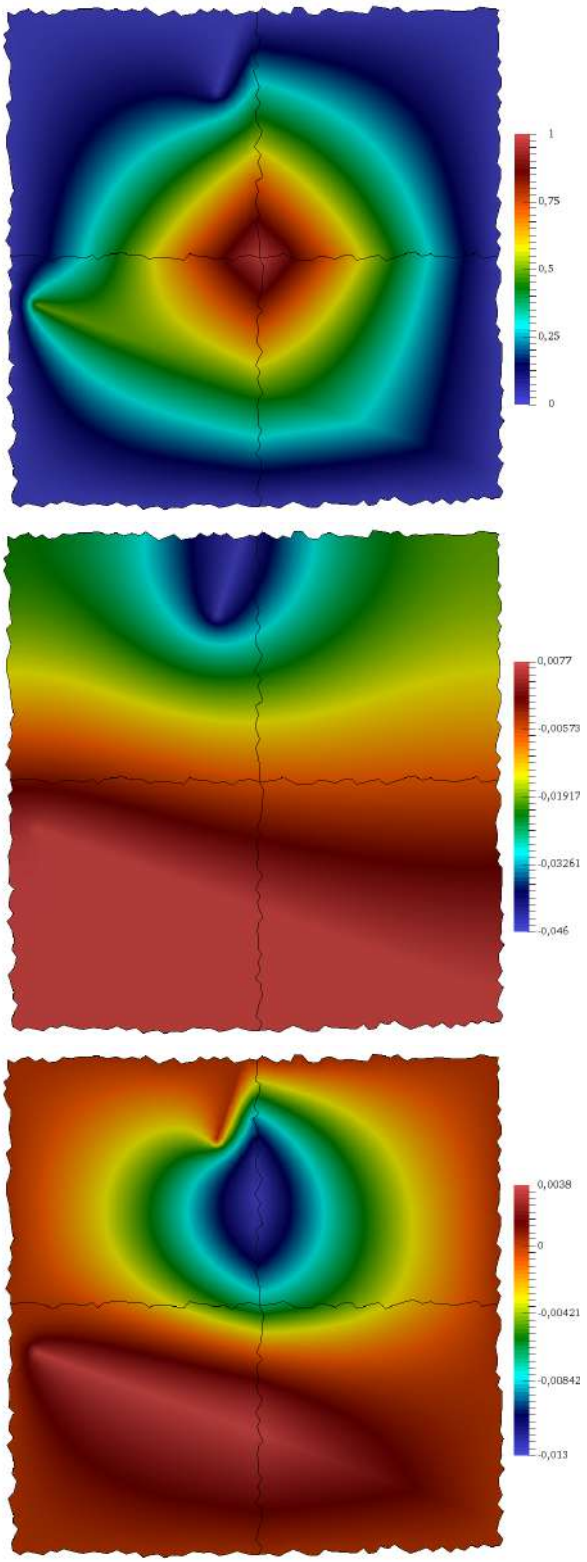


Рисунок 2.14: Иллюстрация (сверху вниз): функции разбиения единицы, некоторого собственного вектора и результата их умножения – многомасштабной базисной функции.

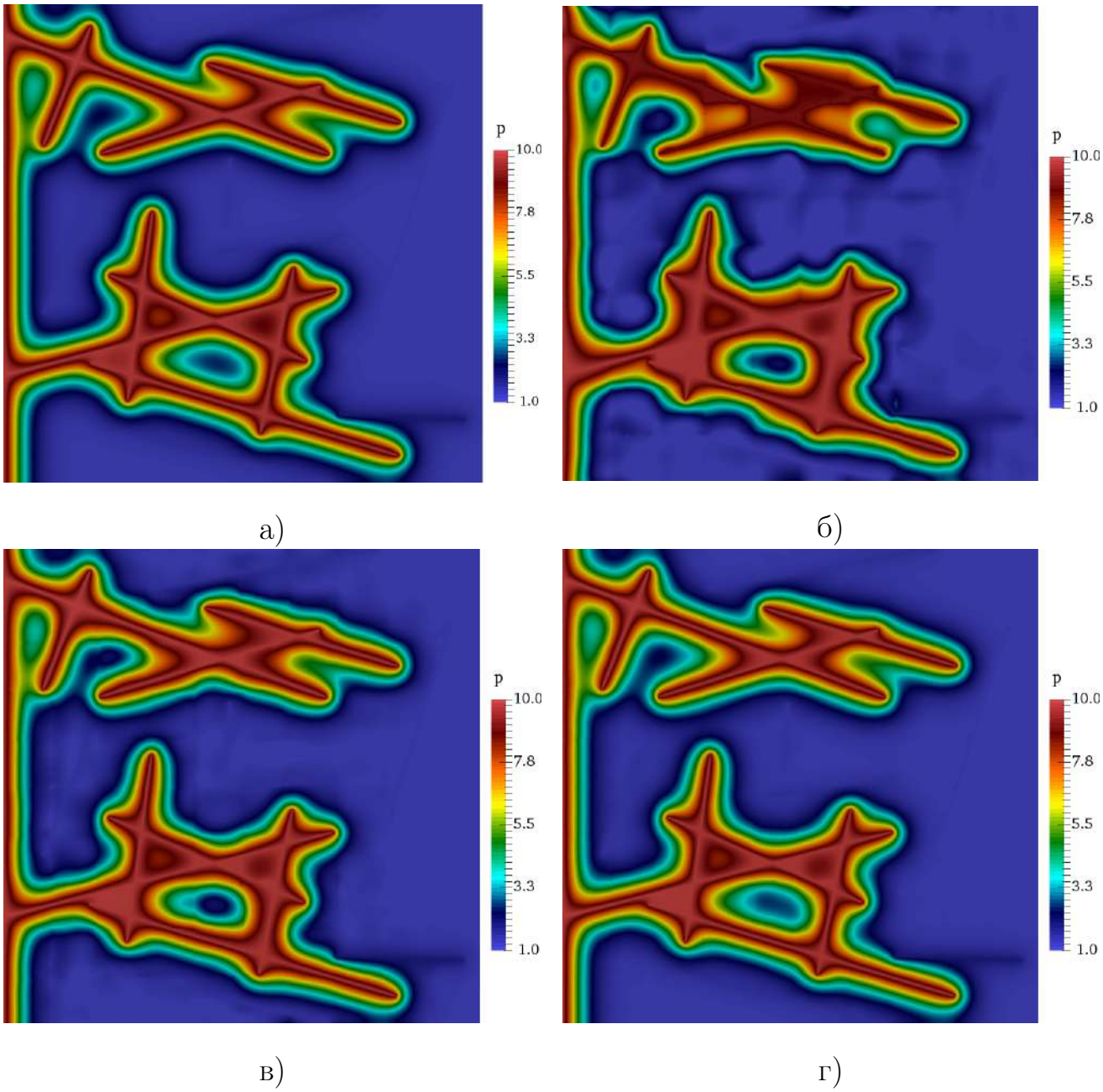


Рисунок 2.15: Распределения давления на грубой **сетке 1** при $t = 5$: а) на мелкой сетке, б) $M = 4$, в) $M = 8$ и г) $M = 16$.

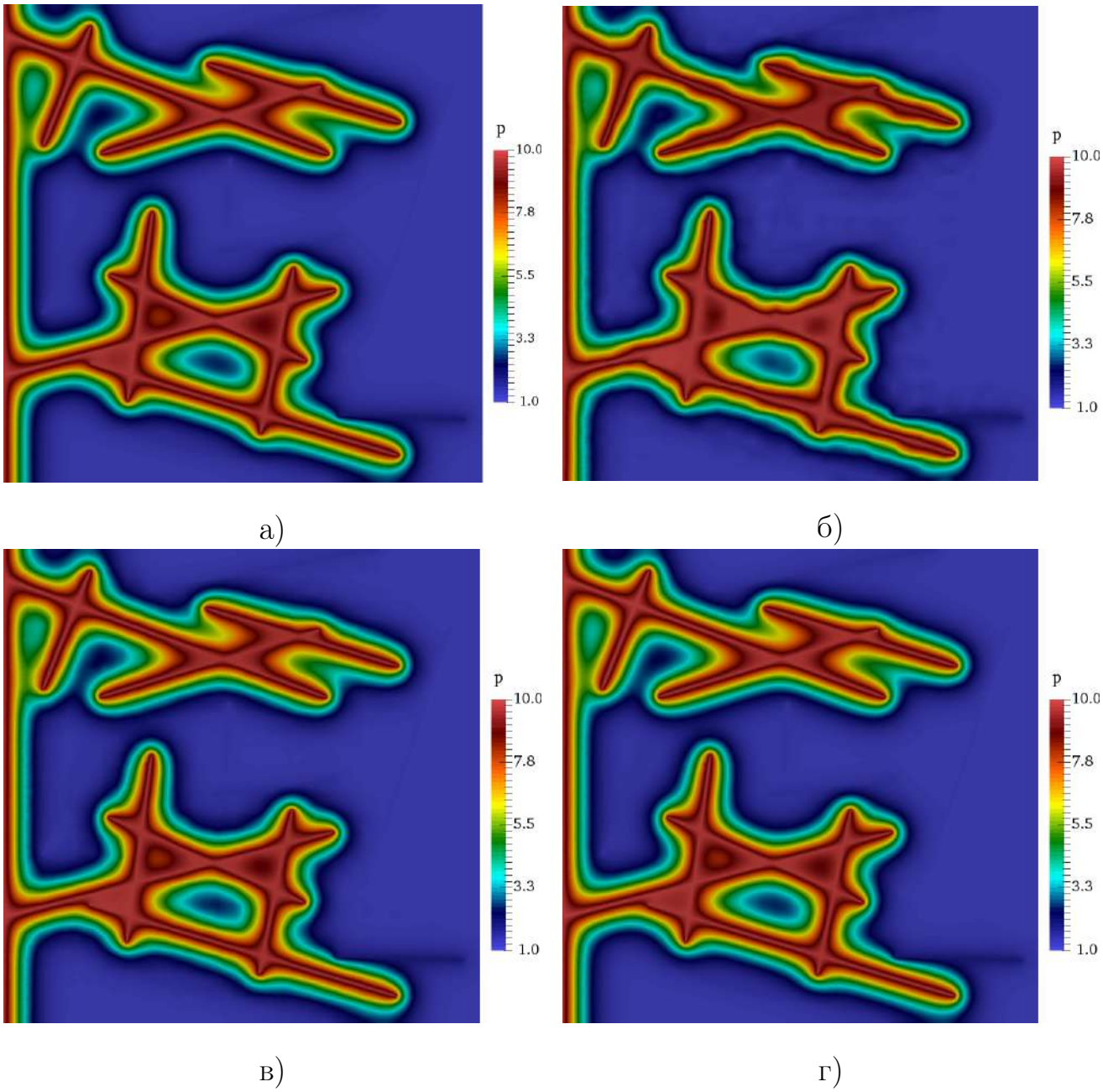


Рисунок 2.16: Распределения давления на грубой **сетке 2** при $t = 5$: а) на мелкой сетке, б) $M = 4$, в) $M = 8$ и г) $M = 16$.

2.6 Численное решение на неструктурированных грубых сетках

В предыдущем примере мы рассмотрели вариант, когда границы грубых элементов не являются гладкими и мелкая сетка не строится с учетом элементов грубого масштаба. Такие подходы рассматриваются довольно продолжительное время. Например, в работах [93] и [94] авторами была разработана динамическая стратегия укрупнения сетки для смешанного потока, где грубая сетка отделяла области с высоким потоком от областей с низким потоком. Такие подходы с неструктурированными грубыми сетками хорошо подходят для метода конечных объемов. Авторы работы [95] использовали неструктурированные грубые сетки в многомасштабном методе конечных объемов (MSFVM) для моделирования процессов фильтрации в трещиновато-пористой среде. Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов с разрывным методом Галеркина на неструктурированной грубой сетке был представлен в работе [96] для решения задач в перфорированных областях.

Теперь рассмотрим вариант, когда элементы грубой сетки могут иметь почти любую произвольную форму в обобщенном многомасштабном методе конечных элементов, где для грубого масштаба функции разбиения единицы χ_i задаются как в предыдущих примерах. Для разделения мелкой сетки на грубые блоки используется библиотека разбиения сетки SCOTCH [136]. SCOTCH распространяется как бесплатное программное обеспечение и было разработано так, чтобы новые методы разбиения или упорядочивания могут добавляться простым способом. Поэтому его можно использовать в качестве испытательного программного средства для простого и быстрого кодирования и тестирования таких новых методов. С помощью него мы разбили нашу мелкую сетку

на 60 и 221 подобластей для грубых **сеток 1** и **2**, соответственно, для того, чтобы получить 121 вершин для грубой **сетки 1** (см. рис. 2.17) и 441 вершин для **сетки 2**. Вершинами для грубых сеток внутри области являются точки пересечения границ трех или более соседних грубых элементов. На внешней границе вершинами являются точки пересечения границ двух элементов, а также точки, которые находятся на четырех углах мелкой сетки.

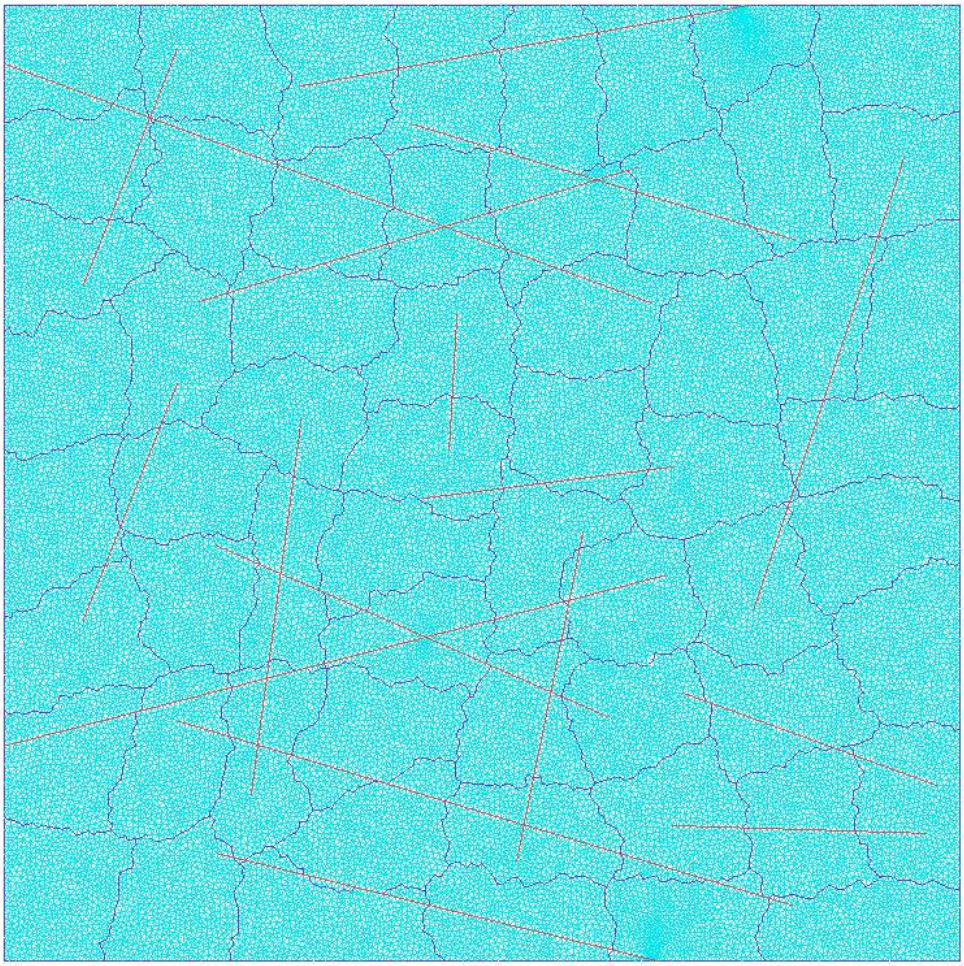


Рисунок 2.17: Иллюстрация грубой **сетки 1**.

На рис. 2.18 показаны функция разбиения едицины, собственный вектор и базисная функция, которые были определены на подобласти ω_i. Эта подобласть построена соединением трех соседних грубых элементов, у которых есть общая точка.

Погрешность данная на таб. 2.1 и 2.2 показывает хорошие результаты.

Ошибка ниже чем у треугольных и квази-структурированных подходов построения грубых сеток, но немного выше чем у подхода с прямоугольными элементами. Так же даны сравнения решений с решением на мелкой сетке на рис. 2.19 и 2.20.

Полученные результаты численных исследований показывают применимость такого подхода использования ОММКЭ. Особенно это может пригодиться при практических вычислениях, когда следует использовать многомасштабный метод с использованием уже сгенерированных расчетных сеток без учета структурированных грубых блоков.

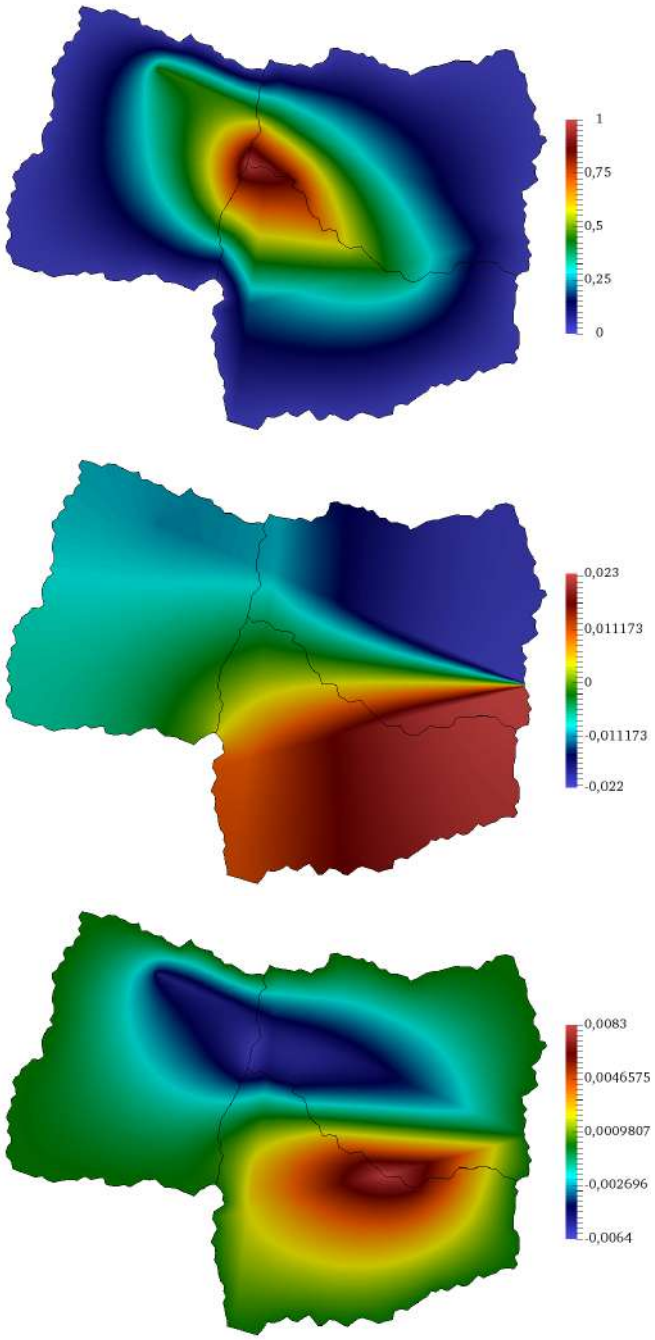


Рисунок 2.18: Иллюстрация (сверху вниз): функции разбиения единицы, некоторого собственного вектора и результата их умножения – многомасштабной базисной функции.

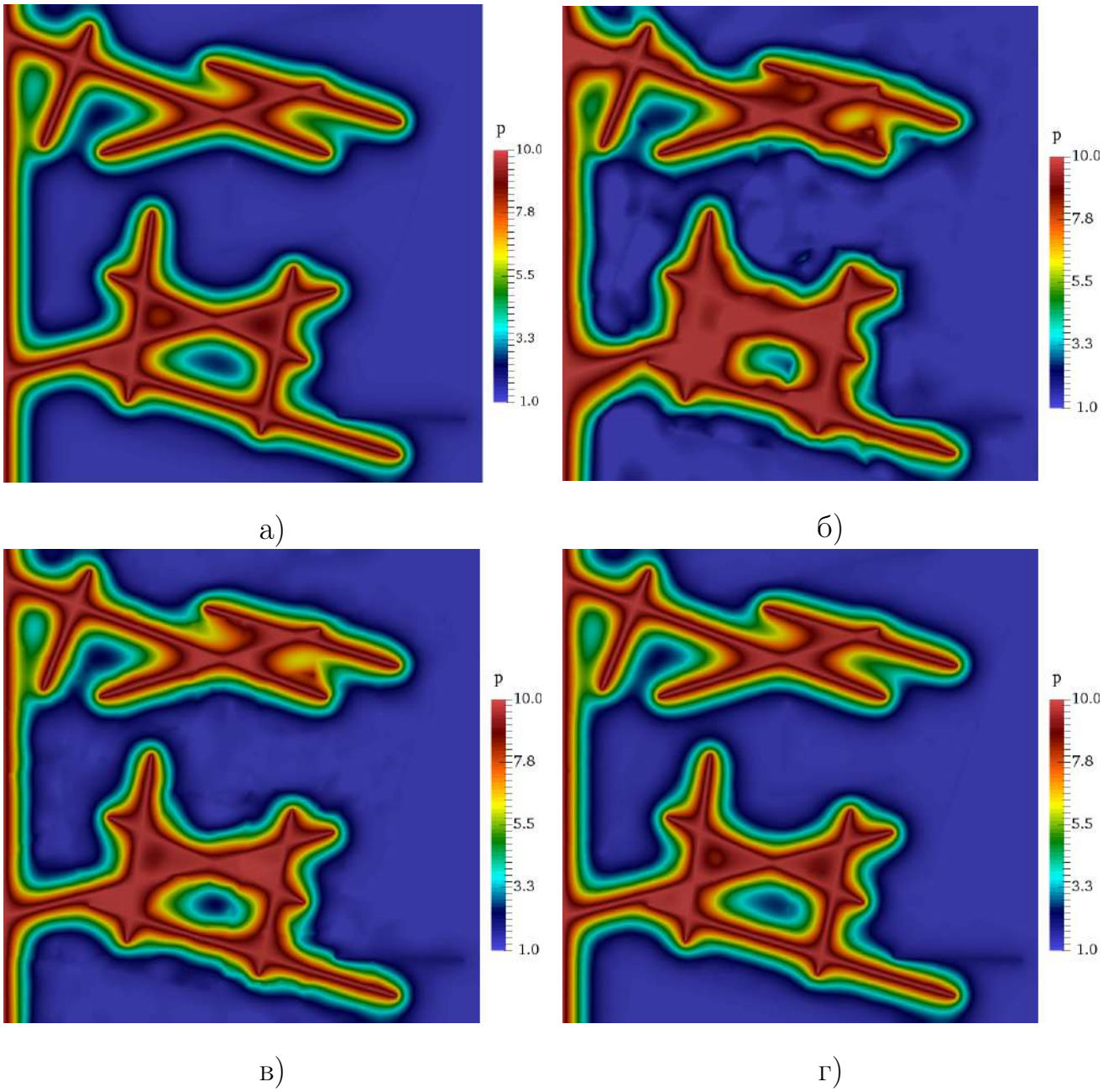


Рисунок 2.19: Распределения давления на грубой **сетке 1** при $t = 5$: а) на мелкой сетке, б) $M = 4$, в) $M = 8$ и г) $M = 16$.

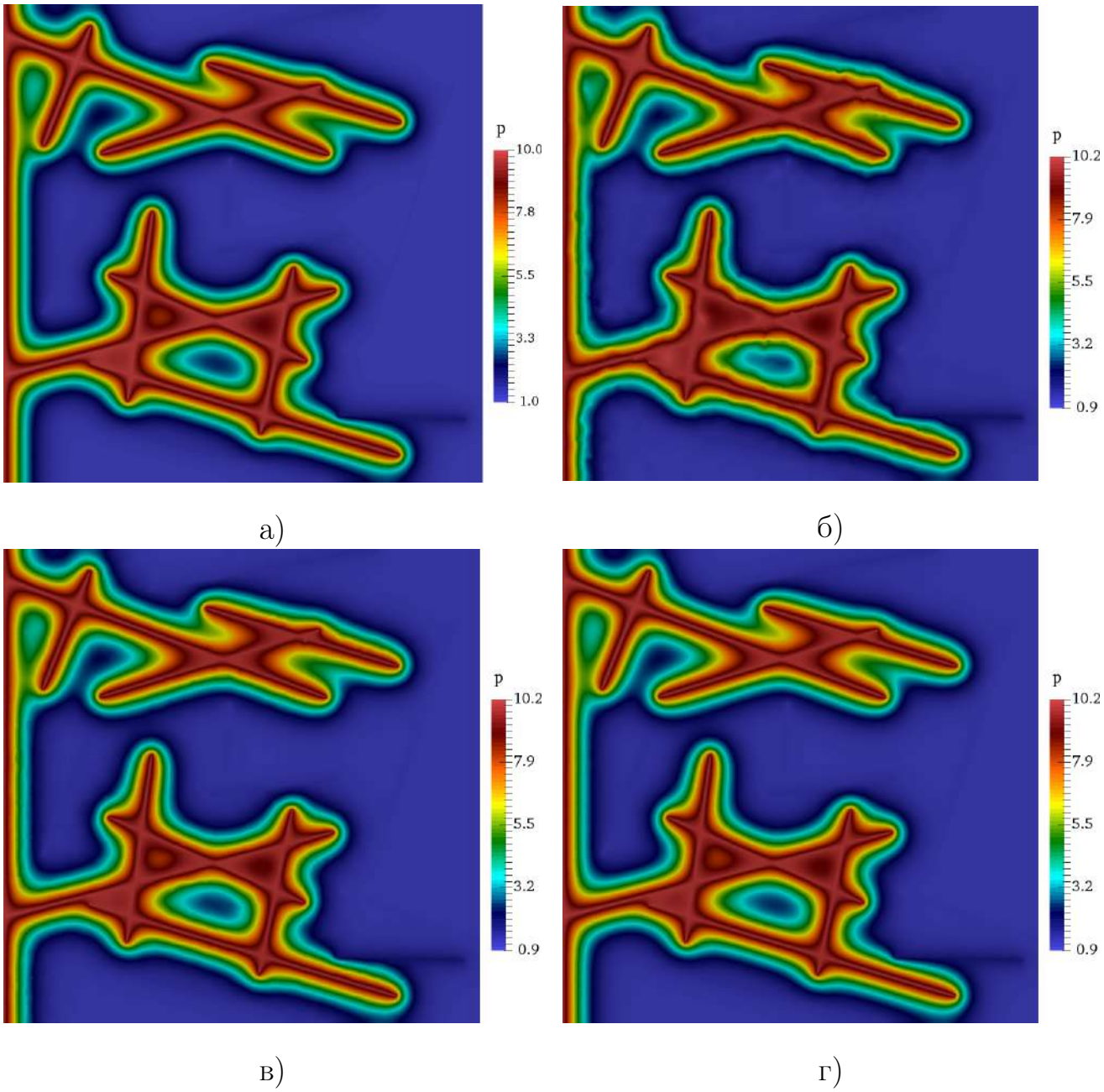


Рисунок 2.20: Распределения давления на грубой **сетке 2** при $t = 5$: а) на мелкой сетке, б) $M = 4$, в) $M = 8$ и г) $M = 16$.

2.7 Выводы

В данной главе рассмотрен обобщенный многомасштабный метод конечных элементов на примере задачи фильтрации в трещиноватых средах. Многомасштабные базисные функции строятся в автономном режиме через локальные спектральные задачи во вспомогательных пространствах. Для разрешения течения в трещинах на мелком масштабе использовался модель дискретных трещин DFM. Рассмотрены четыре подхода построения грубомасштабных вычислительных сеток, два из которых были предложены автором. Самым точным оказался подход, когда элементы грубой сетки являются прямоугольными, в нашем случае, квадратными. Но подходы с произвольными или квази-структурированным сетками на грубом масштабе применимы, когда построение многомасштабных сеток затруднено. Численные решения на таких сетках показали высокую точность.

M	Треугольная сетка		Квадратная сетка		Квази-структурированная сетка		Неструктурированная сетка	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	70.43	100	40.62	84.59	53.64	90.79	50.72	89.95
2	20.48	59.43	9.66	41.52	10.3	43.31	10.87	44.31
4	3.91	24.32	3.66	22.13	3.65	22.93	3.72	22.42
8	1.28	13.23	0.95	9.83	0.96	10.34	0.65	8.53
16	0.26	5.38	0.18	3.64	0.2	4.32	0.16	3.92
32	0.08	2.48	0.045	1.51	0.066	2.28	0.05	1.92

Таблица 2.1: Значения погрешности в конечный момент времени в зависимости от вида грубой сетки при $N = 121$.

M	Треугольная сетка		Квадратная сетка		Квази-структурированная сетка		Неструктурированная сетка	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	39.51	82.33	14.18	53.45	16.75	61.1	12.79	53.87
2	5.93	33.13	3.93	25.61	4.41	29.16	4.32	29.84
4	1.31	15.66	1.2	13.68	1.3	15.48	1.24	15.41
8	0.4	8.54	0.32	7.28	0.41	9.6	0.29	7.51
16	0.097	3.73	0.06	2.54	0.09	3.78	0.085	3.73
32	0.026	1.64	0.014	1.0	0.032	2.03	0.03	1.85

Таблица 2.2: Значения погрешности в конечный момент времени в зависимости от вида грубой сетки при $N = 441$.

Глава 3

Бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов

В данной главе предлагается новый многомасштабный метод, где на грубом масштабе используется бессеточный метод. Здесь, на грубом масштабе вместо структурированной грубой сетки используется облако точек с перекрывающимися опорными областями. При таком подходе применение многомасштабного метода не требует построения специальной расчетной сетки, содержащей элементы грубого и мелкого масштабов. Вместо этого облако точек и многомасштабное пространство строятся на мелкой сетке в зависимости от неоднородных параметров задачи, а именно от расположения дискретных трещин. Данный подход основан на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов, где неоднородные параметры задачи учитываются на грубом масштабе с помощью многомасштабных базисных функций. Эти многомасштабные базисные функции строятся на автономном этапе с помощью локальных спектральных задач. Для представления трещин на мелкой сетке используется модель дискретных трещин DFM. Представлены результаты численного решения для двумерной и трехмерной задач.

3.1 Бессеточный метод

В бессеточном методе вместо вычислительной сетки задаются положения узлов; далее, для каждого узла прикрепляются патчи (подобласти), и на основе соседей вычисляются связи между узлами и алгебраическая система уравнений. Данный метод хорошо подходит при условии, когда создание сетки из геометрии сложного 3D-объекта становится трудным, а также для задач с нелинейным поведением или со сложными неоднородными свойствами. Распо-

ложение точек узлов в вычислительной области с учетом особенности задачи может заметно повысить точность вычислений.

В дискретном виде решение представляется в следующем виде:

$$p_h(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i W_i(x), \tag{3.1}$$

где N - количество узлов, p_i - искомые значения в узлах, $W_i(x)$ - функции формы (shape functions), которые являются базисными функциями и зависят от соседних узлов. В бессеточном методе функция формы выражается через функции ядра $\phi(x)$ (kernel functions) вместо дельта функции Дирака, например через:

- кубический сплайн:

$$\phi(r) = 2 \begin{cases} 2/3 + 4\ (r-1)\ r^2, & r \leq 0.5, \\ 4/3\ (1-r)^3, & 0.5 \leq r \leq 1, \\ 0, & 1 \leq r; \end{cases} \tag{3.2}$$

- гауссовское распределение:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{\exp(-9r^2)-\exp(-9)}{1-\exp(-9)}, & r \leq 1, \\ 0, & r \geq 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

где r - нормированное расстояние.

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^N$ - множество точек (узлы), в которых определены степени свободы. Тогда $\{S_i\}_{i=1}^N$ - подобласти (патчи) с некоторой окрестностью r_i, где определены функции $W_i(x)$. Функции формы $W_i(x)$ отвечают условию

$$\sum_{i=1}^{N} W_i(x) = 1,\ \forall x \in \Omega. \tag{3.4}$$

Согласно условию (3.4), функции формы $W_i(x)$ принимают следующий вид:

$$W_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x)}. \tag{3.5}$$

Так как функция $\phi_i(x)$ отлична от нуля только в некоторой окрестности r_i, тогда при суммировании в (3.5) вместо N известных узлов можно ограничиться только теми, которые попали в данную окрестность

$$W_i(x) = V_i\phi_i(x), \quad V_i^{-1} = \sum_{j=1}^{M_i} \phi_j(x), \quad S_i \cap S_j \neq \emptyset, \tag{3.6}$$

где V_i сумма всех M_i функций $\phi_j(x)$ отличных от нуля в подобласти S_i, включая саму $\phi_i(x)$.

Основными проблемами бессеточного метода являются выбор расположения узлов $\{x_i\}_{i=1}^N$, а также размеров r_i для $\{S_i\}_{i=1}^N$. Самым простым способом является расположение узлов равномерно, где размеры для $\{S_i\}_{i=1}^N$ будут постоянными. Но для задач с неоднородными коэффициентами следует выбрать более сложный подход, который мог бы адаптироваться под каждую задачу. Одним их таких подходов является алгоритм CVT. Предложенный в работе [137] вариант CVT применяется в данной работе, алгоритм которого выглядит следующим образом: пусть известны область Ω, функция плотности распределения вероятности $\rho(x)$ определенная для всех $x \in \Omega$ и положительное целое число N (количество неизвестных):

1. выбираем положительное целое число q и положительные постоянные $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^2$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\beta_1 + \beta_2 = 1$; устанавливаем начальное положение точек $\{x_i\}_{i=1}^N$, например методом Монте-Карло; устанавливаем начальное $j_i = 1,\ i = 1, ..., N$;
2. выбираем q точек $\{y_r\}_{r=1}^q$ в области Ω случайным образом, например методом Монте-Карло, согласно функции $\rho(x)$;
3. для каждого $r = 1, ..., q$ определяем x_r^* среди $\{x_i\}_{i=1}^N$, ближайших к y_r;
4. для каждого $i = 1, ..., N$ собираем в множество X_i все y_r ближайщие к x_i, т.е. входящие в область Вороного x_i; если X_i не пустое, тогда вычисляем среднее x_i^* из множества X_i и $x_i^* = \frac{(\alpha_1 j_i + \beta_1)x_i + (\alpha_1 j_i + \beta_1)x_i^*}{j_i + 1}$ и устанавливаем $j_i = j_i + 1$; новое множество $\{x_i^*\}$ вместе с незатронутыми $\{x_j\}, i \neq j$

образуют новое множество точек $\{x_i\}_{i=1}^N$;

5. если новые точки соответствуют некоторому критерию сходимости, тогда прекращаем; в противном случае возвращаемся к шагу 2.

Важным моментом здесь является выбор функции плотности распределения $\rho(x)$. Сгущение точек узлов в тех местах, где скорость изменения искомой функции наиболее высокая, является приоритетной задачей. Функция плотности распределения $\rho(x)$ зависит от задачи, например от неоднородных параметров, геометрии сложного объекта, времени. При постоянном $\rho(x) = \text{const}$ получаем разбиение Вороного.

Далее, рассмотрим алгоритм нахождения радиусов r_i для S_i. При нахождении радиусов r_i необходимо учитывать выполнение условия покрытия всей области $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N S_i$. Для этого используем алгоритм, предложенный в работе [138]: пусть известны область Ω, функция плотности распределения вероятностей $\rho(x)$ определенная для всех $x \in \Omega$ и распределение точек $\{x_i\}_{i=1}^N$:

1. выбираем положительные целые числа m_1 и m_2 и постоянную $\gamma > 1$ и пусть начальные радиусы равны нулю $r_i = 0,\ i = 1, ..., N$;
2. выбираем множество m_1 точек $\{\xi_i\}_{i=1}^{m_1}$, распределенных равномерно по области Ω, например методом Монте-Карло; выбираем другое множество m_2 точек $\{\eta_i\}_{i=1}^{m_2}$, распределенных по Ω согласно функции $\rho(x)$, например снова методом Монте-Карло; пусть $\mathcal{P} = \{\xi_i\}_{i=1}^{m_1} \cup \{\eta_i\}_{i=1}^{m_2}$;
3. для всех $y \in \mathcal{P}$:
   - находим x_i^* из $\{x_i\}_{i=1}^N$ ближайщий к y;
   - вычисляем дистанцию $d_i = \| y - x_i^* \|$;
   - если $r_i < d_i$, тогда положим $r_i = d_i$;
4. устанавливаем $r_i = \gamma r_i,\ i = 1, ..., N$;

В данном алгоритме параметр γ отвечает за полное покрытие области Ω, гладкость функций формы $W_i(x)$, а также плотность СЛАУ. На рис. 3.1 показаны расположения точек полученные с помощью CVT при различных $\rho(x)$ и свя-

занные с ними сферические подобласти S_i с различными r_i.

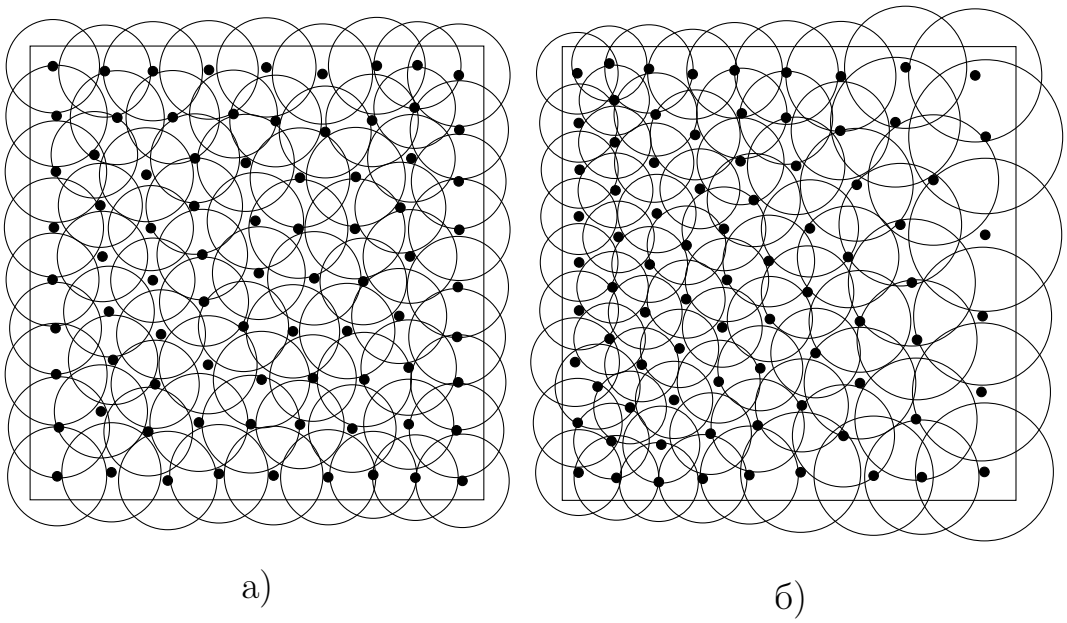


Рисунок 3.1: Наборы из 81 точек и связанные с ними сферические подобласти S_i для: а) $\rho(x) = \text{const}$ и б) $\rho(x) = \exp\left(-(1+x)^2\right)$.

3.2 Постановка задачи и конечно-элементная аппроксимация

В данной главе рассматривается аналогичная задача однофазной фильтрации в области Ω (рис. 2.1) из предыдущей главы

$$\begin{aligned} c\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{k(x)}{\mu}\operatorname{grad} p\right) = 0, \quad & x \in \Omega, \\ p(x,0) = p_0(x), \quad & x \in \Omega, \\ p(x) = p_D, \quad & x \in \Gamma_D, \\ -\frac{k(x)}{\mu}\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad & x \in \Gamma_N. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Полное описание постановки вариационной задачи приводилось в предыдущей главе, поэтому запишем только конечную систему

$$Ap = F, \tag{3.8}$$

где элементы A и F выглядят следующим образом:

$$A = [a_{ij}] = \int_{\Omega_m} c_m \frac{\psi_i}{\tau} \psi_j dx + \int_{\Omega_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \operatorname{grad} \psi_i, \operatorname{grad} \psi_j \right) dx$$
$$+ \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} c_f \frac{\phi_i}{\tau} \phi_j dx + \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} \phi_i, \operatorname{grad} \phi_j \right) dx, \tag{3.9}$$
$$F = [f_i] = \int_{\Omega_m} c_m \frac{p^n}{\tau} \psi_i dx + \sum_l \alpha_l \int_{\gamma_l} c_f \frac{p^n}{\tau} \phi_i dx.$$

3.3 Численный алгоритм бессеточного ОММКЭ

При применении бессеточного метода на грубом масштабе в общем алгоритме обобщенного многомасштабного метода конечных элементов меняется только первый пункт:

- бессеточное разбиение на грубом масштабе;
- построение вспомогательного пространства, которое будет использоваться для вычисления автономного пространства;
- построение автономного пространства путем уменьшения размерности во вспомогательном пространстве.

В данном подходе ОММКЭ можно использовать без создания специальной вычислительной сетки, которая содержала бы в себе грубый и мелкий масштабы. Бессеточное разбиение можно строить поверх уже существующей вычислительной сетки на мелком масштабе. Данный подход может заменить ту часть, где для построения специальной вычислительной сетки применяются сложные программные обеспечения.

Грубосеточная аппроксимация

Для дискретизации задачи (3.7) введем понятия грубого разбиения и мелкой сетки. Пусть $\mathcal{S}_H$ разбиение вычислительной области Ω на облако точек так, что $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N S_i$. Обозначим это разбиение как бессеточное грубое разбиение и предположим, что каждый грубый элемент разбит на связное объединение

элементов мелкой сетки. Мелкое разбиение сетки будет обозначаться через $\mathcal{T}_h$. Обозначим через $\{x_i\}_{i=1}^N$ вершины грубого разбиения $\mathcal{S}_H$, где N – количество грубых вершин. Для бессеточного грубого разбиения (рис. 3.2) элементы S_i являются локальными областями, которые являются носителями базисных функций

$$S_i = \{y \in \mathcal{R}^N : \| y - x_i \| \leq r_i\}, \tag{3.10}$$

где r_i – радиус сферы S_i.

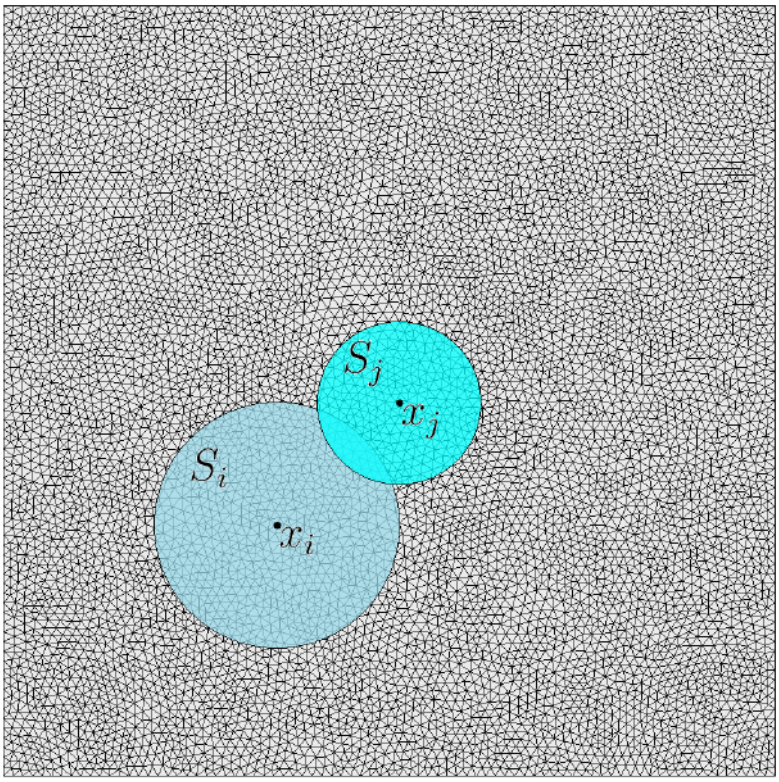


Рисунок 3.2: Бессеточный грубый масштаб

Обозначим базисные функции через $\psi_k^{S_i}$, которые определены в S_i, а индекс k представляет нумерацию этих базисных функций. В свою очередь, решение представляется в следующем виде

$$p_{\text{ms}}(x) = \sum_{i,k} c_k^i \psi_k^{S_i}(x). \tag{3.11}$$

После определения многмасштабных базисных функций, глобальная связь

CG задается через вариационную форму

$$a(p_{\text{ms}}, v) = L(v), \quad \forall v \in V_{\text{off}}, \tag{3.12}$$

где V_{off} – пространство, охватываемое этими базисными функциями, и билинейная и линейная формы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a(p_{\text{ms}}^{n+1}, v) &= \int_\Omega c\frac{p_{\text{ms}}^{n+1}}{\tau} v d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \left(\frac{k(x)}{\mu} \operatorname{grad} p_{\text{ms}}^{n+1}, \operatorname{grad} v\right) dx, \\ L(v) &= \int_\Omega c\frac{p_{\text{ms}}^{n}}{\tau} v dx. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Локальные базисные функции

Здесь рассматривается алгоритм построение многомасштабных базисных функций путем решения спектральных задач во вспомогательном пространстве. Во-первых, строится вспомогательное пространство $V_{\text{snap}}^{S_i}$ для каждой локальной подобласти S_i. Вспомогательное пространство может быть пространством всех мелкомасштабных базисных функций или решений некоторых локальных задач с различными вариантами граничных условий. В частности, с учетом мелкомасштабной кусочно-линейной функции $\delta_j^h(x)$, определенной на ∂S_i, определяются $\psi_j^{S_i,\text{snap}}$, как решения следующего уравнения:

$$-\operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} \psi_j^{S_i,\text{snap}}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_i, \tag{3.14}$$

с граничным условием Дирихле

$$\psi_j^{S_i,\text{snap}} = \delta_j^h(x), \quad \boldsymbol{x} \in \partial S_i. \tag{3.15}$$

Здесь, функция $\delta_j^h(x)$ принимает значение 1 при $x = x_j$, а в остальных точках обращается в ноль. Задача (3.14)–(3.15) имеет столько решений, сколько имеется вершин на границе ∂S_i. Вариационная формулировка с учетом трещин будет следующим:

$$\int_{S_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \operatorname{grad} \psi_j^{\text{snap}}, \operatorname{grad} v\right) d\boldsymbol{x} + \sum_i \alpha_i \int_{S,\gamma_i} \left(\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad} \psi_j^{\text{snap}}, \operatorname{grad} v\right) dx = 0. \tag{3.16}$$

Для краткости обозначений опускается верхний индекс S_i, однако предполагается, что вычисления автономного пространства локализованы для соответствующих грубых подобластей. Пусть l_i количество функций во вспомогательном пространстве в области S_i, и

$$V_{\text{snap}} = \text{span}\{\psi_j^{\text{snap}} : 1 \leq j \leq l_i\}, \tag{3.17}$$

для каждой грубой подобласти S_i. Обозначим так же операторную матрицу перехода

$$R_{\text{snap}} = [\psi_1^{\text{snap}}, \ldots, \psi_{l_i}^{\text{snap}}]. \tag{3.18}$$

Для построения автономного пространства V_{off}^S, выполняется уменьшение размера в локальном вспомогательном пространстве, используя вспомогательное спектральное разложение. Далее решается следующая задача на собственные значения во вспомогательном пространстве V_{off}^S:

$$A^{\text{off}}\Psi_k^{\text{off}} = \lambda_k^{\text{off}} B^{\text{off}}\Psi_k^{\text{off}}, \tag{3.19}$$

где

$$\begin{aligned} A^{\text{off}} &= R_{\text{snap}}^T A R_{\text{snap}}, \\ B^{\text{off}} &= R_{\text{snap}}^T B R_{\text{snap}}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь A и B обозначают мелкомасштабные матрицы, как

$$\begin{aligned} A = [a_{ij}] = \int_{S_m} \left(\frac{k_m}{\mu} \operatorname{grad}\psi_i \operatorname{grad}\psi_j\right) dx + \sum_l \alpha_l \int_{S,\gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu} \operatorname{grad}\phi_i, \operatorname{grad}\phi_j\right) dx, \\ B = [s_{ij}] = \int_{S_m} \left(\frac{k_m}{\mu}\psi_i\psi_j\right) dx + \sum_l \alpha_l \int_{S,\gamma_l} \left(\frac{k_f}{\mu}\phi_i, \phi_j\right) dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Для построения автономного пространства выбираются первые M_{off}^S наименьших собственных значений после решения системы (3.19) и сформируются соответствующие собственные векторы во вспомогательном пространстве,

задав

$$\psi_k^{\text{off}} = \sum_{j=1}^{l_i} \Psi_{kj}^{\text{off}} \psi_j^{\text{snap}}, \quad k = 1, \ldots, M_{\text{off}}^S \tag{3.22}$$

где Ψ_{kj}^{off} - координаты вектора ψ_k^{off}.

Глобальная формулировка

Здесь обсуждаются автономное пространство и вариационная формулировка непрерывного приближения задачи (3.7). Начнем с начального грубого пространства

$$V_0^{\text{init}} = \text{span}\{W_i(x)\}_{i=1}^N. \tag{3.23}$$

Здесь, определенные в S_i функции формы $W_i(x)$ (рис. 3.3) образуют начальное грубое пространство.

Посредством умножения функции формы W_i на собственные векторы $\psi_k^{S_i,\text{off}}$ получаем базисные функции в автономном пространстве $V_{\text{off}}^{S_i}$ (рис. 3.3)

$$\psi_{i,k} = W_i \psi_k^{S_i,\text{off}},\ 1 \le i \le N,\ 1 \le k \le M_{\text{off}^{S_i}}. \tag{3.24}$$

где $M_{\text{off}^{S_i}}$ – число собственных векторов, которое может быть различным в каждой S_i. Отмечается, что построение в формуле (3.24) дает непрерывные базисные функции. Далее определяется непрерывное спектральное многомасштабное пространство Галеркина как

$$V_{\text{off}} = \text{span}\{\psi_{i,k} : 1 \le i \le N,\ 1 \le k \le M_{\text{off}}^{S_i}\}, \tag{3.25}$$

Используя одну индексную запись можно записать $V_{\text{off}} = \text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{N_c}$, где $N_c = \sum_{i=1}^N M_{\text{off}}^{S_i}$ обозначает общее количество базисных функций в пространстве V_{off}. Также для дальнейшего использования строится операторная матрица

$$R^T = [\psi_1, \ldots, \psi_{N_c}], \tag{3.26}$$

где ψ_i используются для обозначения узловых значений каждой базисной функции, определенной на мелкой сетке.

Далее, матрица перехода R и аппроксимация на мелком масштабе используются для решения следующей системы алгебраических уравнений на грубом масштабе:

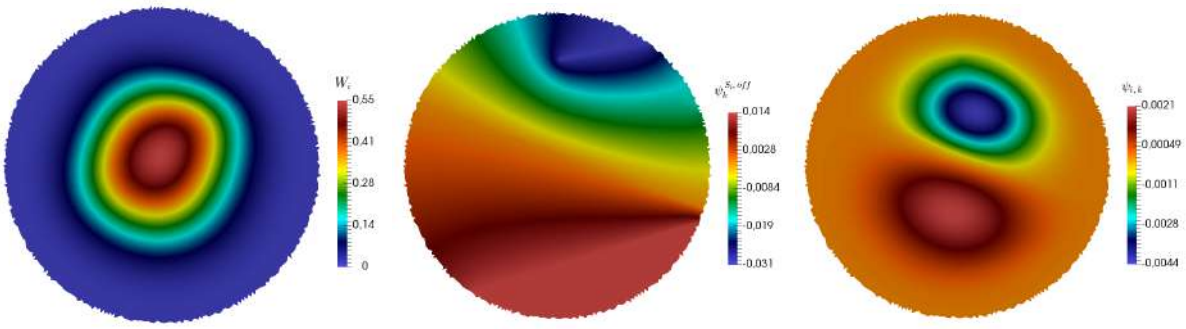
$$A_c p_c = F_c, \ A_c = RAR^T, \ F_c = RF, \tag{3.27}$$

где элементы матрицы A и правой части F берутся из (3.9).

После решения системы (3.27) можно перейти от решения на грубом масштабе к решению на мелком масштабе используя также оператор перехода R и решение p_c

$$p_{\text{ms}} = R^T p_c, \tag{3.28}$$

где p_{ms} – мелкомасштабное решение.



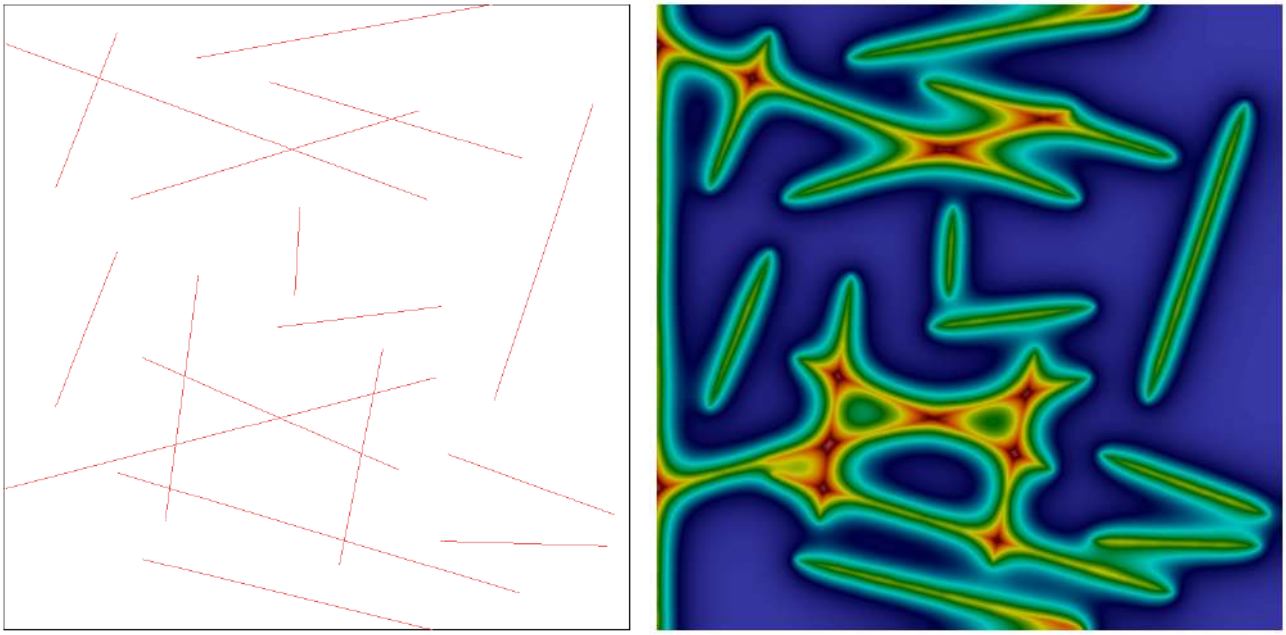
а) б) в)

Рисунок 3.3: Иллюстрация: а) функции формы, б) некоторого собственного вектора и в) результата их умножения – многомасштабной базисной функции

В данной главе для построение начального грубого пространства V_0^{init} функции $\rho(x)$ вычисляются с учетом трещин с помощью следующей задачи:

$$\begin{aligned} &-\operatorname{div}(\beta \operatorname{grad} \rho) + \rho = f, \\ &-\beta \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ &f = \begin{cases} 10^3, & x \in \gamma, \\ 10^{-2}, & x \in \Omega \backslash \gamma, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.29}$$

где f – функция расположения трещин (рис. 3.4 а)) и β – сглаживающий параметр. Параметр β зависит от параметров неоднородности задачи. Например, для нашего случая с трещинами и правой части f, при $\beta = 5$ функция плотности распределения вероятности $\rho(x)$ показана на рис. 3.4 б).



а) б)

Рисунок 3.4: а) Область с трещинами, б) функция плотности распределения вероятности $\rho(x)$

3.4 Геометрия и вычислительная сетка

Для численных расчетов с помощью сеточного ОММКЭ для построения геометрии и сетки использовалась программа для ЭВМ «Программа генерации 3D геометрии с трещинами пониженного порядка для решения многомасштабных задач» [109]. Программа предназначена для генерирования трехмерной геометрии для последующего использования при решении многомасштабных задач в трещиноватых средах. Программа подходит для задач с явными трещинами пониженного порядка с использованием таких моделей, как DFM,

EDFM (на англ. Embedded Discrete Fracture Model) и их модификаций.

Программа работает в консольном режиме. По желанию можно использовать с входным файлом. Параметры области задаются вручную, а трещины создаются случайно, задаются только количество трещин и ограничения на них. По желании трещины можно считывать с файла. Для ввода данных трещин вручную необходимы координата точки, которая лежит на ней и вектор нормали. При построении геометрии внутри каждого грубого блока строятся по шесть грубых тетраэдральных блоков. На выходе после запуска данной программы получим два файла: mesh.geo и fractures.txt – файл с трещинами, если получаем трещины случайно. После генерирования геометрии с помощью данной программы, полученный geo-файл следует открыть с помощью NETGEN [139] и сгенерировать msh-файл.

Ниже на рис. 3.5 представлен пример результата работы данной программы, расчетная сетка с 934184 вершинами и 5569883 тетраэдральными элементами, которую будем использовать для последующих численных исследований. Сперва вычислительная область разбивается на грубые блоки (кубические элементы), потом каждый блок разбивается на шесть правильных грубомасштабных тетраэдра. В конце при генерации подробной сетки эти тетраэдральные грубые элементы разбиваются на мелкие тетраэдры. Таким образом, конечная расчетная сетка является многомасштабной, она содержит как мелкомасштабные, так и грубомасштабные (тетраэдральные и кубические) элементы.

3.5 Численные результаты в двумерном случае

В данном разделе приводятся результаты численных расчетов в двумерной постановке на модельной задаче со следующими параметрами:

$$c_m = c_f = 10^{-1},\ k_m = 10^{-2},\ k_f = 10^3,\ \alpha = 1,$$

$$\mu = 1,\ p_0 = 1,\ p_D = 10,\ \tau = 10,\ T = 300.$$

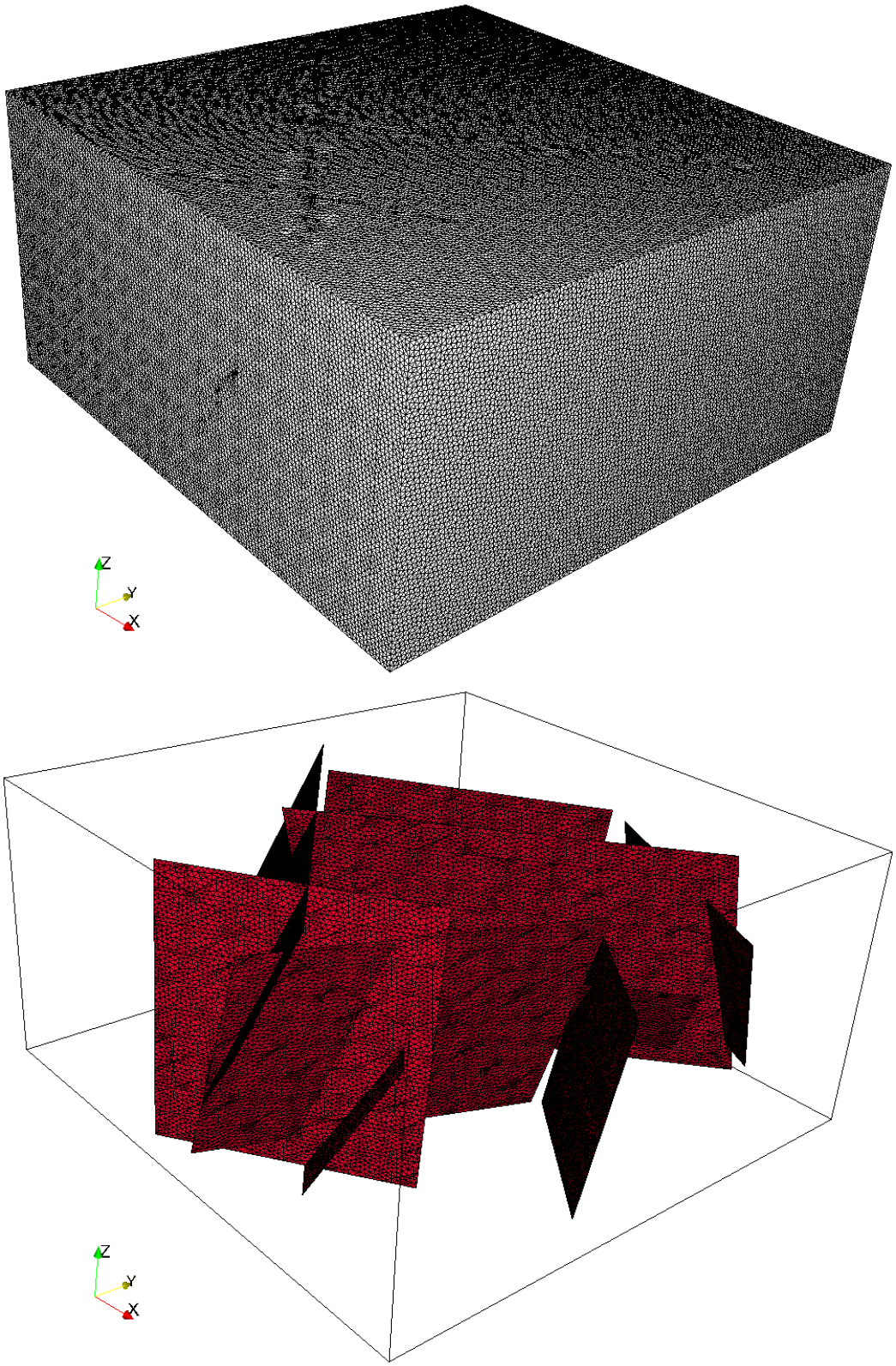


Рисунок 3.5: Иллюстрация трехмерной вычислительной сетки.

Здесь коэффициенты проницаемости k_m и k_f различаются в 10^5 раз, что показывают сильную неоднородность. Рассматриваемая область Ω является квад-

ратной со сторонами равной 80 с дискретными трещинами (см. рис. 3.4а).

Для решения задачи (3.7) с помощью ОММКЭ были рассмотрены различные многомасштабные методы (см. рис. 3.6): 1) сеточный подход с треугольными элементами, 2) сеточный подход с квадратными элементами, 3) бессеточный подход с равномерным расположением узлов и постоянными размерами ячеек и 4) бессеточный подход с расположением узлов в зависимости от функции $\rho(x)$ с различными размерами ячеек. Для сравнения точности для всех многомасштабных подходов одинаковое количество вершин $N = 121$ и $N = 441$ для двух тестов, соответственно. Эталонная сетка на мелком масштабе является аналогичной из предыдущей главы (96894 вершин и 192716 элементов).

На таб. 3.1 и 3.2 показаны значения погрешности решения сеточными подходами и равномерным бессеточным подходом в конечный момент времени при $N = 121$ и $N = 441$, соответственно. Из результатов видно, что в бессеточном подходе параметр γ сильно влияет на точность решения. Так, при $\gamma = \sqrt{2}$ точность ниже чем при использовании сеточных подходов, но имеет одинаковый порядок. При $\gamma = 2$ и при использовании восьми и выше многомасштабных базисных функций в каждой грубой подобласти ($\mathrm{M} \geq 8$) точность становится выше чем у всех остальных подходов.

Далее рассмотрим бессеточный подход с CVT. Сперва начнем с исследований выбора оптимального количества итераций для алгоритма CVT. Для этого проведем два тестовых вычисления с различными параметрами: **задача 1** с параметрами $N = 121$, $\beta = 5$ и **задача 2** с параметрами $N = 441$, $\beta = 20$. В обоих задачах параметр отвечающий за радиус r_i грубосеточных элементов равен $\gamma = 2$ и количество используемых многомасштабных базисных функций равен $\mathrm{M} = 8$. Зависимость точности решения от количества проведенных итераций при вычислении расположения узлов в алгоритме CVT представлена на рис. 3.7. Так, в **задаче 1** оптимальное количество итераций находится в

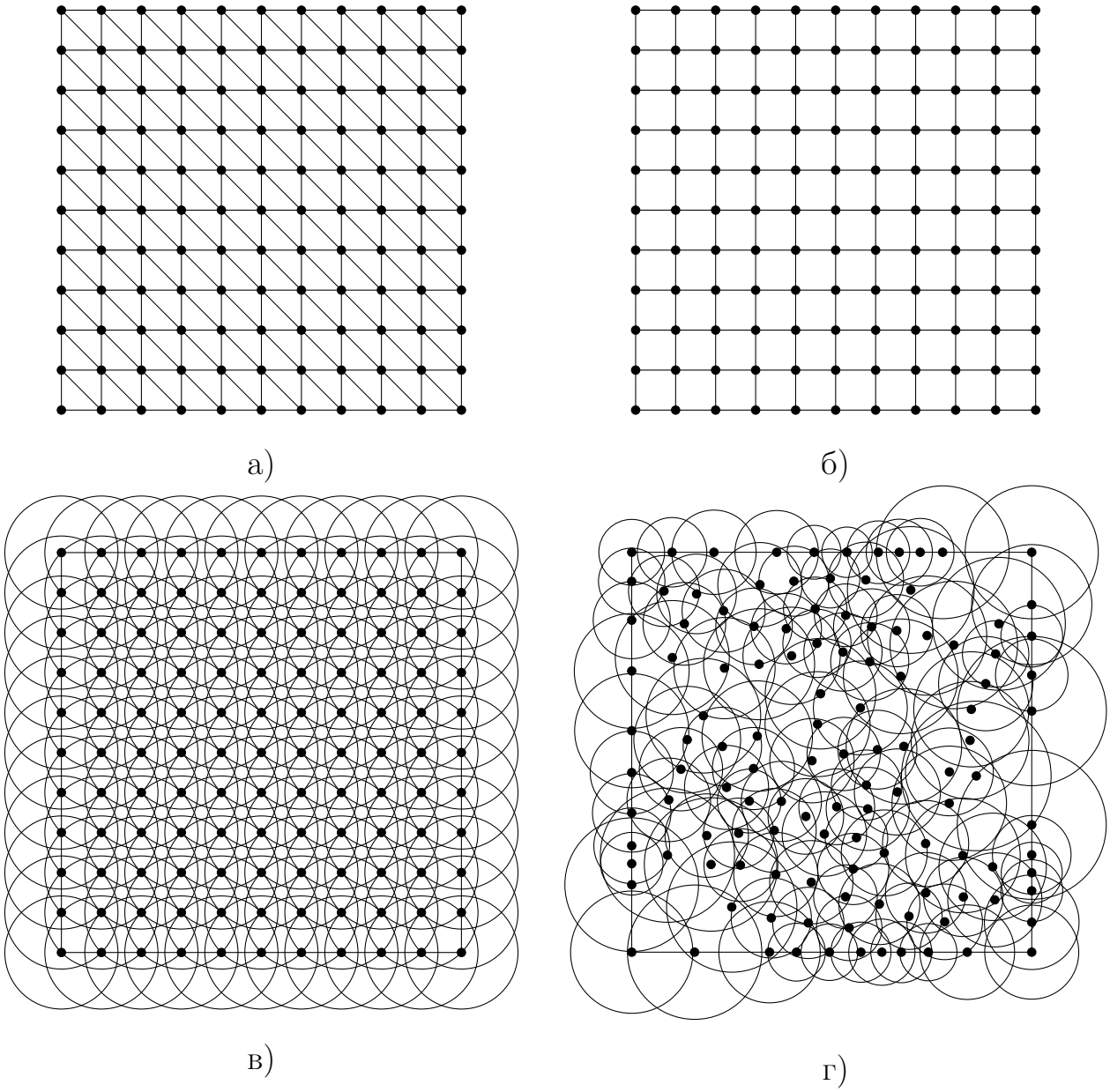


Рисунок 3.6: Различные вычислительные сетки и бессеточные разбиения области Ω при $N = 121$: а) с треугольными элементами, б) с квадратными элементами, в) облако точек с равномерным расположением узлов и г) облако точек с расположением узлов в зависимости от неоднородных параметров.

диапазоне от 150 до 200. В **задаче 2** наилучшую точность удалось достичь при 150 итерациях. В дальнейшем во всех тестах с CVT будем использовать 150 итераций.

Для использования бессеточного подхода с CVT важными параметрами

кроме количества итераций и грубомасштабных узлов N так же являются параметр γ и функция плотности распределения $\rho(x)$, который сильно зависит от параметра β. При вычислении функции плотности распределения $\rho(x)$ важно выбрать оптимальную β. Для этого проведем численные исследования с различными $\beta = 5, 10, 20$ и так же рассмотрим вариант при $\rho = \texttt{const}$. Параметр γ будем тестировать с двумя значениями $\gamma = \sqrt{2}$ и $\gamma = 2$.

На таб. 3.3 и 3.4 показаны значения погрешности при $\gamma = \sqrt{2}$ и при $N = 121$ и $N = 441$, соответственно. На таб. 3.5 и 3.6 представлены значения погрешности при $\gamma = 2$. Из результатов видно, что $\beta = 5$ и $\gamma = 2$ являются оптимальными для нашего случая. Так, например, при $N = 121$ и использовании восьми базисных функций на узел для квадратных элементов получили погрешность $L^2 = 0.95\%$ и $H^1 = 9.83\%$, а при бессеточном подходе с CVT при $\beta = 5$, $\gamma = 2$ получили $L^2 = 0.56\%$ и $H^1 = 5.7\%$, что в среднем на полтора раза меньше. Также, для наглядности на рис. 3.8 – 3.10 приведены распределения давления в зависимости от использованного многомасштабного подхода для получения решения.

M	Треугольная сетка		Квадратная сетка		Бессеточный $\gamma = \sqrt{2}$		Бессеточный $\gamma = 2$	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	70.43	100	40.62	84.59	76.47	99.98	75.75	99.89
2	20.48	59.43	9.66	41.52	19.32	61.97	44.2	81.66
4	3.91	24.32	3.66	22.13	6.14	33.09	4.56	23.86
8	1.28	13.23	0.95	9.83	1.78	13.85	1.18	9.44
16	0.26	5.38	0.18	3.64	0.71	8.16	0.08	1.6
32	0.08	2.48	0.045	1.51	0.32	6.27	0.013	0.53

Таблица 3.1: Значения погрешности различных подходов в конечный момент времени при $N = 121$.

M	Треугольная сетка		Квадратная сетка		Бессеточный $\gamma = \sqrt{2}$		Бессеточный $\gamma = 2$	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	39.51	82.33	14.18	53.45	52.59	98.17	55.74	96.1
2	5.93	33.13	3.93	25.61	13.87	59.47	8.29	38.91
4	1.31	15.66	1.2	13.68	2.15	20.76	1.22	12.61
8	0.4	8.54	0.32	7.28	0.59	9.06	0.29	4.84
16	0.097	3.73	0.06	2.54	0.2	5.62	0.02	1.02
32	0.026	1.64	0.014	1.0	0.054	4.19	0.0056	0.47

Таблица 3.2: Значения погрешности различных подходов в конечный момент времени при $N = 441$.

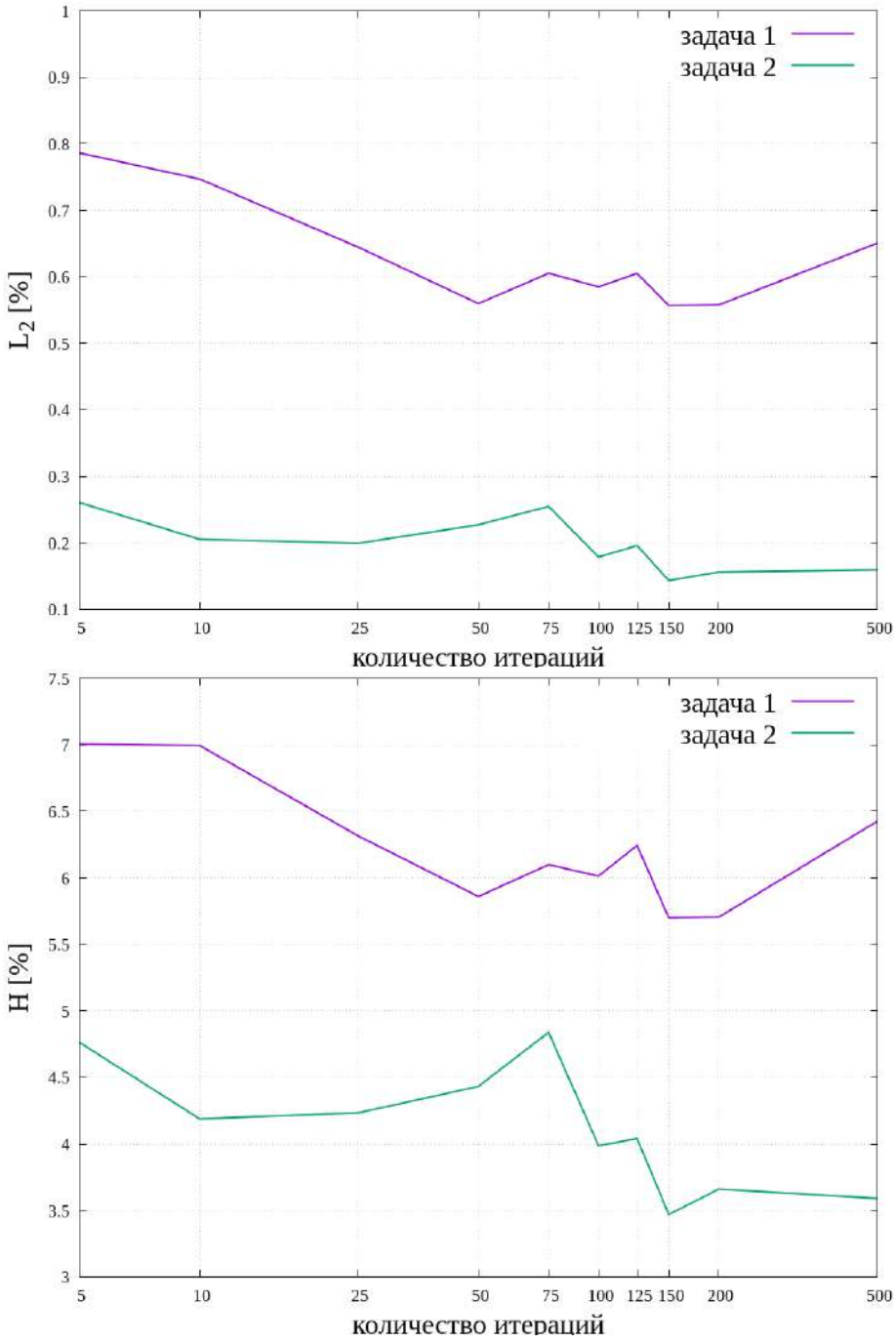


Рисунок 3.7: Погрешность бессеточного многомасштабного метода в зависимости от количества итераций.

M	$\beta = 5$		$\beta = 10$		$\beta = 20$		$\rho = \texttt{const}$	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	76.5	100.5	76.32	101.16	76.91	99.89	77.65	99.88
2	30.77	76.24	29.29	76.79	26.28	71.37	24.53	71.29
4	7.55	34.37	6.91	33.43	7.62	36.62	6.02	33.31
8	1.74	12.9	1.82	13.94	1.71	13.35	1.65	13.68
16	0.28	4.53	0.62	7.36	0.65	7.97	0.56	7.51
32	0.072	2.17	0.32	5.5	0.32	6.16	0.27	5.63

Таблица 3.3: Значения погрешности в конечный момент времени при $N = 121$ и $\gamma = \sqrt{2}$.

M	$\beta = 5$		$\beta = 10$		$\beta = 20$		$\rho = \texttt{const}$	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	51.09	97.57	51.96	99.54	58.76	101.72	55.76	99.87
2	14.09	58.53	14.69	61.06	13.65	59.91	13.61	58.6
4	1.53	17.23	1.73	19.3	1.99	20.16	2.27	21.93
8	0.34	6.91	0.39	7.52	0.4	7.72	0.5	8.47
16	0.09	3.64	0.1	4.19	0.11	4.28	0.14	5.16
32	0.024	2.12	0.029	2.69	0.033	2.87	0.046	3.86

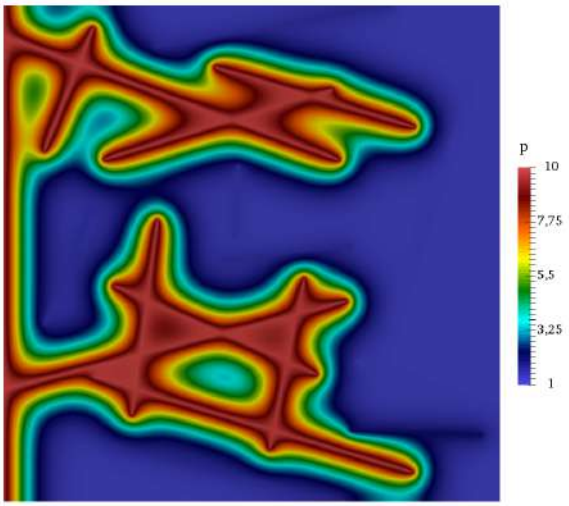
Таблица 3.4: Значения погрешности в конечный момент времени при $N = 441$ и $\gamma = \sqrt{2}$.

M	$\beta = 5$		$\beta = 10$		$\beta = 20$		$\rho = \texttt{const}$	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	75.57	101.13	75.51	101.16	75.84	101.28	76.15	101.08
2	43.96	80.55	42.68	80.95	40.72	78.89	43.19	82.81
4	4.47	22.73	4.9	24.31	5.71	27.71	5.7	27.02
8	0.56	5.7	1.04	8.81	1.18	9.62	1.15	9.57
16	0.05	1.12	0.14	2.58	0.13	2.34	0.11	2.09
32	0.008	0.3	0.028	0.87	0.016	0.64	0.014	0.57

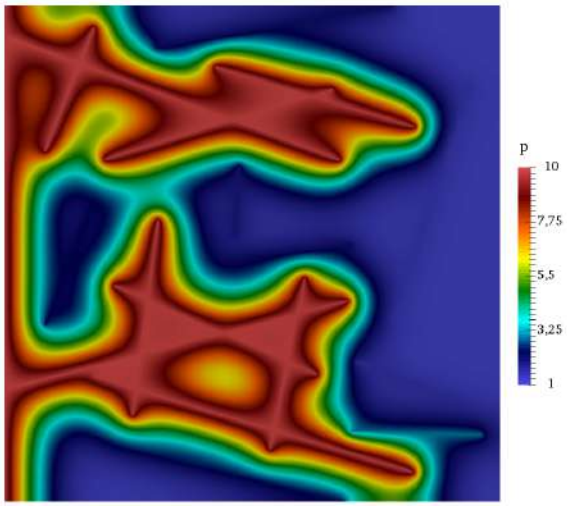
Таблица 3.5: Значения погрешности в конечный момент времени при $N = 121$ и $\gamma = 2$.

M	$\beta = 5$		$\beta = 10$		$\beta = 20$		$\rho = \texttt{const}$	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	49.67	93.2	53.83	95.9	57.37	98.32	56.33	99.55
2	8.08	37.82	7.68	38.97	8.8	41.4	8.07	40.18
4	0.74	9.26	0.8	10.31	1.02	11.58	1.4	13.86
8	0.09	2.48	0.15	3.45	0.14	3.47	0.28	5.2
16	0.012	0.62	0.014	0.72	0.015	0.84	0.03	1.39
32	0.003	0.25	0.003	0.3	0.004	0.34	0.007	0.62

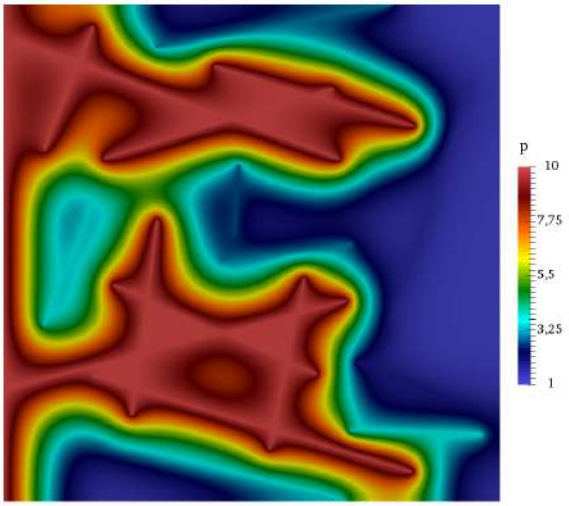
Таблица 3.6: Значения погрешности в конечный момент времени при $N = 441$ и $\gamma = 2$.



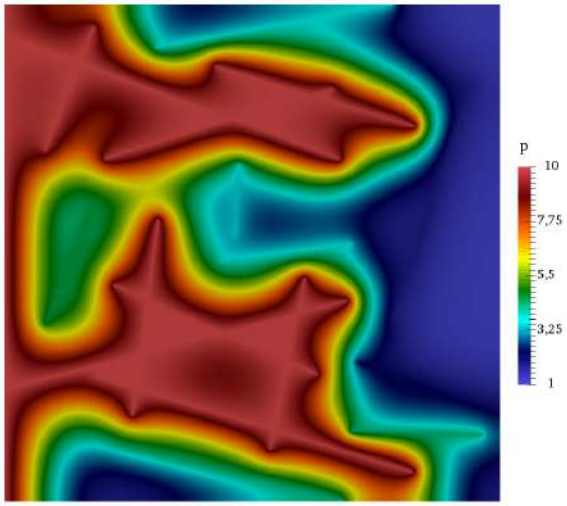
а) $t = 8$



б) $t = 15$

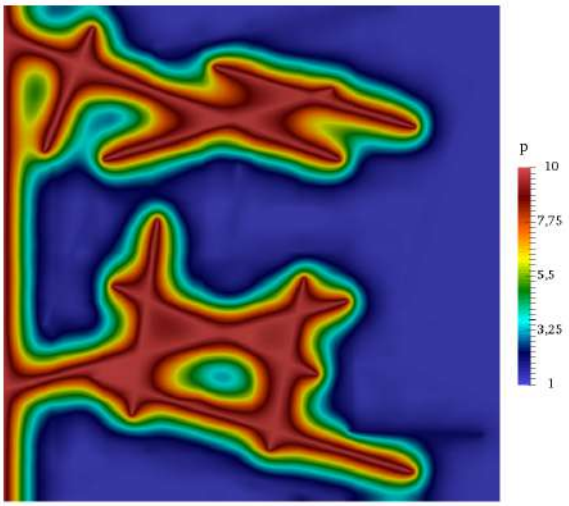


в) $t = 23$

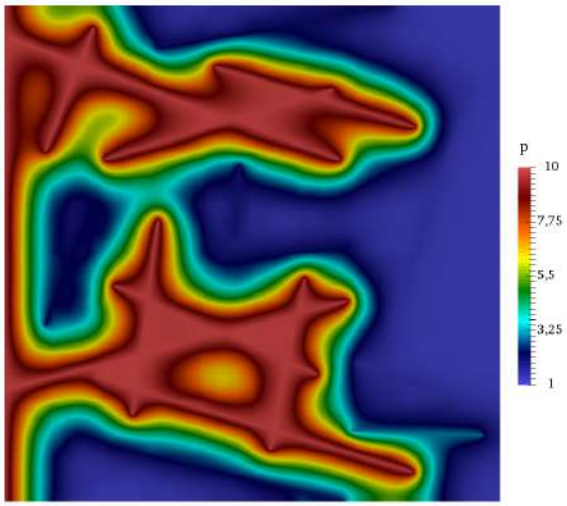


г) $t = 30$

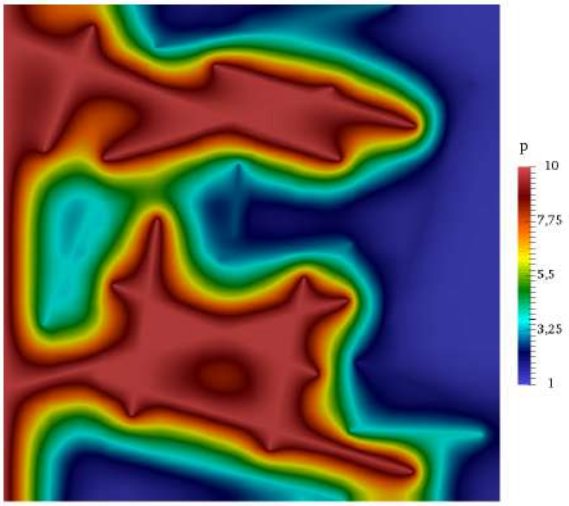
Рисунок 3.8: Решение полученное на эталонной сетке в разные моменты времени при $N = 121$.



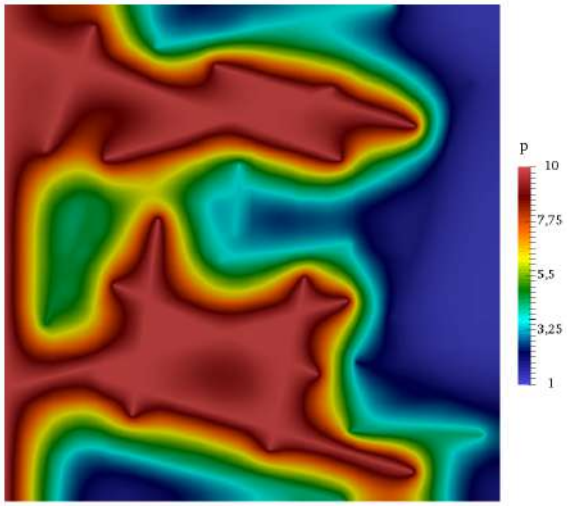
а) $t = 8$



б) $t = 15$

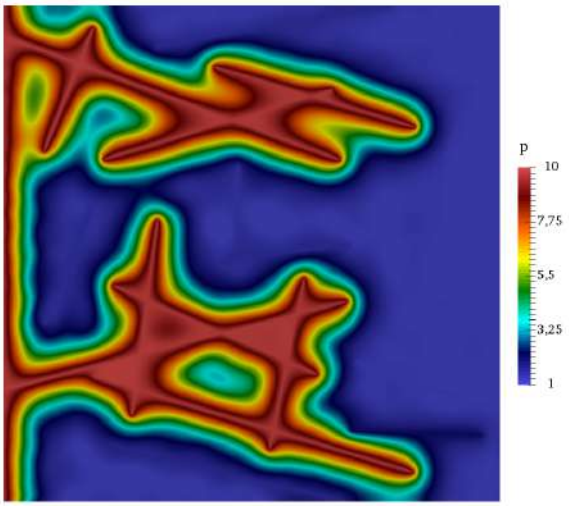


в) $t = 23$

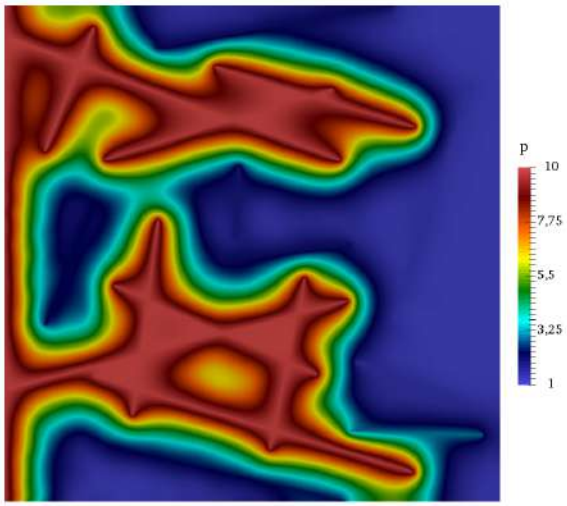


г) $t = 30$

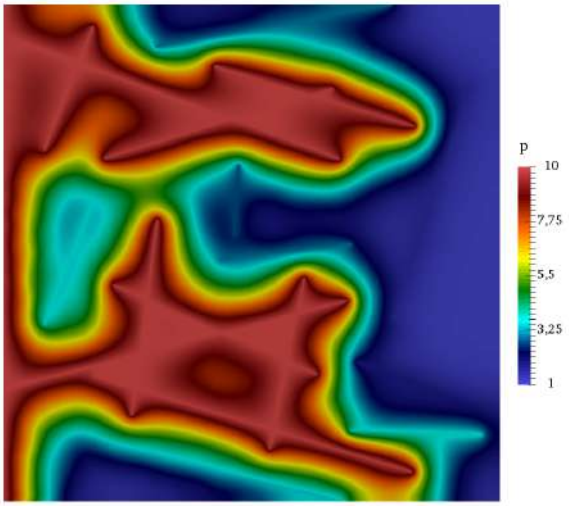
Рисунок 3.9: Решение полученное многомасштабным методом на грубой сетке с квадратными элементами в разные моменты времени при $N = 121$ и $M = 8$.



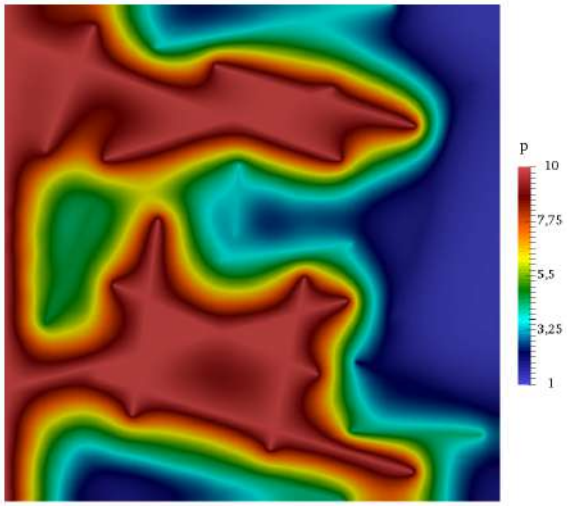
а) $t = 8$



б) $t = 15$



в) $t = 23$



г) $t = 30$

Рисунок 3.10: Решение полученное бессеточным многомасштабным методом с CVT в разные моменты времени при $N = 121$, $\beta = 5$, $\gamma = 2$ и $M = 8$.

3.6 Численные результаты в трехмерном случае

В трехмерном случае вычислительной областью является прямоугольный параллелепипед со сторонами 100x100x50. Десять пересекающихся между собой трещины образуют общую сеть (см. рис. 3.5). Подробная сетка имеет 934184 вершин и 5569883 ячеек. Так же количество грубосеточных узлов для каждого подхода одинаковый и равен $N = 4851$. Параметры задачи были взяты из предыдущего раздела.

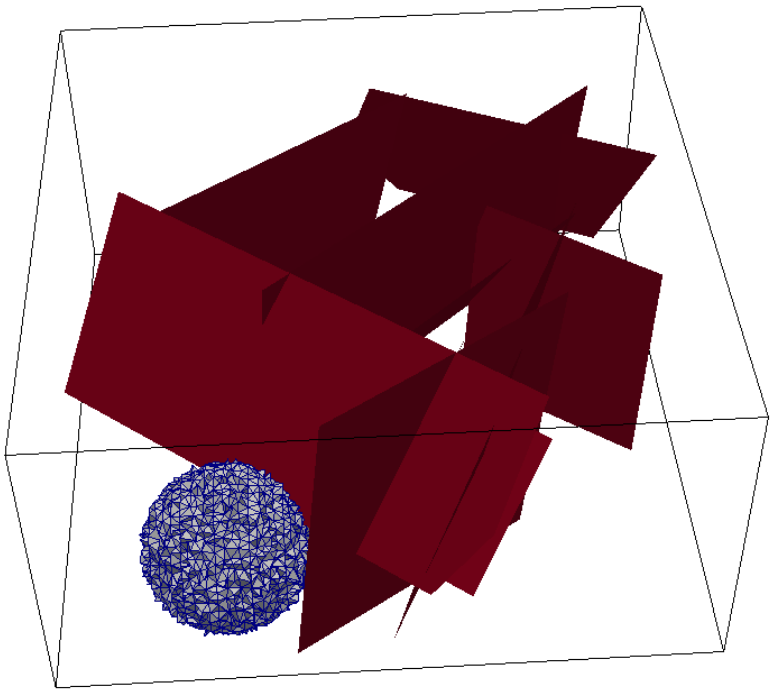


Рисунок 3.11: Иллюстрация вычислительной области Ω с трещинами и некоторой подобласти S_i.

Таб. 3.7 показывает значения ошибок в последний момент времени в зависимости от использования подхода построения грубого масштаба. Таким образом, в трехмерном случае бессеточный подход с CVT показывает наилучшие результаты: при использовании восьми базисных функций на каждый узел погрешность равна $L^2 = 0.07\%$ и $H^1 = 2.86\%$, что более чем в три раза меньше, чем при использовании структурированных кубических элементов ($L^2 = 0.34\%$ и $H^1 = 9.62\%$). Рис. 3.12 – 3.14 показывают распределения давле-

ния полученные на подробной расчетной сетке и многомасштабными методами с использованием восьми базисных функций.

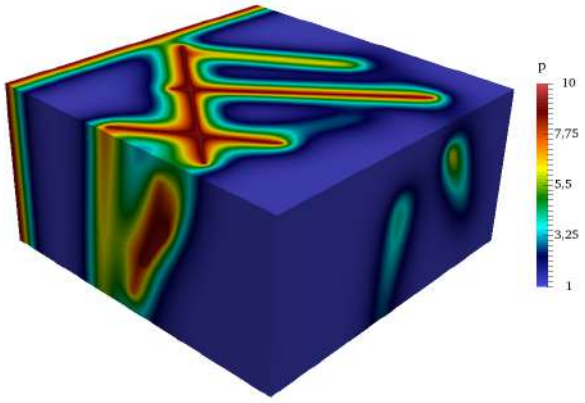
M	Тетраэдральная сетка		Кубическая сетка		Бессеточный подход		Бессеточный подход с CVT	
	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	15.1	66.37	13.43	62.05	15.64	68.33	13.1	60.23
2	4.41	32.57	3.42	28.9	4.43	36.22	2.64	23.99
4	1.1	16.73	1.07	16.02	1.01	16.06	0.44	8.73
8	0.41	10.15	0.34	9.62	0.26	8.15	0.07	2.86

Таблица 3.7: Значения погрешности в конечный момент времени при $N = 4851$.

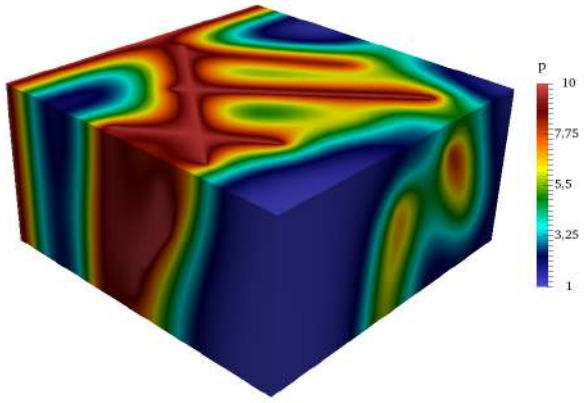
3.7 Выводы

В данной главе представлен бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов. Отличие этого метода от стандартного ОММКЭ заключается в построении грубого масштаба, в которой используется бессеточный метод. Были рассмотрены структурированный бессеточный подход и бессеточный подход с использованием CVT. Полученные численные результаты показывают высокую точность, особенно при трехмерных расчетах.

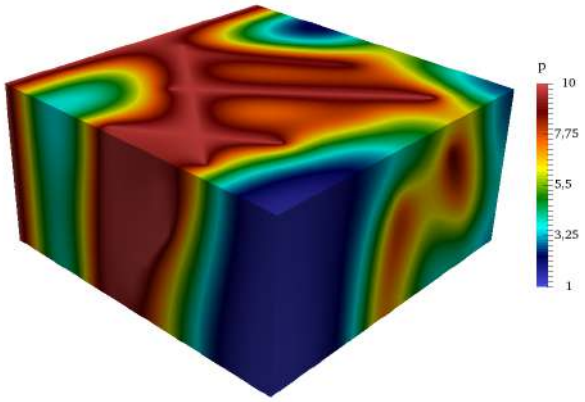
Преимущество такого подхода в том, что многомасштабный метод можно применять достаточно быстро, без дополнительных работ, связанных с построением расчетной сетки на грубом масштабе. Еще одним преимуществом является произвольное расположение узлов на грубом масштабе. Здесь, демонстрируется, что кластеризация узлов в интересных местах повышает точность решения.



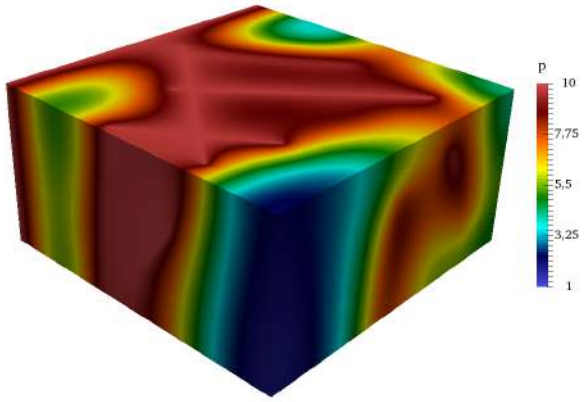
а) $t = 4$



б) $t = 13$

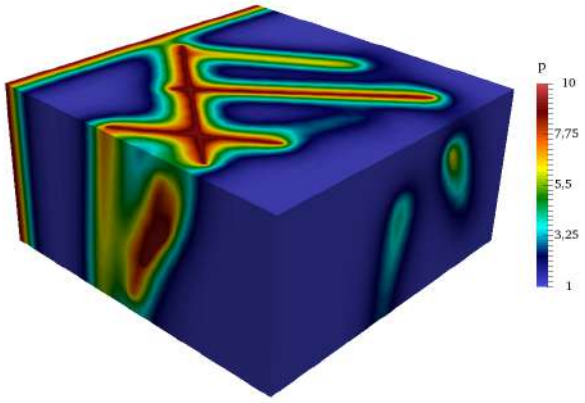


в) $t = 21$

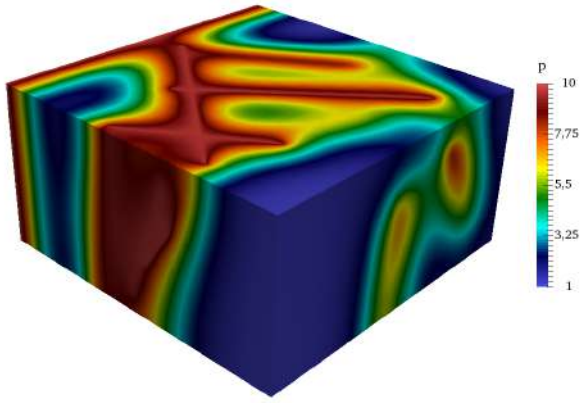


г) $t = 30$

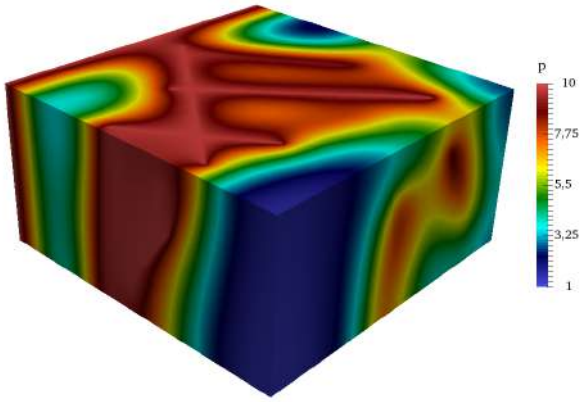
Рисунок 3.12: Решение полученное на эталонной сетке в разные моменты времени.



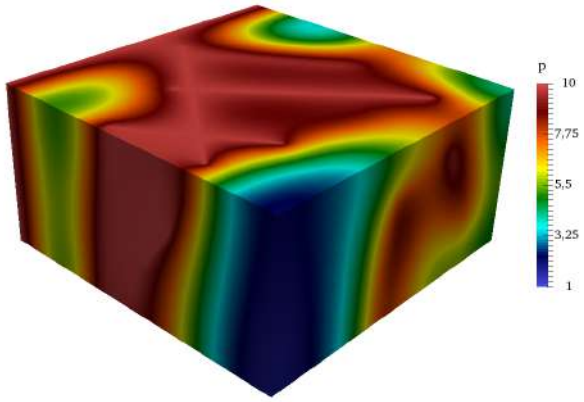
а) $t = 4$



б) $t = 13$

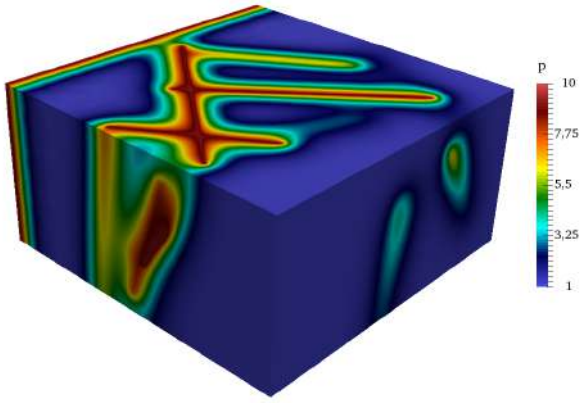


в) $t = 21$

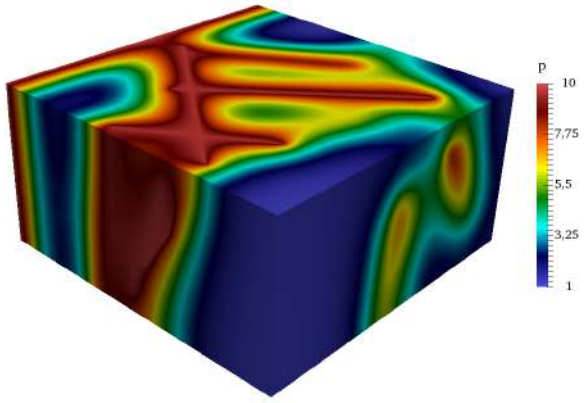


г) $t = 30$

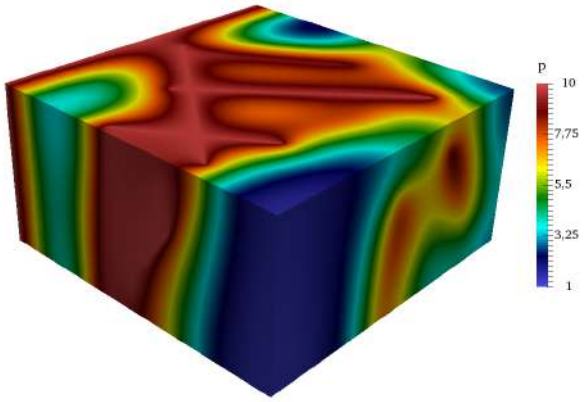
Рисунок 3.13: Решение полученное многомасштабным методом на грубой сетке с прямоугольными элементами в разные моменты времени при $M = 8$.



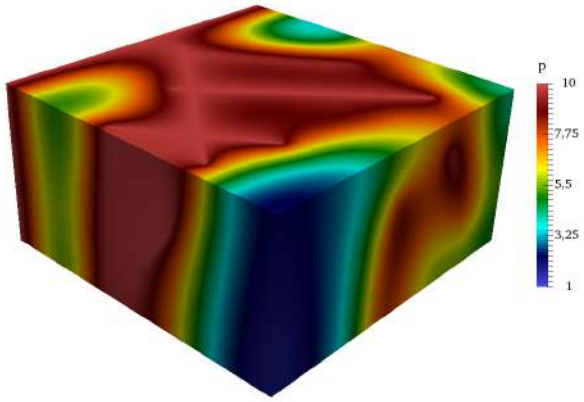
а) $t = 4$



б) $t = 13$



в) $t = 21$



г) $t = 30$

Рисунок 3.14: Решение полученное бессеточным многомасштабным методом с CVT в разные моменты времени при $\beta = 30$, $\gamma = 2$ и $M = 8$.

Глава 4

Бессеточный ОММКЭ в задаче искусственного замораживания грунта

В данной главе применяется разработанный ранее в предыдущей главе бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для решения задачи теплопроводности в системе грунт-труба. В грубосеточном масштабе применяется бессеточный подход с CVT, где плотность распределения вычисляется с учетом системы труб. Трубы моделируются аналогично трещинам как в методе DFM. Они рассматриваются в одномерном случае, когда как вычислительной областью является трехмерный грунт. Также для повышения точности вычислений применяются дополнительные базисные функции, подход построения которых детально рассматривается.

4.1 Введение

Освоение северных территорий имеет ряд специфических особенностей, обусловленных суровыми климатическими условиями и учетом наличия толщи многолетнемерзлых грунтов. Строительство геотехнических сооружений в условиях криолитозоны требует проведения теплофизических расчетов. Для оценки термического и механического состояния массива горных пород необходимо проводить численные расчеты с использованием современных эффективных вычислительных технологий. Процессы тепло- и массопереноса в многолетнемерзлых грунтах характеризуются разномасштабной природой моделируемых объектов (свай, охлаждающих устройств, тонких включений теплоизолирующего материала). Разномасштабная и мультифизичная природа рассматриваемых процессов требует построения новых математических моделей, современных эффективных вычислительных алгоритмов и их исследования

[98].

Численное моделирование теплофизических процессов в многолетнемерзлых грунтах (ММГ) при строительстве в криолитозоне имеет огромное практическое значение. Процессы осадки (протаивания) и пучения (замерзания) многолетнемерзлых грунтов - оснований могут вызывать мерзлотные деформации и разрушения зданий и сооружений. Эти процессы происходят не только из-за изменения климата, но и от влияния самих зданий и сооружений.

В 1883 году было создано (запатентовано) искусственное замораживание грунта (ИЗГ) [140], и с тех пор оно широко используется в различных инженерно-геологических приложениях. В сложных геологических и гидрологических условиях грунта ИЗГ является экологически безопасным подходом, используемым в проектах подземного строительства в мегаполисах. ИЗГ используется для стабилизации грунта в районе вечной мерзлоты для защиты устойчивости инженерных сооружений и зданий [141—143].

Для численного моделирования таких задач используются так называемые системы грунт-труба [107]. Математическая модель процесса оттаивания-промерзания массива грунтов основан на использовании двухфазной модели Стефана, а для трубы (ИЗГ) используется подход, основанный на понижении размерности, то есть к сведении к одномерной гидравлической модели [144, 145]. Аналогичные подходы встречаются при моделировании фильтрации в трещиновато-пористых средах, где моделирование трещин происходит с использованием модели дискретных трещин DFM. Полная математическая модель учитывает только перенос тепла внутри массива грунта, то есть при расчете температурного поля не учитываются массообменные процессы.

В этой главе применяется бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для моделирования теплопередачи в системе грунт-труба. Трубы устройства искусственного замораживания грунта и другие высококонтрастные элементы могут потребовать более высокой концентрации

грубомасштабных узлов для повышения точности. Для этого применяется подход CVT, а так же дополнительные многомасштабные базисные функции, которые учитывают течение охлаждающей жидкости в трубе.

4.2 Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель, описывающую динамику распределения температуры системы грунт-труба с учетом фазовых переходов воды в лед и обратно, при заданной температуре фазового перехода T^* в области $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$. Здесь, $\Omega^+(t)$ – область занятая талым грунтом, где температура превышает температуру фазового перехода и $\Omega^-(t)$ – область занятая мерзлым грунтом:

$$\Omega^+(t) = \{x|x \in \Omega, \quad T(x,t) > T^*\}, \quad \Omega^-(t) = \{x|x \in \Omega, \quad T(x,t) < T^*\}.$$

Фазовый переход происходит на поверхности раздела талой и мерзлой грунтов $S = S(t)$.

Теплоперенос в грунте. Для моделирования процессов теплопереноса с фазовыми переходами используется классическая модель Стефана, описывающая тепловые процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды с поглощением или выделением скрытой теплоты на поверхности раздела талой и мерзлой грунтов:

$$\big(\alpha(\phi) + \rho^+ L\delta(T - T^*)\big)\,\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\lambda(\phi)\operatorname{grad} T\right) = f, \tag{4.1}$$

где L – удельная теплота фазового перехода, $\delta(T - T^*)$ – дельта–функция Дирака. Для коэффициентов уравнения имеем следующие соотношения:

$$\alpha(\phi) = \rho^- c^- + \phi(\rho^+ c^+ - \rho^- c^-), \quad \lambda(\phi) = \lambda^- + \phi(\lambda^+ - \lambda^-),$$

$$\phi = \begin{cases} 0 & T < T^*, \\ 1 & T > T^*, \end{cases} \quad \delta(T - T^*) = \frac{d\phi}{dT},$$

где ρ^+, c^+ и ρ^-, c^- – плотность и удельная теплоемкость талой и мерзлой зоны, соответственно.

Поскольку рассматривается процесс распространения тепла в насыщенной пористой среде, то для коэффициентов объемной теплоемкости в мерзлой и талой грунтах, соответственно, имеем:

$$c^-\rho^- = (1-m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_i\rho_i, \quad c^+\rho^+ = (1-m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_w\rho_w,$$

где m – пористость. Индексы sc, w, i обозначают соответственно скелет пористой среды, воду и лед. Для коэффициентов теплопроводности в талой и мерзлой зоне имеем аналогичные соотношения:

$$\lambda^- = (1-m)\lambda_{sc} + m\lambda_i, \quad \lambda^+ = (1-m)\lambda_{sc} + m\lambda_w.$$

На практике, фазовые превращения не проходят мгновенно и могут проходить в малом интервале температуры $[T^* - \Delta, T^* + \Delta]$. В качестве функции ϕ и $\delta(T - T^*)$ можно взять достаточно гладкие функции ϕ_Δ и $\delta_\Delta(T - T^*)$, зависящие от температуры:

$$\phi_\Delta = \frac{1}{2}\Big(1 + \operatorname{erf}\Big(\frac{T - T^*}{\sqrt{2}\Delta}\Big)\Big), \quad \delta_\Delta(T - T^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta}\exp\Big(-\frac{(T - T^*)^2}{2\Delta^2}\Big).$$

Тогда получим следующее уравнение для температуры в области Ω:

$$c\rho_\Delta(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\lambda_\Delta(T)\operatorname{grad} T\right) = f, \tag{4.2}$$

где $c\rho_\Delta(T) = \alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L\delta_\Delta(T - T^*)$, $\lambda_\Delta(T) = \lambda(\phi_\Delta)$. Полученное уравнение (4.2) является стандартным квазилинейным параболическим уравнением.

Тепломассоперенос в трубе. Для расчета теплового режима системы труб используется модель пониженной размерности – теплогидравлическая модель (см. рис. 4.1). В данной модели предполагается, что в трубе циркулирует хладоноситель (фреон) с достаточно высокой температурой кипения,

и поэтому в данной модели не учитывается фазовый переход хладоносителя в системе труб. Запишем уравнение теплопроводности, описывающее тепловой режим движущегося по трубе хладоносителя в цилиндрической системе координат:

$$c_p\rho_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+v_\xi\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_p\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_p\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)=0,\quad x\in\gamma,\ (4.3)$$

где c_p, ρ_p и λ_p – удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность теплоносителя, T – температура хладоносителя в трубе, v_r – скорость движения хладоносителя в радиальном направлении и v_ξ – скорость движения хладоносителя в направлении движения потока.

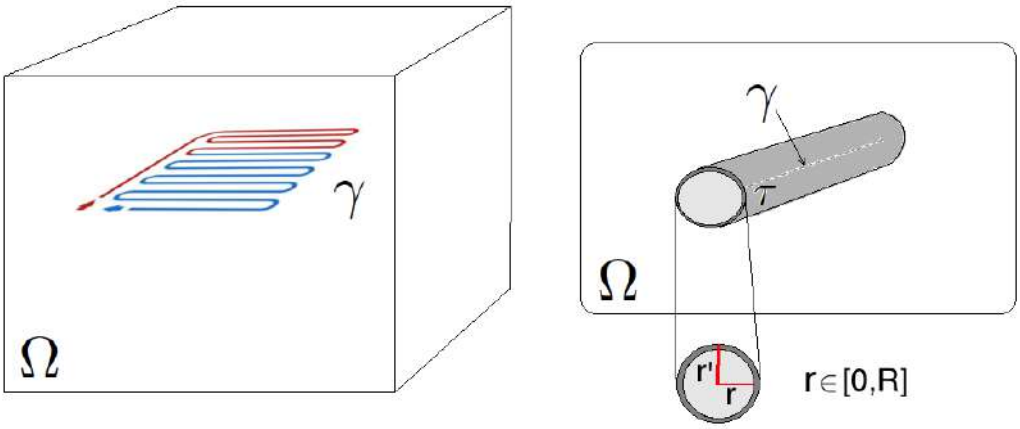


Рисунок 4.1: Иллюстрация расчетной области для системы грунт–труба. Слева: $\Omega\in\mathcal{R}^d$ $(d=2,3)$, $\gamma\in\mathcal{R}^1$ и $\gamma\in\Omega$. Справа: усредненная по радиусу модель для сети труб, $r\in[0,R]$ и R — радиус трубы

Поскольку для течения в трубах характерны значительные скорости движения хладоносителя в продольном направлении, то целесообразно пренебречь радиальной скоростью течения, $v_r=0$. Далее уравнение (4.3) умножим на радиус r и проинтегрируем полученное уравнение вдоль оси $r\in[0,R]$

$$\int_0^R c_p\rho_p r\frac{\partial T}{\partial t}dr+\int_0^R c_p\rho_p r v_\xi\frac{\partial T}{\partial \xi}dr-\int_0^R r\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_p\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)dr+\lambda_p R\frac{\partial T}{\partial r}=0.\ (4.4)$$

Далее, определим среднюю температуру хладоносителя в трубе

$$T_p = \frac{2}{R^2}\int_0^R r\,T\,dr$$

и с учетом контакта трубы с грунтом

$$\lambda_p R\frac{\partial T_p}{\partial r} = R\,\alpha\pi(T - T_p),$$

получим следующее уравнение:

$$\pi R^2 c_p\rho_p\left(\frac{\partial T_p}{\partial t} + \upsilon_\xi\frac{\partial T_p}{\partial \xi}\right) - \pi R^2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial \xi}\right) + 2R\,\alpha\pi(T - T_p) = 0, \quad x \in \gamma, \quad (4.5)$$

которое описывает модель пониженной размерности в трубе (теплогидравлическая модель, вывод которой более подробно описано в работе [98]).

Расчетная математическая модель. Рассмотрим систему теплового насоса, которая используется для выкачивания тепла из грунта для обогрева зданий с возможностью переключения с режима отопления зимой на режим конденсирования летом. Математическая модель описывается системой грунт–труба, которая описывает тепловое взаимодействие грунтов с проложенным в них трубопроводными системами, заполненными теплоносителями (см. рис. 4.2).

Используя суперпозицию $T_p = T$, систему уравнений для температуры грунта (4.2) и для температуры системы труб (4.5) запишем в следующем обобщенном виде:

$$\begin{aligned} c\rho_\Delta(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\Delta(T)\operatorname{grad} T) = 0, \quad & x \in \Omega, \\ b_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_\xi\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) - S\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_p\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) = 0, \qquad & \xi \in \gamma, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $b_p = Sc_p\rho_p$, $S = \pi R^2$, γ – кривая, описывающая расположение системы труб.

Систему уравнений (4.6) дополним начальным условием

$$T(x) = T_0, \qquad x \in \Omega, \quad t = 0,$$

а на одном конце трубы зададим граничное условие первого рода

$$T = T_p, \quad x \in \xi_D.$$

Так же граничное условие первого рода ставится для описания влияния температуры здания

$$T = T_D, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_D.$$

Для описание теплообмена с воздухов используем граничное условие третьего рода

$$-\lambda_\Delta(T)\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_{air}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_R,$$

где α – коэффициент конвективного теплообмена, T_{air} - температура воздуха. Для остальной области зададим условие второго рода

$$-\lambda_\Delta(T)\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_N.$$

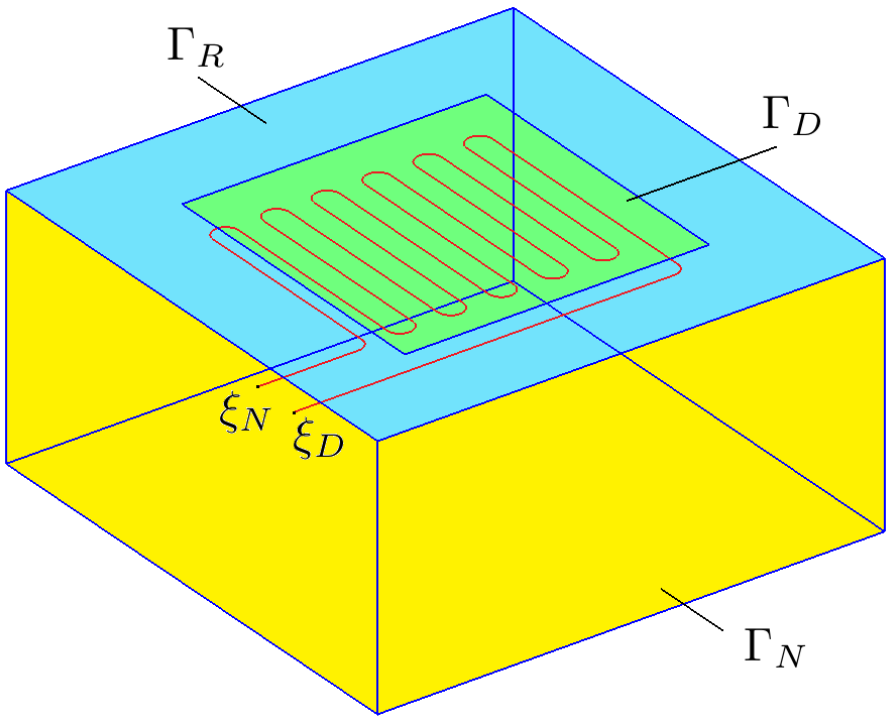


Рисунок 4.2: Вычислительная область.

4.3 Конечно-элементная аппроксимация

Для аппроксимации по времени воспользуемся устойчивой неявной дискретизацией с шагом по времени τ. Для решения многомерных задач типа Стефана естественно использовать экономичные линеаризированные схемы по времени, когда коэффициенты берутся с предыдущего временного слоя. Вариационная задача с использованием подхода DFM формулируется следующим образом: нужно найти такую функцию $T \in V$, которая для любой тестовой функции $v \in \hat{V}$ удовлетворяет следующей системе:

$$\int_\Omega c\rho_\Delta(\widehat{T}^{n+1})\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}vdx + \int_\Omega \lambda_\Delta(\widehat{T}^{n+1})\,\mathrm{grad}\,T^{n+1}\cdot\mathrm{grad}\,vdx+$$
$$+\int_\gamma b_p\left(\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}+\nu_\xi\,\mathrm{grad}_\xi\,T^{n+1}\right)vd\xi + S\int_\gamma \lambda_p\,\mathrm{grad}_\xi\,T^{n+1}\cdot\mathrm{grad}_\xi\,vd\xi = 0, \tag{4.7}$$

где

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v\mid_{x\in\xi_D} = T_p,\ v\mid_{x\in\Gamma_D} = T_D\},$$
$$\hat{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v\mid_{x\in\xi_D} = 0,\ v\mid_{x\in\Gamma_D} = 0\}.$$

Пусть $\mathcal{T}_h$ является триангуляцией вычислительной области Ω. Тогда получим следующую дискретную систему в матричной форме:

$$A\cdot T = F,$$

где матрица и правая часть вычисляются по следующим формулам:

$$A = \{a_{ij} = \int_\Omega \frac{c\rho_\Delta(\widehat{T}^{n+1})}{\tau}\phi^j\phi^i dx + \int_\Omega \lambda_\Delta(\widehat{T}^{n+1})\,\mathrm{grad}\,\phi^j\cdot\mathrm{grad}\,\phi^i dx+$$
$$+\int_\gamma b_p\left(\frac{\psi^j}{\tau}+\nu_\xi\,\mathrm{grad}_\xi\,\psi^j\right)\psi^i d\xi + S\int_\gamma \lambda_p\,\mathrm{grad}_\xi\,\psi^j\cdot\mathrm{grad}_\xi\,\psi^i d\xi\}, \tag{4.8}$$
$$F = \{f_i = \int_\Omega \frac{c\rho_\Delta(\widehat{T}^{n+1})}{\tau}T^n\phi^i dx + \int_\gamma \frac{b_p}{\tau}T^n\psi^i d\xi\},$$

где базисные функции ϕ и ψ определены на тетраэдральных ячейках и на одномерных отрезках (гранях), соответственно.

4.4 Численный алгоритм бессеточного ОММКЭ

В данном разделе рассмотрим численный алгоритм бессеточного ОММКЭ с дополнительными базисными функциями для задачи теплопроводности в системе грунт-труба:

- разбиение на облако точек мелкомасштабной вычислительной сетки $\mathcal{T}_h$ на грубом масштабе;
- построение автономного пространства путем решения спектральной задачи и построения дополнительной базисной функции;
- использование автономного пространства для проекции мелкомасштабной системы на грубомасштабную систему.

Здесь, для разбиения на облако точек мелкомасштабной вычислительной сетки $\mathcal{T}_h$ на грубом масштабе используется бессеточный подход с CVT. Для этого используются наработки численных исследований из предыдущей главы.

Грубосеточная аппроксимация

Сначала введем понятия грубомасштабного бессеточного разбиения. Пусть $\mathcal{S}_H$ разбиение вычислительной области Ω на облако точек так, что $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} S_i$. Обозначим это разбиение как бессеточное грубое разбиение и предположим, что каждый грубый элемент разбит на связное объединение элементов мелкой сетки. Обозначим через $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ вершины грубого разбиения $\mathcal{S}_H$, где N – количество грубых вершин. Для бессеточного грубого разбиения (см. рис. 3.2) элементы S_i являются локальными областями, которые являются носителями базисных функций

$$S_i = \{y \in \mathcal{R}^N : \| y - x_i \| \leq r_i\},$$

где r_i – радиус сферы S_i.

Обозначим базисные функции через $\psi_k^{S_i}$, которые определены в S_i, а индекс k представляет нумерацию этих базисных функций. В свою очередь, решение

представляется в следующем виде

$$T_{\text{ms}}(x) = \sum_{i,k} c_k^i \psi_k^{S_i}(x).$$

После определения многомасштабных базисных функций, глобальная связь CG задается через вариационную форму

$$a(T_{\text{ms}}^{n+1}, v) = L(v), \quad \forall v \in V_{\text{off}},$$

где V_{off} – пространство, охватываемое этими базисными функциями, и билинейная и линейная формы имеют следующий вид:

$$a(T_{\text{ms}}^{n+1}, v) = \int_\Omega c\rho \frac{T_{\text{ms}}^{n+1}}{\tau} v d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \left(\lambda(x) \operatorname{grad} T_{\text{ms}}^{n+1}, \operatorname{grad} v\right) dx,$$
$$L(v) = \int_\Omega c\rho \frac{T_{\text{ms}}^{n}}{\tau} v dx.$$

Локальные базисные функции

Здесь рассматривается алгоритм построения многомасштабных базисных функций путем решения спектральных задач. Чтобы сгенерировать автономное пространство V_{off}^S, решается следующая задача на собственные значения в каждом S_i:

$$A\Psi^{\text{off}} = \lambda^{\text{off}} B \Psi^{\text{off}}, \tag{4.9}$$

где A и B обозначают мелкомасштабные матрицы как

$$A = [a_{l,m}] = \int_{S_i} (\lambda(x) \operatorname{grad} \phi_m \operatorname{grad} \phi_l)\, dx,$$
$$B = [b_{l,m}] = \int_{S_i} (\lambda(x) \phi_m \phi_l)\, dx,$$

где ϕ_i – мелкосеточная базисная функция.

Затем выбираются первые M^{S_i} из наименьших собственных значений после решения задачи о собственных значениях (4.9) и выбираются соответствующие собственные векторы $\psi_j^{S_i},\ j = 1, \ldots, M^{S_i}$.

Глобальная формулировка

В данном разделе функция плотности распределения $\rho(x)$, который используется в методе CVT, вычисляется с учетом положения трубы, используя следующую задачу:

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{div}(\beta \operatorname{grad} \rho) + \rho = f(x), \\
&-\beta \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\
&f(x) = \begin{cases} 10^5, & x \in \gamma, \\ 1, & x \in \Omega \backslash \gamma, \end{cases}
\end{aligned}
$$

где $f(x)$ – функция положения трубы, а β – параметр сглаживания.

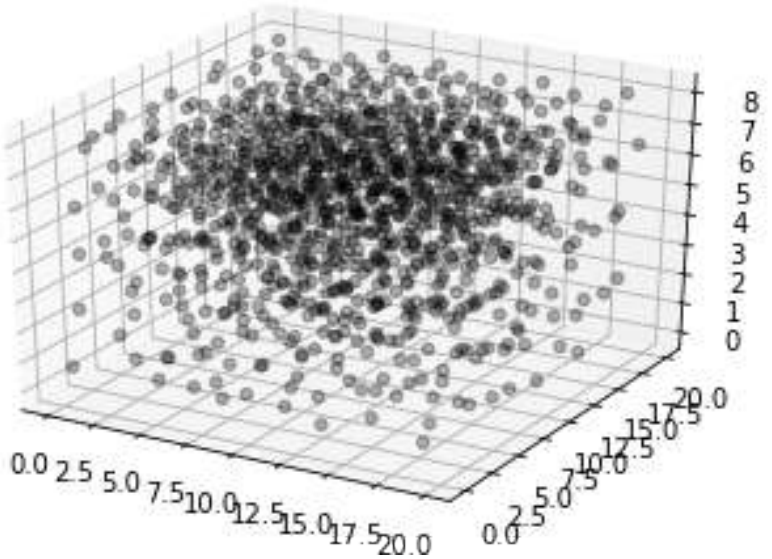


Рисунок 4.3: Иллюстрация расположения узлов на грубом бессеточном масштабе (облако точек) согласно $\rho(x)$ в методе CVT.

Далее, обсуждается автономное пространство и вариационная формулировка. Функции формы $W_i(x)$, определенные в S_i, образуют начальное грубое пространство

$$V_0^{\text{init}} = \operatorname{span}\{W_i(x)\}_{i=1}^N.$$

Далее, умножая функцию $W_i(x)$ на собственные векторы $\psi_j^{S_i}$, получаем

многомасштабные базисные функции в автономном пространстве $V_{\text{off}}^{S_i}$ (рис. 4.4)

$$\psi_j^i = W_i(x)\psi_j^{S_i},\ 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le M^{S_i}.$$

Далее, строится спектральное многомасштабное пространство

$$V_{\text{off}} = \text{span}\{\psi_j^i : 1 \le i \le N,\ 1 \le j \le M^{S_i}\}.$$

Также для дальнейшего использования строится операторная матрица

$$R^T = [\psi_1^1, \ldots, \psi_{M^{S_1}}^1, \ldots, \psi_1^N, \ldots, \psi_{M^{S_N}}^N],$$

где ψ_j^i используются для обозначения узловых значений каждой базисной функции, определенной на мелкой сетке.

Затем матрица перехода R и аппроксимация на мелком масштабе (4.7) используются для решения следующей системы алгебраических уравнений на грубом масштабе:

$$A_c T_c = F_c,\ A_c = RAR^T,\ F_c = RF, \tag{4.10}$$

где элементы матрицы A и вектора правой части F берутся из соответствующей системы на мелком масштабе (4.8).

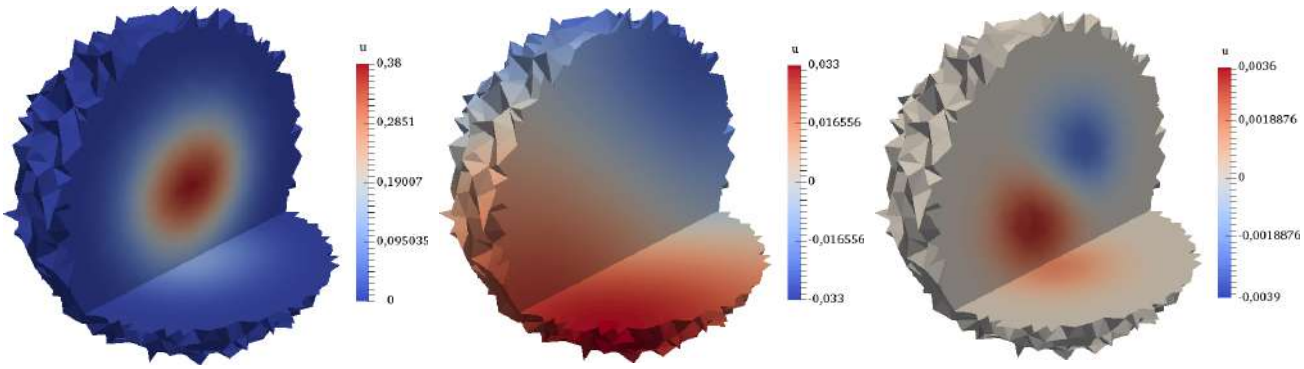
После решения системы (4.10), переходим от грубомасштабного решения к мелкомасштабному решению, используя также оператор перехода R и грубосеточное решение T_c

$$T_{\text{ms}} = R^T T_c,$$

где T_{ms} – мелкосеточное решение.

Дополнительные базисные функции

Для повышения точности решения многомасштабным методом строится дополнительная упрощенная базисная функция на каждом S_i, содержащем



а) б) в)

Рисунок 4.4: Иллюстрация: а) функции формы, б) некоторого собственного вектора и в) многомасштабной базисной функции.

трубы $\gamma \in S_i$. Для этого решается следующая локальная задача

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(\lambda(x)\operatorname{grad}\phi^i_{\text{add}}\right) &= 0, \quad x \in S_i, \\ \phi^i_{\text{add}} &= 0, \quad x \in \partial S_i \backslash \partial\gamma, \\ \phi^i_{\text{add}} &= 1, \quad x \in \gamma. \end{aligned} \tag{4.11}$$

После решения задачи (4.11) полученная функция ϕ^i_{add} умножается на функцию формы $W_i(x)$ для получения упрощенной дополнительной базисной функции ψ^i_{add}, которая учитывает влияние системы труб на распределение температуры в грунте. Таким образом, проекционная матрица дополняется следующим образом:

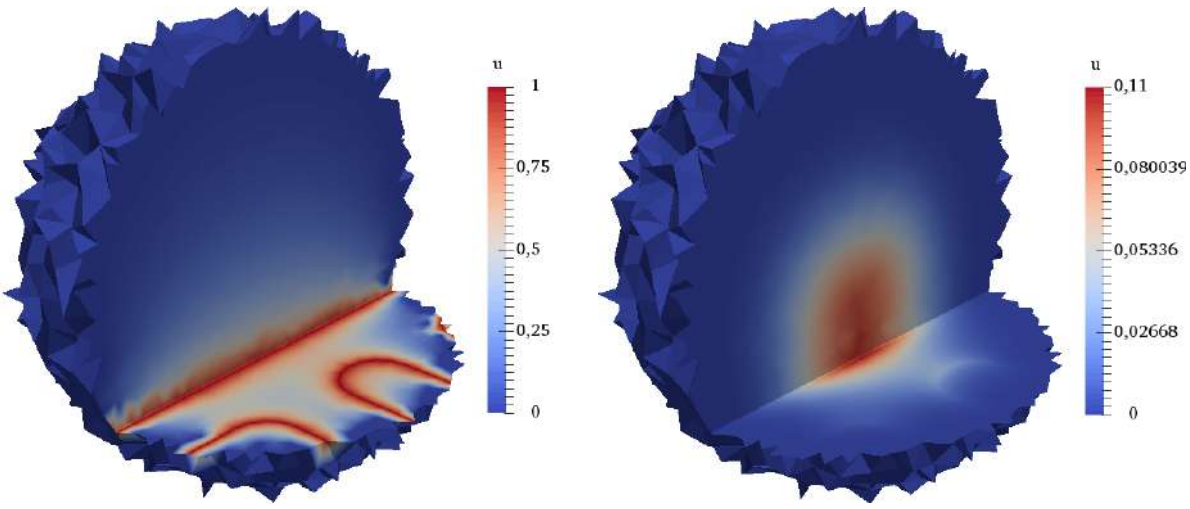
$$R^T = [\psi^1_1, \ldots, \psi^1_{M^{S_1}}, \psi^1_{\text{add}}, \ldots, \psi^N_1, \ldots, \psi^N_{M^{S_N}}, \psi^N_{\text{add}}].$$

4.5 Численное решение

Приведем численные результаты для рассматриваемой задачи для трехмерного случая со следующими значениями:

- для талого грунта:

  объемная теплоемкость $c^+\rho^+ = 2.5 \cdot 10^6$Дж/(м$^3 \cdot K$);



а) б)

Рисунок 4.5: Иллюстрация: а) функции ϕ^i_{add} и б) упрощенной базисной функции ψ^i_{add}.

теплопроводность $\lambda^+ = 2.5$Вт/(м·K).

- для мерзлого грунта:

  объемная теплоемкость $c^-\rho^- = 2.0 \cdot 10^6$Дж/(м$^3 \cdot K$);

  теплопроводность $\lambda^- = 2.0$Вт/(м·K).

- для фазового перехода:

  коэффициент для интервал фазовых превращений $\delta = 1°C$;

  удельная теплоемкость $L\rho^+ = 60 \cdot 10^6$Дж/м.

- для трубы:

  скорость $\nu_\xi = 0.5$м/с;

  объемная теплоемкость $c_p\rho_p = 1.0 \cdot 10^6$Дж/(м$^3 \cdot K$);

  теплопроводность $\lambda_p = 0.09$Вт/(м·K);

  радиус трубы $R = 0.05$м;

  температура охлаждающей жидкости на входе $T_p = -20°C$.

- начальная температура в грунте и трубе $T_0 = 2.0°C$.
- постоянная температура сооружения $T_D = 10°C$.
- время расчета $t_{max} = 120$ дней и шаг по времени $\tau = 1$ день.

Труба находится на глубине 1.5м от верхней границы области Ω (рис. 4.2), которая имеет следующие размеры: X = 20м, Y = 20м и Z = 8м. На поверхности грунта по центру на квадратной области с размером 12м×12м задается постоянная температура сооружения. Для граничного условия Робина зададим $\alpha = 14$Вт/(м·K). Температура воздуха T_{air}, который имеет региональный характер и в условиях города Якутска варьируется от $T_w = -35.7°C$ зимой до $T_s = 17.3°C$ летом, выглядит следующим образом:

$$T_{air} = \frac{T_w - T_s}{2} \sin\left(\frac{\pi(30(M-1) + \bar{t} + 75)}{180 \cdot 30 \cdot 86400} + \frac{T_w + T_s}{2}\right),$$

где $\bar{t} = t/86400$ – время в сутках, $M = 5$ – начальный месяц.

Вычислительная эталонная сетка имеет 165,590 вершин и 959,823 ячеек, а облако точек в грубом масштабе имеет $N = 1089$ вершин и элементов. Количество дополнительных базисных функций равен 628, т.е. это количество подобластей S_i, которые содержат в себе некоторую часть трубы γ. На рис. (4.2) по плоскости XY показана скорость движения хладоносителя в направлении движения потока.

На таб. 4.1 отображены относительные погрешности в процентах при различных количествах базисных функций, а так же при использовании дополнительных базисных функций. Например, при использовании восьми многомасштабных базисных функций с дополнительной базисной функцией, получили погрешность в $1,65\%$ в L^2 и $11,79\%$ в H^1, что дает более точные результаты, чем без дополнительной базисной функции.

Распределение температуры в грунте в различные моменты времени показано на рис. 4.7. Для более подробного понимания динамики изменения температуры в месте расположения трубы рисунки показаны с некоторым срезом. Показанные здесь рисунки демонстрируют, как система труб позволяет фундаменту здания оставаться в замороженном состоянии в теплые времена года.

M	Без функций ψ^i_{add}			С функциями ψ^i_{add}		
	DOF	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$	DOF	$\|\|e\|\|_{L^2}$	$\|\|e\|\|_{H^1}$
1	1089	45.98	79.95	1717	9.83	31.57
2	2178	24.1	60.22	2806	7.39	26.52
4	4356	13.16	37.68	4984	3.98	19.82
8	8712	9.41	24.77	9340	1.65	11.79
16	17424	7.25	17.12	18052	0.55	5.08

Таблица 4.1: Относительные погрешности в L^2 и H^1 в процентах (%) с использованием разного количества базисных функций.

4.6 Выводы

В данной главе на примере задачи Стефана в системе грунт-труба приведен вычислительный алгоритм бессеточного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Для улучшения результатов используются дополнительные базисные функции. Полученные результаты численного исследования показали высокую точность при сгущении элементов на грубом масштабе в местах расположения трубы и использовании дополнительных упрощенных базисных функций.

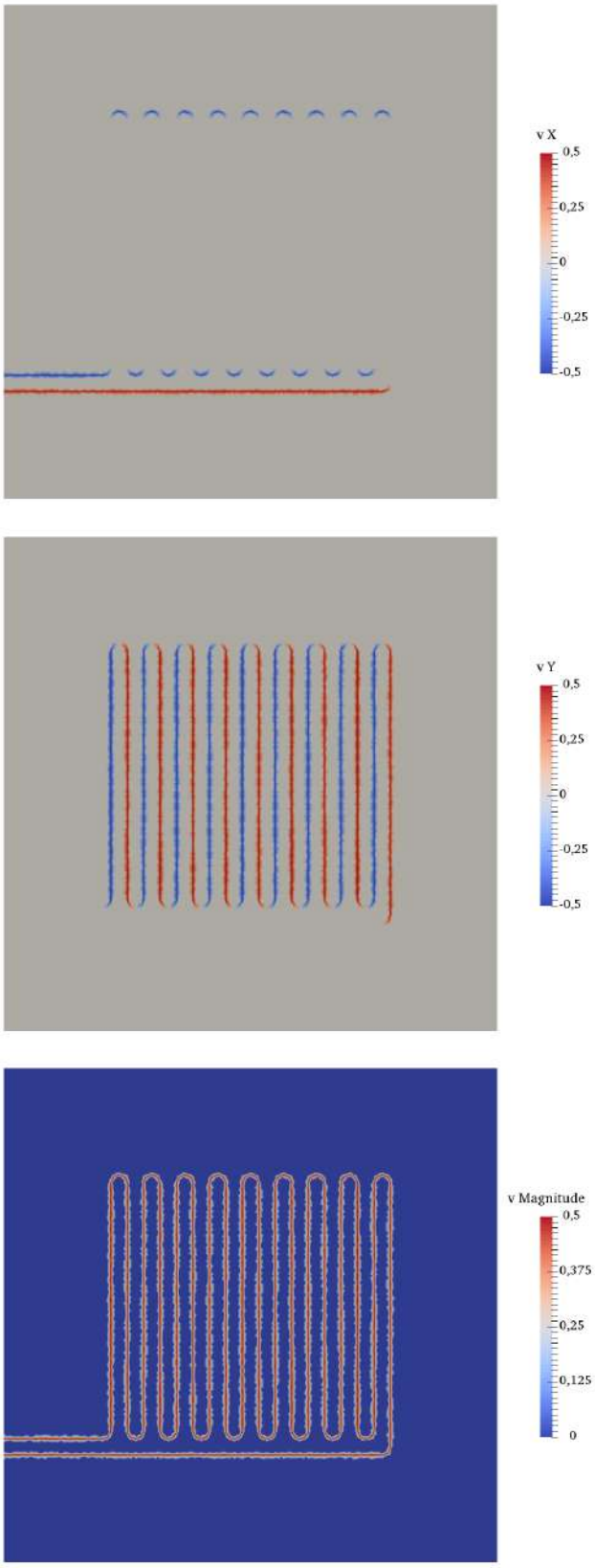


Рисунок 4.6: Иллюстрация скорости ν_ξ на плоскости XY (сверху вниз): по направлению X; по направлению Y; магнитуда.

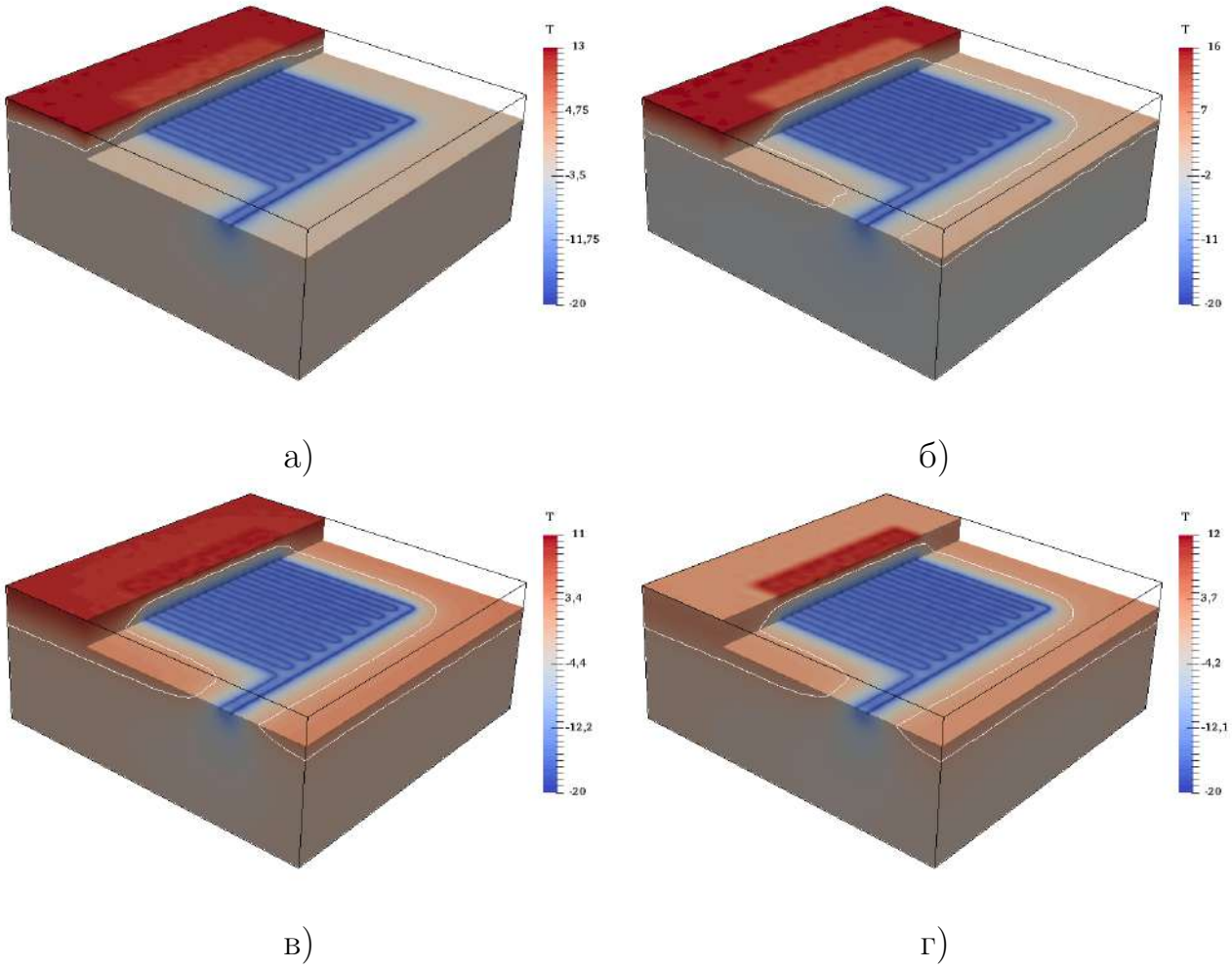


Рисунок 4.7: Многомасштабное решение T_{ms} в: а) июне, б) июле, в) августе и г) сентябре.

Заключение

Диссертационная работа посвящена разработке подходов построения вычислительных сеток для обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Для апробации предложенных многомасштабных методов были численно сравнены решения полученные многомасштабными методами с решениями на подробных сетках. Вычислительные технологии отработаны на двумерной и трехмерной модельных задачах однофазной фильтрации и теплопроводности с исследованием на масштабируемость при использовании различного количества многомасштабных базисных функций и количества неизвестных на грубом масштабе. Основные научные результаты, полученные в работе, формулируются следующим образом:

- Проведено численное решение задачи фильтрации в трещиноватой среде с использованием метода DFM, которая моделирует трещины в явном виде. Было показано сильное влияние трещин на скорость течения жидкости при больших значениях проницаемости. Показана прямая зависимость времени решения СЛАУ от величины контраста параметров задачи. Проведено численное исследование влияния проницаемости трещины на сходимость итерационного метода для задачи фильтрации в двумерной и трехмерной постановках;
- Предложены два новых подхода построения расчетных сеток на грубом масштабе для обобщенного многомасштабного метода конечных элементов: квази-структурированный и неструктурированный. На примере задачи фильтрации сравнены точности решения многомасштабным методом на предложенных сетках с решениями на структурированных сетках с треугольными и квадратными элементами;
- Предложен бессеточный обобщенный многомасштабный метод конечных элементов. Были рассмотрены структурированный бессеточный подход

и бессеточный подход с использованием CVT. Были исследованы различные значения параметров метода CVT и установлены оптимальные значения для них. Полученные численные результаты показывают высокую точность, особенно при трехмерных расчетах;

- Приведен вычислительный алгоритм бессеточного обобщенного многомасштабного метода конечных элементов на примере задачи Стефана в системе грунт-труба. Для улучшения результатов были построены дополнительные упрощенные базисные функции. Полученные результаты численного исследования показали высокую точность решений.

Список литературы

1. *Самарский, А.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. Самарский, А. Михайлов. — 2002.
2. *Ильин, В.* Математическое моделирование. Часть 1. Непрерывные и дискретные модели / В. Ильин // Новосибирск: Изд-во СО РАН. — 2017.
3. *Brezzi, F.* Mixed and hybrid finite element methods. Т. 15 / F. Brezzi, M. Fortin. — Springer Science & Business Media, 2012.
4. *Reddy, J. N.* Introduction to the finite element method / J. N. Reddy. — McGraw-Hill Education, 2019.
5. *Thomée, V.* Galerkin finite element methods for parabolic problems. Т. 25 / V. Thomée. — Springer Science & Business Media, 2007.
6. *Zienkiewicz, O. C.* The finite element method: its basis and fundamentals / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu. — Elsevier, 2005.
7. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — Рипол Классик, 1975.
8. *Li, Z. C.* Combined methods for elliptic equations with singularities, interfaces and infinities. Т. 444 / Z. C. Li. — Springer Science & Business Media, 2013.
9. *Larsson, S.* Partial differential equations with numerical methods. Т. 45 / S. Larsson, V. Thomée. — Springer, 2003.
10. *Gershenfeld, N. A.* The nature of mathematical modeling / N. A. Gershenfeld, N. Gershenfeld. — Cambridge university press, 1999.
11. *Ciarlet, P. G.* The finite element method for elliptic problems / P. G. Ciarlet. — SIAM, 2002.

12. *Hughes, T. J.* The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis / T. J. Hughes. — Courier Corporation, 2012.

13. *Efendiev, Y.* Multiscale finite element methods: theory and applications. T. 4 / Y. Efendiev, T. Y. Hou. — Springer Science & Business Media, 2009.

14. *Segerlind, L. J.* Applied finite element analysis / L. J. Segerlind. — John Wiley & Sons, 1991.

15. *Babuška, I.* Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods / I. Babuška, J. E. Osborn // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1983. — T. 20, № 3. — C. 510—536.

16. *Babuška, I.* Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients / I. Babuška, G. Caloz, J. E. Osborn // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1994. — T. 31, № 4. — C. 945—981.

17. *Hou, T. Y.* A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media / T. Y. Hou, X.-H. Wu // Journal of computational physics. — 1997. — T. 134, № 1. — C. 169—189.

18. *Hou, T.* Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients / T. Hou, X.-H. Wu, Z. Cai // Mathematics of computation. — 1999. — T. 68, № 227. — C. 913—943.

19. *Efendiev, Y. R.* The multiscale finite element method (MsFEM) and its applications / Y. R. Efendiev. — California Institute of Technology, 1999.

20. *Efendiev, Y.* Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications / Y. Efendiev, T. Y. Hou, V. Ginting // Communications in Mathematical Sciences. — 2004. — T. 2, № 4. — C. 553—589.

21. *Efendiev, Y.* Numerical homogenization of nonlinear random parabolic operators / Y. Efendiev, A. Pankov // Multiscale Modeling & Simulation. — 2004. — T. 2, № 2. — C. 237—268.

22. *Nasedkin*, *A.* Finite element simulation of effective properties of microporous piezoceramic material with metallized pore surfaces / A. Nasedkin, A. Nasedkina, A. Rybyanets // Ferroelectrics. — 2017. — Т. 508, № 1. — С. 100—107.

23. *Papanicolau*, *G.* Asymptotic analysis for periodic structures / G. Papanicolau, A. Bensoussan, J.-L. Lions. — Elsevier, 1978.

24. *Козлов*, *С. М.* Осреднение случайных операторов / С. М. Козлов // Математический сборник. — 1979. — Т. 109, 2 (6. — С. 188—202.

25. *Keller*, *J. B.* Effective behavior of heterogeneous media / J. B. Keller // Statistical mechanics and statistical methods in theory and application. — Springer, 1977. — С. 631—644.

26. *Babuška*, *I.* Homogenization and its application. Mathematical and computational problems / I. Babuška // Numerical solution of partial differential equations–III. — Elsevier, 1976. — С. 89—116.

27. *Бахвалов*, *Н.* Осреднение процессов в периодических средах / Н. Бахвалов, Г. Панасенко // Математические задачи механики композиционных материалов. — 1984.

28. *Lions*, *P.-L.* Homogenization of hamilton-jacobi equations / P.-L. Lions, G. Papanicolaou, S. S. Varadhan. — 1986.

29. *Murat*, *F.* Calculus of variations and homogenization / F. Murat, L. Tartar // Topics in the mathematical modelling of composite materials. — Springer, 1997. — С. 139—173.

30. *Jikov*, *V. V.* Homogenization of differential operators and integral functionals / V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik. — Springer Science & Business Media, 2012.

31. *Страховская, Л.* Об одной специальной разностной схеме / Л. Страховская, Р. Федоренко // Численные методы механики сплошной среды. — 1976. — Т. 7, № 4. — С. 149—163.

32. *Федоренко, Р. П.* Об одном варианте метода конечных элементов / Р. П. Федоренко, Л. Г. Страховская // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1979. — Т. 19, № 4. — С. 950—960.

33. *Страховская, Л.* Расчет диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов / Л. Страховская, Р. Федоренко // Препринт ИПМ им. МВ Келдыша АН СССР. — 1987. — № 171. — С. 26.

34. *Страховская, Л.* Расчёт напряжений в композитном теле методом конечных суперэлементов / Л. Страховская, Р. Федоренко // Препринты ИПМ им. МВ Келдыша. — 1994. — № 97. — С. 1—25.

35. *Федоренко, Р. П.* Введение в вычислительную физику / Р. П. Федоренко // М.: изд-во МФТИ. — 1994. — Т. 4.

36. *Репях, В. В.* Применение одного варианта метода суперэлементов к решению плоской задачи теории упругости / В. В. Репях // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1986. — Т. 26, № 11. — С. 1643—1653.

37. *Галанин, М.* К обоснованию метода конечных суперэлементов / М. Галанин, Е. Савенков // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 5. — С. 713—729.

38. Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии / В. Жуков, Н. Новикова [и др.] // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. — 2001. — № 0. — С. 8—17.

39. *Галанин, М.* Численное исследование метода конечных суперэлементов на примере решения задачи о скважине для уравнения Лапласа / М.

Галанин, С. Лазарева, Е. Савенков // Препринт ИПМ им. МВ Келдыша РАН. — 2005. — № 79. — С. 30.

40. Моделирование разработки нефтяных месторождений методом суперэлементов / А. Мазо, К. Поташев [и др.] // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 8. — С. 51—64.

41. *Babuška, I.* Survey of meshless and generalized finite element methods: a unified approach / I. Babuška, U. Banerjee, J. E. Osborn // Acta Numerica. — 2003. — Т. 12. — С. 1—125.

42. *Babuška, I.* Stable generalized finite element method (SGFEM) / I. Babuška, U. Banerjee // Computer methods in applied mechanics and engineering. — 2012. — Т. 201. — С. 91—111.

43. *Brewster, M. E.* A multiresolution strategy for numerical homogenization / M. E. Brewster, G. Beylkin // Applied and Computational Harmonic Analysis. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 327—349.

44. *Moulton, J. D.* The black box multigrid numerical homogenization algorithm / J. D. Moulton, J. E. Dendy Jr, J. M. Hyman // Journal of Computational Physics. — 1998. — Т. 142, № 1. — С. 80—108.

45. *Dorobantu, M.* Wavelet-based numerical homogenization / M. Dorobantu, B. Engquist // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1998. — Т. 35, № 2. — С. 540—559.

46. *Lo, K.* Multiscale parameterisation of passive scalars via wavelet-based numerical homogenisation / K. Lo, K. Ngan // Applied Mathematical Modelling. — 2020. — Т. 82. — С. 217—234.

47. *Bourgeat, A.* Homogenized behavior of two-phase flows in naturally fractured reservoirs with uniform fractures distribution / A. Bourgeat // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1984. — Т. 47, № 1/2. — С. 205—216.

48. *Cruz, M. E.* A parallel Monte-Carlo finite-element procedure for the analysis of multicomponent random media / M. E. Cruz, A. T. Patera // International journal for numerical methods in engineering. — 1995. — Т. 38, № 7. — С. 1087—1121.

49. *Dykaar, B. B.* Determination of the effective hydraulic conductivity for heterogeneous porous media using a numerical spectral approach: 1. Method / B. B. Dykaar, P. K. Kitanidis // Water Resources Research. — 1992. — Т. 28, № 4. — С. 1155—1166.

50. *Hughes, T. J.* Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods / T. J. Hughes // Computer methods in applied mechanics and engineering. — 1995. — Т. 127, № 1—4. — С. 387—401.

51. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics / T. J. Hughes, G. R. Feijóo [и др.] // Computer methods in applied mechanics and engineering. — 1998. — Т. 166, № 1/2. — С. 3—24.

52. *Juanes, R.* A variational multiscale finite element method for multiphase flow in porous media / R. Juanes // Finite elements in analysis and design. — 2005. — Т. 41, № 7/8. — С. 763—777.

53. *Nolen, J.* A framework for adaptive multiscale methods for elliptic problems / J. Nolen, G. Papanicolaou, O. Pironneau // Multiscale Modeling & Simulation. — 2008. — Т. 7, № 1. — С. 171—196.

54. Variational multiscale methods in computational fluid dynamics / R. Codina, S. Badia [и др.] // Encyclopedia of computational mechanics. — 2018. — С. 1—28.

55. The heterogeneous multi-scale method / B. Engquist [и др.] // arXiv preprint physics/0205048. — 2002.

56. Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems / P. Ming, P. Zhang [и др.] // Journal of the American Mathematical Society. — 2005. — Т. 18, № 1. — С. 121—156.

57. *Matache*, *A.-M.* Generalized p-FEM in homogenization / A.-M. Matache, I. Babuška, C. Schwab // Numerische Mathematik. — 2000. — Т. 86, № 2. — С. 319—375.

58. *Matache*, *A.-M.* Homogenization via p-FEM for problems with microstructure / A.-M. Matache, C. Schwab // Applied Numerical Mathematics. — 2000. — Т. 33, № 1—4. — С. 43—59.

59. *Durlofsky*, *L. J.* Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media / L. J. Durlofsky // Water resources research. — 1991. — Т. 27, № 5. — С. 699—708.

60. *McCarthy*, *J.* Comparison of fast algorithms for estimating large-scale permeabilities of heterogeneous media / J. McCarthy // Transport in Porous Media. — 1995. — Т. 19, № 2. — С. 123—137.

61. *Berlyand*, *L.* Network approximation for effective viscosity of concentrated suspensions with complex geometry / L. Berlyand, L. Borcea, A. Panchenko // SIAM journal on mathematical analysis. — 2005. — Т. 36, № 5. — С. 1580—1628.

62. *Papanicolaou*, *G. C.* Network approximation for transport properties of high contrast materials / G. C. Papanicolaou, L. Borcea // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1998. — Т. 58, № 2. — С. 501—539.

63. *Berlyand*, *L.* Discrete network approximation for highly-packed composites with irregular geometry in three dimensions / L. Berlyand, Y. Gorb, A. Novikov // Multiscale methods in science and engineering. — Springer, 2005. — С. 21—57.

64. *Liu, W. K.* Multiple scale finite element methods / W. K. Liu, Y. Zhang, M. R. Ramirez // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1991. — Т. 32, № 5. — С. 969—990.

65. Bridging scale methods for nanomechanics and materials / W. K. Liu, H. S. Park [и др.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2006. — Т. 195, № 13—16. — С. 1407—1421.

66. The bridging scale for two-dimensional atomistic/continuum coupling / H. S. Park, E. G. Karpov [и др.] // Philosophical magazine. — 2005. — Т. 85, № 1. — С. 79—113.

67. *Novikov, A.* Eddy viscosity of cellular flows by upscaling / A. Novikov // Journal of Computational Physics. — 2004. — Т. 195, № 1. — С. 341—354.

68. *Franca, L. P.* Towards multiscale functions: enriching finite element spaces with local but not bubble-like functions / L. P. Franca, A. L. Madureira, F. Valentin // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2005. — Т. 194, № 27—29. — С. 3006—3021.

69. *Chamoin, L.* A stochastic coupling method for atomic-to-continuum Monte-Carlo simulations / L. Chamoin, J. T. Oden, S. Prudhomme // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — Т. 197, № 43/44. — С. 3530—3546.

70. Multiscale finite element method for subdivided periodic elastic structures of composite materials / L.-q. Cao, J.-z. Cui [и др.] // Journal of Computational Mathematics. — 2001. — С. 205—212.

71. *Cao, L.-Q.* Multiscale asymptotic expansion and finite element methods for the mixed boundary value problems of second order elliptic equation in perforated domains / L.-Q. Cao // Numerische Mathematik. — 2006. — Т. 103, № 1. — С. 11—45.

72. *Efendiev, Y.* Generalized multiscale finite element methods (GMsFEM) / Y. Efendiev, J. Galvis, T. Y. Hou // Journal of computational physics. — 2013. — Т. 251. — С. 116—135.

73. Randomized oversampling for generalized multiscale finite element methods / V. M. Calo, Y. Efendiev [и др.] // Multiscale Modeling & Simulation. — 2016. — Т. 14, № 1. — С. 482—501.

74. Flow based oversampling technique for multiscale finite element methods / J. Chu, Y. Efendiev [и др.] // Advances in Water Resources. — 2008. — Т. 31, № 4. — С. 599—608.

75. Generalized multiscale finite element methods: Oversampling strategies / Y. Efendiev, G. Li [и др.] // International Journal for Multiscale Computational Engineering. — 2014. — Т. 12, № 6.

76. Iterative oversampling technique for constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method in the mixed formulation / S. W. Cheung, E. Chung [и др.] // Applied Mathematics and Computation. — 2022. — Т. 415. — С. 126622.

77. *Akkutlu, I. Y.* Multiscale model reduction for shale gas transport in fractured media / I. Y. Akkutlu, Y. Efendiev, M. Vasilyeva // Computational Geosciences. — 2016. — Т. 20, № 5. — С. 953—973.

78. Coupling of multiscale and multi-continuum approaches / E. T. Chung, Y. Efendiev [и др.] // GEM-International Journal on Geomathematics. — 2017. — Т. 8, № 1. — С. 9—41.

79. Multiscale model reduction for shale gas transport in a coupled discrete fracture and dual-continuum porous media / I. Y. Akkutlu, Y. Efendiev [и др.] // Journal of Natural Gas Science and Engineering. — 2017. — Т. 48. — С. 65—76.

80. Generalized multiscale finite element methods for problems in perforated heterogeneous domains / E. T. Chung, Y. Efendiev [и др.] // Applicable Analysis. — 2016. — Т. 95, № 10. — С. 2254—2279.

81. Generalized multiscale finite elements for simulation of elastic-wave propagation in fractured media / Y. Cho, R. L. Gibson Jr [и др.] // Geophysics. — 2018. — Т. 83, № 1. — WA9—WA20.

82. Multiscale model reduction of the wave propagation problem in viscoelastic fractured media / M. Vasilyeva, J. De Basabe [и др.] // Geophysical Journal International. — 2019. — Т. 217, № 1. — С. 558—571.

83. Generalized Multiscale Discontinuous Galerkin Method for Helmholtz Problem in Fractured Media / U. Gavrileva, V. Alekseev [и др.] // International Conference on Finite Difference Methods. — Springer. 2018. — С. 250—257.

84. *Gavrilieva, U.* Generalized Multiscale Finite Element Method for Elastic Wave Propagation in the Frequency Domain / U. Gavrilieva, M. Vasilyeva, E. Chung // Computation. — 2020. — Т. 8, № 3. — С. 63.

85. A generalized multiscale finite element method for elastic wave propagation in fractured media / E. T. Chung, Y. Efendiev [и др.] // GEM-International Journal on Geomathematics. — 2016. — Т. 7, № 2. — С. 163—182.

86. *Chung, E. T.* Mixed GMsFEM for the simulation of waves in highly heterogeneous media / E. T. Chung, W. T. Leung // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2016. — Т. 306. — С. 69—86.

87. *Chung, E.* Computational multiscale methods for first-order wave equation using mixed CEM-GMsFEM / E. Chung, S.-M. Pun // Journal of Computational Physics. — 2020. — С. 109359.

88. *Efendiev, Y. R.* Multiscale model reduction with generalized multiscale finite element methods in geomathematics / Y. R. Efendiev, M. Presho //. — Springer Nature, 2015.

89. Constrained energy minimization based upscaling for coupled flow and mechanics / M. Vasilyeva, E. T. Chung [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2019. — Т. 376. — С. 660—674.

90. *Chung, E. T.* Generalized multiscale finite element method for elasticity equations / E. T. Chung, Y. Efendiev, S. Fu // GEM-International Journal on Geomathematics. — 2014. — Т. 5, № 2. — С. 225—254.

91. *Brown, D. L.* Effective equations for fluid-structure interaction with applications to poroelasticity / D. L. Brown, P. Popov, Y. Efendiev // Applicable Analysis. — 2014. — Т. 93, № 4. — С. 771—790.

92. *Tyrylgin, A.* Embedded fracture model in numerical simulation of the fluid flow and geo-mechanics using Generalized Multiscale Finite Element Method / A. Tyrylgin, M. Vasilyeva, E. T. Chung // Journal of Physics: Conference Series. Т. 1392. — IOP Publishing. 2019. — С. 012075.

93. *Aarnes, J. E.* Coarsening of three-dimensional structured and unstructured grids for subsurface flow / J. E. Aarnes, V. L. Hauge, Y. Efendiev // Advances in Water Resources. — 2007. — Т. 30, № 11. — С. 2177—2193.

94. Mixed multiscale finite element methods on adaptive unstructured grids using limited global information / J. Aarnes, Y. Efendiev [и др.] // Multiscale Methods: Bridging the Scales in Science and Engineering. — 2010. — Т. 1.

95. Multiscale finite volume method for discrete fracture modeling on unstructured grids (MS-DFM) / S. Bosma, H. Hajibeygi [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2017. — Т. 351. — С. 145—164.

96. A multiscale discontinuous Galerkin method in perforated domains / E. T. Chung, Y. Efendiev [и др.] // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. Т. 42. — 2016. — С. 212—229.

97. Multiscale model reduction of the unsaturated flow problem in heterogeneous porous media with rough surface topography / D. Spiridonov, M. Vasilyeva [и др.] // Mathematics. — 2020. — Т. 8, № 6. — С. 904.

98. *Stepanov, S.* Multiscale Multiphysics Modeling of the Infiltration Process in the Permafrost / S. Stepanov, D. Nikiforov, A. Grigorev // Mathematics. — 2021. — Т. 9, № 20. — С. 2545.

99. GMsFEM on unstructured grids for single-phase flow in fractured porous media / D. Nikiforov [и др.] // Journal of Physics: Conference Series. Т. 1392. — IOP Publishing. 2019. — С. 012071.

100. Multiscale dimension reduction for flow and transport problems in thin domain with reactive boundaries / M. Vasilyeva, V. Alekseev [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2021. — Т. 442. — С. 110512.

101. *Efendiev, Y.* Multiscale finite element methods for flows on rough surfaces / Y. Efendiev, J. Galvis, M. S. Pauletti // Communications in Computational Physics. — 2013. — Т. 14, № 4. — С. 979—1000.

102. *Васильев, В.* Решение задач однофазной фильтрации методом конечных элементов на вычислительном кластере / В. Васильев, М. Васильева, Д. Никифоров // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. МК Аммосова. — 2016. — 6 (56).

103. Численное моделирование течения однофазной жидкости в трещиноватых пористых средах / М. В. Васильева [и др.] // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2017. — Т. 159, № 1. — С. 100—115.

104. Численное решение задачи фильтрации в трещиноватой среде с использованием декомпозиции областей / В. И. Васильев [и др.] // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2018. — Т. 21, № 4. — С. 15—27.

105. *Nikiforov, D.* Numerical simulation of the embedded discrete fractures by the finite element method / D. Nikiforov, S. Stepanov // Journal of Physics: Conference Series. Т. 1158. — IOP Publishing. 2019. — С. 032038.

106. Multiscale model reduction of fluid flow based on the dual porosity model / S. Stepanov [и др.] // Journal of Physics: Conference Series. Т. 1158. — IOP Publishing. 2019. — С. 042025.

107. Вычислительная реализация модели смешанной размерности теплопереноса в системе грунт–труба в криолитозоне / В. И. Васильев [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2060—2073.

108. *Nikiforov, D.* Meshfree Generalized Multiscale Finite Element Method / D. Nikiforov // Journal of Computational Physics. — 2022. — С. 111798.

109. *Никифоров, Д.* Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Программа генерации 3D геометрии с трещинами пониженного порядка для решения многомасштабных задач / Д. Никифоров. — СВФУ. -№2018663110 ; опубл. 22.10.2018.

110. *Никифоров, Д.* Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Программа генерации 3D геометрии со сферами (цилиндрами) для решения многомасштабных задач / Д. Никифоров. — СВФУ. -№2018663109 ; опубл. 22.10.2018.

111. *Никифоров, Д.* Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Вычислительная библиотека для численного решения задачи фильтрации в трещиноватой неоднородной среде обобщенным многомасштабным

методом конечных элементов / Д. Никифоров. — СВФУ. -№2021615250 ; опубл. 6.04.2021.

112. *Никифоров, Д.* Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Вычислительная библиотека для решения задачи фильтрации бессеточным обобщенным многомасштабным методом конечных элементов / Д. Никифоров. — СВФУ. -№2022681829 ; опубл. 16.11.2022.

113. *Peaceman, D. W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability / D. W. Peaceman // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1983. — Т. 23, № 03. — С. 531—543.

114. *Баренблатт, Г.* Об основных представлениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г. Баренблатт, Ю. Желтов, И. Кочина // ПММ. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 852.

115. *Snow, D. T.* Rock fracture spacings, openings, and porosities / D. T. Snow // Journal of Soil Mechanics & Foundations Div. — 1968.

116. *Noorishad, J.* An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media / J. Noorishad, M. Mehran // Water Resources Research. — 1982. — Т. 18, № 3. — С. 588—596.

117. Comparison of the performance of a discrete fracture multiphase model with those using conventional methods / J. G. Kim, M. D. Deo [и др.] // SPE Reservoir Simulation Symposium. — Society of Petroleum Engineers. 1999.

118. *Kim, J.-G.* Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media / J.-G. Kim, M. D. Deo // AIChE Journal. — 2000. — Т. 46, № 6. — С. 1120—1130.

119. *Baca, R.* Modelling fluid flow in fractured-porous rock masses by finite-element techniques / R. Baca, R. Arnett, D. Langford // International

Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1984. — Т. 4, № 4. — С. 337—348.

120. Numerical study on two-phase flow through fractured porous media / Z. Huang, J. Yao [и др.] // Science China Technological Sciences. — 2011. — Т. 54, № 9. — С. 2412—2420.

121. A multiple-continuum approach for modeling multiphase flow in naturally fractured vuggy petroleum reservoirs / Y.-S. Wu, G. Qin [и др.] // International Oil & Gas Conference and Exhibition in China. — Society of Petroleum Engineers. 2006.

122. Advances in discrete fracture network modeling / W. Dershowitz, P. La Pointe [и др.] // Proceedings of the US EPA/NGWA fractured rock conference, Portland. — 2004. — С. 882—894.

123. Upscaling discrete fracture characterizations to dual-porosity, dual-permeability models for efficient simulation of flow with strong gravitational effects / B. Gong, M. Karimi-Fard [и др.] // Spe Journal. — 2008. — Т. 13, № 01. — С. 58—67.

124. Numerical simulation of water injection in 2D fractured media using discrete-fracture model / M. Karimi-Fard, A. Firoozabadi [и др.] // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. — Society of Petroleum Engineers. 2001.

125. Функциональность и технологии алгебраических решателей в библиотеке Krylov / Д. Бутюгин, Я. Гурьева [и др.] // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. — 2013. — Т. 2, № 3.

126. *Dolean, V.* An introduction to domain decomposition methods: algorithms, theory, and parallel implementation / V. Dolean, P. Jolivet, F. Nataf. — SIAM, 2015.

127. *Бутюгин, Д.* Методы параллельного решения СЛАУ на системах с распределенной памятью в библиотеке Krylov / Д. Бутюгин, В. Ильин, Д. Перевозкин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. — 2012. — 47 (306).

128. *Ильин, В.* О методах неполной факторизации для решения параболических уравнений / В. Ильин // Доклады Академии наук. Т. 318. — Российская академия наук. 1991. — С. 1304—1308.

129. *Logg, A.* Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book. Т. 84 / A. Logg, K.-A. Mardal, G. Wells. — Springer Science & Business Media, 2012.

130. *Geuzaine, C.* Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities / C. Geuzaine, J.-F. Remacle // International journal for numerical methods in engineering. — 2009. — Т. 79, № 11. — С. 1309—1331.

131. *Ayachit, U.* The paraview guide: a parallel visualization application / U. Ayachit. — Kitware, Inc., 2015.

132. Effective local-global upscaling of fractured reservoirs under discrete fractured discretization / J. Li, Z. Lei [и др.] // Energies. — 2015. — Т. 8, № 9. — С. 10178—10197.

133. *Geuzaine, C.* Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities / C. Geuzaine, J.-F. Remacle // Proceedings of the Second Workshop on Grid Generation for Numerical Computations, Tetrahedron II. — 2007.

134. Hierarchical multiscale modeling for flows in fractured media using generalized multiscale finite element method / Y. Efendiev, S. Lee [и др.] //

GEM-International Journal on Geomathematics. — 2015. — Т. 6, № 2. — С. 141—162.

135. *Efendiev*, *Y.* Multiscale finite element methods for high-contrast problems using local spectral basis functions / Y. Efendiev, J. Galvis, X.-H. Wu // Journal of Computational Physics. — 2011. — Т. 230, № 4. — С. 937—955.

136. *Pellegrini*, *F.* Scotch: A software package for static mapping by dual recursive bipartitioning of process and architecture graphs / F. Pellegrini, J. Roman // International Conference on High-Performance Computing and Networking. — Springer. 1996. — С. 493—498.

137. *Ju*, *L.* Probabilistic methods for centroidal Voronoi tessellations and their parallel implementations / L. Ju, Q. Du, M. Gunzburger // Parallel Computing. — 2002. — Т. 28, № 10. — С. 1477—1500.

138. *Griebel*, *M.* A particle-partition of unity method for the solution of elliptic, parabolic, and hyperbolic PDEs / M. Griebel, M. A. Schweitzer // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2000. — Т. 22, № 3. — С. 853—890.

139. *Schöberl*, *J.* Netgen–4. x / J. Schöberl // RWTH Aachen University, Germany. — 2009. — С. 39.

140. *Chang*, *D. K.* Artificial ground freezing in geotechnical engineering / D. K. Chang, H. S. Lacy. — 2008.

141. *Vabishchevich*, *P.* Numerical simulation of thermal stabilization of filter soils / P. Vabishchevich, M. Vasilyeva, N. Pavlova // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2015. — Т. 7, № 2. — С. 154—164.

142. Mathematical modeling of heat transfer problems in the permafrost / V. Gornov, S. Stepanov [и др.] // AIP Conference Proceedings. Т. 1629. — American Institute of Physics. 2014. — С. 424—431.

143. Mathematical modeling of the artificial freezing of soils / P. Vabishchevich, M. Vasilyeva [и др.] // Vychisl. Tekhnol. — 2014. — Т. 19, № 4. — С. 19—31.

144. *Stepanov, S.* Generalized multiscale discontinuous Galerkin method for solving the heat problem with phase change / S. Stepanov, M. Vasilyeva, V. Vasil'ev // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2018. — Т. 340. — С. 645—652.

145. Multiscale Finite Element Method for heat transfer problem during artificial ground freezing / M. Vasilyeva, S. Stepanov [и др.] // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2020. — Т. 371. — С. 112605.

Приложение А

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018663109

«Программа генерации 3D геометрии со сферами (цилиндрами) для решения многомасштабных задач»

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова» (RU)***

Автор: ***Никифоров Дьулустан Яковлевич (RU)***

Заявка № **2018660901**
Дата поступления **08 октября 2018 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***22 октября 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018663110

«Программа генерации 3D геометрии с трещинами пониженного порядка для решения многомасштабных задач»

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова» (RU)***

Автор: ***Никифоров Дьулустан Яковлевич (RU)***

Заявка № **2018660902**

Дата поступления **08 октября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***22 октября 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021615250

«Вычислительная библиотека для численного решения задачи фильтрации в трещиноватой неоднородной среде обобщенным многомасштабным методом конечных элементов»

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова" (RU)***

Автор(ы): ***Никифоров Дьулустан Яковлевич (RU)***

Заявка № **2021614445**

Дата поступления **02 апреля 2021 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***06 апреля 2021 г.***

Руководитель Федеральной службы

по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022681829

«Вычислительная библиотека для решения задачи фильтрации бессеточным обобщенным многомасштабным методом конечных элементов»

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова" (RU)***

Автор(ы): ***Никифоров Дьулустан Яковлевич (RU)***

Заявка № **2022680750**

Дата поступления **07 ноября 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***16 ноября 2022 г.***

Руководитель Федеральной службы

по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов