Министерство науки и высшего образования Российской Федераци
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова

На правах рукописи

Тырылгин Алексей Афанасьевич

Многомасштабные методы решения задач пороупругости в неоднородных средах

Специальность: 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
PhD, профессор
Ялчин Эфендиев

Якутск 2020

Содержание

Введение **4**

1 Численное моделирование задач пороупругости **15**

1.1 Численные решения задач пороупругости в неоднородных средах . 15

1.2 Численные решения задач пороупругости в трещиноватых средах . 21

1.3 Численные решения задач пороупругости в мультиконтинуумных средах 27

1.4 Численное моделирование задачи вязкопороупругости грунтов . . 35

1.5 Выводы 46

2 Численное усреднение для задачи пороупругости в неоднородных средах **47**

2.1 Постановка задачи и конечно-элементная аппроксимация 47

2.2 Численное усреднение 49

2.3 Численные результаты 51

2.4 Выводы 57

3 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задач пороупругости в неоднородных средах **58**

3.1 Постановка задачи и конечно-элементная аппроксимация 58

3.2 Аппроксимация на грубой сетке с использованием GMsFEM 60

3.3 Численные результаты 63

3.4 Выводы 67

4 Численное моделирование задач пороупругости в трещиноватых средах с использованием GMsFEM **68**

4.1 Математическое моделирование течения жидкости и геомеханики в трещиновато-пористых средах с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов 69
4.2 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задачи пороупругости в мультиконтинуумных средах 79
4.3 Встроенная модель трещины в численном моделировании потока жидкости и геомеханики с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов 106
4.4 Выводы 114

Заключение **115**

Литература **116**

Введение

В настоящее время численное моделирование задач пороупругости является одним из инструментов, используемых для исследования разработки месторождений нефти и газа. Область пороупругости связана с описанием взаимодействия между потоком жидкости и упругой деформацией твердого тела пористой среды. Пористые материалы по определению представляют собой твердые материалы, содержащие большое количество соединенных между собой пор. При этом взаимное соединение пор является достаточным для обеспечения протекания жидкости через материал. Пористые материалы, в первую очередь связаны, с такими объектами, как горные породы и глины, но биологические ткани, пеноматериалы и бумажные изделия также попадают в эту категорию. Следовательно, область пороупругости имеет большое значение в ряде различных инженерных дисциплин, таких как нефтяная инженерия, аграрная наука и биомедицина.

Самая ранняя теория, объясняющая влияние поровой жидкости на квазистатическую деформацию грунта, была разработана в 1923 году Терцаги [1,2], который предложил модель одномерной консолидации. Эта теория была обобщена до трехмерности Рендуличем [3]. Однако, именно Био [4, 5] впервые разработал линейную теорию пороупругости, которая согласуется с двумя основными механизмами, описанными выше. По сути, та же теория была несколько раз переформулирована самим Био [6–9] и Веррайтом [10] в специальной версии для механики грунтов, а также Райсом и Клири [11], которые связали пороупругие параметры с концепциями, хорошо понятными в механике горных пород и грунтов. Альтернативные теории также были разработаны с использованием формализма теории смесей [12–14].

Хорошо известно, что почти все материалы, используемые в современной жизни и промышленности, как производимые, так и встречающиеся в природе, неоднородны и многокомпонентны, обладают богатой и сложной внутренней

структурой. Соответствующие примеры можно привести из всех областей науки, таких как неоднородные (составные) твердые тела, смеси и многокомпонентные жидкости, почвы и горные породы, а также биологические ткани. Внутренняя структура или микроструктура играет ключевую роль в понимании и контроле макроскопического (континуумного) поведения таких материалов. В общем, это микромеханика, которая берет за основу, определенную «микроскопическую картину» структуры среды, а затем разрабатывает математические модели и инструменты для прогнозирования общей макрореакции, пытаясь учесть соответствующую микроструктуру. Полученные таким образом модели и теории проверяются по очереди на реалистичных и типичных примерах и ситуациях, явные теоретические результаты извлекаются либо в аналитической, либо в числовой форме, и проводится сравнение с экспериментальными данными.

Неоднородные и трещиноватые микроструктуры и высокая контрастность физических свойств являются ключевыми характеристиками современных композитных и многофункциональных материалов. Однако, эти особенности вызывают большие трудности при их компьютерном моделировании. Решение таких сложных масштабов является вычислительно затратным, в то время как пренебрежение соответствующей микроскопической информацией приводит к сомнительным результатам. Для этого и нужны методы усреднения и многомасштабные методы.

Численные усреднения изучались в течение длительного времени и было получено большое количество результатов с использованием так называемой теории усреднения, применяемой к средам, показывающей периодические или непериодические изменения их физических свойств [15–18]. Начиная с работ Орио и Санчеса [19], многочисленные исследования были посвящены либо математическим основам теории усреднения в статическом контексте, либо приложениям к эффективному статическому поведению композитных материалов [20–23] и к пористым средам [24, 25]. Напротив, теории и ее приложениям в

общем динамическом контексте или непериодическим случаям посвящено меньше исследований. Однако, можно, например, сослаться на [16, 26, 27] для динамического контекста или [28–31] для непериодического случая. В работе [32] авторы использовали своего рода локальное усреднение для учета интерфейсов с методом конечных разностей. Усреднения более высокого порядка в непериодическом случае изучалась в [33, 34].

В последнее время появился ряд многомасштабных численных методов, которые численно исследуются с помощью созданных программах на ЭВМ. Например, начнем с многомасштабного метода конечных элементов (MsFEM) [35]. Первоначально MsFEM был предложен для линейных уравнений, и его основная идея заключается в использовании колебательных базисных функций для сбора информации локального масштаба. Предварительно вычисленные многомасштабные базисные функции позволяют нам интерполировать функцию грубого масштаба, определенную в узловых значениях грубой сетки, в нижележащую мелкую сетку. Отметим, что MsFEM подходит для получения недорогих аппроксимаций задач со сложными многомасштабными структурами. Метод состоит из двух основных компонентов: (1) небольшое количество многомасштабных базисных функций и (2) глобальная численная формулировка, которая объединяет эти многомасштабные базисные функции. Базис многомасштабного пространства может быть получен путем преобразования базиса груборазмерного пространства.

Неоднородный многомасштабный метод(HMM), предложенный в [36], представляет собой общую основу для разработки многомасштабных методов для самых разных приложений. Название «неоднородный» использовалось, чтобы подчеркнуть «мультифизические» приложения, на которые оно нацелено, а именно то, что модели в разных масштабах могут иметь очень разную природу, например молекулярная динамика на микромасштабе и механика сплошной среды на макроуровне. HMM - это платформа для связывания моделей в разных мас-

штабах. Метод следует стратегии «сверху вниз»: основной отправной точкой является неполная модель макроуровня, а модель микромасштаба используется в качестве дополнения. Он состоит из двух основных компонентов: решателя макромасштаба и процедуры оценки недостающих числовых данных из микромасштабной модели. Ключом к этапу оценки данных является разработка решающей программы на микромасштабах с ограничениями. Для решения задач в трещиноватых и неоднородных средах разработано несколько многомасштабных методов, например, многомасштабный метод конечных объемов [37–41], многомасштабный метод конечных элементов [35, 42, 43], обобщенный многомасштабный метод конечных элементов [44–46]. Далее, в работах [47–49] авторы демонстрируют решение задач пороупругости в неоднородных средах с помощью обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Многомасштабные методы решения задач в трещиновато-пористых средах представлены в [50–56].

Далее представим еще один многомасштабный метод - многомасштабный метод конечных объемов(MSFV), разработанный авторами в [57, 58]. Этот метод эффективно улавливает влияния малых масштабов на грубой сетке, является консервативным и правильно обрабатывает тензорные проницаемости. Основная идея состоит в том, чтобы построить проводимости, которые захватывают локальные свойства дифференциального оператора. Это приводит к схеме многоточечной дискретизации для алгоритма решения с конечным объемом. Проводимые способности для MSFV должны быть построены только один раз на этапе предварительной обработки и могут быть вычислены локально. Поэтому этот шаг идеально подходит для компьютеров с массовым параллелизмом. Более того, консервативное мелкомасштабное поле скорости может быть построено из грубомасштабного решения для измерения давления.

Наконец, позднее были исследованы и разработаны обобщенные многомасштабные методы конечных элементов (GMsFEM) [45, 59, 59–62], главной осо-

бенностью которых является использование большого количества локальных базисных функций. Основная идея GMsFEM заключается в построении многомасштабных базисных функций путем выполнения локального спектрального разложения в некоторых снэпшот-пространствах. Построение пространства метода делится на три основных этапа: снэпшот-пространство, оффлайн этап и онлайн этап. На этапе офлайн мы создаем (1) снэпшот-пространство, (2) оффлайн пространство посредством спектрального разложения снэпшот-пространства и (3) в онлайн этапе для любого входного параметра создается многомасштабное пространство для решения глобальной задачи на грубой сетке. Основная концепция построения снэпшот-пространств заключается в том, что снэпшот векторы сохраняют некоторые существенные свойства решения и обеспечивают хорошую аппроксимацию пространства. Основная идея оффлайн-пространства заключается в том, что оно дает хорошую аппроксимацию решения с меньшим количеством базисных функций. Основная трудность в GMsFEM заключается в нахождении подходящего снэпшот-пространства и локального спектрального разложения снэпшот-пространств, которые могут дать хорошую аппроксимацию решения с меньшим количеством базисных функций.

Математическое описание потока жидкости и упругой деформации твердого тела и ее отношения к силам, действующим на тело и внутри него, является основой механики сплошной среды. Математическая формулировка, как правило, представляет собой набор дифференциальных уравнений в частных производных (PDE) с соответствующими начальными и граничными условиями, для численного моделирования которых существует множество вычислительных пакетов различного уровня. Одним из них является вычислительная платформа FEniCS [63]. FEniCS - это набор бесплатных программных компонентов с открытым исходным кодом, общая цель которых - автоматическое решение дифференциальных уравнений с помощью метода конечных элементов. Она позволяет проводить численные расчеты для задач из многих областей инженерии

и науки. FEniCS позволяет автоматизировать решение линейных и нелинейных задач и использовать различные варианты библиотек решателей задач линейной алгебры, такие как PETSc [64, 65], Trilinos/Epetra [66, 67], uBLAS [68] и SLEPc [69]. Имеется поддержка параллельных вычислений, что позволяет использовать большое количество типов конечных элементов (разрывные методы Галеркина, векторные элементы и др.).

Цель диссертационной работы состоит в разработке многомасштабных методов для решения задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи исследования:

- Численное решение задачи вязкопороупругости с использованием формулировки Кельвина-Фойгта для метода конечных элементов;
- Разработка методов аппроксимации на грубой сетке для задач пороупругости в неоднородных средах. Составление алгоритма метода численного усреднения, обобщённого многомасштабного метода конечных элементов, метода конечных элементов для задач пороупругости в неоднородных средах;
- Разработка обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости в трещиноватых средах, использование обобщенного многомасштабного метода конечных элемента для задач пороупругости в мультиконтинуумной среде, решение обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости со встроенной моделью трещины.

Научная новизна и практическая значимость. Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

- Реализован алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для решения задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах;

- Проведено моделирование задачи пороупругости обобщённым многомасштабным методом конечных элементов со встроенной моделью трещины;
- Проведено моделирование задачи пороупругости в мультиконтинуумной среде обобщенным многомасштабным методом конечных элементов;
- Получено решение задачи пороупругости с использованием численного усреднения в неоднородных средах.

Проведённые численные расчёты имеют практическое значение в моделировании процессов задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах.

Методология и методы исследования. В данной работе для решения задач пороупругости применялись следующие методы: метод численного усреднения, обобщённый многомасштабный метод конечных элементов, дискретная модель трещины и встроенная модель трещины. Для получения эталонного решения применялся метод конечных элементов на подробной сетке.

Положения выносимые на защиту:

- Численное усреднение задач пороупругости в неоднородных средах;
- Обобщённый многомасштабный метод конечных элементов для задач пороупругости в неоднородных средах;
- Алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости в мультиконтинуумной среде;
- Алгоритм обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости в трещиноватых средах.

Обоснованность и достоверность результатов потверждена использованием при построении математических моделей фундаментальных законов механики сплошных сред, применением современных методов вычислительной математики, удовлетворительным совпадением полученных результатов с результатами счета на подробных сетках и публикациями в рецензируемых журналах из списка ВАК, Web of Science, Scopus.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены

на следующих конференциях:

- Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", зал конференции научной библиотеки СВФУ, Учебно - лабораторный корпус (УЛК), 30.07.2017 - 04.08.2017;
- The Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, г.Албена, Болгария, 20.06.2018 - 25.06.2018;
- The Tenth Jubilee Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, г.Лозенец, Болгария, 11.06.2018 - 18.06.2018;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, ул.Белинского, д.58, г.Якутск, 08.08.2018 - 10.08.2018;
- II Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", 2018 ИВМ РАН, ул.Губкина, д.8, 9 этаж, г.Москва, 15.08.2018 - 17.08.2018;
- Двенадцатая международная конференция "Сеточные методы для краевых задач и приложения", г.Казань, 20.09.2018 - 25.09.2018;
- IV Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования ул.Губкина, 8, г.Москва, 19.05.2019 - 21.05.2019;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, ул.Белинского, д.58, г.Якутск, 24.05.2019 - 25.05.2019;
- III Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", Дальневосточный федеральный университет, Остров Русский, Владивосток, 07.10.2019 - 11.10.2019;
- Применение цифровых технологий в промышленности, бизнесе и здравоохранении Республика Саха, СВФУ им. М.К.Аммосова, ул. Белинского, 58,

г.Якутск, 23.12.2019 - 25.12.2019;

- IV Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г.Сочи, 5 корпус Екатеринский квартал, 08.09.2020 - 13.09.2020;
- International Society for Porous Media - Interpore, 31.08.2020 - 04.09.2020.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 14 научных работ, из них 4 статей в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК [70–73], 10 статей в международных научных изданиях [74–83], включенных в систему цитирования Web of Sciences и Scopus, 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [84, 85].

Личный вклад автора. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [70, 75, 77, 79–82] им разработан и реализован вычислительный алгоритм, проведены расчеты и проведён анализ результатов вычислительных экспериментов; в работах [72,74,76,83] диссертант участвовал в разработке математической модели и помог численно его реализовать. В работах [71, 73, 78, 84, 85] автор принял участие в постановке математической модели и численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертационной работы составляет 132 страницы, содержит 49 иллюстраций и 10 таблиц. Список литературы содержит 131 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантом РНФ 17-71-20055, грантом РНФ 19-11-00230, грантом РФФИ 17-01-00732 А, грантом РФФИ 19-31-90066\19, грантом РФФИ 19-31-90120\19.

В **первой главе** рассматриваются задачи пороупругости в трещиноватых и неоднородных средах и задача вязкопороупругости. В *Задаче 1-3* рассматриваются численное моделирование задач пороупругости в различных случаях: по-

роупругость в неоднородной среде, пороупругость в трещиноватых средах и пороупругость в мультиконтинуумных средах. Аппроксимация мелкой сетки происходит с помощью метода конечных элементов. Далее, в *Задаче 4* рассматривается задача вязкопороупругости. При таких типах задач в грунте происходят процессы как первичной. так и вторичной консолидации. В качестве модели вторичной консолидации, использовали модель Кельвина-Фойгта, которая состоит из соединенных параллельно ньютоновской жидкости и упругой пружины Гука.

Во **второй главе** исследуется решение задачи пороупругости в неоднородных средах с помощью численного усреднения. В работе представлен метод численного усреднения для задачи пороупругости в неоднородных средах. В предлагаемом методе макроскопические коэффициенты вычисляются путём решения локальных задач для каждой ячейки грубой сетки. Представили численные результаты для модельной задачи в двумерных и трехмерных постановках.

В **третьей главе** описан механизм течения жидкости и деформации пористых сред. Для аппроксимации грубой сетки используется обобщенный многомасштабный метод конечных элементов(GMsFEM). Метод решает задачу на грубой сетке путем построения локальных многомасштабных базисных функций для давления и перемещения. Сравниваем решения, выбирая разные числа многомасштабных базисных функций.

В **четвертой главе** рассматриваются решения задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах с помощью обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. В *Задаче 1* рассматривается моделирование задачи потока и геомеханики в трещиновато-пористых средах с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Проводится исследование влияние трещины относительно однородности и неоднородности среды и количества многомасштабных базисных функций. Затем, в *Задаче 2* проводится решение задач пороупругости в мультиконтинуумных средах с помощью обобщённого многомасштабного метода конечных элементов. Математическая

модель описывается системой уравнений для давлений в каждом континууме и уравнением для перемещения. Можно выделить основные типы связи мультиконтинуума: 1) связь перемещения и давления с помощью условия массопереноса и 2) связь перемещения и давления с помощью сжимаемости среды и объемной силы, которая пропорциональна градиенту давления. Мы исследуем относительные погрешности между эталонным решением с мелкой сеткой и представленной аппроксимацией грубой сетки с различным количеством многомасштабных базисных функций. Далее, в *Задаче 3* рассматривается встроенная модель трещины в моделировании задачи пороупругости с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов.

Автор выражает искреннюю благодарность, доктору физико-математических наук, профессору Ялчину Эфендиеву за научное руководство и доценту Васильевой Марии Васильевне за научное наставничество и оказание всесторонней поддержки. Автор выражает благодарность своим коллегам по научно-исследовательской кафедре «Вычислительные технологии» СВФУ и сотрудникам международной научно-исследовательской лаборатории «Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления» за полезные советы и помощь в редактировании работы.

Глава 1

Численное моделирование задач пороупругости

Моделирование пороупругости требует сочетания двух законов. Первым из них является закон Дарси, который описывает связь между движением жидкости и давлением в пористой среде. Согласно этому закону скорость жидкости прямо пропорциональна разнице давлений на заданном расстоянии, вязким свойствам жидкости и способности пористого материала нарушать поток. Второй закон - структурное перемещение пористой матрицы. Пороупругость Био описывает эту взаимосвязанную физику. Также рассматривается метод аппроксимации на мелкой сетке для задачи вязкопороупругости. Приводится вязкоупругая формулировка Кельвина-Фойгта для метода конечных элементов. В формулировке уплотнение происходит за счет ползучести твердых частиц скелета и зависит от длительности действий нагрузки. Для аппроксимации по времени используется стандартная неявная конечно-разностная схема. Результаты будут получены для задач пороупругости в двухмерных и трехмерных случаях.

Для решения задач пороупругости Био были использованы простейшие конечно-элементные методы, которые позволяют получить эталонные результаты моделирования и в дальнейшем будут сравнены с многомасштабными методами.

1.1 Численные решения задач пороупругости в неоднородных средах

Теория пороупругости моделирует механику пористых, насыщенных жидкостью деформируемых твердых тел [5–7, 86–89]. Первоначально он был разработан Био для моделирования геофизических задач, таких как сейсмические волны в нефтяных коллекторах, но также применялся для моделирования кости и дру-

гих пористых сред. Как следует из названия, пористые материалы представляют собой твердые структуры, состоящие из пор или пустот. Когда к пористой среде прикладывается внешняя нагрузка, это влияет на объемную долю пор. Поры, заполненные жидкостью, испытывают изменение давления под действием этого механического напряжения, что, в свою очередь, приводит к движению жидкости. В ответ на это изменение объема пор твердый материал упруго перемещается и деформируется.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу пороупругости в ограниченной области Ω. Математическая модель содержит связанную систему уравнений для перемещения и давления. Напряжения, приложенные к насыщенной пористой среде, частично распределяются по твердому скелету, а частично - по поровой жидкости. Первые напряжения вызывают деформации скелета, поэтому их называют эффективными. Учитывая, что напряжения положительны, когда они растягиваются, и давление положительно, когда они сжимаются, принцип эффективного напряжения записывается в индексных обозначениях как

$$-\operatorname{div}\sigma_T(u,p)=0, \quad \sigma_T(u,p)=\sigma(u)-\alpha p\mathscr{I}, \quad x\in\Omega, \tag{1.1}$$

где u – вектор перемещения, p – поровое давление жидкости, α – коэффициент Био, σ_T – тензор полного напряжения, σ – линейное напряжение. Уравнения классической теории упругости могут быть полностью определены с использованием двух материальных констант. Подходящей парой констант упругости может быть модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν. Другими фундаментальными константами, которые могут использоваться, являются модуль объемного сжатия K, модуль сдвига G и постоянная Ламе λ, которые связаны с коэффициентом Пуассона и модулем Юнга соотношениями

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{1.2}$$

Другие полезные соотношения между константами упругости следующие:

$$K = \lambda - \frac{2}{3}G = G\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}; \quad \lambda = G\frac{2\nu}{1-2\nu}. \tag{1.3}$$

Соотношение между тензором напряжения σ и тензором деформации ε определяется как

$$\sigma(u) = \lambda\varepsilon_v\mathscr{I} + 2\mu\varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = 0.5(\nabla u + (\nabla u)^T), \tag{1.4}$$

где ε_v - объемная деформация, а λ и μ – коэффициенты Ламе.

В теории консолидации Био предполагается, что поток жидкости регулируется законом Дарси о потоке жидкости в пористой среде. Сохранение массы жидкости закона Дарси имеет следующий вид:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q) = \rho f, \quad q = -\frac{k}{\nu_f}\operatorname{grad} p, \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

где m – масса жидкости, q – скорость Дарси, ν_f - вязкость, ρ – плотность жидкости, а f – источник. Здесь для простоты пренебрегаем гравитационными силами [90, 91].

Из-за движения твердого скелета имеем следующее соотношение

$$\partial m = \rho\partial\phi + \rho\partial\phi\varepsilon_v, \tag{1.6}$$

где

$$\partial\phi = (\alpha - \phi)\left(\frac{1}{K}\partial p + \partial\varepsilon_v\right), \tag{1.7}$$

и ϕ - пористость. Далее определим сжимаемость жидкости c_m и модуль Био M:

$$c_m = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{\partial p}, \quad \frac{1}{M} = \phi c_m + \frac{\alpha - \phi}{K}. \tag{1.8}$$

Используя 1.7, получаем следующее соотношение для жидкости

$$\begin{aligned} &\partial m = \rho\partial\phi + \phi\partial\rho + \rho\partial\varepsilon_v = \\ &= \rho\left((\alpha-\phi)\frac{1}{K}\partial p + (a-\phi)\partial\varepsilon_v + \phi c_m\partial p + \phi\partial\varepsilon_v\right) = \rho\left(\frac{1}{M}\partial p + \alpha\partial\varepsilon_v\right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Предположим, что $\rho = const$. Таким образом, имеем следующую связанную систему уравнений для перемещения и давления в пористой матрице

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}\sigma(u) + \alpha \operatorname{grad} p = 0, \quad x \in \Omega, \\ c_m \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \operatorname{div}(a_m \operatorname{grad} p) = f, \quad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{1.10}$$

где

$$c_m = \frac{1}{M}, \quad a_m = \frac{k}{\nu_f},$$

Аппроксимация на мелкой сетке

Для численного решения задачи пороупругости на мелкой сетке используется стандартный метод конечных элементов и решаем следующую связанную систему в матричной форме на мелкой сетке

$$\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} M & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p - \check{p} \\ u - \check{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$M = [m_{ij}], \quad m_{ij} = \int_\Omega c_m \phi_i \phi_j \, dx,$$

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \int_\Omega a_m \operatorname{grad}\phi_i \cdot \operatorname{grad}\phi_j \, dx,$$

$$K = [k_{ij}], \quad k_{ij} = \int_\Omega \sigma(\Phi_i) : \varepsilon(\Phi_j) \, dx,$$

$$D = [d_{ij}], \quad d_{ij} = \int_\Omega \alpha \operatorname{grad}\phi_i \Phi_j \, dx, \quad B = [b_{ij}], \quad b_{ij} = \int_\Omega \alpha \operatorname{div}\Phi_i \phi_j \, dx,$$

$$F = [f_j], \quad f_j = \int_\Omega f \phi_j \, dx,$$

и $\Phi_i, \phi_i,$, являются двумерными линейными базисными функциями для перемещения и давления, ψ_i является одномерной линейной базисной функцией.

Численные результаты

В данной части работы проведем численное моделирование задачи пороупругости в неоднородной среде. Расчеты будем проводить на неструктурированной расчетной сетке, которая представлена на рис. 1.1 где $\Omega = [0, 50]^2$. Треугольная сетка содержит 12944 вершины, 25486 ячеек и 38429 граней.

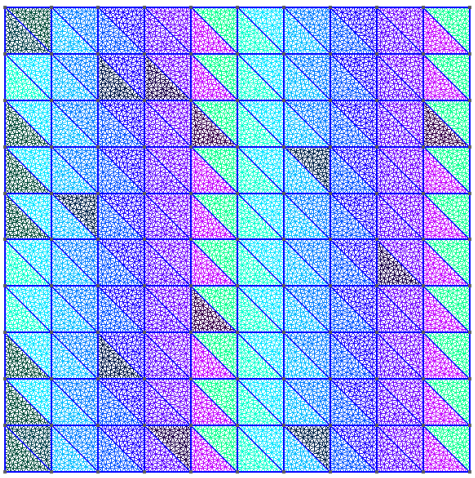

Рисунок 1.1: Расчетная сетка.

Численное решение представлено для следующих граничных условий

$$u_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_1$$

$$u_y = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad x \in \Gamma_2$$

$$p = 1, \; x \in \Gamma_1.$$

Расчеты выполняются для $T_{max} = 1728000$[сек] с шагом по времени $\tau = 172800$[сек]. Устанавливаем модуль Био $c_m = 1$[Па], коэффициент Био $\alpha = 1$. Параметр упругости и неоднородная проницаемость представлены на рис. 1.2. На рис. 1.3 представлено распределение давления и перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени.

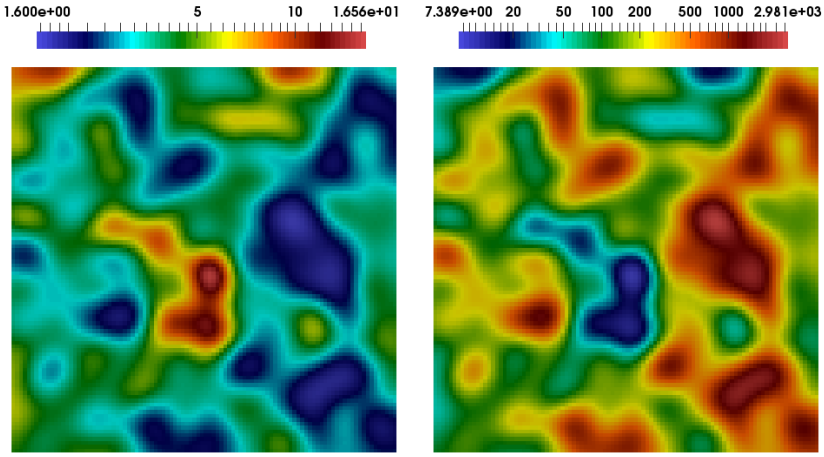

Рисунок 1.2: Параметр упругости E (слева) и неоднородная проницаемость k(справа).

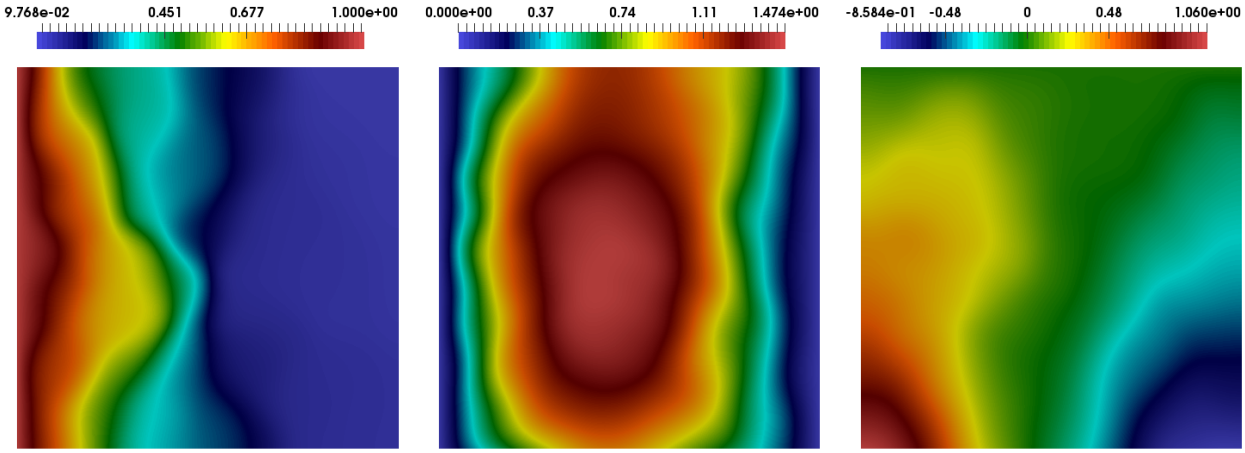

Рисунок 1.3: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени.

1.2 Численные решения задач пороупругости в трещиноватых средах

Связанные процессы потока и геомеханики в трещиноватых средах имеют значение для добычи сланцевого газа. Система включает очень сложные геотекстуры, состоящие из неоднородной сети трещин. Изменение давления жидкости из-за потока вызывает поле эффективных напряжений, действующих на среду под внешней нагрузкой. Это влияние, в свою очередь, вызывает деформацию или перемещение. Дискретная модель трещин (DFM) используется для обработки сложной сети трещин на мелкой сетке. Аппроксимация мелкой сетки происходит с помощью метода конечных элементов.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу пороупругости в ограниченной области Ω. Математическая модель содержит связанную систему уравнений для перемещения и давления. Рассмотрим линейную задачу пороупругости

$$-\operatorname{div}\sigma_T(u,p)=0, \quad \sigma_T(u,p)=\sigma(u)-\alpha p\mathscr{I}, \quad x\in\Omega, \tag{1.12}$$

где u – вектор перемещения, p – поровое давление жидкости, α – коэффициент Био, σ_T – тензор полного напряжения, σ – линейное напряжение.

Соотношение между тензором напряжения σ и тензором деформации ε определяется как

$$\sigma(u)=\lambda\varepsilon_v\mathscr{I}+2\mu\varepsilon(u), \quad \varepsilon(u)=0.5(\nabla u+(\nabla u)^T), \tag{1.13}$$

где ε_v - объемная деформация, а λ и μ – коэффициенты Ламе.

В теории консолидации Био предполагается, что поток жидкости регулируется законом Дарси о потоке жидкости в пористой среде. Сохранение массы жидкости закона Дарси имеет следующий вид:

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho q)=\rho f, \quad q=-\frac{k}{\nu_f}\operatorname{grad}p, \quad x\in\Omega, \tag{1.14}$$

где m – масса жидкости, q – скорость Дарси, ν_f - вязкость, ρ – плотность жидкости, а f – источник. Здесь для простоты пренебрегаем гравитационными силами [90,91].

Из-за движения твердого скелета имеем следующее соотношение

$$\partial m = \rho \partial \phi + \rho \partial \phi \varepsilon_v, \tag{1.15}$$

где

$$\partial \phi = (\alpha - \phi)\left(\frac{1}{K}\partial p + \partial \varepsilon_v\right), \tag{1.16}$$

и ϕ - пористость. Далее определим сжимаемость жидкости c_m и модуль Био M:

$$c_m = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{\partial p}, \quad \frac{1}{M} = \phi c_m + \frac{\alpha - \phi}{K}. \tag{1.17}$$

Используя 1.16, получаем следующее соотношение для жидкости

$$\begin{aligned} &\partial m = \rho \partial \phi + \phi \partial \rho + \rho \partial \varepsilon_v = \\ &= \rho\left((\alpha - \phi)\frac{1}{K}\partial p + (a - \phi)\partial \varepsilon_v + \phi c_m \partial p + \phi \partial \varepsilon_v\right) = \rho\left(\frac{1}{M}\partial p + \alpha \partial \varepsilon_v\right). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Для высокопроницаемой трещины должны добавить уравнение для потока на трещине. Используем модель приведенной размерности для потока жидкости на $\gamma \in R^{(d-1)}$

$$\frac{\partial(m_f b)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q_f) = \rho[q \cdot n], \quad q_f = -b\frac{k_f}{\nu_f}\operatorname{grad} p_f, \quad x \in \gamma, \tag{1.19}$$

где b – толщина трещины $(b > 0), m_f$ – масса жидкости в трещине, q_f и p_f – поток массы и давление жидкости в трещине. Здесь в качестве исходного члена имеем скачок в потоке массы матрицы по направлении нормали $[q \cdot n]$ и предполагаем линейную связь между потоком и перепадом давления $[q \cdot n] = \sigma_{fm}(p - pf)$.

Для пороупругих сред имеем

$$\frac{\partial(m_f b)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \phi_f b)}{\partial t} = \rho\left(\phi_f \frac{\partial b}{\partial t} + b\frac{1}{M_f}\frac{\partial p_f}{\partial t}\right),$$

где M_f - модуль Био для трещины.

Предположим, что $\rho = const$ и $b = const$. Таким образом, имеем следующую связанную систему уравнений для перемещения и давления в пористой матрице и трещин

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\sigma(u) + \alpha \operatorname{grad} p = 0, \quad x \in \Omega, \\
c_m \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \operatorname{div}(a_m \operatorname{grad} p) + \sigma_{mf}(p - p_f) = f, \quad x \in \Omega, \\
c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div}(a_f \operatorname{grad} p_f) - \sigma_{fm}(p - p_f) = f_f, \quad x \in \gamma,
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

где

$$
c_m = \frac{1}{M}, \quad c_f = \frac{b}{M_f}, \quad a_m = \frac{k}{\nu_f}, \quad a_f = b\frac{k_f}{\nu_f}.
$$

Аппроксимация на мелкой сетке

Обозначим через $\mathscr{T}^h$ конечно-элементное разбиение области на Ω, а Γ_h – множество всех внутренних граней между элементами $\mathscr{T}^h$. Предположим, что $\cup_j \gamma_j \subset \Gamma_h$ - это подмножество граней, представляющих трещины, где $j = \overline{1, N_{frac}}$ и N_{frac} – число дискретных трещин.

Слабая формулировка уравнения упругости для метода конечных элементов имеет вид

$$
\int_\Omega (\sigma(u,p), \varepsilon(v))dx + \int_\Omega \alpha \nabla p \cdot v dx = 0. \tag{1.21}
$$

Для уравнений давления предполагаем непрерывность матрицы и давления трещины на поверхности трещины и, используя принципы суперпозиции, получаем следующее приближение конечных элементов с использованием дискретной модели трещины(DFM)

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega c_m \frac{\partial p}{\partial t} z dx + \int_\Omega \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} z dx + \int_\Omega a_m \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} z \, dx \\
&+ \sum_j \left(\int_{\gamma_j} c_f \frac{\partial p}{\partial t} z_f ds + \int_{\gamma_j} a_f \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} z_f \, ds \right) \\
&= \int_\Omega f z dx + \sum_j \int_{\gamma_j} f_f z_f dx.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Стандартная неявная конечно-разностная схема используется для аппроксимации по времени уравнения давления (1.22), и решаем следующую связанную систему в матричной форме на мелкой сетке

$$\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} M & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p-\check{p} \\ u-\check{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

где $M = M_m + M_f$, $A = A_m + A_f$

$$M = [m_{ij}], \quad m_{ij} = \int_\Omega c_m \phi_i \phi_j \, dx + \sum_l \int_{\gamma_l} c_f \psi_i \psi_j \, dx,$$

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \int_\Omega a_m \operatorname{grad} \phi_i \cdot \operatorname{grad} \phi_j \, dx + \sum_l \int_{\gamma_l} a_f \operatorname{grad} \psi_i \cdot \operatorname{grad} \psi_j \, dx,$$

$$K = [k_{ij}], \quad k_{ij} = \int_\Omega \sigma(\Phi_i) : \varepsilon(\Phi_j) \, dx,$$

$$D = [d_{ij}], \quad d_{ij} = \int_\Omega \alpha \operatorname{grad} \phi_i \Phi_j \, dx, \quad B = [b_{ij}], \quad b_{ij} = \int_\Omega \alpha \operatorname{div} \Phi_i \phi_j \, dx,$$

$$F = [f_j], \quad f_j = \int_\Omega f \phi_j \, dx + \sum_l \int_{\gamma_l} f_f \psi_j \, dx,$$

и $\Phi_i, \phi_i,$, являются двумерными линейными базисными функциями для перемещения и давления, ψ_i является одномерной линейной базисной функцией.

Численные результаты

В данной части работы проведем численное моделирование задачи пороупругости в трещиноватых средах. Расчеты будем проводить на неструктурированной расчетной сетке, которая представлена на рис. 1.4 где $\Omega = [0,50]^2$. Треугольная сетка содержит 12944 вершины, 25486 ячеек и 38429 граней.

Численное решение представлено для следующих граничных условий

$$u_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_1$$

$$u_y = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad x \in \Gamma_2$$

$$p = 1, \; x \in \Gamma_1.$$

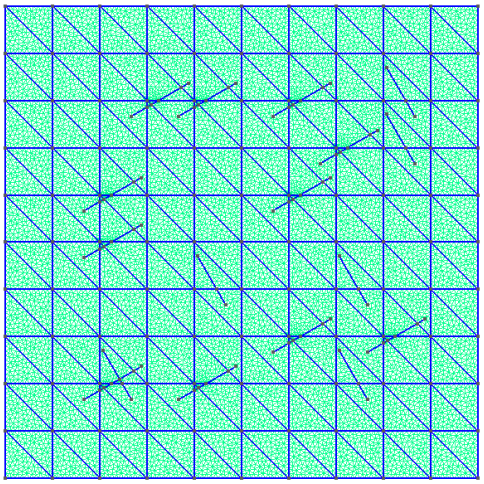

Рисунок 1.4: Расчетная сетка.

Расчеты выполняются для $T_{max} = 86400$[сек] с шагом по времени $\tau = 8640$[сек]. Устанавливаем модуль Био $c_m = 1$[Па^2] и $c_f = 10^3$[Па^2], коэффициент Био $\alpha = 1$ и проницаемость для трещины $a_f = 10^6$[м^2]. Параметр упругости и неоднородная проницаемость представлены на рис. 1.5. На рис. 1.6 представлено распределение давления и перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени.

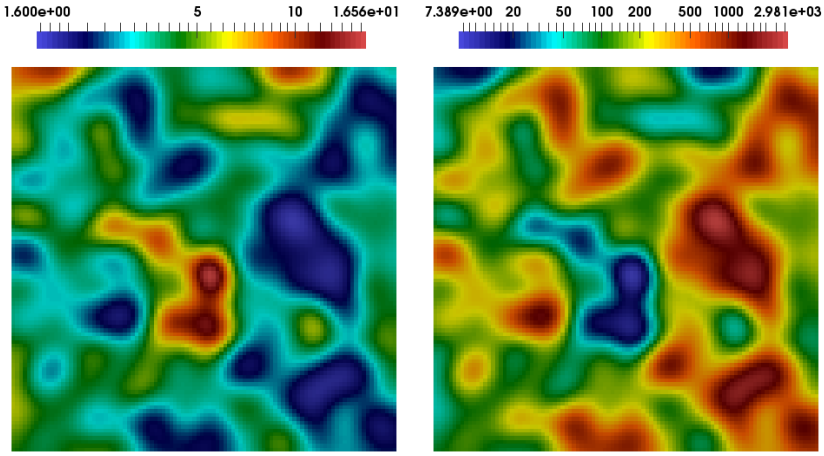

Рисунок 1.5: Параметр упругости E (слева) и неоднородная проницаемость k(справа).

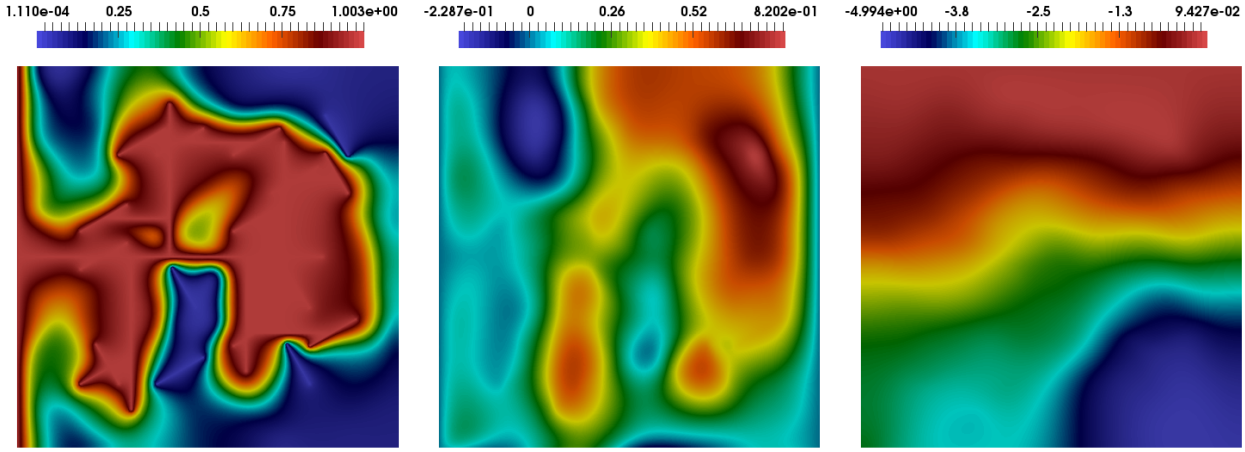

Рисунок 1.6: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени.

1.3 Численные решения задач пороупругости в мультиконтинуумных средах

В этой работе рассматривается сложная задача моделирования течений жидкости и геомеханики, обладающих мультиконтинуумным фоном. Каждый континуум рассматривается как система и связан с другими по всей области. Мы принимаем во внимание перенос потоков между двойными континуумами и внутри каждого континуума. Математическая модель описывается системой уравнений для давлений в каждом континууме и уравнением для перемещения. Течение в трещинах оказывает существенное влияние на процессы фильтрации и требует их тщательного рассмотрения. Более того, поскольку трещины характеризуются высокой проницаемостью и их толщина значительно меньше, чем размер моделируемого поля, это приводит к необходимости построения специальных математических моделей мультиконтинуума, в которых выделяются независимые переменные для описания течения в пористой среде и в сети трещин с учетом специальной функции перетока.

Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^d$ - вычислительная область для задачи с двойным континуумным подходом. Например, первый континуум может описывать течение в матрице пористой среды, а второй континуум принадлежит сети малых сильно связанных сетей трещин. Кроме того, мы определяем $\gamma \in R^{d-1}$ как вычислительную область для низкоразмерной модели сетей трещин, которая описывает течение в грубомасштабных трещинах. Для потока жидкости в пороупругой среде мы имеем

уравнение баланса массы и закон Дарси

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \operatorname{div} q_1 + q_{12} + q_{1f} = f_1, \quad x \in \Omega, \\
q_1 = -k_1 \operatorname{grad} p_1, \quad x \in \Omega, \\
\alpha_2 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div} q_2 - q_{21} + q_{2f} = f_2, \quad x \in \Omega, \\
q_2 = -k_2 \operatorname{grad} p_2, \quad x \in \Omega, \\
\alpha_f \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_f}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \operatorname{div} q_f - q_{f1} - q_{f2} = f_f, \quad x \in \gamma, \\
q_f = -k_f \operatorname{grad} p_f, \quad x \in \gamma,
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

где u - перемещение, q_i - скорость, p_i - давление, κ_i - проницаемость ($k_i = \kappa_i/\mu$, μ - вязкость жидкости), f_i - источники, α_i - коэффициенты Био, M_i - модуль Био, а i - индекс континуума ($i = 1, 2, f$).

Здесь q_{12}, q_{1f} и L_{2f} - члены переноса между первым и вторым континуумами; первый континуум и трещины; второй континуум и трещины, соответственно. Мы имеем

$$
q_{12} = q_{21} = r_{12}(p_1 - p_2), \quad r_{if} = \eta_i r_{if}(p_i - p_f), \quad r_{fi} = \eta_f r_{if}(p_i - p_f),
$$

и $\int_\Omega q_{12} dx = \int_\Omega q_{21} dx$, $\int_\Omega q_{if} dx = \int_\gamma q_{fi} ds$, η_i - геометрический фактор, а r_{ij} - член массопереноса, пропорциональный проницаемости континуума.

Для механики пороупругих мультиконтинуумных сред мы используем эффективное уравнение перемещения с объемными источниками силы, которое пропорционально сумме градиентов давления для каждого континуума.

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div} \sigma_T(u, p_1, p_2, p_f) = 0, \quad x \in \Omega, \\
\sigma_T(u, p_1, p_2, p_f) = \sigma(u) - \sum_{i=1,2,f} \alpha_i p_i \mathscr{I}, \quad x \in \Omega,
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

где σ_T - тензор полного напряжения, σ - тензор напряжения [49, 50, 92]. Мы имеем следующее линейное упругое напряжение-деформации

$$
\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{div} u \mathscr{I}, \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u + \operatorname{grad} u^T),
$$

где ε - тензор деформации, λ и μ - коэффициенты Ламе.

Тогда мы имеем следующую связанную систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} - \operatorname{div}\cdot(k_1 \operatorname{grad} p_1) + q_{12} + q_{1f} = f_1, \quad x \in \Omega,\\
&\alpha_2 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \operatorname{div}\cdot(k_2 \operatorname{grad} p_2) - q_{21} + q_{2f} = f_2, \quad x \in \Omega,\\
&\alpha_f \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_f}\frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div}\cdot(k_f \operatorname{grad} p_f) - q_{f1} - q_{f2} = f_f, \quad x \in \gamma,\\
&-\operatorname{div}\sigma(u) + \alpha_1 \operatorname{grad} p_1 + \alpha_2 \operatorname{grad} p_2 + \alpha_f \operatorname{grad} p_f = 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Рассмотрим систему уравнений (4.11) со следующими начальными условиями

$$p_1 = p_2 = p_f = p^0, \quad u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.27}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned}
&p_f = g, \quad x \in \Gamma_\gamma \quad -k_f \frac{\partial p_f}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\gamma/\Gamma_\gamma,\\
&-k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = 0, \quad x \in \Omega, \quad -k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0, \quad x \in \Omega,\\
&u = 0, \quad x \in \Gamma_D \quad \sigma = 0, \quad x \in \Gamma_N,
\end{aligned} \tag{1.28}$$

где границы $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ and $\Gamma_\gamma = \partial\Omega \cap \partial\gamma$.

Мы можем обобщить представленную модель, как модель пороупругости для мультиконтинуумных сред

$$\begin{aligned}
&\alpha_i \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} - \operatorname{div}\cdot(k_i \operatorname{grad} p_i) + \sum_{j \neq i} r_{ij}(p_i - p_j) = f_i, \quad x \in \Omega,\\
&-\operatorname{div}\sigma(u) + \sum_j \alpha_j \operatorname{grad} p_j = 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

где $i = 1, ..., M$ и M - число континуумов.

Аппроксимация на мелкой сетке

Для аппроксимации системы уравнений (1.26) с граничными условиями (1.28) используется метод конечных элементов. Для этого определим следующие функциональные пространства

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}, \quad W_1 = W_2 = H^1(\Omega),$$

$$W_f = \{w \in H^1(\gamma) : w = g \text{ on } \Gamma_\gamma\}, \quad \hat{W}_f = \{w \in H^1(\gamma) : w = 0 \text{ on } \Gamma_\gamma\}.$$

Вариационная формулировка задачи пороупругости в многоконтинуумных средах может быть записана следующим образом: найти $(p_1, p_2, p_f, u) \in W_1 \times W_2 \times W_f \times V$, такие что

$$\begin{aligned} &d_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w_i\right) + c_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial t}, w_i\right) + b_i(p_i, w_i) + \sum_j q_{ij}(p_i - p_j, w_i) = l(w_i), \quad \forall w_i \in W_i, \\ &a(u, v) + \sum_j g_i(p_i, v) = 0, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{1.30}$$

где билинейные и линейные формы следующие

$$b_i(p_i, w_i) = \int_{\Omega_i} k_i \nabla p_i \cdot \nabla w_i dx, \quad l(w_i) = \int_{\Omega_i} f_i w_i dx,$$

$$c_i(p_i, w_i) = \int_{\Omega_i} \frac{1}{M_i} p_i w_i \, dx, \quad d_i(u, w_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \operatorname{div} u \, w_i \, dx,$$

$$q_{ij}(p_i - p_j, w_i) = \int_{\Omega_i} r_{ij}(p_i - p_j) \, w_i \, dx,$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \sigma(u) \cdot \varepsilon(v) \, dx, \quad g_i(p_i, v) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \operatorname{grad} p_i v \, dx,$$

и $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_f = \gamma$, $i = 1, 2, f$.

Пусть $\mathscr{T}^h$ обозначает конечно-элементное разбиение области Ω и $\mathscr{E}_h$ - множество всех интерфейсов между элементами $\mathscr{T}_h$. Для континуума трещины мы используем дискретную модель трещины и используем неструктурированную мелкую сетку $\mathscr{T}^h$, которая явно разрешает геометрию трещины. Мы предполагаем, что $\mathscr{E}_\gamma = \cup_j \gamma_j$ является подмножеством граней для $\mathscr{T}^h$, которые представляют трещины, где $j = 1, ..., N_{frac}$, N_{frac} - число дискретных трещин и $\mathscr{E}_\gamma \subset \mathscr{E}_h$ - подмножество всех граней, представляющих трещины. Кроме того, $\mathscr{E}_\gamma$ описывают сетку трещин меньшей размерности. Заметим, что для построения сетки на системе трещин важно учитывать пересечения трещин и пересечения отрезков

пересечения. Для аппроксимации по времени мы используем неявную конечно-разностную схему с шагом по времени τ. Таким образом, мы имеем следующую дискретную систему в матричной форме на мелкой сетке для сред с тремя континуумами и $y^h = (p_1^h, p_2^h, p_f^h, u^h)^T$

$$C\frac{y^h - \check{y}^h}{\tau} + Ay^h = F, \tag{1.31}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & C_f & D_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 + Q_{12} + Q_{1f} & -Q_{12} & -Q_{1f} & 0 \\ -Q_{12} & A_2 + Q_{12} + Q_{2f} & -Q_{2f} & 0 \\ -Q_{1f} & -Q_{2f} & A_f + Q_{1f} + Q_{2f} & 0 \\ D_1^T & D_2^T & D_f^T & A_u \end{pmatrix},$$

и $F = (F_1, F_2, F_f, 0)^T$, $\check{y}^h$ это решение предыдущего временного шага.

Здесь

$$A_i = [a_{i,ln}], \quad a_{i,ln} = \int_{\Omega_i} k_i \operatorname{grad} \phi_l^i \cdot \operatorname{grad} \phi_n^i dx, \; A_u = [a_{u,ln}], \quad a_{u,ln} = \int_{\Omega} \sigma(\Phi_l) \cdot \varepsilon(\Phi_n) dx,$$

$$Q_{ij} = [q_{ij,ln}], \quad q_{ij,ln} = \int_{\Omega_i} r_{ij} \phi_l^i \phi_n^j dx, \quad C_i = [c_{i,ln}], \quad c_{i,ln} = \int_{\Omega_i} \frac{1}{M_i} \phi_l^i \phi_n^i dx,$$

$$D_i = [d_{i,ln}], \quad d_{i,ln} = \int_{\Omega} \alpha_i \operatorname{div} \Phi_l \phi_n^i dx, \quad F_i = [f_{i,l}], \quad f_{i,l} = \int_{\Omega_i} f_i \phi_l^i dx,$$

и $p_i = \sum_l p_{i,l}^h \phi_l^i$, $u = \sum_l u_l^h \Phi_l$, где Φ_l - линейные базисные функции для перемещения, $\phi_l^1 = \phi_l^2$ - d - мерные линейные базисные функции для давления, ϕ_l^f - $(d-1)$ - мерные линейные базисные функции для давления.

В этой работе для упрощения построения матрицы мы используем модифицированный подход дискретной модели трещины и рассмотрим случай, когда

$\alpha_f = 0$, $\sigma_{2f} = 0$. Мы предполагаем, что $p_1^h = p_f^h$ и, используя принцип суперпозиции [61, 93], исключаем из уравнений p_f^h и получаем следующую связанную систему уравнений для $y^h = (p_1^h, p_2^h, u^h)^T$

$$\tilde{C}\frac{y^h - \check{y}^h}{\tau} + \tilde{A}y^h = \tilde{F},$$

где

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 + C_f & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 + A_f + Q_{12} & -Q_{12} & 0 \\ -Q_{12} & A_2 + Q_{12} & 0 \\ D_1^T & D_2^T & A_u \end{pmatrix},$$

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} F_1 + F_f \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

с матрицами размера $N_h = 4N_v$, N_v это количество вершин в $\mathscr{T}^h$.

Численные результаты

В данной части работы проведем численное моделирование задачи пороупругости в мультиконтинуумных средах. Расчеты будем проводить на неструктурированной расчетной сетке, которая представлена на рис. 1.7 где $\Omega = [0,1]^2$. Треугольная сетка содержит 14376 вершин, 28350 ячеек и 38429 граней.

Расчеты выполняются для $T_{max} = 100$[сек] с шагом по времени $\tau = 10$[сек] и $r_{12} = 1000 \cdot k_2$[м^2]. Устанавливаем модуль Био $M_1 = M_2 = 10^8$[Па], $M_f = 0$[Па] и $c_f = 10^3$[м^2], коэффициенты Био $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_f = 0$ и проницаемость для трещины $k_f = 10^{-4}$[м^2]. Начальное условие $p^0 = 0.1 \cdot 10^7$[Па] и $g = 0.2 \cdot 10^7$[Па] для граничного условия давления. Параметр упругости и неоднородные проницаемости представлены на рис. 1.8. На рис. 1.9 представлено распределение давления для первого континуума и второго континуума и перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени.

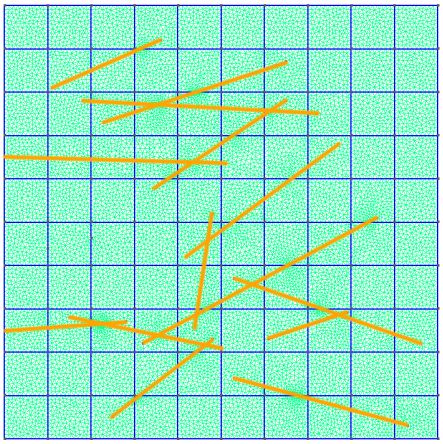

Рисунок 1.7: Вычислительная область. Мелкая сетка (зеленый) и трещины (оранжевый).

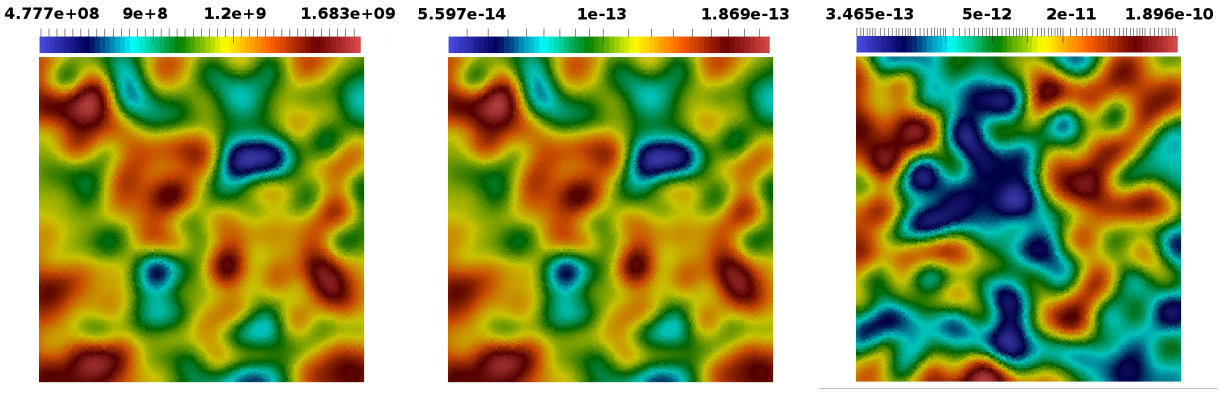

Рисунок 1.8: Параметр упругости E (слева) и неоднородные проницаемости k_1(центр) и k_2(справа).

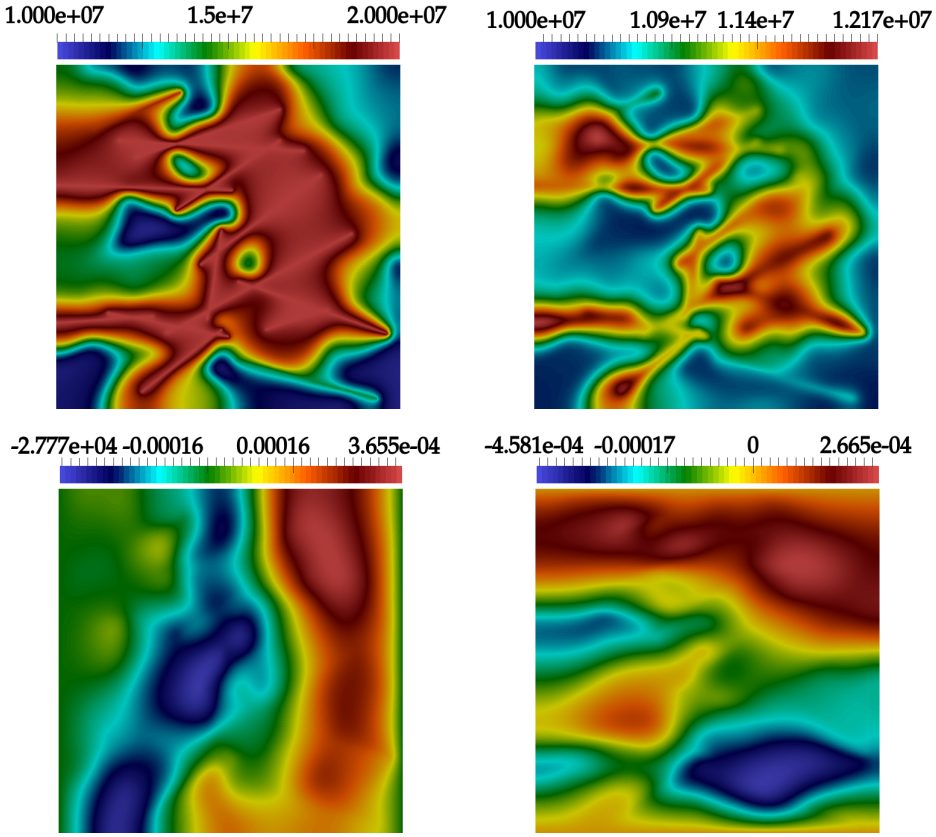

Рисунок 1.9: Давление для первого континуума и второго континуума(первый ряд) и перемещения по направлению X и Y(второй ряд) в конечный момент времени.

1.4 Численное моделирование задачи вязкопороупругости грунтов

В работе рассмотрена модель расчета деформаций, сложенных вязкоупругими грунтами, к которым можно отнести, например, глинистые грунты. Поведение таких грунтов зависит от длительности действия нагрузки и обуславливается ползучестью скелета грунта (реологическими свойствами). В водонасыщенных грунтах при приложении нагрузки начинается процесс фильтрационной консолидации, т.е. по мере отжатия из грунта воды поровое давление падает, и часть нагрузки переходит на скелет грунта. При этом в грунте происходят процессы как первичной, так и вторичной консолидации.

Присутствие процесса вторичной консолидации можно объяснить вязкоупругим поведением скелета грунта [94]. Процесс фильтрационной консолидации был впервые исследован Терзаги [95] для одномерного случая, обобщенная феноменологическая модель была предложена и проанализирована Био [5, 90, 96, 97].

Базовые математические модели включают уравнения Ламе для перемещений среды, а также закон сохранения массы и закон Дарси для фильтрующейся жидкости [47, 48, 90, 98]. Важной особенностью математических моделей пороупругости является то, что уравнения системы связаны между собой. В качестве модели вторичной консолидации использована модель Кельвина-Фойгта, в которой имеется дополнительное слагаемое, отвечающее на реологические свойства грунта [99].

Постановка задачи

Рассматривается система уравнений, описывающая процесс вторичной консолидации в вязкоупругой пористой среде. Система уравнений в частных производных включает в себя уравнение для перемещения и давления

$$\nabla \cdot \sigma + \alpha \nabla p = f_u(x,t) \tag{1.32}$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot u) - \nabla \cdot (k \nabla p) = f_p(x,t) \; x \in \Omega, \; 0 < t \leq T. \tag{1.33}$$

где u – вектор перемещения, p – поровое давление жидкости, α – коэффициент Био, σ – тензор напряжения, k – проницаемость среды и f_l – внутренние источники $(l = p, u)$.

Классической моделью, используемой для описания вязкоупругой среды, является модель Кельвина-Фойгта, в которой используются следующие соотношения для тензора деформаций ε и тензора напряжения σ [100, 101]:

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v, \quad \sigma = \sigma^e + \sigma^v, \tag{1.34}$$

где индексы v и e используются для обозначения вязкоупругой и упругой компонентов тензоров, соответственно

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T).$$

Упругое напряжение может быть написано с точки зрения компонентов тензора деформации следующим образом:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}. \tag{1.35}$$

Аналогичным образом нижеследующее дифференциальное соотношение дает вязкие компоненты напряжения:

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}, \tag{1.36}$$

где $\dot{\varepsilon}$ – производная по времени от тензора деформации.

В уравнениях 1.34 коэффициенты C_{ij}^{lm} и η_{ij}^{lm} определяются следующим образом:

$$C_{ij}^{lm} = \lambda \delta_{ij}\delta_{lm} + \mu(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}), \tag{1.37}$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \gamma_\lambda \lambda \delta_{ij}\delta_{lm} + \gamma_\mu \mu(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}), \tag{1.38}$$

где i и j обозначают индексы в Декартовых координатах ($i, j = 1, 2$ для двумерного случая), γ_λ и γ_μ – параметры вторичной консолидации, λ и μ – коэффициенты Ламе

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+v)}, \tag{1.39}$$

здесь E и v, соответственно, являются модулем Юнга и коэффициентом Пуассона [102].

Задача для системы уравнений (1.32 – 1.33) рассматривается в ограниченной области Ω на границе, которой задаются следующие граничные условия. Для перемещения на границе $\partial\Omega = \Gamma_D + \Gamma_N$ положим

$$u = 0, \ x \in \Gamma_D, \quad -\sigma n = 0, \ x \in \Gamma_N, \tag{1.40}$$

где n – единичная нормаль к границе. Аналогично для давления задаются граничные условия первого и второго рода на части границ области:

$$p = 0, \quad x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \ \frac{dp}{dn} = p_1(x), \quad x \in \Gamma_1. \tag{1.41}$$

На начальный момент времени $(t = 0)$ задается следующее условие

$$\varepsilon(x,0) = 0, \ p(x,0) = p_0, \ x \in \Omega, \tag{1.42}$$

для деформации и давления.

Аппроксимация по пространству

Для аппроксимации рассматриваемой системы уравнений для давления и перемещения используется метод конечных элементов. Определим гильбертово

пространство $L_2(\Omega)$, в котором скалярное произведение и норма определяются в виде

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad ||u|| = (u,u)^{\frac{1}{2}}.$$

Для векторных величин используем $[L_2(\Omega)]^d$, где $d = 2,3$ – размерность пространства. Определим следующие подпространства скалярных и векторных функций:

$$V = \{q \in L_2(\Omega) : q(x) = p, x \in \partial\Omega\},\ W = \{v \in [L_2]^d(\Omega) : v(x) = 0, x \in \Gamma_D^u\}.$$

$$V' = \{q \in L_2(\Omega) : q(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, W' = W.$$

Запишем вариационную формулировку для уравнений (1.32 – 1.33) с начальными граничными условиями (1.40 – 1.41): найти $u \in W, p \in V$ так, что

$$r(\dot{u},v) + a(u,v) + g(p,v) = l^u(v),\ v \in W', \tag{1.43}$$

$$d(\dot{u},q) + b(p,q) = l^p(q),\ q \in V', \tag{1.44}$$

где билинейные и линейные формы задаются следующим образом:

$$r(\dot{u},v) = \int_\Omega \frac{\partial \sigma^v(u)\dot{\varepsilon}(v)}{\partial t}dx,\ a(u,v) = \int_\Omega \sigma^e(u)\varepsilon(v)dx,$$

$$g(p,v) = \alpha \int_\Omega \nabla\ p\ v\ dx,\ d(\dot{u},q) = \alpha \int_\Omega \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} q dx,$$

$$b(p,q) = \int_\Omega (k\nabla p, \nabla q)dx,$$

$$l^u(v) = \int_\Omega f_u v dx,\ l^p(q) = \int_\Omega f_p q dx + \int_{\partial\Omega} p_1 q ds,$$

где билинейные формы $r(\cdot,\cdot), a(\cdot,\cdot)$и$b(\cdot,\cdot)$ симметричны и положительно определены, а $d(v,v) = -g(v,v)$ для $v \in V, v \in W$.

Определим конечномерное пространство для скалярных и векторных функций $V_h \subset V, W_h \subset W$ и запишем конечно-элементную аппроксимацию следующим образом: найти $u_h \in W_h$, $p_h \in V_h$ так что

$$r(\dot{(u)}_h, v) + a(u_h, v) + g(p_h, v) = l^u(v),\ v \in V_h, \tag{1.45}$$

$$d(\dot{(u)}_h, q) + b(p_h, q) = l^p(q),\ q \in V_h. \tag{1.46}$$

Отметим, что для аппроксимации по времени мы используем неявную разностную схему с шагом τ и будем использовать линейные базисные функции как для давления, так и для перемещения.

Численные результаты

В данной части работы проведем численное моделирование задачи вторичной консолидации для задачи пороупругости. Расчеты будем проводить на неструктурированной расчетной сетке, которая представлена на рис. 1.10. Треугольная сетка содержит 492 вершины, 910 ячеек и 1401 грань.

Численное решение представлено для следующих граничных условий

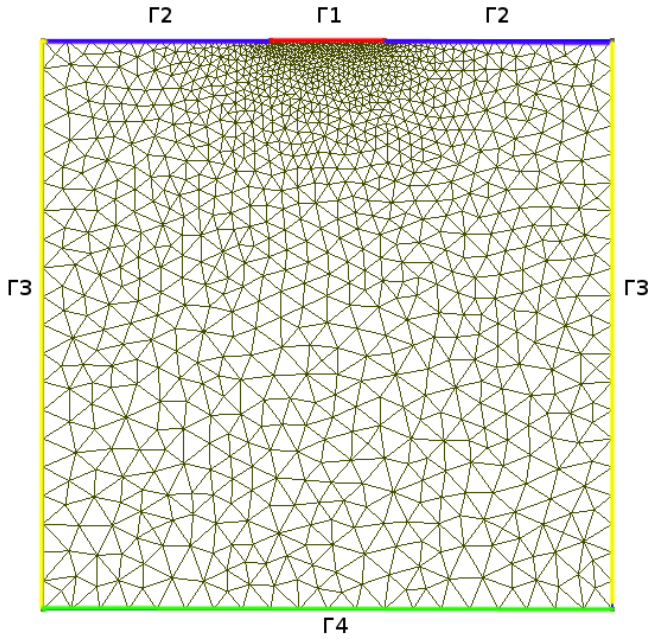

Рисунок 1.10: Расчетная сетка

$$u_x = 0,\ \sigma_y = 0,\ x \in \Gamma_3$$

$$u_y = 0,\ \sigma_x = 0,\ x \in \Gamma_4$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0,\ \ x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_1$$

для уравнения вязкоупругости и для уравнения зададим $p = 0$ на границах $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. На границе Γ_1 мы рассмотрим два случая:

с постоянной нагрузкой по времени $p_1 = 100$,

с нагрузкой, зависящей от времени $p_1 = 100sin(t)$.

Для расчетов использовались обезразмеренные коэффициенты $\lambda = \mu = k = \alpha = 1$ с областью моделирования $[0,1] \times [0,1]$ пористого грунта. Расчет проведем $T_{max} = 0.5$ с шагом по времени $\tau = 0.01$ и $T_{max} = \pi$ с шагом по времени $\tau = 0.02\pi$ постоянной нагрузки и зависящей от времени нагрузки, соответственно.

Численное решение с постоянной нагрузкой

Рассмотрим влияние параметра вторичной консолидации $\gamma = \gamma_\lambda = \gamma_\mu$, где $\gamma = 0.01$ и 0. Здесь, $\gamma = 0$ соответствует модели пороупругого грунта (без учета вязкости). На рис. 1.11 показаны распределения давлений и перемещений по X и Y направлениям в последний момент времени для коэффициента $\gamma = 0.1$.

Проведем численное сравнение моделей пороупругости и пороупругости со вторичной консолидацией. На рис. 1.12 показано сравнение разности решений пороупругой и вязкопороупругой моделей по времени. Для сравнения вычислялась относительная L_2 норма разницы решений для давления и перемещений по X и Y направлениям

$$||u_e - u_v||_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_\Omega (u_e - u_v)^2 dx}{\int_\Omega u_e^2 dx}},$$

где u_e и u_v – решения для упругой и вязкоупругой моделей, соответственно.

Одномерные графики среза вдоль вертикальной серединной линии для перемещения по X, Y направлениям отображены на рис. 1.13. Графики иллюстрируют

различие решений для пороупругой и вязкопороупругой среды при различных значениях коэффициента вторичной консолидации $\gamma = 0.1$ и 0.01. При моделировании модели с заданием постоянной нагрузки наибольшее различие моделей можно увидеть на начальный момент времени для случая с $\gamma = 0.1$, при этом со временем различие уменьшается (см. рис. 1.12). При малом значении вторичной консолидации $\gamma = 0.01$ различия практически незаметны на срезах перемещений (рис. 1.13). Отметим, что при этом на рис. 1.12 разница решений для $\gamma = 0.01$ в начальные моменты времени составляет около 10% для перемещения.

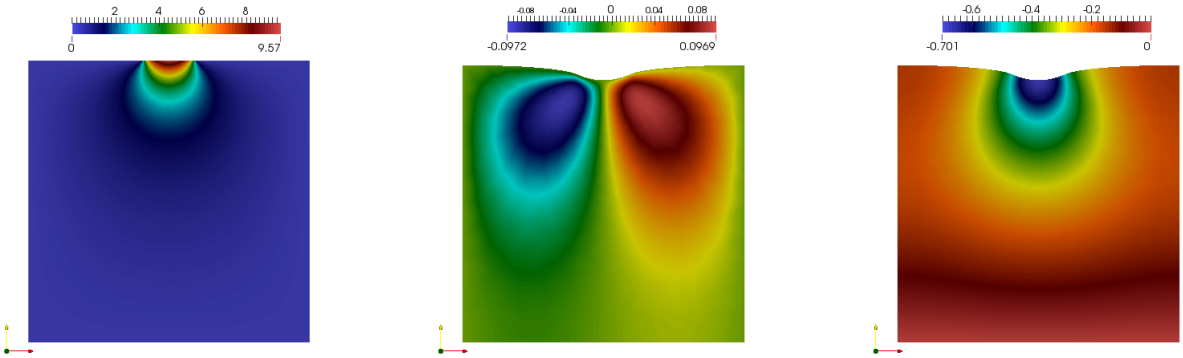

Рисунок 1.11: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y на последний момент времени для коэффициента $\gamma = 0.1$ (слева направо). Модель с постоянными по времени граничными условиями.

Численное решение с нагрузкой, зависящей от времени

Далее проведем численное моделирование с использованием граничного условия, зависящего от времени. На рис. 1.14 показаны распределения перемещений по X, Y и давления в момент времени 0.8π. Проведем численное сравнение между моделями пороупругости и пороупругости со вторичной консолидацией (вязкопороупругость). На рис. 1.15 представлены результаты сравнения разности решений пороупругой и вязкопороупругой моделей по времени при различных значениях коэффициента $\gamma = 0.1$ и 0.01. Одномерные графики среза вдоль вертикальной серединной линии для перемещения X, Y по направлениям отображены на рис. 1.16.

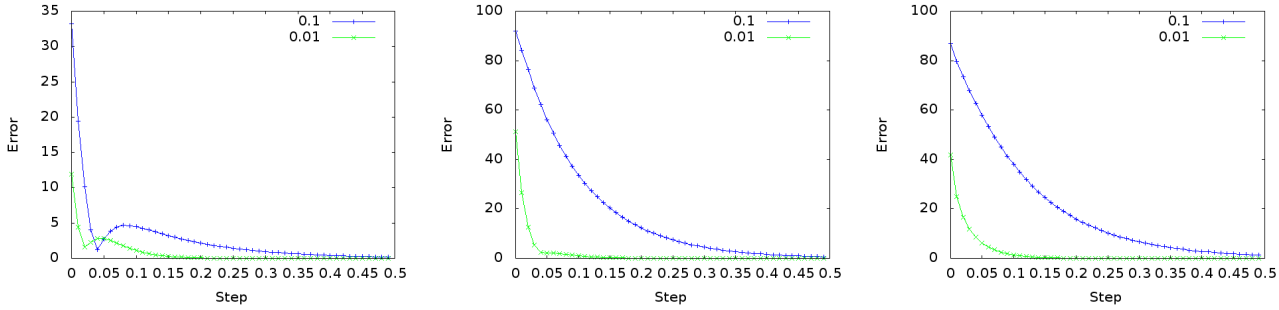

Рисунок 1.12: Сравнение моделей пороупругости и вторичной консолидации (вязкопороупругость) с коэффициентом $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 0.01$. Относительная L_2 норма разности решений в процентах. Давление и перемещения по направлениям X и Y (слева направо). Модель с постоянными по времени граничными условиями.

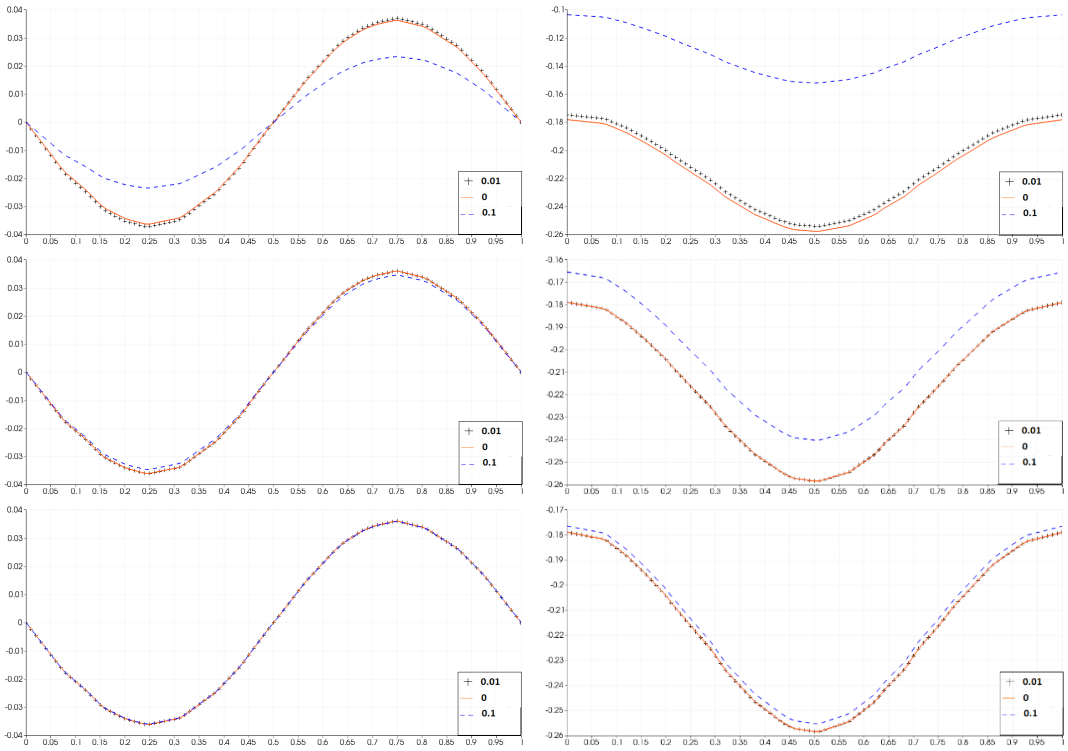

Рисунок 1.13: Одномерные графики среза вдоль вертикальной серединной линии для перемещения по направлениям X (слева) и Y (справа) в моменты времени $0.1, 0.3$ и 0.5. Модель с постоянными по времени граничными условиями.

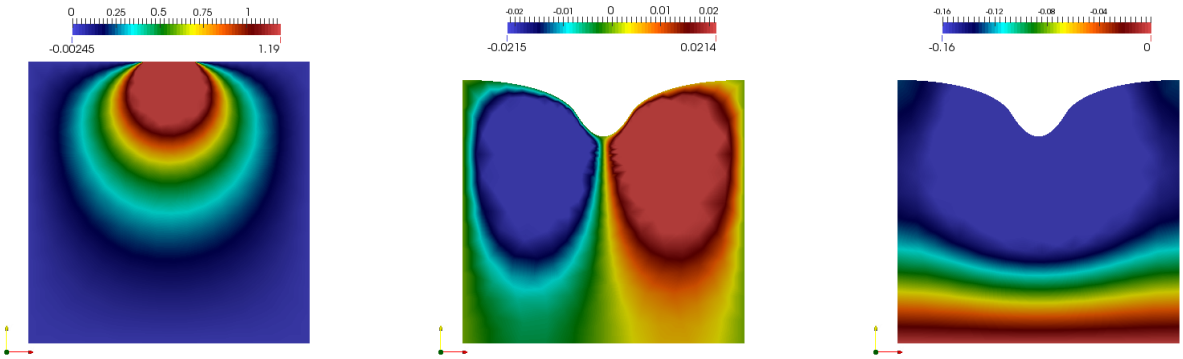

Рисунок 1.14: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в момент времени 0.8π. Модель с граничными условиями, зависящими от времени.

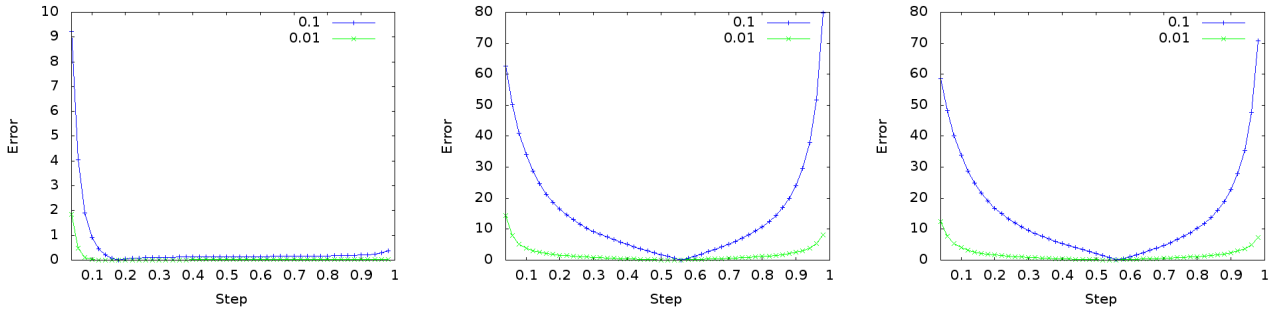

Рисунок 1.15: Сравнение моделей пороупругости и вторичной консолидации (вязкопороупругость) с коэффициентом $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 0.01$. Относительная L_2 норма разности решений в процентах. Давление и перемещения по направлениям X и Y (слева направо). Модель с граничными условиями, зависящими от времени.

Рисунки иллюстрируют различие решений в различные моменты времени. Анализируя рис. 1.15, можно сделать вывод, что при нагрузке, зависящей от времени, наибольшее различие решений для перемещений возникает на начальные и конечные моменты времени. При этом различие только в начальный момент времени несущественно, поскольку разница составляет менее 10%. Разница решений для перемещений является достаточно большой и составляет около 50% при большом значении γ и падает до 10% при уменьшении γ.

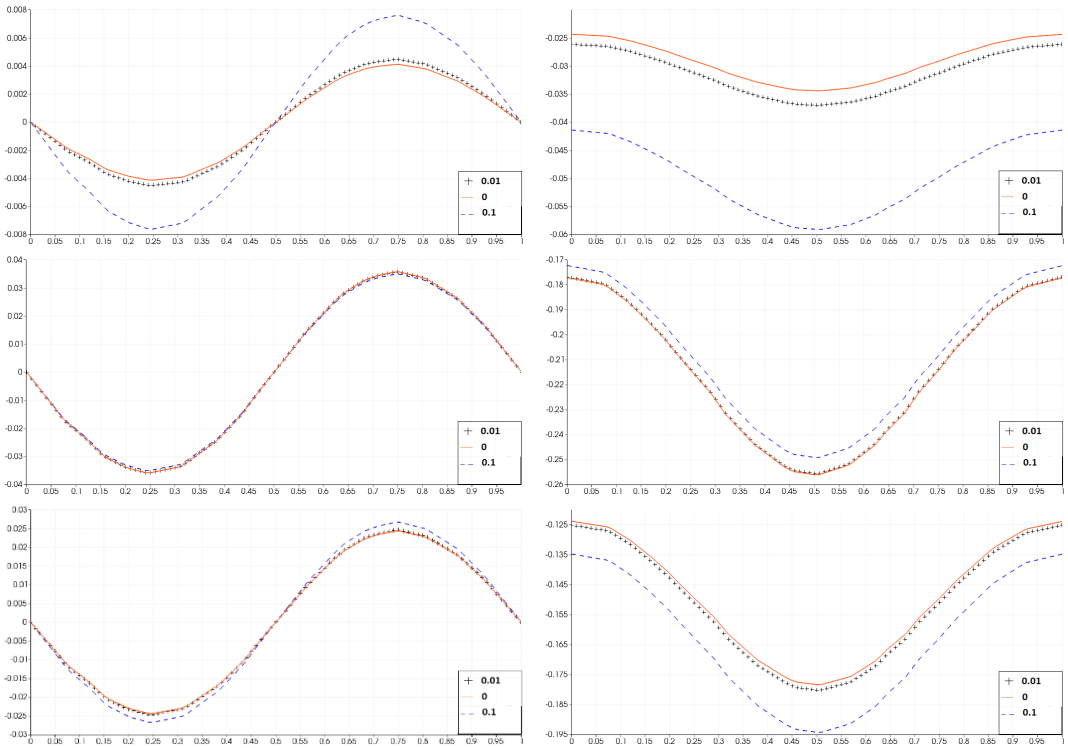

Рисунок 1.16: Одномерные графики среза вдоль вертикальной серединной линии для перемещения по направлениям X (слева) и Y (справа) в моменты времени $0.5\pi, 0.8\pi$ и π. Модель с граничными условиями, зависящими от времени.

Численные результаты для трехмерной задачи

Проведем численное моделирование рассмотренной задачи вязкопороупругости в трехмерной постановке. Моделирование будем проводить в области $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ метра при постоянных граничных условиях для давления $p_1 = 100$ и $\gamma = 0.01$. Остальные граничные условия были выбраны аналогично двумерной постановке. Расчет проведем при $T_{nax} = 0.1$ с шагом по времени $\tau = 0.01$. Расчетная тетраэдральная сетка содержит 1265 вершин, 6472 ячейки и 13416 граней с размером области нагрузки 0.2×0.2 (см. рис. 1.17).

Численные результаты задачи вязкопороупругости в трехмерной постановке отображены на рис. 1.18 и иллюстрируют решение задачи на последний момент времени. Время счета составило 77.71 секунду, а количество итераций – 60 с использованием итерационного метода TFQMR с предобуславливателем SOR.

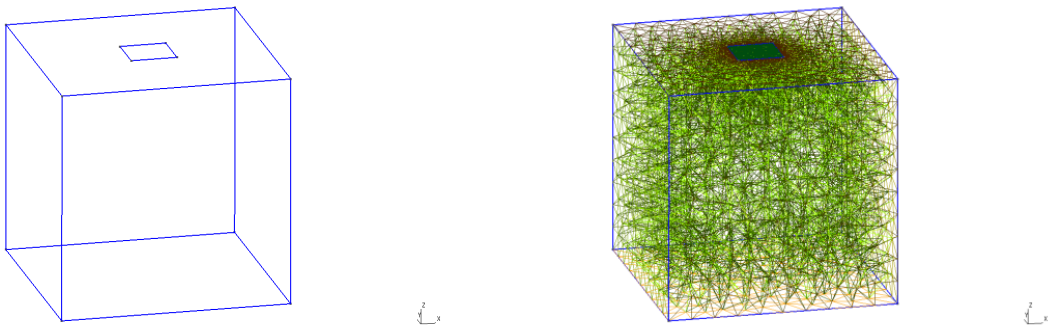

Рисунок 1.17: Геометрическая область в тетраэдральной расчетной сетке.

Для построения геометрической области используется программа Gmsh [103]. Вычислительная реализация построена с использованием библиотеки FeniCS [63].

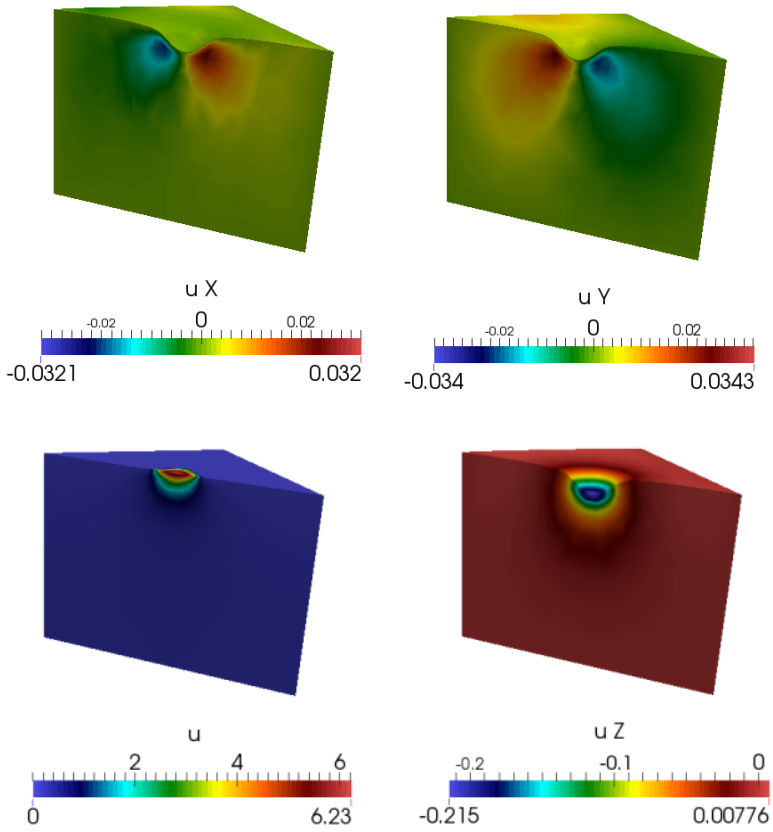

Рисунок 1.18: Распределение перемещения по X, Y и Z (слева направо) и давления в конечный момент времени.

1.5 Выводы

В данной главе были рассмотрены три различных случая решения задач пороупругости: пороупругость в неоднородной среде, пороупругость трещиноватых средах и пороупругость в мультиконтинуумных средах. Аппроксимация на мелкой сетке была проведена с помощью метода конечных элементов. Исследование показало, что вычислительная платформа FEniCS прекрасно справляется со связанной задачей пороупругости в различных ситуациях, и в следующих главах результаты будут сравнены с обобщенным многомасштабным методом конечных элементов.

Продемонстрировано численное решение задачи вязкопороупругости. Выполнено численное исследование задачи при различных граничных условиях(стационарная и нестационарная нагрузка) и построены графики численного сравнения моделей для давления и перемещения при различных коэффициентах вторичной консолидации γ. При сравнении с пороупругостью и вязкопороупругостью для $\gamma = 0.01$ различия практически незаметны на срезах перемещения при постоянной нагрузке, а для нестационарной разница является достаточно большой и составляет около 50% при большом значении γ и падает до 10% при уменьшении γ. Время вычисления получилось достаточно большим для трехмерной модели, поэтому было бы неплохо использовать методы усреднения или многомасштабные методы.

Глава 2

Численное усреднение для задачи пороупругости в неоднородных средах

Рассматривается задача пороупругости в неоднородных средах. Процесс описывается связанной системой уравнений для давления и перемещения [47,48,90]. Вычислительный алгоритм для численного решения основан на методе конечных элементов с использованием линейных базисных функций. Для применимости и сходимости этих методов размер вычислительных сеток должен быть достаточно малым, чтобы разрешать мелкомасштабные неоднородности . Для эффективного численного решения таких задач разработаны различные многомасштабные методы или методы усреднения [49, 50, 104–106]. В данной работе представлен метод численного усреднения для задачи пороупругости в неоднородных средах [15, 16]. В предлагаемом методе макроскопические коэффициенты вычисляются путём решения локальных задач для каждой ячейки грубой сетки [107]. Используя макроскопические тензорные коэффициенты, мы решаем глобальную задачу на грубой сетке. По этой главе опубликована следующая статья [79].

2.1 Постановка задачи и конечно-элементная аппроксимация

Рассматриваем линейную задачу пороупругости в области Ω

$$
\begin{aligned}
&-\nabla\cdot\sigma(u)+\alpha\nabla p=0, \quad x\in\Omega,\\
&\frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\nabla\cdot u}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\frac{k}{\nu}\nabla p\right)=f, \quad x\in\Omega,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где u и p – перемещение и давление, соответственно, σ – тензор напряжения, k – проницаемость, ν – вязкость жидкости, f – источник, M – модуль Био, α – коэффициент Био.

Мы имеем следующее линейное упругое, напряженно-деформируемое отношение:

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda\nabla\cdot uI, \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T),$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе, I – единичный тензор. В данной работе рассматривается задача (2.1) с неоднородными коэффициентами.

$$k = k(x), \quad E = E(x), \; x,$$

и

$$\mu = \frac{E}{2(1+\eta)}, \quad \lambda = \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)},$$

где η – коэффициент Пуассона и E – модуль упругости.

Для численного решения задачи пороупругости на мелкой сетке используется метод конечных элементов Галеркина. У нас есть следующая вариационная постановка задачи: найти $(u,p) \in V \times Q (V = [H^1(\Omega)]^d$ и $Q = H^1(\Omega))$ так, что

$$\begin{aligned} &a(u,v) - b(v,p) = 0, \quad \forall v \in V, \\ &b\left(\frac{du}{dt}, q\right) + c\left(\frac{dp}{dt}, q\right) + s(p,q) = l(q), \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma(u)\cdot\varepsilon(v)dx, \quad s(p,q) = \int_\Omega \frac{k}{\nu}\nabla p\cdot\nabla q dx, \; c(p,q) = \int_\Omega \frac{1}{M}\; p\; q dx,$$

и

$$b(u,p) = \int_\Omega \alpha\nabla\cdot\; u\; p\; dx, \quad l(q) = \int_\Omega f\; q dx.$$

Мы используем формулировку мелкой сетки для эталонного решения и вычисления погрешностей в разделе 1.3.

2.2 Численное усреднение

Пусть $\mathscr{T}$ - это грубая сетка и

$$\mathscr{T}_H = \cup_i K_i,\ i = \overline{1,N},$$

где N – количество ячеек грубой сетки, а j – индекс ячеек грубой сетки.

Для построения аппроксимации грубой сетки рассчитаем эффективную проницаемость и коэффициент упругости.

$$k^* = \begin{bmatrix} k^*_{11} & k^*_{12} \\ k^*_{21} & k^*_{22} \end{bmatrix},\ C^* = \begin{bmatrix} C^*_{11} & C^*_{12} & C^*_{13} \\ C^*_{12} & C^*_{22} & C^*_{23} \\ C^*_{13} & C^*_{23} & C^*_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

- для двумерного случая и

$$k^* = \begin{bmatrix} k^*_{11} & k^*_{12} & k^*_{13} \\ k^*_{12} & k^*_{22} & k^*_{23} \\ k^*_{13} & k^*_{23} & k^*_{33} \end{bmatrix},\ C^* = \begin{bmatrix} C^*_{11} & C^*_{12} & C^*_{13} & C^*_{14} & C^*_{15} & C^*_{16} \\ C^*_{21} & C^*_{22} & C^*_{23} & C^*_{24} & C^*_{25} & C^*_{26} \\ C^*_{31} & C^*_{32} & C^*_{33} & C^*_{34} & C^*_{35} & C^*_{36} \\ C^*_{41} & C^*_{42} & C^*_{43} & C^*_{44} & C^*_{45} & C^*_{46} \\ C^*_{51} & C^*_{52} & C^*_{53} & C^*_{54} & C^*_{55} & C^*_{56} \\ C^*_{61} & C^*_{62} & C^*_{63} & C^*_{64} & C^*_{65} & C^*_{66} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

- для трехмерного случая. Рассчитываем эффективные коэффициенты для неоднородных сред на каждой ячейке грубой сетки, $\{C^{*,K_i}\}_{i=1..N}$ для $K_i \in \mathscr{T}_H$.

Для расчета эффективной проницаемости решаем следующую локальную задачу в K_i

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot \left(k^{K_i} \nabla \psi_j^{K_i}\right) = 0,\ x\ \in\ K_i, \\
\psi_j^{K_i} = x_j,\ x \text{ на } \partial K_i,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

где $k^{K_i} = k^{K_i}(x)$ – ограничение неоднородного коэффициента k для локальной области $K_i, x = (x_1, x_2)$ для двумерного случая и $x = (x_1, x_2, x_3)$ - для трехмерного случая. Поэтому для двумерной задачи решаем две локальные задачи, а для трехмерной задачи имеем три локальные задачи. Обратите внимание, что для локальной задачи могут быть применены другие граничные условия.

Далее можно найти элементы тензора эффективной проницаемости для текущего K_i

$$
k_{lj}^{*,K_i} = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} k^{K_i}(x) \frac{\partial \psi_l^{K_j i}}{\partial x_j} dx,\ l, i = 1..d, \tag{2.6}
$$

где d – размерность задачи, $d = 2, 3$.

Для эффективного модуля упругости применяем аналогичный алгоритм и решаем следующую локальную задачу в K_i:

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot \sigma\left(\psi_{rs}^{K_i}\right) = 0,\ x\ \in\ K_i, \\
\phi_{rs}^{K_i} = \Lambda^{(rs)} x,\ x \text{ на } \partial K_i,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ для $d = 2, \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ для $d = 3$ и

$$
\Lambda_{ij}^{(rs)} = \frac{1}{2}(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr},\ r, s = 1..d,
$$

здесь

$$
\sigma(\phi) = C : \varepsilon(\phi),
$$

или

$$C^* = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix},$$

где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ - для двумерного случая и

$$C^* = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$ - для трехмерного случая.

Элементы эффективного модуля упругости рассчитываются следующим образом:

$$C^{*,K_i}_{rspq} = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} C_{ljkn} \varepsilon\left(\phi^{(rs)}_{lj}\right) : \varepsilon\left(\phi^{(pq)}_{kn}\right) dx, \quad r,s,p,q = 1..d. \tag{2.8}$$

Наконец, решаем задачу пороупругости на грубой сетке с эффективной проницаемостью и модулем упругости.

$$\begin{gathered} -\nabla \cdot (C^* : \varepsilon(u)) + \alpha \nabla p = 0, \\ \frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{k^*}{\nu} \nabla p\right), \end{gathered} \tag{2.9}$$

используя метод конечных элементов Галеркина.

2.3 Численные результаты

В данном параграфе представляем численные результаты задачи пороупругости в неоднородных средах.

Рассмотрим две тестовые задачи:

- Двумерная задача;
- Трехмерная задача.

Для пороупругой задачи устанавливаем $\alpha = 1$ и $M = 1[\text{Па}]$. В качестве начальных условий устанавливаем $p_0 = 0$ и выполняем вычисления для $T_{max} = 0.01[\text{сек}]$ с 10-временными шагами для двумерного случая и 20-временными шагами для трехмерного случая. Выполняются расчеты с использованием структурированной грубой и мелкой сетки.

Двумерная задача

Решаем пороупругую задачу в $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Устанавливаем следующие граничные условия:

$$u_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad x \text{ на } \Gamma_L$$

$$\sigma_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad x \text{ на } \Gamma_B$$

$$p = 1, \quad x \text{ на } \Gamma_T.$$

где Γ_L и Γ_R – левая и правая границы соответственно, Γ_B и Γ_T – нижняя и верхняя границы, соответственно, $\partial\Omega = \Gamma_L \cup \Gamma_R \cup \Gamma_B \cup \Gamma_T$.

Случай	L_2^p	H_1^p	L_2^u	H_1^u
1	2.726	12.433	7.698	15.867
2	2.158	14.092	9.338	14.479
3	2.448	9.772	5.584	13.764

Таблица 2.1: Относительные погрешности перемещения и давления между грубой сеткой и эталонным решением для двумерной задачи. Случаи 1, 2 и 3.

Рассмотрим три тестовых случая для разных неоднородностей (см. рис.2.1). Грубая сетка 10×10, а мелкая сетка 50×50. На рисунке 2.3 представляем распределение давления и перемещения по направлениям X и Y в последний момент

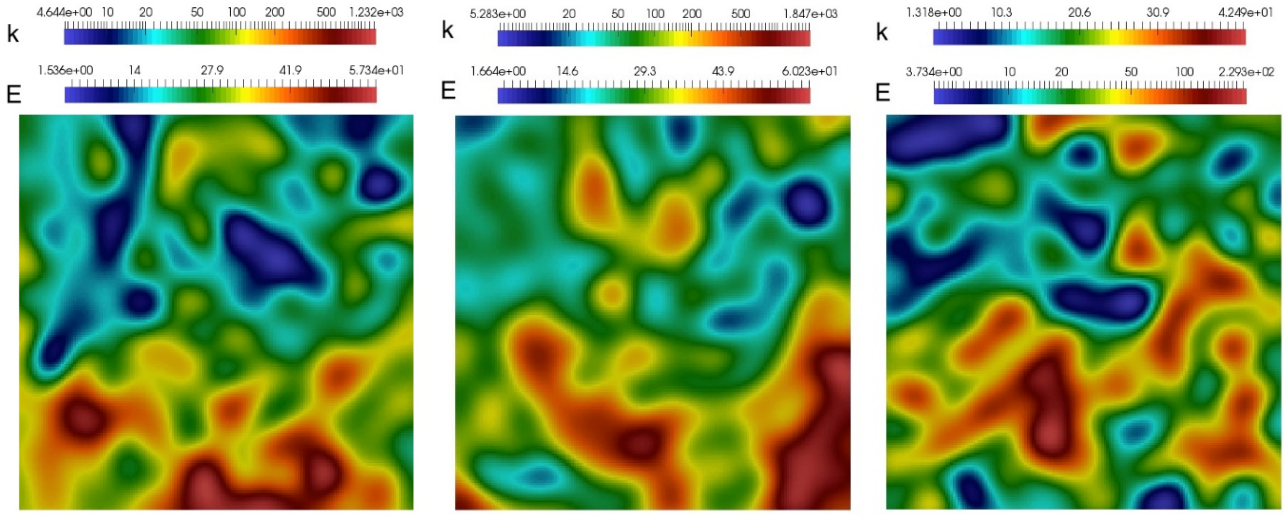

Рисунок 2.1: Модуль упругости и проницаемости с неоднородностью для двумерной задачи. Случаи 1, 2 и 3 (слева направо).

времени для грубых и мелких сеток. В таблице 2.1 представляем взвешенные погрешности L_2 и H_1 для многомасштабного решателя. Относительные погрешности относительно времени представлены на рисунке 2.2. Время выполнения задачи составляет $2,030$ секунды для грубой сетки и $173,62$ для мелкой сетки. Мелкая сетка состоит из 102400 ячеек, а грубая сетка содержит 100 ячеек.

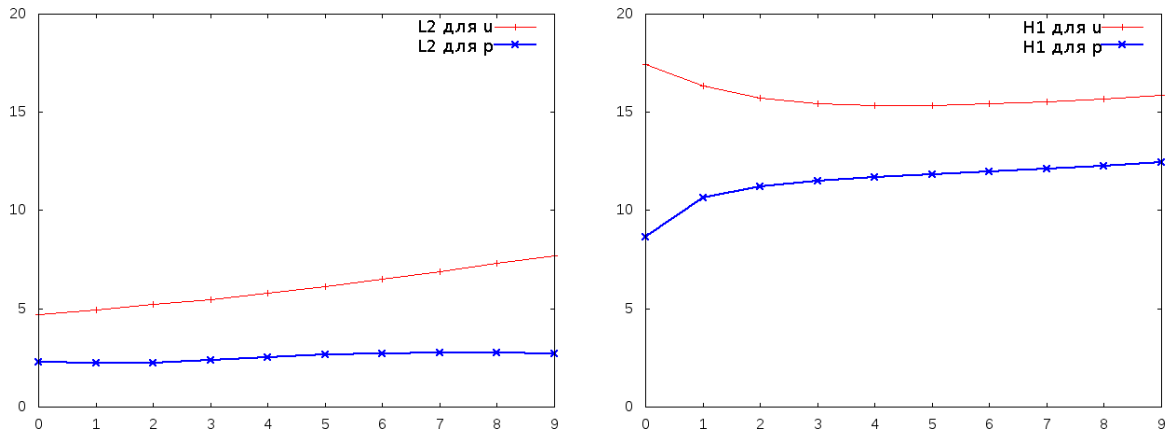

Рисунок 2.2: Относительные погрешности в зависимости от времени для двумерной задачи. Для перемещения и давления между решениями грубой и мелкой сеток. Случай 1.

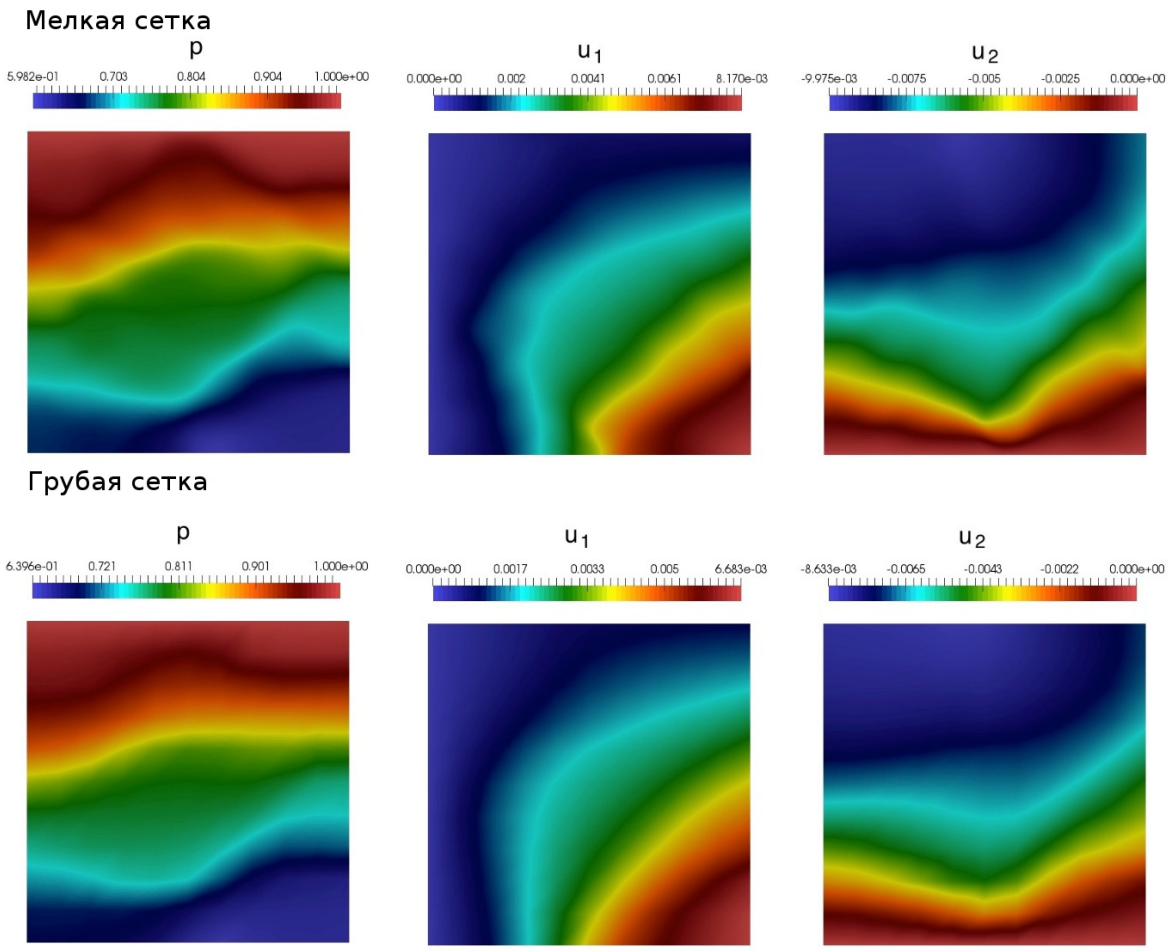

Рисунок 2.3: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени для мелкой сетки (вверху) и грубой сетки с использованием численного усреднения (внизу) для двумерной задачи. Случай 1.

Трехмерная задача

Далее решаем модельную задачу в $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Грубая сетка – $5 \times 5 \times 5$, а мелкая сетка – $20 \times 20 \times 20$. Устанавливаем следующие граничные условия

$$u_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad x \text{ на } \Gamma_L$$

$$\sigma_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad x \text{ на } \Gamma_B$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad x \text{ на } \Gamma_W$$

$$p = 1, \quad x \text{ на } \Gamma_T.$$

где Γ_L и Γ_R – левая и правая границы, Γ_B и Γ_T – нижняя и верхняя границы, Γ_F и Γ_W – прямая и обратная границы $\partial\Omega = \Gamma_L \cup \Gamma_R \cup \Gamma_B \cup \Gamma_T \cup \Gamma_F \cup \Gamma_W$.

Рассмотрим три тестовых случая для разных неоднородностей (см. Рисунок 2.4). На рисунке 3.1 представляем распределение давления и перемещения по направлениям X, Y и Z в последний момент времени для грубой и мелкой сеток. В таблице 2.2 представляем взвешенные погрешности L_2 и H_1 для многомасштабного решателя. Время выполнения задачи составляет 2.4078 секунд для грубой сетки и 757.52 - для мелкой сетки. Мелкая сетка состоит из 8000 ячеек, а грубая сетка содержит 125 ячеек. Мы наблюдаем хорошую точность как для $2D$, так и для $3D$ тестовых задач с разной неоднородностью.

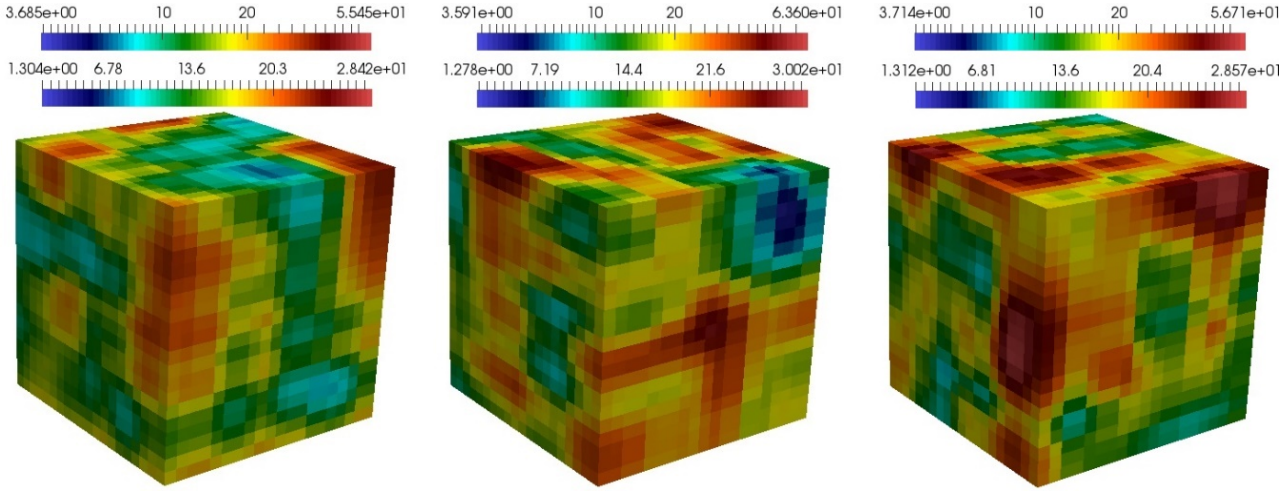

Рисунок 2.4: Модуль упругости и проницаемости с неоднородностью для трехмерной задачи. Случаи 1, 2 и 3 (слева направо).

Случай	L_2^p	H_1^p	L_2^u	H_1^u
1	7.923	20.993	8.607	24.203
2	7.385	21.724	7.475	19.563
3	7.223	21.603	5.399	21.777

Таблица 2.2: Относительные погрешности перемещения и давления между грубой сеткой и эталонным решением для трехмерной задачи. Случаи 1, 2 и 3.

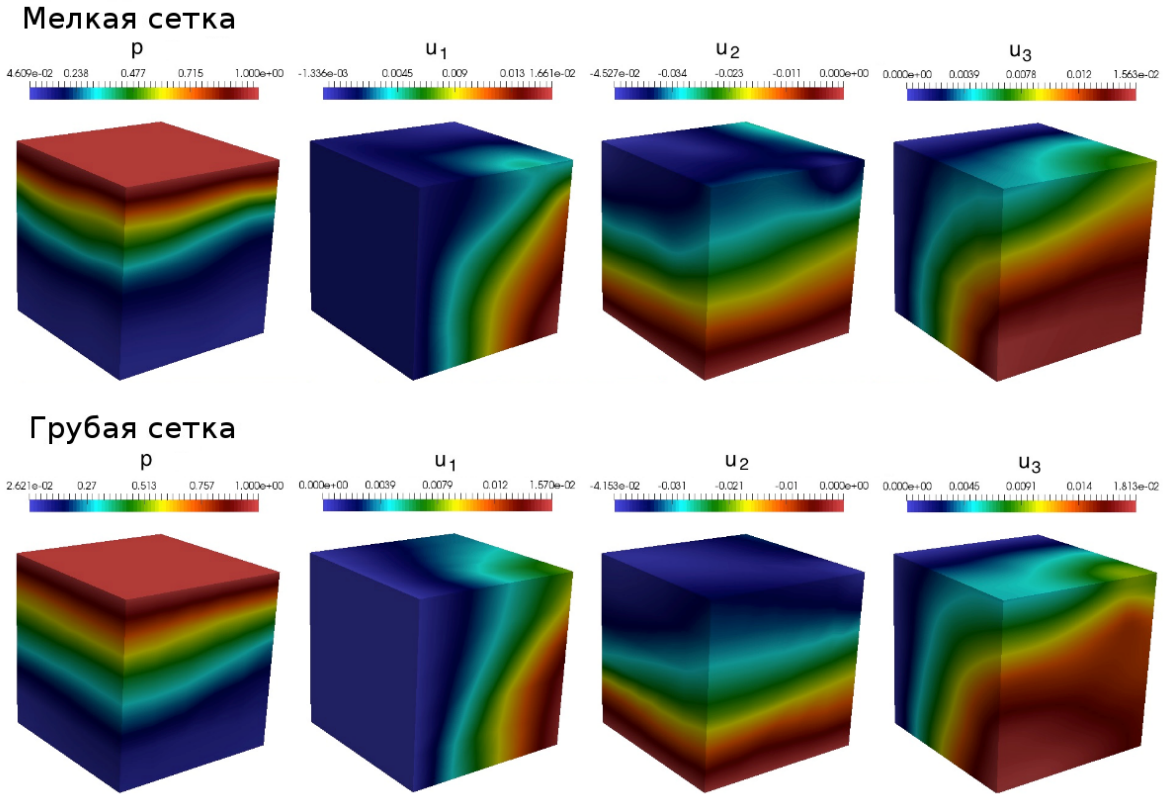

Рисунок 2.5: Распределение давления, перемещения по направлениям X, Y и Z в последний момент времени для мелкой сетки (вверху) и грубой сетки с использованием численного усреднения (внизу) для трехмерной задачи. Случай 1.

2.4 Выводы

Проведено исследование метода численного усреднения. Для описания метода численного усреднения была решена задачи пороупругости с тремя разными модулями упругости и проницаемости. Исследование этого метода показало, что погрешности будут менее точными по сравнению с GMsFEM, так как точность многомасштабного метода можно улучшить путем увеличения количества базисных функций. Оба метода могут в несколько раз снизить время вычисления и получить гладкое решение поставленной задачи.

Глава 3

Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задач пороупругости в неоднородных средах

Механизм течения жидкости и деформации пористых сред изучается в теории пороупругости [5,95,96]. Основные математические модели включают уравнения Ламе для перемещения среды, а также закон сохранения массы и закон Дарси для фильтруемой жидкости [90,98]. Наиболее важной особенностью математических моделей пороупругости является то, что уравнения системы связаны между собой. Вычислительные алгоритмы приближенного решения задач пороупругости основаны на аппроксимации конечных элементов в пространстве. Для аппроксимации грубой сетки мы используем обобщенный многомасштабный метод конечных элементов(GMsFEM) [42, 47, 48, 51, 108]. Этот метод решает задачу на грубой сетке путем построения локальных многомасштабных базисных функций для давления и перемещения. По этой главе опубликована следующая статья [75].

3.1 Постановка задачи и конечно-элементная аппроксимация

Пусть $\Omega \subset R^d$ является вычислительной областью. Рассмотрим линейную задачу пороупругости

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\sigma(u) + \alpha \operatorname{grad}(p) &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \alpha \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{k}{\nu}\operatorname{grad} p\right) &= f \text{ in } \Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где p - давление, u - перемещение, σ - тензор напряжения, k - проницаемость, а f - источник, представляющий процессы внедрения или производства. Обозначим M как модуль Био, ν - вязкость жидкости, а α - коэффициент связи жидкость-твердое тело Био-Уиллиса.

В случае линейного упругого напряженно-деформируемого отношения мы имеем, что тензор напряжения и симметричный градиент деформации могут быть выражены как

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{div}(u)\mathscr{I}, \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad} u + \operatorname{grad} u^T\right),$$

где μ, λ - коэффициенты Ламе, $\mathscr{I}$ - единичный тензор. В случае, когда среды обладают неоднородными материальными свойствами, коэффициенты μ и λ могут сильно изменяться.

Для численного решения задачи пороупругости на мелкой сетке используется стандартный метод конечных элементов

$$\begin{gathered} a(u,v) + g(p,v) = 0, \quad \text{for all } v \in \hat{V}, \\ d\left(\frac{du}{dt}, q\right) + c\left(\frac{dp}{dt}, q\right) + b(p,q) = (f,q), \quad \text{for all } q \in \hat{Q}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

для $u \in V = [H^1(\Omega)]^d$ и $p \in Q = H^1(\Omega)$. Здесь для билинейных и линейных форм определяем

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma(u)\, v dx, \quad b(p,q) = \int_\Omega \left(\frac{k}{\nu} \operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\right) dx, \quad c(p,q) = \int_\Omega \frac{1}{M} p\, q\, dx,$$

и

$$g(p,v) = \int_\Omega \alpha(\operatorname{grad} p, v) dx, \quad d(u,q) = \int_\Omega \alpha \operatorname{div} u\, q\, dx, \quad (f,q) = \int_\Omega f\, q\, dx.$$

3.2 Аппроксимация на грубой сетке с использованием GMsFEM

В этом параграфе подробно опишем обобщенный многомасштабный метод конечных элементов(GMsFEM) для решения задач пороупругости в неоднородных средах. GMsFEM содержит три этапа:

(1) Построение грубых и мелких сеток и локальных областей, где строим многомасштабные базисные функции,

(2) Решение локальных спектральных задач для построения многомасштабных базисных функций,

(3) Построение и решение аппроксимации на грубой сетке в многомасштабном пространстве.

Пусть $\mathscr{T}_H$ и $\mathscr{T}_h$ - это грубые и мелкие сетки. Для построения многомасштабных базисных функций решаем локальные спектральные задачи в области ω_i для перемещения и давления отдельно. Локальные спектральные задачи:

Перемещение

$$a^u(u,v) = \lambda_u, s^u(u,v),$$

$$a^u(u,v) = \int_{\omega_i} \sigma(u), \varepsilon(v)dx,\ s^u = \int_{\omega_i} (\lambda + 2\mu)(u,v)dx,$$

Давление

$$a^p(p,q) = \lambda_p, s^p(p,q),$$

$$a^p(p,q) = \int_{\omega_i} k\nabla p, \nabla q dx,\ s^p = \int_{\omega_i} k\,p\,q\,dx,$$

где v, q - пробные функции.

Многомасштабные пространства V_h, Q_h будем формировать, используя собственные векторы φ_1, φ_2,...,φ_L, ψ_1, ψ_2,...,ψ_L, соответствующие первым наименьшим собственным значениям L, где $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_L$.

Запишем спектральные задачи в матричной форме:

Перемещение

$$A^u\varphi = \lambda_u S^u\varphi,\ x \in \omega_i,$$

Давление

$$A^p\psi = \lambda_p S^p\psi,\ x \in \omega_i,$$

где A^u, S^u – матрицы жесткости и массы для перемещения, а A^p, S^p – для давления.

В связи с тем, что спектральная задача должна решаться много раз, можно уменьшить размер задачи. Для решения локальной спектральной задачи используем снепшот пространство V_{snap} для перемещения и Q_{snap} для давления. Далее определяем переходные матрицы R^u_{snap}, R^p_{snap}: $R^u_{snap} = [\varphi_1^{snap}, \dots \varphi_{L_i}^{snap}]$ для перемещения и $R^p_{snap} = [\psi_1^{snap}, \dots \psi_{L_i}^{snap}]$ для давления.

Перемещение

$$\overline{A}_u\overline{\varphi} = \lambda_u\overline{S}_u\overline{\varphi}, \quad x \in V_{snap},$$

где $\overline{A}_u = R^u_{snap}A^u(R^u_{snap})^T$, $\overline{S}_u = R^u_{snap}S^u(R^u_{snap})^T$ и $\varphi_j^\omega = (R^u_{snap})^T\overline{\varphi}_j$.

Давление

$$\overline{A}_p\overline{\psi} = \lambda_p\overline{S}_p\overline{\psi}, \quad x \in Q_{snap},$$

где $\overline{A}_p = R^p_{snap}A^p(R^p_{snap})^T$, $\overline{S}_p = R^p_{snap}S^p(R^p_{snap})^T$ и $\psi_j^\omega = (R^p_{snap})^T\overline{\psi}_j$.

Для получения соответствующих базисных функций используем линейное разбиение единичных функций. Строим матрицу перехода R из мелкой сетки в грубую сетку и используем ее для уменьшения размерности задачи. Матрица перехода

$$R = \begin{pmatrix} R_u \\ R_p \end{pmatrix},$$

с

$$R_u = \{\chi^1\varphi_1^1, \chi^1\varphi_2^1, ..., \chi^1\varphi_L^1, ..., \chi^{N_c}\varphi_1^{N_c}, \chi^{N_c}\varphi_2^{N_c}, ..., \chi^{N_c}\varphi_L^{N_c}\}$$

и

$$R_p = \{\chi^1\psi_1^1, \chi^1\psi_2^1, ..., \chi^1\psi_L^1, ...\chi^{N_c}\psi_1^{N_c}, \chi^{N_c}\psi_2^{N_c}, ..., \chi^{N_c}\psi_L^{N_c},\}.$$

где χ^i – линейное разбиение единичных функций, L – число базисных функций, а N_c – число вершин грубой сетки.

Тогда система уравнений может быть переведена в грубую сетку

$$A_c u_c + G_c p_c = F_c,$$

$$D_c u_c + B_c p_c = Y_c,$$

где $A_c = R_u A_f R_u^T$, $B_c = R_p B_f R_p^T$, $F_c = R_u F_f$, $Y_c = R_p Y_f$, $G_c = R_u G_f R_p^T$, $D_c = R_p D_f R_u^T$ и

$$A_f u = \int_\Omega \sigma(u)\varepsilon(v)dx,\ B_f p = \frac{1}{M}\int_\Omega \frac{p}{\tau} q dx + \int_\Omega (k\nabla p, \nabla q)dx,$$

$$G_f p = \int_\Omega \alpha \nabla p \cdot v dx,\ D_f u = \int_\Omega \alpha \frac{\operatorname{div} u}{\tau} q dx,$$

$$F_f = \int_\Omega f_u v dx,\ Y_f = \int_\Omega f_p q dx.$$

После получения решения на грубой сетке можем реконструировать решение на мелкой сетке.

$$u_{ms} = R_u^T u_c, \quad p_{ms} = R_p^T p_c.$$

В результате получаем решение на мелкой сетке для задачи пороупругости (u_{ms}, p_{ms}).

3.3 Численные результаты

Двумерная задача

В этом параграфе представляем численные результаты задач пороупругости в неоднородных средах. Расчеты будут выполняться в структурированной области, которая показана на рис. 3.1, и в качестве единичного квадрата берем Ω $[0,1]^2$. Мелкая сетка состоит из 441 вершины, 800 ячеек и 1240 граней, а грубая сетка содержит 36 вершин.

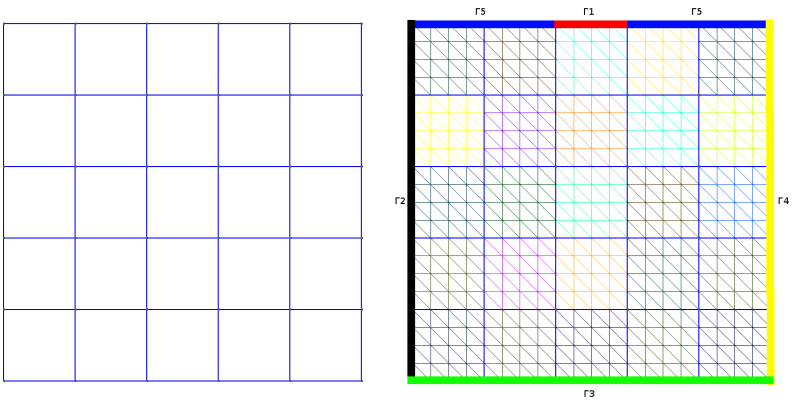

Рисунок 3.1: Расчетная сетка. Слева: грубая сетка. Справа: мелкая сетка

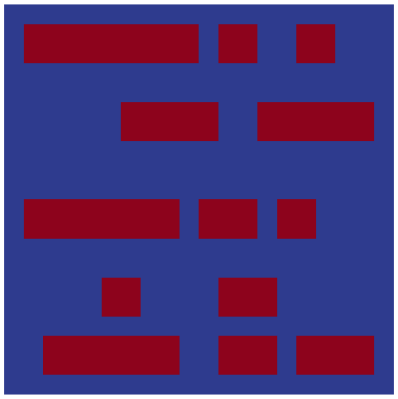

Рисунок 3.2: Неоднородная среда для λ, μ, k.

Численное решение представлено для следующих граничных условий

$$u_x = 0,\ \sigma_y = 0,\ x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4,$$

$$u_y = 0,\ \sigma_x = 0,\ x \in \Gamma_3,$$

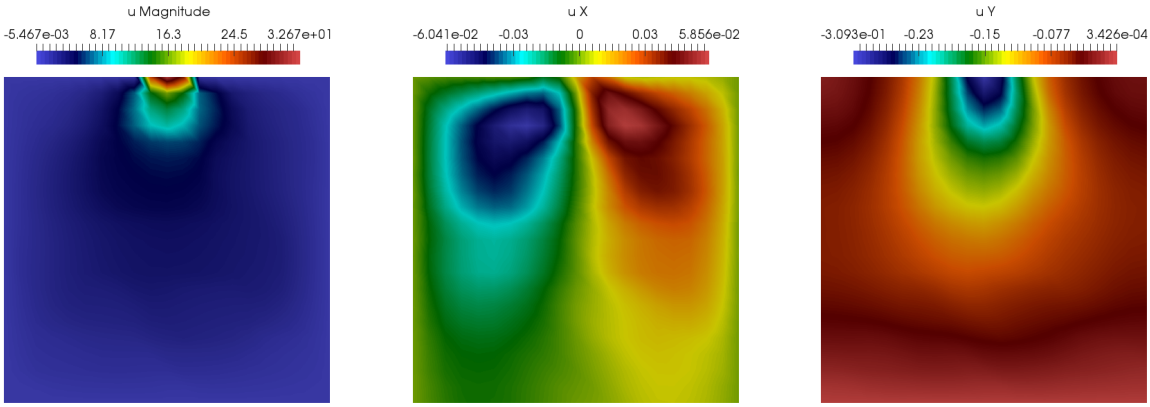

Рисунок 3.3: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени.

L	L_2^u (%)	H_1^u (%)	L_2^p (%)	H_1^p (%)
1	95.845	96.098	97.017	99.633
2	40.431	56.988	61.624	66.461
4	13.940	23.854	22.094	39.869
8	1.031	5.596	2.240	12.950
12	0.063	0.561	0.062	0.514

Таблица 3.1: Относительные погрешности перемещения и давления с различным числом многомасштабных базисных функций в GMsFEM для двумерной формулировки.

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, x \in \Gamma_1,$$

для уравнения пороупругости положим $p = 0$ на границах $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$. На границе Γ_1 рассмотрим $p_1 = 10$.

Для вычислений устанавливаем коэффициенты $\lambda = 5$[Па], $\mu = 4$[Па] и $k = 0,01$[м^2] для области с синим цветом на рис. 3.2 и $\lambda = 10$[Па], $\mu = 8$[Па] и $k = 0,05$[м^2] для области с красным цветом на рис. 3.2. Установим $\beta = 0.01$[Па], $\alpha = 1$ и выполним расчет $T_{max} = 0,1$[сек] с шагом по времени $\tau = 0,01$[сек].

На рис. 3.3 представляем распределение давления и перемещения по направ-

лениям X и Y в последний момент времени для решения с мелкой сеткой. В Таблице 3.1 представляем взвешенные погрешности L^2 и H^1 для многомасштабного решателя.

Трехмерная задача

Выполним численное моделирование рассматриваемой задачи пороупругости в трехмерной постановке. Моделирование будет проводиться в области $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ метров при постоянных граничных условиях для нагрузки $p_1 = 10$[Па]. Остальные граничные значения были выбраны аналогично двумерной формулировке без Γ_5.

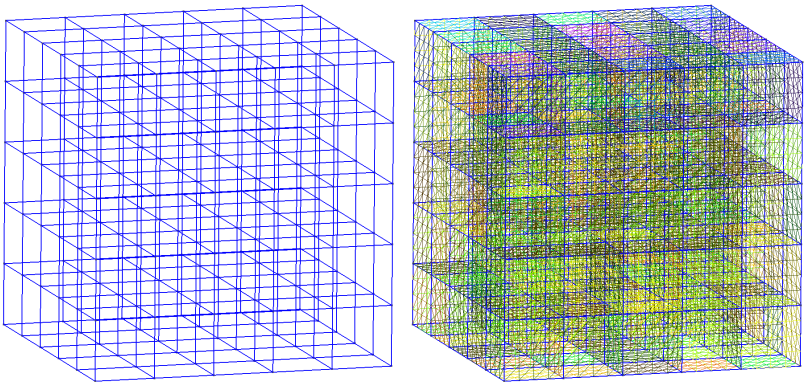

Рисунок 3.4: Геометрическая область в тетраэдрической вычислительной сетке.

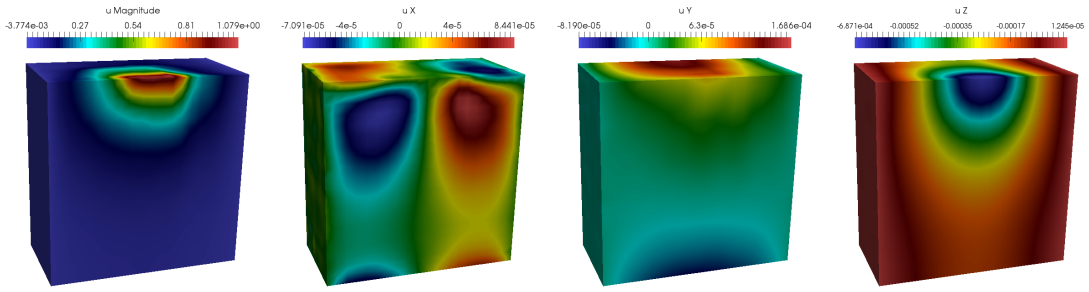

Рисунок 3.5: Распределение давления и перемещения по X, Y и Z (слева направо) в последний момент времени.

Расчет производится при $T_{max} = 0,001$[сек] с шагом по времени $\tau = 0,0001$[сек]. Рассчитанная тетраэдрическая сетка содержит 9261 вершину, 48000 ячеек и 102048 граней с размером области нагрузки $0,2 \times 0,2$ (см. рис. 3.4).

L	L_2^u (%)	H_1^u (%)	L_2^p (%)	H_1^p (%)
1	17.423	43.768	28.158	53.484
2	14.137	35.863	18.698	43.129
4	5.437	20.492	9.294	31.934
8	3.124	14.134	4.306	21.463
12	1.643	9.635	2.369	16.109

Таблица 3.2: Относительные погрешности перемещения и давления с различным числом многомасштабных базисных функций в GMsFEM для трехмерной формулировки.

Для вычислений установим коэффициенты $\lambda = 20$[Па], $\mu = 100$[Па] и $k = 1$[м^2] для области с синим цветом в рис. 3.2 и $\lambda = 100$[Па], $\mu = 200$[Па] и $k = 10$[м^2] для области с красным цветом на рис. 3.2. Установим $\beta = 1$[Па], $\alpha = 1$.

Численные результаты задачи пороупругости в трехмерной постановке показаны на рис. 3.5 и иллюстрируют решение задачи в последний момент времени на мелкой сетке. В таблице 3.2 приведены взвешенные погрешности L^2 и H^1 для трехмерной формулировки. Эти результаты задачи пороупругости показывают, что GMsFEM может обеспечить хорошую точность для двумерных и трехмерных задач в неоднородных областях.

3.4 Выводы

Моделирование пороупругости затруднено из-за сложной неоднородности и сложности построения сетки течения жидкости и механики в таких средах. Поэтому в этой главе использован обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для пороупругих сред. Для построения многомасштабных базисных функций мы решаем локальные спектральные задачи для потока и механики отдельно. Проведено численное исследование представленного метода для двумерных и трехмерных модельных задач. Представили относительные погрешности решения между мелкой сеткой и многомасштабными решениями перемещения и давления.

Глава 4

Численное моделирование задач пороупругости в трещиноватых средах с использованием GMsFEM

В данной главе мы рассмотрим решение задач пороупругости в трещиноватых средах с помощью обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Естественно связанные процессы потока и геомеханики в трещиноватых средах имеют значение для добычи газа. Система включает сложные геотекстуры, состоящие из неоднородной сети анизотропных трещин. Из-за сложности трещин решения имеют различные масштабы, а аппроксимация на мелкой сетке приводит к большой дискретной системе. Для обработки сложной сетки трещин на мелкой сетке используются дискретная модель трещины и встроенная модель трещины. Дискретная модель трещины способна описать течение как в системе трещин, так и в матрицах, а также хорошо учитывает перетоки между ними, встроенная модель трещины может использовать сетки для матрицы пористой среды, которые не зависят от сетки для трещин. Для аппроксимации на мелкой сетке мы используем метод конечных объемов для задачи потока и метод конечных элементов для механики для случая со встроенной моделью трещины. Так как оба метода имеют сложную дискретную систему имеет смысл снизить вычислительные затраты. Для этого используется обобщенный многомасштабный метод конечных элементов.

4.1 Математическое моделирование течения жидкости и геомеханики в трещиновато-пористых средах с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов

При моделировании процессов в грунте важную роль играет математическое моделирование потока жидкости и геомеханики в трещиновато-пористых средах. Сети трещин имеют сложную геометрию, которые существуют в нескольких масштабах и обычно имеют очень небольшую толщину по сравнению с типичными размерами процессов в грунте. Из-за высокой проницаемости трещины оказывают существенное влияние на процессы потока. В данной работе рассмотрим дискретную модель трещин для задач связанных течений и механики. Строим грубую сеточную аппроксимацию с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов(GMsFEM). По этой работе опубликована следующая статья [77].

Постановка задачи

Рассматривается математическая модель связанного течения жидкости и механики в трещиноватой пороупругой среде. Модель содержит уравнение баланса массы для потока и линейное уравнение баланса импульса для механики [49, 50, 109].

Баланс линейного импульса в твердом теле задается как

$$-\operatorname{div}\sigma_T(u,p)=0, \quad \sigma_T(u,p)=\sigma(u)-\alpha p\mathscr{I}, \quad x\in\Omega, \tag{4.1}$$

где u – перемещение, α – коэффициент Био, p – давление жидкости, σ_T – тензор полного напряжения, σ – линейное напряжение.

Соотношение между тензором напряжения σ и тензором деформации ε определяется как

$$\sigma(u) = \lambda\varepsilon_v\mathscr{I} + 2\mu\varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = 0.5(\nabla u + (\nabla u)^T),$$

где ε_v - объемная деформация, а λ и μ – коэффициенты Ламе.

Сохранение массы жидкости дается следующим образом:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q) = \rho f, \quad q = -\frac{k}{\nu_f}\operatorname{grad} p, \quad x \in \Omega, \tag{4.2}$$

где m – масса жидкости, q – скорость Дарси, ν_f - вязкость, ρ – плотность жидкости, а f – источник. Здесь для простоты пренебрегаем гравитационными силами [90, 91].

Из-за движения твердого скелета имеем следующее соотношение

$$\delta m = \rho\delta\phi + \phi\delta\rho + \rho\delta\varepsilon_v = \rho\left(\frac{1}{M}\delta p + \alpha\delta\varepsilon_v\right),$$

где

$$\frac{1}{M} = \phi c_f + \frac{\alpha - \phi}{K}, \quad c_f = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp},$$

и c_f – сжимаемость жидкости, M – модуль Био, ϕ - пористость, K - жесткость твердых частиц.

Для высокопроницаемой трещины должны добавить уравнение для потока на трещине. Используем модель приведенной размерности для потока жидкости на $\gamma \in R^{(d-1)}$

$$\frac{\partial(m_f b)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q_f) = \rho[q \cdot n], \quad q_f = -b\frac{k_f}{\nu_f}\operatorname{grad} p_f, \quad x \in \gamma, \tag{4.3}$$

где b – толщина трещины $(b > 0), m_f$ – масса жидкости в трещине, q_f и p_f – поток массы и давление жидкости в трещине. Здесь в качестве исходного члена имеем скачок в потоке массы матрицы по направлении нормали $[q \cdot n]$ и предполагаем линейную связь между потоком и перепадом давления $[q \cdot n] = \sigma_{fm}(p - pf)$.

Для пороупругих сред имеем

$$\frac{\partial(m_f b)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\phi_f b)}{\partial t} = \rho\left(\phi_f\frac{\partial b}{\partial t} + b\frac{1}{M_f}\frac{\partial p_f}{\partial t}\right),$$

где M_f - модуль Био для трещины.

Предположим, что $\rho = const$ и $b = const$. Таким образом, имеем следующую связанную систему уравнений для перемещения и давления в пористой матрице и трещин

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\sigma(u) + \alpha \operatorname{grad} p = 0, \quad x \in \Omega, \\
c_m \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \operatorname{div}(a_m \operatorname{grad} p) + \sigma_{mf}(p - p_f) = f, \quad x \in \Omega, \\
c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div}(a_f \operatorname{grad} p_f) - \sigma_{fm}(p - p_f) = f_f, \quad x \in \gamma,
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где

$$
c_m = \frac{1}{M}, \quad c_f = \frac{b}{M_f}, \quad a_m = \frac{k}{\nu_f}, \quad a_f = b\frac{k_f}{\nu_f}.
$$

Дискретная система на мелкой сетке

Обозначим через $\mathscr{T}^h$ конечно-элементное разбиение области на Ω, а Γ_h – множество всех внутренних граней между элементами $\mathscr{T}^h$. Предположим, что $\cup_j \gamma_j \subset \Gamma_h$ - это подмножество граней, представляющих трещины, где $j = \overline{1, N_{frac}}$ и N_{frac} – число дискретных трещин.

Слабая формулировка уравнения упругости для метода конечных элементов имеет вид

$$
\int_\Omega (\sigma(u,p), \varepsilon(v))dx + \int_\Omega \alpha \nabla p \cdot v dx = 0. \tag{4.5}
$$

Для уравнений давления предполагаем непрерывность матрицы и давления трещины на поверхности трещины и, используя принципы суперпозиции, получаем следующее приближение конечных элементов с использованием дискретной модели трещины(DFM)

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega c_m \frac{\partial p}{\partial t} z dx + \int_\Omega \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} z dx + \int_\Omega a_m \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} z \, dx \\
&+ \sum_j \left(\int_{\gamma_j} c_f \frac{\partial p}{\partial t} z_f ds + \int_{\gamma_j} a_f \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} z_f \, ds \right) \\
&= \int_\Omega f z dx + \sum_j \int_{\gamma_j} f_f z_f dx.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Стандартная неявная конечно-разностная схема используется для аппроксимации по времени уравнения давления (4.6). Решаем следующую связанную систему в матричной форме на мелкой сетке

$$
\frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} M & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - \check{p} \\ u - \check{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.7}
$$

где $M = M_m + M_f$, $A = A_m + A_f$

$$
M = [m_{ij}], \quad m_{ij} = \int_\Omega c_m \phi_i \, \phi_j \, dx + \sum_l \int_{\gamma_l} c_f \psi_i \, \psi_j \, dx,
$$

$$
A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \int_\Omega a_m \operatorname{grad} \phi_i \cdot \operatorname{grad} \phi_j \, dx + \sum_l \int_{\gamma_l} a_f \operatorname{grad} \psi_i \cdot \operatorname{grad} \psi_j \, dx,
$$

$$
K = [k_{ij}], \quad k_{ij} = \int_\Omega \sigma(\Phi_i) : \varepsilon(\Phi_j) \, dx,
$$

$$
D = [d_{ij}], \quad d_{ij} = \int_\Omega \alpha \operatorname{grad} \phi_i \Phi_j \, dx, \quad B = [b_{ij}], \quad b_{ij} = \int_\Omega \alpha \operatorname{div} \Phi_i \, \phi_j \, dx,
$$

$$
F = [f_j], \quad f_j = \int_\Omega f \, \phi_j \, dx + \sum_l \int_{\gamma_l} f_f \, \psi_j \, dx,
$$

и Φ_i, ϕ_i, являются двумерными линейными базисными функциями для перемещения и давления, ψ_i является одномерной линейной базисной функцией.

Аппроксимация на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов

Пусть $\mathscr{T}_H$ – грубая сетка, а $\mathscr{T}_H = \cup_i K_i$, где K_i – грубая сетка. Начнем с обсуждения построения многомасштабного пространства. В этой работе строим

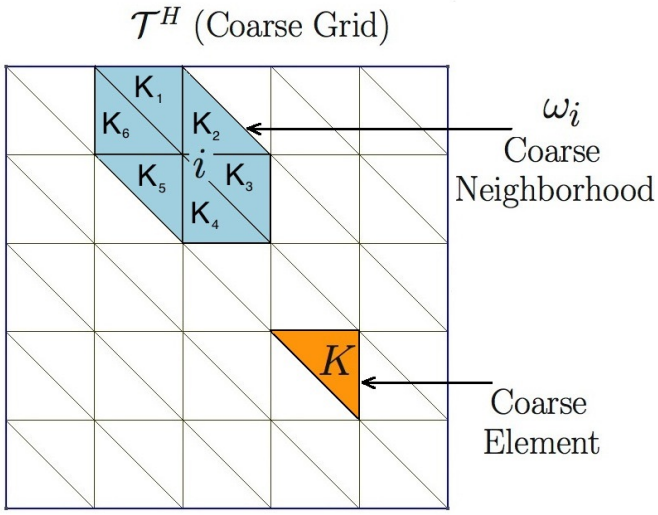

Рисунок 4.1: Иллюстрация грубой сетки $\mathscr{T}_H$ локальной области ω_i и грубой сетки K

многомасштабные базисные функции для перемещения и давления отдельно в каждой локальной области ω_i (см. рисунок 4.1) [47, 48].

Многомасштабное пространство. Для построения многомасштабных базисных функций решаем локальные спектральные задачи в области ω_i для перемещения и давления отдельно. Локальные спектральные задачи на ω_i:

- Перемещение: $K_\omega \Phi = \lambda_u Q_\omega \Phi$,
- Давление: $A_\omega \phi = \lambda_p S_\omega \phi$

Здесь K_ω, A_ω – матрицы жесткости для перемещения и давления в локальной области ω_i, а Q_ω, S_ω – матрицы масс для перемещения и давления

$$Q_\omega = [q_{ij}], \quad q_{ij} = \int_\Omega a_m \phi_i \phi_j dx + \sum_l \int_{\gamma_l} a_f \psi_i \psi_j dx$$

$$S_\omega = [s_{ij}], \quad s_{ij} = \int_\Omega (\lambda + 2\mu) \Phi_i \Phi_j dx.$$

Выберем собственные векторы $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{L_l}$ и $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{L_l}$, соответствующие первым наименьшим собственным значениям L_l, где $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_{L_l} (l = u, p)$.

Так как спектральная задача должна решаться много раз, необходимо уменьшить размер задачи. Для решения локальной спектральной задачи мы используем пространство снимков V_{snap} для перемещения и Q_{snap} для давления. Определяем переходные матрицы для перемещения и давления ($R^u_{snap} = (\phi_1^{snap}, ..., \phi_{L_i}^{snap})$ и $R^p_{snap} = (\Phi_1^{snap}, ..., \Phi_{L_i}^{snap})$) и решаем следующую задачу на собственные значения в снэпшот-пространстве

- Перемещение:

$$\overline{K}_\omega \overline{\Phi} = \lambda_u \overline{Q}_\omega \overline{\Phi}, \;\; \overline{K}_\omega = R^u_{snap} K_\omega (R^u_{snap})^T, \;\; \overline{Q}_\omega = R^u_{snap} Q_\omega (R^u_{snap})^T,$$

где $\Phi_j^\omega = (R^u_{snap})^T \overline{\Phi}_j$.

- Давление:

$$\overline{A}_\omega \overline{\phi} = \lambda_p \overline{S}_\omega \overline{\phi}, \;\; \overline{A}_\omega = R^p_{snap} A_\omega (R^p_{snap})^T, \;\; \overline{S}_\omega = R^p_{snap} S_\omega (R^p_{snap})^T,$$

где $\phi_j^\omega = (R^p_{snap})^T \overline{\phi}_j$.

Для получения соответствующих базисных функций используем линейное разбиение единичных функций. Строим переходные матрицы R_u и R_p из мелкой сетки в грубую сетку и используем ее для уменьшения размерности задачи

$$R_u = (\chi^1 \Phi_1^1, \chi^1 \Phi_2^1, ..., \chi^1 \Phi_L^1, ..., \chi^{N_c} \Phi_1^{N_c}, \chi^{N_c} \Phi_2^{N_c}, ..., \chi^{N_c} \Phi_L^{N_c})^T,$$
$$R_p = (\chi^1 \phi_1^1, \chi^1 \phi_2^1, ..., \chi^1 \phi_L^1, ... \chi^{N_c} \phi_1^{N_c}, \chi^{N_c} \phi_2^{N_c}, ..., \chi^{N_c} \phi_L^{N_c})^T,$$

где χ^i – линейное разбиение единичных функций, $L = L_p = L_u$ – количество базисных функций, а N_c - число вершин грубой сетки.

Тогда система уравнений может быть переведена в грубую сетку

$$\frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} M_c & D_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_c - \check{p}_c \\ u_c - \check{u}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_c & 0 \\ B_c & K_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_c \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

где $K_c = R_u K R_u^T$, $A_c = R_p A R_p^T$, $M_c = R_p M R_p^T$, $B_c = R_u B R_p^T$, $D_c = R_p D R_u^T$ $F_c = R_p F$.

После получения грубо-масштабного решения можем восстановить мелкомасштабное решение $u_{ms} = R_u^T u_c$ и $p_{ms} = R_p^T p_c$.

Численные результаты

Расчеты выполняются в вычислительной области, которая показана на рис. 4.2. Устанавливаем $\Omega = [0,50]^2$. Мелкая сетка состоит из 12944 вершины, 25486 ячеек и 38429 граней, а грубая сетка содержит 121 вершину.

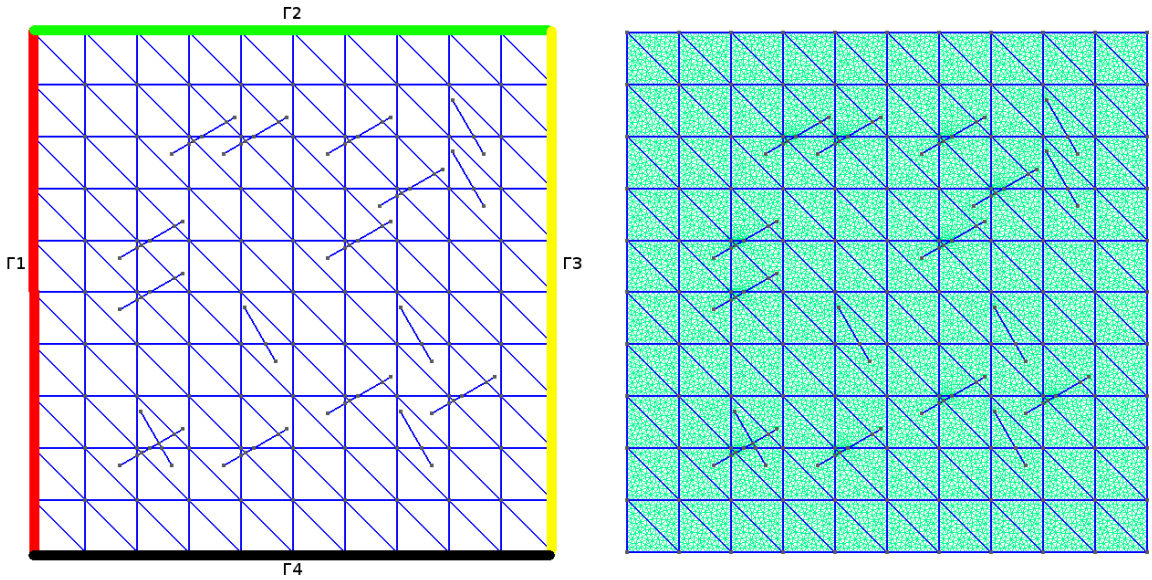

Рисунок 4.2: Расчетные сетки. Слева: грубая сетка. Справа: мелкая сетка.

Численное решение представлено для следующих граничных условий:

$$u_x = 0,\ \sigma_y = 0,\ x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_1 \quad u_y = 0,\ \sigma_x = 0,\ x \in \Gamma_4 \cup \Gamma_2 \quad p = 1,\ x \in \Gamma_1.$$

Расчет выполняется для $T = 0.1$[сек] с шагом по времени $\tau = 0.01$[сек].

Однородные трещиноватые пористые среды

В этом разделе представляем численные результаты связанных течений и механики в трещиноватой пористой упругой среде с однородными свойствами фоновых сред. Установим для модуля Юнга $E = 10$[Па], проницаемости $k = 0,01$[м^2], модуля Био $\beta = 0,1$[Па] и коэффициента Био $\alpha = 0,1$.

На рис. 4.3 приведено распределение давления и перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени для решения с мелкой сеткой в однородных средах. В таблице 4.1 представлены взвешенные ошибки L_2 и H_1 для многомасштабного решателя

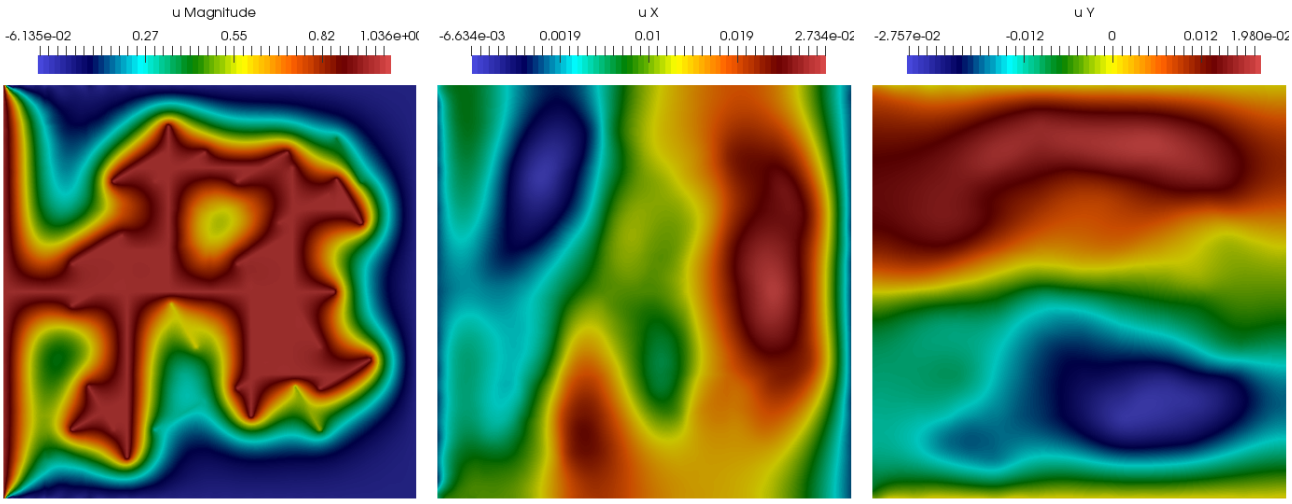

Рисунок 4.3: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени. Однородные трещиноватые пористые среды.

L	L_2^u (%)	H_1^u (%)	L_2^p (%)	H_1^p (%)
1	81.7277	77.8344	51.7067	127.035
2	30.8361	49.2153	29.7308	93.3461
4	7.31921	14.7866	6.71832	39.985
8	2.3319	5.65635	0.985431	12.5086
12	1.69256	5.59024	0.339608	7.26006

Таблица 4.1: Относительные погрешности для перемещения и давления с различными числами многомасштабных базисных функций для GMsFEM. Однородные трещиноватые пористые среды.

Неоднородные трещиноватые пористые среды

Выполним численное моделирование рассматриваемой задачи пороупругости в неоднородных средах. Устанавливаем модуль Био $\beta = 0,01$[Па], коэффициент Био $\alpha = 1$. Параметр упругости и неоднородная проницаемость представлены на рис. 4.4.

На рис. 4.5 представлено распределение давления и перемещения по направ-

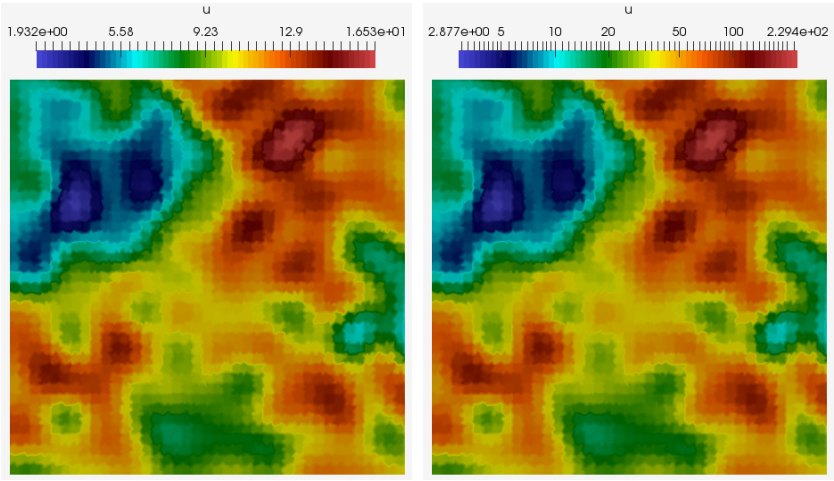

Рисунок 4.4: Параметр упругости E (слева) и неоднородная проницаемость k(справа)

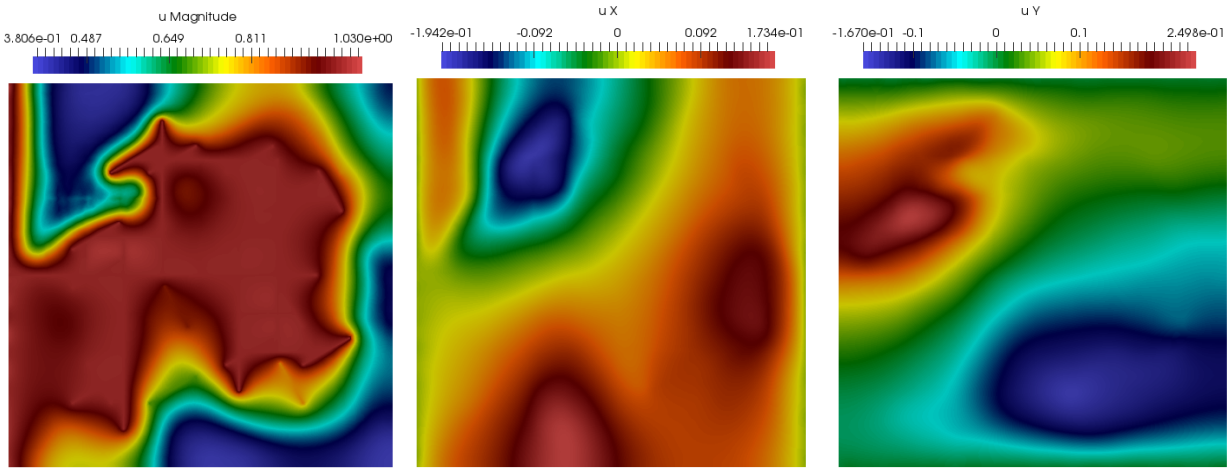

Рисунок 4.5: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени. Неоднородные трещиноватые пористые среды.

лениям X и Y в последний момент времени для решения с мелкой сеткой в неоднородных средах. В Таблице 4.2 представляем взвешенные ошибки L^2 и H^1 для многомасштабного решателя. Получаем точное решение, используя небольшое количество многомасштабных базисных функций для обоих случаев.

L	L_2^u (%)	H_1^u (%)	L_2^p (%)	H_1^p (%)
1	80.9641	69.2054	14.951	141.648
2	23.159	41.3603	11.5642	102.523
4	11.1475	14.2097	2.71181	34.5921
8	5.63175	10.4813	3.60061	29.3502
12	1.14291	5.16293	0.460655	6.42927

Таблица 4.2: Относительные погрешности для перемещения и давления с различными числами многомасштабных базисных функций для GMsFEM. Неоднородные трещиноватые пористые среды.

4.2 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задачи пороупругости в мультиконтинуумных средах

Математические модели задач пороупругости в мультиконтинуумных средах для неоднородных трещиноватых сред используются для моделирования нетрадиционных залежей углеводородов, геотермальных полей, подземного захоронения радиоактивных отходов в подземных коллекторах и др. [51, 110–114]. Математическая модель описывается системой уравнений для давлений в каждом континууме и уравнением для перемещения. Наиболее важной особенностью математической модели является то, что уравнения связаны. Можем выделить два основных связанных типа: (1) связь мультиконтинуума давления с помощью условия массопереноса [104, 115, 116] и (2) связь давления и перемещения с помощью условия, который описывает сжимаемость среды и объемную силу, которая пропорциональна градиенту давления [90, 92].

Математические модели течения жидкости в мультиконтинуумных средах используются для описания сложных процессов потока в многомасштабных трещиноватых неоднородных пористых средах [52, 117–119]. Течение в трещинах оказывает существенное влияние на процессы фильтрации и требует их тщательного рассмотрения [120, 121]. Более того, поскольку трещины характеризуются высокой проницаемостью и их толщина значительно меньше, чем размер моделируемого поля, это приводит к необходимости построения специальных математических моделей мультиконтинуума, в которых выделяются независимые переменные для описания течения жидкости в пористой среде и в сети трещин с учетом специальной функции перетока [50, 122, 123]. В то же время размеры трещин следует разделять, поскольку они могут существовать в разных масштабах и могут различаться по характеру их возникновения. Система трещин

естественных трещин пористых сред, в основном, соединена, и для ее моделирования традиционно используются модели с двойной пористостью [91, 115]. Взаимодействие континуумов описывается определением функций перетока между континуумами (массоперенос) [51, 122, 124].

Для численного моделирования задач в трещиноватых и неоднородных пористых средах должны использовать достаточно мелкую сетку, которая разрешает все мелкомасштабные особенности на уровне построения сетки. Следовательно, дискретная постановка таких задач приводит к большой системе уравнений, которая является вычислительно затратной. Для уменьшения размера дискретной системы были разработаны различные многомасштабные методы [42, 58, 59, 125–127]. В [39, 128] для решения задач потока в трещиновато-пористых средах был предложен многомасштабный метод конечных объемов. Многомасштабный метод конечных объемов для решения задачи пороупругости представлен в [129]. Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (GMsFEM) для решения задач потока в трещиновато-пористых средах рассмотрен в [50, 61]. В [47, 48] мы рассмотрели построение задачи на грубой сетке для задачи пороупругости в неоднородных средах. Расширение метода GMsFEM для решения задачи пороупругости в трещиноватых средах с разрывным методом Галеркина для перемещения и непрерывным методом Галеркина для давления представлено в работе [50]. Недавно был представлен новый метод решения задач потока и пороупругости в трещиноватых и неоднородных пористых средах [46, 49, 130]. Обобщение подхода GMsFEM и NLMC для решения задач потока в многоконтинуумных средах рассмотрено в [51, 131].

В данной работе рассматривается обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для решения задач пороупругости в многоконтинуумных неоднородных средах. Мы продолжаем нашу предыдущую работу [77], где рассматриваем задачу пороупругости в трещиновато-пористых средах для связанных задач потока и механики. В этой работе мы расширим его для задач по-

роупругости в многоконтинуумных средах и рассмотрим это решение в области трехмерной трещины. Чтобы зафиксировать сложное взаимодействие между континуумами в модели грубой сетки, решаем локально связанную систему уравнений для построения высокоточных базисных функций в многоконтинуумных моделях задач пороупругости. Мы рассмотрели модель среды с двумя континуумами для давлений, которая связана с сетями дискретной трещины, образуя модель с тремя континуумами, и уравнения Ламе для перемещений среды, чтобы проиллюстрировать надежность и точность метода GMsFEM. На основе мультиконтинуума и подсетей шкалы дискретной модели трещины, который содержит заметную неоднородную информацию о среде, GMsFEM позволяет нам последовательно разрабатывать аппроксимационное пространство. Строим многомасштабные базисные функции для давлений и перемещения. Построение базисных функций для задачи потока в многоконтинуумных средах основана на решениях связанной системы уравнений в каждой локальной области. Метод автоматически идентифицирует каждую непрерывную характеристику потока посредством решения локальных спектральных задач. Для перемещения используем аналогичный подход, в котором основные особенности улавливаются локальной спектральной задачей. Мы численно исследуем представленный метод для двух- и трехмерных модельных задач в трещиноватых и неоднородных пористых средах. По этой работе опубликована следующая статья [81].

Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^d$ - вычислительная область для задачи с двойным континуумным подходом, где $d = 2$ для двумерных задач и $d = 3$ для трехмерных задач. Например, первый континуум может описывать течение в матрице пористой среды, а второй континуум принадлежит сети малых сильно связанных сетей трещин. Кроме того, мы определяем $\gamma \in R^{d-1}$ как вычислительную область для низкоразмерной модели сетей трещин, которая описывает течение в грубомасштабных трещинах. Для потока жидкости в пороупругой среде мы имеем уравнение ба-

ланса массы и закон Дарси

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \operatorname{div} q_1 + q_{12} + q_{1f} = f_1, \quad x \in \Omega, \\
q_1 = -k_1 \operatorname{grad} p_1, \quad x \in \Omega, \\
\alpha_2 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div} q_2 - q_{21} + q_{2f} = f_2, \quad x \in \Omega, \\
q_2 = -k_2 \operatorname{grad} p_2, \quad x \in \Omega, \\
\alpha_f \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_f}\frac{\partial p_f}{\partial t} + \operatorname{div} q_f - q_{f1} - q_{f2} = f_f, \quad x \in \gamma, \\
q_f = -k_f \operatorname{grad} p_f, \quad x \in \gamma,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

где u - перемещение, q_i - скорость, p_i - давление, κ_i - проницаемость ($k_i = \kappa_i/\mu$, μ - вязкость жидкости), f_i - источники, α_i - коэффициенты Био, M_i - модуль Био, а i - индекс континуума ($i = 1, 2, f$).

Здесь q_{12}, q_{1f} и L_{2f} - члены переноса между первым и вторым континуумами; первый континуум и трещины; и второй континуум и трещины, соответственно. Мы имеем

$$
q_{12} = q_{21} = r_{12}(p_1 - p_2), \quad r_{if} = \eta_i r_{if}(p_i - p_f), \quad r_{fi} = \eta_f r_{if}(p_i - p_f),
$$

и $\int_\Omega q_{12} dx = \int_\Omega q_{21} dx$, $\int_\Omega q_{if} dx = \int_\gamma q_{fi} ds$, η_i - геометрический фактор, а r_{ij} - член массопереноса, пропорциональный проницаемости континуума.

Для механики пороупругих мультиконтинуумных сред мы используем эффективное уравнение перемещения с объемными источниками силы, которое пропорционально сумме градиентов давления для каждого континуума.

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div} \sigma_T(u, p_1, p_2, p_f) = 0, \quad x \in \Omega, \\
\sigma_T(u, p_1, p_2, p_f) = \sigma(u) - \sum_{i=1,2,f} \alpha_i p_i \mathscr{I}, \quad x \in \Omega,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

где σ_T - тензор полного напряжения, σ - тензор напряжения [49, 50, 92]. Мы имеем следующее линейное упругое напряжение-деформации:

$$
\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{div} u \mathscr{I}, \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u + \operatorname{grad} u^T),
$$

где ε - тензор деформации, λ и μ - коэффициенты Ламе.

Тогда мы имеем следующую связанную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} - \operatorname{div}\cdot(k_1 \operatorname{grad} p_1) + q_{12} + q_{1f} = f_1, \quad x \in \Omega,\\
&\alpha_2 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \operatorname{div}\cdot(k_2 \operatorname{grad} p_2) - q_{21} + q_{2f} = f_2, \quad x \in \Omega,\\
&\alpha_f \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_f}\frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div}\cdot(k_f \operatorname{grad} p_f) - q_{f1} - q_{f2} = f_f, \quad x \in \gamma,\\
&-\operatorname{div}\sigma(u) + \alpha_1 \operatorname{grad} p_1 + \alpha_2 \operatorname{grad} p_2 + \alpha_f \operatorname{grad} p_f = 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Рассмотрим систему уравнений (4.11) со следующими начальными условиями

$$p_1 = p_2 = p_f = p^0, \quad u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.12}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned}
&p_f = g, \quad x \in \Gamma_\gamma \quad -k_f \frac{\partial p_f}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\gamma/\Gamma_\gamma,\\
&-k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} = 0, \quad x \in \Omega, \quad -k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0, \quad x \in \Omega,\\
&u = 0, \quad x \in \Gamma_D \quad \sigma = 0, \quad x \in \Gamma_N,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

где границы $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ and $\Gamma_\gamma = \partial\Omega \cap \partial\gamma$.

Мы можем обобщить представленную модель как модель пороупругости для мультиконтинуумных сред

$$\begin{aligned}
&\alpha_i \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} - \operatorname{div}\cdot(k_i \operatorname{grad} p_i) + \sum_{j \neq i} r_{ij}(p_i - p_j) = f_i, \quad x \in \Omega,\\
&-\operatorname{div}\sigma(u) + \sum_j \alpha_j \operatorname{grad} p_j = 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где $i = 1, ..., M$ и M - число континуумов.

Конечно-элементная аппроксимация мелкой сетки

Для аппроксимации системы уравнений (4.11) с граничными условиями (4.13) используется метод конечных элементов. Для этого определим следующие функциональные пространства

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}, \quad W_1 = W_2 = H^1(\Omega),$$

$$W_f = \{w \in H^1(\gamma) : w = g \text{ on } \Gamma_\gamma\}, \quad \hat{W}_f = \{w \in H^1(\gamma) : w = 0 \text{ on } \Gamma_\gamma\}.$$

Вариационная формулировка задачи пороупругости в многоконтинуумных средах может быть записана следующим образом: найти $(p_1, p_2, p_f, u) \in W_1 \times W_2 \times W_f \times V$ такие, что

$$\begin{aligned} & d_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w_i\right) + c_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial t}, w_i\right) + b_i(p_i, w_i) + \sum_j q_{ij}(p_i - p_j, w_i) = l(w_i), \quad \forall w_i \in W_i, \\ & a(u, v) + \sum_j g_i(p_i, v) = 0, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где билинейные и линейные формы следующие:

$$b_i(p_i, w_i) = \int_{\Omega_i} k_i \nabla p_i \cdot \nabla w_i dx, \quad l(w_i) = \int_{\Omega_i} f_i w_i dx,$$

$$c_i(p_i, w_i) = \int_{\Omega_i} \frac{1}{M_i} p_i w_i \, dx, \quad d_i(u, w_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \operatorname{div} u \, w_i \, dx,$$

$$q_{ij}(p_i - p_j, w_i) = \int_{\Omega_i} r_{ij}(p_i - p_j) \, w_i \, dx,$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v) \, dx, \quad g_i(p_i, v) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \operatorname{grad} p_i v \, dx,$$

и $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_f = \gamma$, $i = 1, 2, f$.

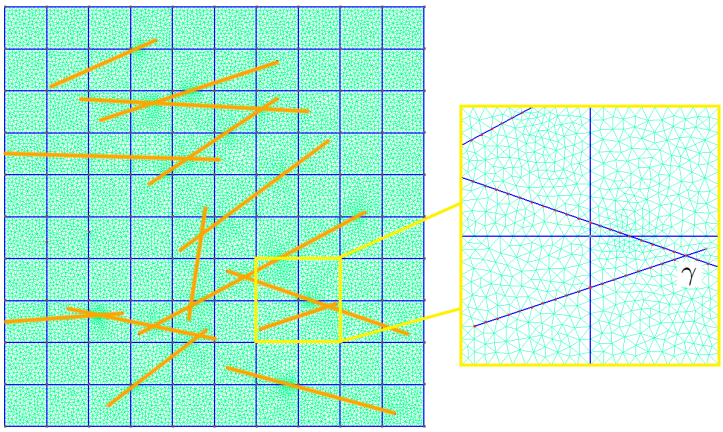

Рисунок 4.6: Вычислительная сетка для дискретной модели трещины.

Пусть $\mathscr{T}^h$ обозначает конечно-элементное разбиение области Ω и $\mathscr{E}_h$ - множество всех интерфейсов между элементами $\mathscr{T}_h$. Для континуума трещины мы используем дискретную модель трещины и используем неструктурированную мелкую сетку $\mathscr{T}^h$, которая явно разрешает геометрию трещины. Мы предполагаем, что $\mathscr{E}_\gamma = \cup_j \gamma_j$ является подмножеством граней для $\mathscr{T}^h$, которые представляют трещины, где $j = 1, ..., N_{frac}$, N_{frac} - число дискретных трещин и $\mathscr{E}_\gamma \subset \mathscr{E}_h$ - подмножество всех граней, представляющих трещины (см. Рисунок 4.6). Кроме того, $\mathscr{E}_\gamma$ описывают сетку трещин меньшей размерности. Заметим, что для построения сетки на системе трещин важно учитывать пересечения трещин и пересечения отрезков пересечения.

Алгоритм построения сетки состоит из следующих шагов:

- Последовательное деление отрезков пересечения и границ трещины на отрезки заданного размера, которые впоследствии используются в качестве граней сетки.
- Равномерное заполнение областей трещин точками с ограничением на близость внутренних точек к границе и к точкам на отрезках пересечения.
- Построение триангуляции для каждой трещины в соответствии с заданными рамками (точками, отрезками).

Для аппроксимации по времени мы используем неявную конечно-разностную схему с шагом по времени τ. Таким образом, мы имеем следующие дискретную систему в матричной форме, на мелкой сетке для сред с тремя континуумами и $y^h = (p_1^h, p_2^h, p_f^h, u^h)^T$

$$C\frac{y^h - \check{y}^h}{\tau} + Ay^h = F, \tag{4.16}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & C_f & D_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 + Q_{12} + Q_{1f} & -Q_{12} & -Q_{1f} & 0 \\ -Q_{12} & A_2 + Q_{12} + Q_{2f} & -Q_{2f} & 0 \\ -Q_{1f} & -Q_{2f} & A_f + Q_{1f} + Q_{2f} & 0 \\ D_1^T & D_2^T & D_f^T & A_u \end{pmatrix},$$

и $F = (F_1, F_2, F_f, 0)^T$, $\check{y}^h$ - это решение предыдущего временного шага.

Здесь

$$A_i = [a_{i,ln}], \quad a_{i,ln} = \int_{\Omega_i} k_i \operatorname{grad} \phi_l^i \cdot \operatorname{grad} \phi_n^i dx, \; A_u = [a_{u,ln}], \quad a_{u,ln} = \int_{\Omega} \sigma(\Phi_l) \cdot \varepsilon(\Phi_n) dx,$$

$$Q_{ij} = [q_{ij,ln}], \quad q_{ij,ln} = \int_{\Omega_i} r_{ij} \phi_l^i \phi_n^j dx, \quad C_i = [c_{i,ln}], \quad c_{i,ln} = \int_{\Omega_i} \frac{1}{M_i} \phi_l^i \phi_n^i dx,$$

$$D_i = [d_{i,ln}], \quad d_{i,ln} = \int_{\Omega} \alpha_i \operatorname{div} \Phi_l \phi_n^i dx, \quad F_i = [f_{i,l}], \quad f_{i,l} = \int_{\Omega_i} f_i \phi_l^i dx,$$

и $p_i = \sum_l p_{i,l}^h \phi_l^i$, $u = \sum_l u_l^h \Phi_l$, где Φ_l - линейные базисные функции для перемещения, $\phi_l^1 = \phi_l^2$ - d - мерные линейные базисные функции для давления, ϕ_l^f - $(d-1)$ - мерные линейные базисные функции для давления.

В этой работе для упрощения построения матрицы мы используем модифицированный подход дискретной модели трещины. Рассмотрим случай, когда $\alpha_f = 0$, $\sigma_{2f} = 0$. Мы предполагаем, что $p_1^h = p_f^h$ и, используя принцип суперпозиции [61, 93], мы исключаем из уравнений p_f^h и получаем следующую связанную систему уравнений для $y^h = (p_1^h, p_2^h, u^h)^T$

$$\tilde{C} \frac{y^h - \check{y}^h}{\tau} + \tilde{A} y^h = \tilde{F},$$

где

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 + C_f & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 + A_f + Q_{12} & -Q_{12} & 0 \\ -Q_{12} & A_2 + Q_{12} & 0 \\ D_1^T & D_2^T & A_u \end{pmatrix},$$

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} F_1 + F_f \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

с матрицами размера $N_h = 4N_v$, N_v - это количество вершин в $\mathscr{T}^h$.

Аппроксимация на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов

Для построения аппросимации на грубой сетке задач пороупругости в трещиноватых и неоднородных средах мы используем обобщенный многомасштабный метод конечных элементов(GMsFEM). GMsFEM содержит следующие шаги:

1. Построение грубой сетки и локальных областей;
2. Решение локальных задач с различными граничными условиями для построения снэпшот пространства в каждой локальной области;
3. Построение многомасштабных базисных функций путем решения локальных спектральных задач на снэпшот пространстве;
4. Формирование матрицы проекции с использованием локальных многомасштабных базисных функций;
5. Ростроение системы грубой сетки с использованием матрицы проекции;
6. Решение нестационарной задачи на грубой сетке и реконструкция решения на мелкой сетке.

В этом вычислительном алгоритме первые четыре шага - это автономные (предварительная обработка) шаги для заданной геометрии трещины и неоднородности. Пятый шаг также является автономным для линейных задач и независимой от времени правой части, но должен быть онлайн шагом для нелинейных задач, где система мелкой сетки изменяется на каждой нелинейной итерации по

времени. После этого на шестом (онлайн) шаге мы можем выполнить быстрое и точное решение модели уменьшенного порядка на грубой сетке.

В этой работе мы строим многомасштабные базисные функции для перемещения и давлений отдельно, но базисные функции для уравнений мультиконтинуума давлений строятся в связанном виде. Мы начнем с определения снэпшот-пространств, после чего определим локальные задачи на собственные значения для давлений и перемещения. Наконец, определяем матрицу проекции и представляем построение системы грубой сетки пороупругости в многомасштабном пространстве. Пусть $\mathscr{T}^H$ является грубым сеточным разбиением области

$$\mathscr{T}^H = \bigcup_j K_j,$$

где K_j - грубая ячейка сетки. Мы будем использовать непрерывную аппроксимацию Галеркина на грубой сетке и определим локальную область ω_l для многомасштабных базисных функций как комбинацию нескольких ячеек грубой сетки, которые совместно используют один и тот же узел грубой сетки ($l = 1, ..., N_v^H$, N_v^H - число грубых вершин сетки).

Многомасштабные базисные функции для давлений в многоконтинуумных средах. Чтобы построить снэпшот-пространство, мы решаем следующую локальную задачу в области ω_l: найти $\psi^{l,j} = (\psi_1^{l,j}, ..., \psi_M^{l,j}) \in W_1^h \times ... \times W_M^h$ такой что

$$b_i(\psi_i^{l,j}, w_i) + \sum_j q_{ij}(\psi_i^{l,j} - \psi_j^{l,j}, w_i) = 0, \quad \forall w_i \in \hat{W}_i^h \tag{4.17}$$

где

$$W_i^h = \{w \in H^1(\omega_l) : w = \delta_i^j \text{ on } \partial\omega_l\}, \quad \hat{W}_i^h = \{w \in H^1(\omega_l) : w = 0 \text{ on } \partial\omega_l\},$$

и δ_i^j - кусочно-постоянная функция (дельта-функция) для $j = 1, .., N_v^{\omega_l}$ ($, N_v^{\omega_l}$ - количество узлов на вычислительной сетке для ω_l), i - индекс континуума ($i = 1, ..., M$). Поэтому решаем локальные задачи $L_p^{\omega_l} = N_v^{\omega_l} \cdot M$.

Мы определяем снэпшот-пространство для давлений в многоконтинуумных средах следующим образом:

$$W_{snap}(\omega_l) = \text{span}\{\psi^{l,j},\, l = 1,...,N_v^H,\, j = 1,...,L_p^{\omega_l}\}. \tag{4.18}$$

Далее мы решаем следующую локальную спектральную задачу на снэпшот-пространстве:

$$\tilde{A}_p \tilde{\phi}^l = \lambda_p \tilde{S}_p \tilde{\phi}^l, \tag{4.19}$$

где $\hat{\phi}^l = (R_{snap}^p)^T \tilde{\phi}^l$ и

$$\tilde{A}_p = R_{snap}^p A_p (R_{snap}^p)^T, \quad \tilde{S}_p = R_{snap}^p S_p (R_{snap}^p)^T, \quad R_{snap}^p = (\psi^{l,1},...,\psi^{l,L_p^{\omega_l}})^T$$

Здесь для матриц в случае тройного континуума имеем:

$$S_p = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_f \end{pmatrix}, \quad A_p = \begin{pmatrix} A_1 + Q_{12} + Q_{1f} & -Q_{12} & -Q_{1f} \\ -Q_{12} & A_2 + Q_{12} + Q_{2f} & -Q_{2f} \\ -Q_{1f} & -Q_{2f} & A_f + Q_{1f} + Q_{2f} \end{pmatrix}$$

где

$$A_i = [a_{i,mn}], \quad a_{i,mn} = \int_{\omega_l^i} k_i \,\text{grad}\, \phi_m^i \cdot \text{grad}\, \phi_n^i dx, \quad S_i = [s_{i,mn}], \quad s_{i,mn} = \int_{\omega_l^i} k_i \phi_m^i \phi_n^i dx.$$

Мы выбираем собственный вектор $\hat{\phi}_j$ ($j = 1,..,M^{l,p}$), соответствующий первым наименьшим собственным значениям $M^{l,p}$, и умножаем на линейное разбиение единичных функций χ^l для получения соответствующих базисных функций:

$$W_{ms} = \text{span}\{\phi^{l,j},\, l = 1,...,N_v^H,\, j = 1,...,M^{l,p}\},$$

где $\phi^{l,j} = \chi^l \hat{\phi}^{l,j}$.

Многомасштабные базисные функции для перемещения. Мы строим многомасштабные базисные функции путем решения следующей задачи в локальной области ω_l: найти $\Psi^{l,j} \in V^h$ такой, что:

$$a(\Psi^{l,j}, v) = 0, \quad \forall v \in \hat{V}^h, \tag{4.20}$$

где

$$V^h = \{v \in H^1(\omega_l) : v = \bar{\delta}_i^j \text{ on } \partial\omega_l\}, \quad \hat{V}^h = \{v \in H^1(\omega_l) : v = 0 \text{ on } \partial\omega_l\}.$$

и $\bar{\delta}_i^j$ - векторы для каждого компонента для d - мерной задачи ($d = 2,3$) т.е. $\bar{\delta}_i^j = (\delta_i^j, 0, 0)$ или $\bar{\delta}_i^j = (0, \delta_i^j, 0)$ или $\bar{\delta}_i^j = (0, 0, \delta_i^j)$ для $d = 3$. Мы решаем локальные задачи $L_u^{\omega_l} = d \cdot N_v^{\omega_l}$.

Мы определяем снэпшот-пространство для перемещения в многоконтинуумных средах следующим образом

$$V_{snap}(\omega_l) = \text{span}\{\Psi^{l,j}, l = 1, ..., N_v^H, j = 1, ..., L_u^{\omega_l}\}. \tag{4.21}$$

Для построения многомасштабного базиса мы решаем следующую локальную спектральную задачу на снэпшот-пространстве

$$\tilde{A}_u \tilde{\Phi} = \lambda_u \tilde{S}_u \tilde{\Phi}, \tag{4.22}$$

где $\hat{\Phi}^l = (R_{snap}^u)^T \tilde{\Phi}^l$,

$$\tilde{A}_u = R_{snap}^u A_u (R_{snap}^u)^T, \quad \tilde{S}_u = R_{snap}^u S_u (R_{snap}^u)^T, \quad R_{snap}^u = (\Psi^{l,1}, ..., \Psi^{l,L_u^{\omega_l}})^T$$

и

$$A_u = [a_{u,mn}], \quad a_{u,mn} = \int_{\omega_l} \sigma(\Phi_m) \cdot \varepsilon(\Phi_n) dx, \quad S_u = [s_{i,mn}], \quad s_{i,mn} = \int_{\omega_l} (\lambda + 2\mu) \Phi_m^i \Phi_n^i dx.$$

Мы выбираем собственный вектор $\hat{\Phi}_j$ ($j = 1, .., M^{l,u}$), соответствующий первым наименьшим собственным значениям $M^{l,u}$, и умножаем на линейное разбиение функций единицы для получения соответствующих базисных функций

$$V_{ms} = \text{span}\{\Phi^{l,j}, l = 1, ..., N_v^H, j = 1, ..., M^{l,u}\},$$

где $\Phi^{l,j} = \chi^l \hat{\Phi}^{l,j}$.

Система грубой сетки. Используя построенные многомасштабные базисные функции, определяем матрицу проекции

$$R = \begin{pmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_u \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

где

$$R_u = (\Phi^{1,1}, ..., \Phi^{1,M^{1,u}}, ..., \Phi^{N_v^H,1}, ..., \Phi^{N_v^H,M_v^{N_v^H,u}})^T,$$

$$R_p = (\phi^{1,1}, ..., \phi^{1,M^{1,p}}, ..., \phi^{N_v^H,1}, ..., \phi^{N_v^H,M_v^{N_v^H,p}})^T.$$

Наконец, получаем следующую модель пониженного порядка

$$C^H \frac{y^H - \check{y}^H}{\tau} + A^H y^H = F^H,$$

где $C^H = RCR^T$, $A^H = RAR^T$ и $F^H = RF$. с матрицами размера $N_f = 4N_v$, N_v количеством вершин в $\mathscr{T}^h$. Размер системы составляет $N_H = \sum_{l=1}^{N_v^H}(M^{l,p} + M^{l,u})$ или $N_H = (M^p + M^u) \cdot N_v^H$ для $M^p = M^{l,p}$ и $M^u = M^{l,u}$ $(\forall l = 1, ..., N_v^H)$, где N_v^H -количество вершин грубой сетки $\mathscr{T}^H$.

После получения грубомасштабного решения мы реконструируем мелкомасштабное решение.

$$y^{ms} = R^T y^H.$$

Отметим, что в общем случае многомасштабные базисные функции для перемещения и давлений могут быть рассчитаны по решению связанной задачи пороупругости аналогично мультиконтинуумным давлениям.

Численные результаты

В этом разделе рассматривается задача пороупругости в трещиноватых и неоднородных средах. Рассмотрим двумерные и трехмерные задачи в $\Omega = [0,1]^d$ $(d = 2,3)$:

- *Задача двумерной модели.* Мелкая сетка содержит 14376 вершин и 28350 ячеек. Грубая сетка содержит 121 вершину и 100 ячеек (Рисунок 4.7);
- *Задача трехмерной модели.* Мелкая сетка содержит 21609 вершин и 118500 ячеек. Грубая сетка содержит 216 вершин и 125 ячеек. (Рисунок 4.8).

Для многомерных задач пороупругости мы рассматриваем два набора параметров [49, 50]:

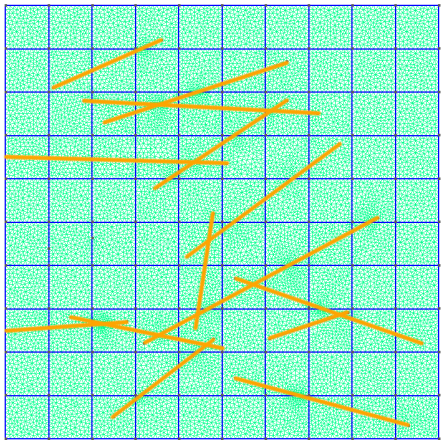

Рисунок 4.7: Вычислительная область и сетка для двумерной задачи. Грубая сетка (синий цвет), мелкая сетка (зеленый) и трещины (оранжевый).

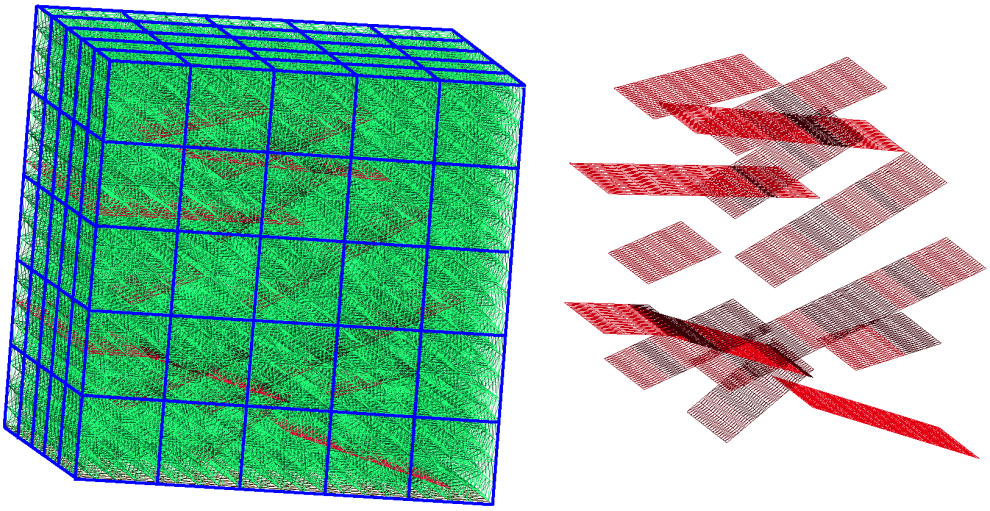

Рисунок 4.8: Вычислительная область и сетка для трехмерной задачи. Грубая сетка (синий цвет), мелкая сетка (зеленый) и трещины (красный).

- *Случай 1:* Параметры модельной задачи: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_f = 0$, $k_f = 10^{-4}[\text{м}^2]$, $M_1 = M_2 = 10^8[\text{Па}], M_f = 0[\text{Па}], \nu = 0.3$. Вычисление выполняется с помощью $T_{\text{макс}} = 100[\text{сек}]$ с шагом по времени $\tau = 10[\text{сек}]$ и $r_{12} = 1000 \cdot k_2[\text{м}^2]$ для двумерной задачи. Для трехмерной задачи устанавливаем $T_{\text{макс}} = 6000[\text{сек}]$ с шагом по времени $\tau = 300[\text{сек}]$ и $r_{12} = 25 \cdot k_2[\text{м}^2]$. Начальное условие $p^0 = 0.1 * 10^7[\text{Па}]$ и $g = 0.2 * 10^7[\text{Па}]$ для граничного условия давления.

- *Случай 2:* Параметры синтетической задачи с применением в трещиноватых сланцевых средах: $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.1$, $\alpha_f = 0$, $k_f = 10^{-11}[\text{м}^2]$, $M_1 = M_2 = 10^6[\text{Па}], M_f = 10^7[\text{Па}], \nu = 0.3$. Вычисление выполняется $T_{\text{макс}} = 5$ лет с 50 временными шагами и $r_{12} = 1000 \cdot k_2[\text{м}^2]$ для двумерной задачи. Для трехмерной задачи устанавливаем $T_{\text{макс}} = 10$ лет с 10 временными шагами и $r_{12} = 25 \cdot k_2[\text{м}^2]$. Начальное условие $p^0 = 0.1 * 10^7[\text{Па}]$ и $g = 0.2 * 10^7[\text{Па}]$ для граничного условия давления.

Для сравнения результатов используем относительные ошибки L_2 между многомасштабным решением и мелкомасштабным решением.

$$e^{p_i}_{L^2} = \left(\frac{\int_\Omega (p_i - p_i^{ms})^2 dx}{\int_\Omega p_i^2 dx} \right)^{1/2}, \quad e^{u}_{L^2} = \left(\frac{\int_\Omega (u - u^{ms})^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} \right)^{1/2},$$

где i - индекс континуума ($i = 1, 2$), $y^{ms} = (p_1^{ms}, p_2^{ms}, u^{ms})$ - многомасштабное решение, использующее GMsFEM и $y = (p_1, p_2, u)$ - решение мелкой сетки.

Мы используем DOF_h (Степень свободы), чтобы обозначить размер системы мелкой сетки, и DOF_H, чтобы обозначить размер задачи системы грубого масштаба, используя GMsFEM. В GMsFEM мы выбираем одинаковое количество многомасштабных базисных функций в каждой локальной области $M = M_p = M_u$, где M_p и M_u - количество базисных функций. Для построения неструктурированной сетки, которая соответствует дискретным трещинам, мы используем программное обеспечение GMSH для построения вычислительных областей и сеток [103]. Реализация основана на библиотеке с открытым исходным кодом FEniCS [63].

Двумерная задача

Мы моделируем задачу двумерной модели в неоднородных трещиноватых пористых средах для *случая 1* и *случая 2*. Неоднородные коэффициенты для модуля упругости и неоднородных проницаемостей для первого и второго континуума представлены на рисунках 4.9 для *случая 1* и в рисунке 4.10 для *случая*

2.

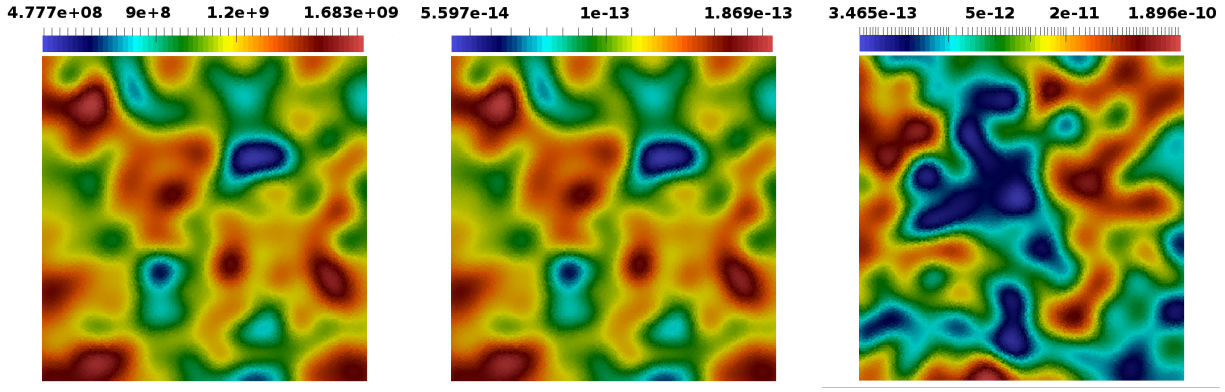

Рисунок 4.9: Параметр упругости E (слева) и неоднородные проницаемости k_1(центр) и k_2(справа) для двумерной задачи. *Случай 1*

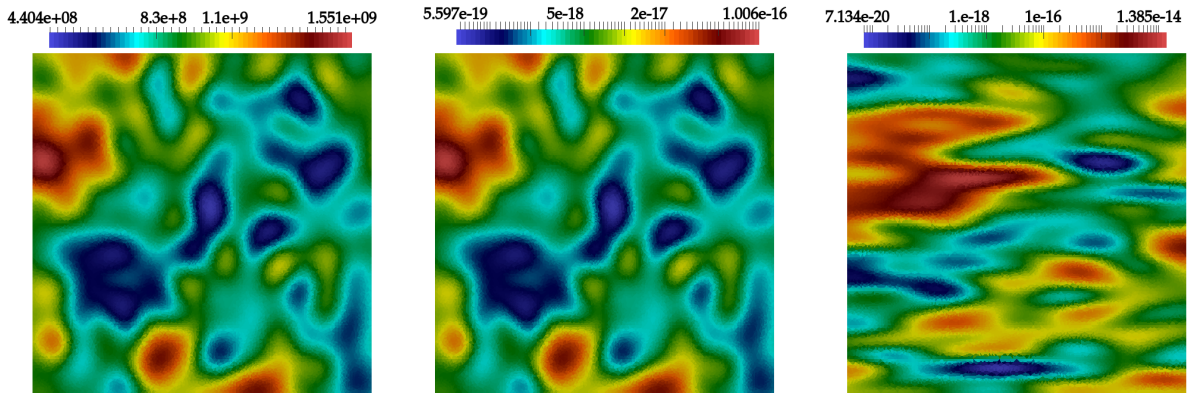

Рисунок 4.10: Параметр упругости E (слева) и неоднородные проницаемости k_1(центр) и k_2(справа) для двумерной задачи. *Случай 2*

На рисунках 4.11 и 4.12 представлено распределение давления для первого континуума и второго континуума и перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени. В первом ряду мы изображаем мелкомасштабное решение, а во втором ряду представлено решение для многомасштабного решения с 16 многомасштабными базисными функциями для GMsFEM. Сравнивая мелкомасштабное решение с многомасштабным решением с 16 базисными функциями на рис. 4.11 для перемещения по направлениям X и Y, мы можем наблюдать хорошую точность. В общем, решения выглядят хорошо без видимых осцилляций.

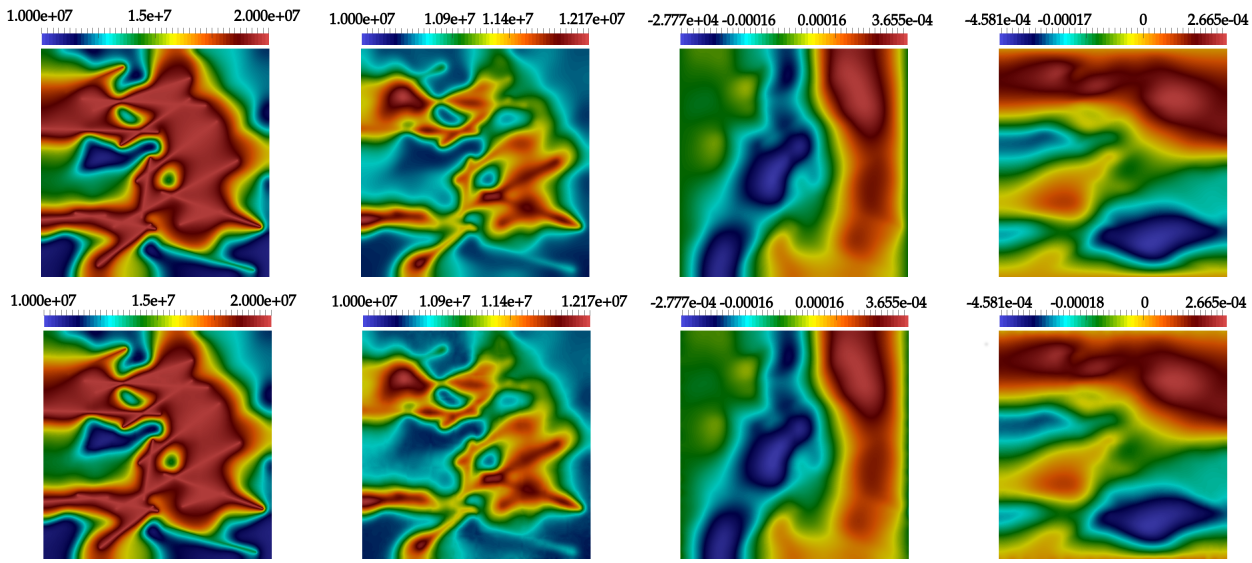

Рисунок 4.11: Численные результаты для двумерной задачи для *случая 1*. Давление для первого континуума и второго континуума и перемещения по направлению X и Y в конечный момент времени (слева направо). Первый ряд: мелкомасштабное решение. Второй ряд: многомасштабное решение с использованием 16 многомасштабных базисных функций.

В таблице 4.3 представлены погрешности для грубой сетки 5×5 и 10×10 с $M = M_p = M_u$ для *случая 1* и *случая 2*. Для *случая 1* результаты показывают, что для достижения хороших результатов достаточно 8 многомасштабных базисных функций с 4.406% погрешности L^2 для перемещения, 1.172% и 0.384% погрешности L_2 для первого континуума и второго континуума давлений. Когда мы увеличиваем количество многомасштабных базисных функций относительные погрешности L^2 уменьшаются в два раза, например, если берем две многомасштабные базисные функции вместо одной. У нас есть аналогичные улучшения для дальнейшего увеличения многомасштабных базисных функций. Время вычисления на мелкой сетке составляет 72 секунды для $DOF_h = 899736$. Для различного количества многомасштабных базисных функций на грубой сетке 10×10 у нас есть время расчета 0,004 сек для одной многомасштабной базисной функции в каждой локальной области ($M = 1$ и $DOF_H = 484$), 0,012 сек для $M = 2$ ($DOF_H = 968$), 0,056 сек для $M = 4$ ($DOF_H = 1936$), 0,3 сек для

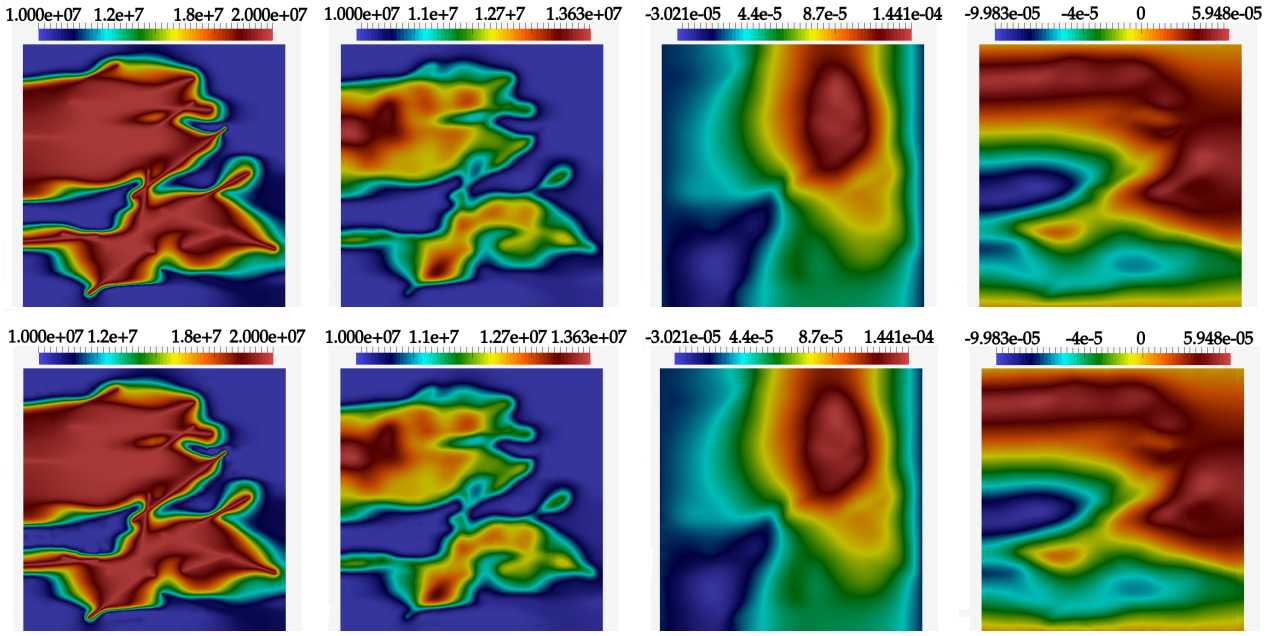

Рисунок 4.12: Численные результаты для двумерной задачи для *случая 2*. Давление для первого континуума и второго континуума и перемещения по направлению X и Y в конечный момент времени (слева направо). Первый ряд: мелкомасштабное решение. Второй ряд: многомасштабное решение с использованием 16 многомасштабных базисных функций.

$M = 8$ ($DOF_H = 3872$), 1,7 сек для $M = 12$ ($DOF_H = 5808$) и 6,8 сек для $M = 16$ ($DOF_H = 7744$).

Таблица 4.4 показывает сравнение различий между многомасштабными решениями и решением на мелкой сетке, где представлены относительные L_2 погрешности для различного числа многомасштабных базисных функций на грубой сетке 10×10. Из таблицы 4.4 видим, что количество базисных функций для давления M_p сильно влияет на погрешности перемещения. Например, в *случае 1* с $M_u = 2$ имеем погрешность для перемещения L^2 в 40%, когда у нас есть 2 многомасштабные базисные функции для давлений, и уменьшаем ошибку до 9% для $M_p = 8$. В заключении, согласно результатам сравнения, мы наблюдаем хорошую сходимость метода при увеличении числа многомасштабных базисных функций.

Случай 1				
M	DOF_H	p_1 $e^{p_1}_{L^2}$ (%)	p_2 $e^{p_2}_{L^2}$ (%)	u $e^{u}_{L^2}$ (%)
Coarse mesh 5×5				
1	144	28.501	9.514	93.582
2	288	24.552	7.933	90.760
4	576	10.228	3.258	53.017
8	1152	5.695	2.080	27.283
12	1728	2.526	0.887	12.646
16	2304	1.755	0.582	9.076
Coarse mesh 10×10				
1	484	24.385	7.825	111.247
2	968	11.947	3.906	40.595
4	1936	5.046	1.766	21.797
8	3872	1.172	0.384	4.406
12	5808	0.270	0.149	3.166
16	7744	0.154	0.083	2.410

Случай 2				
M	DOF_H	p_1 $e^{p_1}_{L^2}$ (%)	p_2 $e^{p_2}_{L^2}$ (%)	u $e^{u}_{L^2}$ (%)
Coarse mesh 5×5				
1	144	57.432	0.765	109.038
2	288	36.689	0.510	88.008
4	576	14.971	0.202	49.977
8	1152	6.968	0.108	17.310
12	1728	3.889	0.073	10.586
16	2304	3.482	0.060	9.727
Coarse mesh 10×10				
1	484	46.932	0.656	107.843
2	968	27.765	0.354	81.877
4	1936	7.084	0.105	12.587
8	3872	2.884	0.041	3.709
12	5808	1.472	0.023	1.842
16	7744	0.941	0.016	1.159

Таблица 4.3: Относительные ошибки (%) для перемещения и давлений с различным числом многомасштабных базисных функций для двумерной задачи. Слева: *Случай 1*. Справа: *Случай 2*. Грубые сетки 5×5 и 10×10. $DOF_h = 57504$

Трехмерная задача

Мы моделируем задачу трехмерной модели в неоднородных трещиноватых пористых средах для *случая 1* и *случая 2*. Неоднородные коэффициенты для модуля упругости и неоднородных проницаемостей для первого и второго континуума представлены на рисунке 4.13 для *случая 1* и на рисунке 4.14 для *случая 2*.

На рисунках 4.15-4.16 и 4.17-4.18 представлено распределение давления для первого и второго континуума, перемещения по направлениям X, Y и Z в послед-

ний момент времени. В первой строке мы изображаем мелкомасштабное решение, а многомасштабное решение с 16 многомасштабными базисными функциями для GMsFEM представлено во второй строке. Мы наблюдаем хорошие результаты многомасштабного метода, сравнивая с решением мелкой сетки. Время расчета на мелкой сетке составляет $824,30$ с для $DOF_h = 272025$. Для разного количества многомасштабных базисных функций на грубой сетке $5 \times 5 \times 5$ у нас есть время расчета $0,09$ с для одной многомасштабной базисной функции в каждой локальной области ($M = 1$ и $DOF_H = 1080$), $0,61$ с для $M = 2(DOF_H = 2106)$, $4,78$с для $M = 4(DOF_H = 4212)$, $16,77$ с для $M = 8(DOF_H = 8424)$, $53,07$ с для $M = 12(DOF_H = 12960)$ и $134,97$ с для $M = 16(DOF_H = 17280)$.

В таблице 4.5 показано сравнение разницы между многомасштабными и мелкими сетками для случаев 1 и 2. Мы представляем относительные L_2 погрешности для перемещений и давлений. Для задачи трехмерной модели в случае 1 с использованием 8 многомасштабных базисных функций у нас есть $11,773\%$ L_2 погрешности для перемещения, $3,709\%$ и $4,052\%$ L_2 погрешностей для давлений первого континуума и второго континуума. Когда мы берем 16 многомасштабных базисных функций, мы получаем в два раза лучшие результаты с $5,881\%$ L_2 погрешности для перемещения, $1,887\%$ и $2,063\%$ L_2 погрешностей для давлений первого континуума и второго континуума. Для трехмерной задачи мы также наблюдаем хорошую сходимость для задачи пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах для обоих случаев.

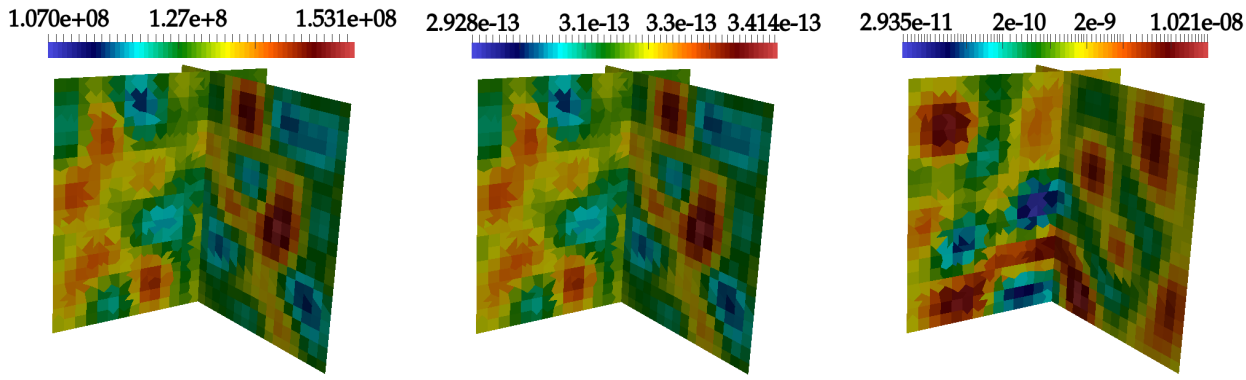

Рисунок 4.13: Параметр упругости E (слева) и неоднородные проницаемости k_1(центр) и k_2(справа) для трехмерной задачи. *Случай 1*

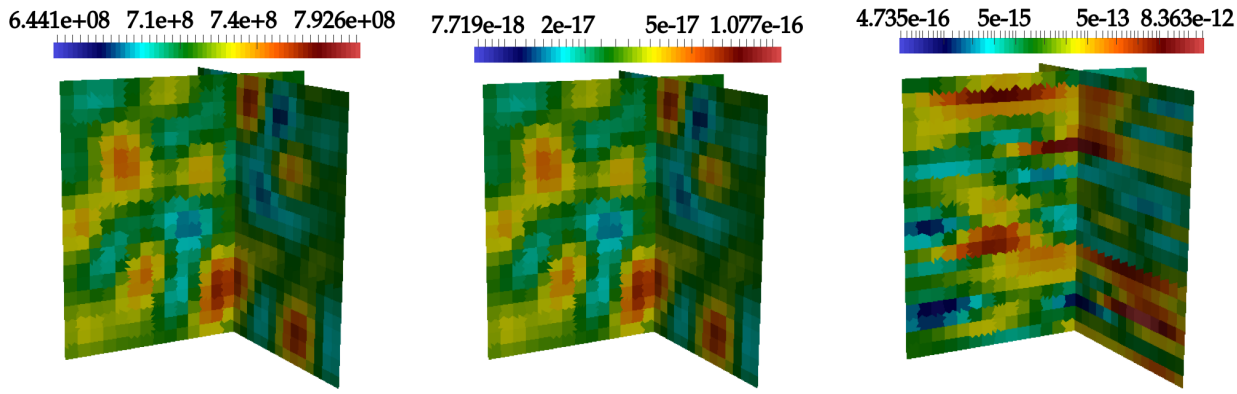

Рисунок 4.14: Параметр упругости E (слева) и неоднородные проницаемости k_1(центр) и k_2(справа) для трехмерной задачи. *Случай 2*

Случай 1				
M	DOF_H	p_1 $e^{p_1}_{L^2}$ (%)	p_2 $e^{p_2}_{L^2}$ (%)	u $e^{u}_{L^2}$ (%)
$M_p = 1$				
1	484	24.385	7.825	111.247
$M_p = 2$				
1	726	11.905	3.741	72.299
2	968	11.947	3.906	40.595
$M_p = 4$				
1	1210	5.029	1.723	51.183
2	1452	5.046	1.772	23.402
4	1936	5.046	1.766	21.797
$M_p = 8$				
1	2178	1.169	0.585	38.968
2	2420	1.170	0.426	9.469
4	2904	1.170	0.406	8.285
8	3872	1.172	0.384	4.406
$M_p = 12$				
1	3146	0.302	0.504	38.068
2	3388	0.272	0.237	8.940
4	3872	0.271	0.194	7.705
8	4840	0.271	0.154	3.814
12	5808	0.270	0.149	3.166
$M_p = 16$				
1	4114	0.212	0.485	37.974
2	4356	0.156	0.196	9.044
4	4840	0.155	0.148	7.775
8	5808	0.155	0.095	3.836
12	6776	0.155	0.087	3.211
16	7744	0.154	0.083	2.410

Случай 2				
M_u	DOF_H	p_1 $e^{p_1}_{L^2}$ (%)	p_2 $e^{p_2}_{L^2}$ (%)	u $e^{u}_{L^2}$ (%)
$M_p = 1$				
1	484	46.932	0.656	107.843
$M_p = 2$				
1	726	27.765	0.354	81.270
2	968	27.765	0.354	67.264
$M_p = 4$				
1	1210	7.084	0.105	14.972
2	1452	7.084	0.105	13.395
4	1936	7.084	0.105	12.587
$M_p = 8$				
1	2178	2.884	0.041	8.312
2	2420	2.884	0.041	5.628
4	2904	2.884	0.041	4.684
8	3872	2.884	0.041	3.709
$M_p = 12$				
1	3146	1.472	0.023	8.246
2	3388	1.472	0.023	4.014
4	3872	1.472	0.023	3.032
8	4840	1.472	0.023	2.013
12	5808	1.472	0.023	1.842
$M_p = 16$				
1	4114	0.941	0.016	8.244
2	4356	0.941	0.016	3.731
4	4840	0.941	0.016	2.756
8	5808	0.941	0.016	1.574
12	6776	0.941	0.016	1.371
16	7744	0.941	0.016	1.159

Таблица 4.4: Относительные ошибки (%) для перемещения и давлений с различным числом многомасштабных базисных функций для двумерной задачи. Слева: *Случай 1*. Справа: *Случай 2*. Грубая сетка 10×10. $DOF_h = 57504$

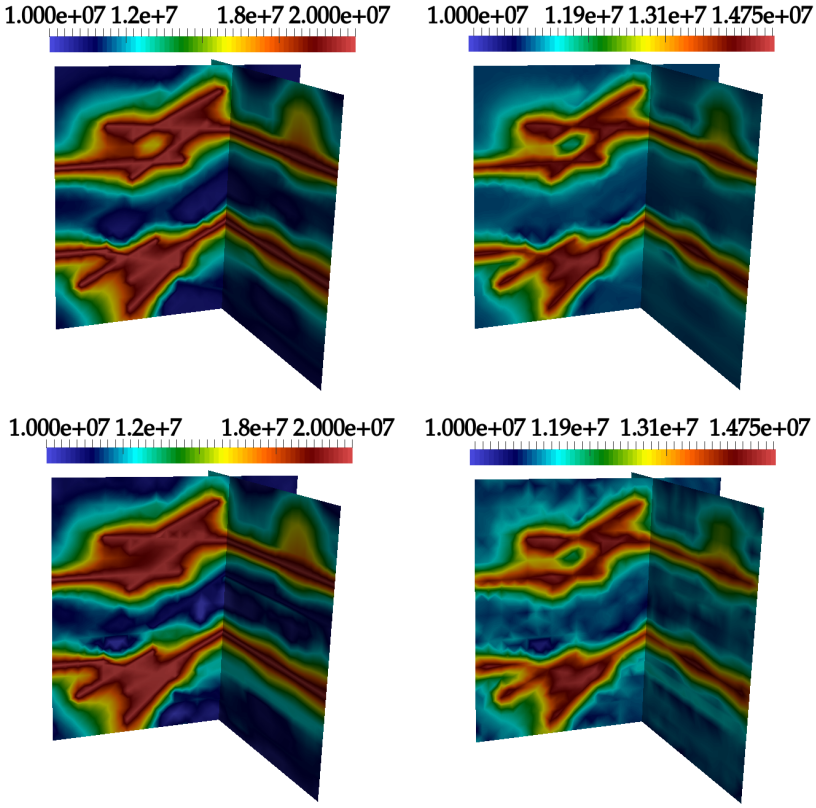

Рисунок 4.15: Численные результаты для трехмерной задачи для *случая 1*. Давление для первого континуума и второго континуума(слева направо). Первый ряд: мелкомасштабное решение. Второй ряд: многомасштабное решение с использованием 16 многомасштабных базисных функций.

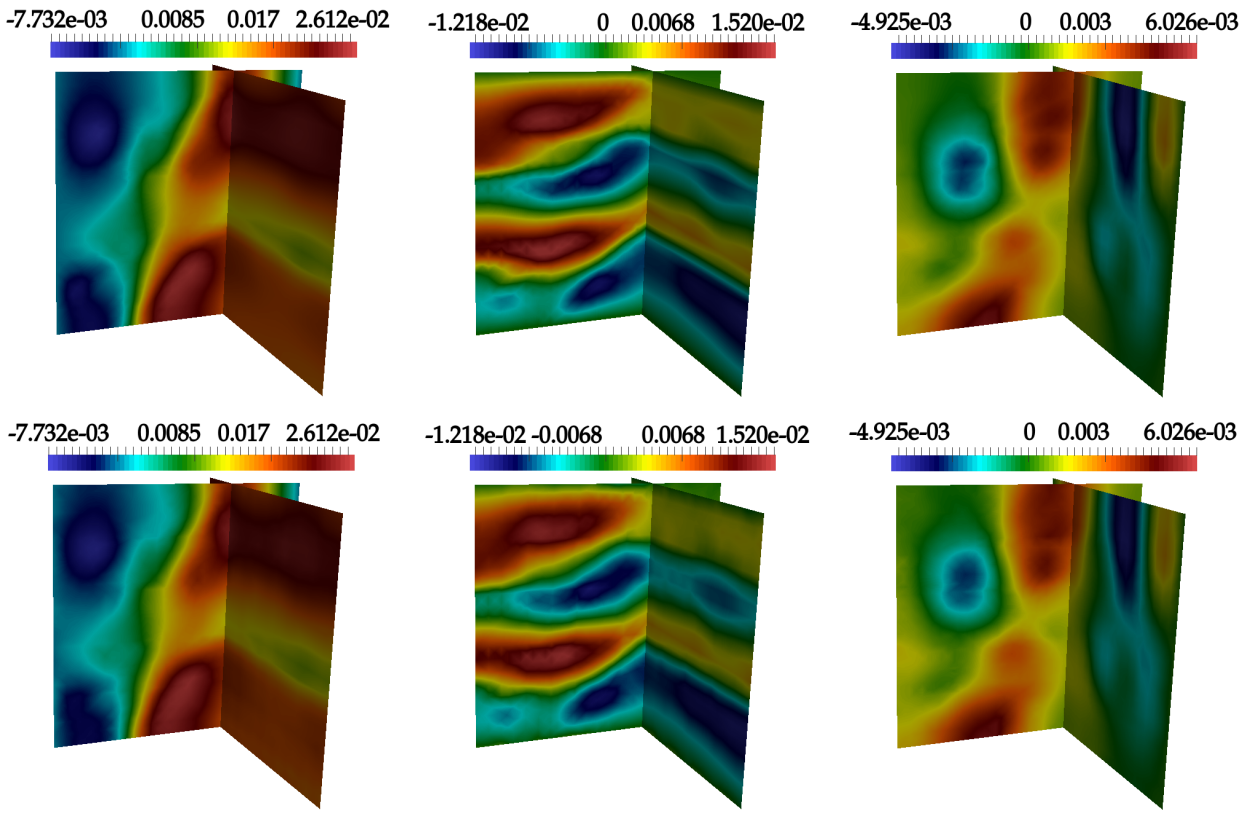

Рисунок 4.16: Численные результаты для трехмерной задачи для *случая 1*. Перемещение по направлению X, Y и Z в последний момент времени (слева направо). Первый ряд: мелкомасштабное решение. Второй ряд: многомасштабное решение с использованием 16 многомасштабных базисных функций.

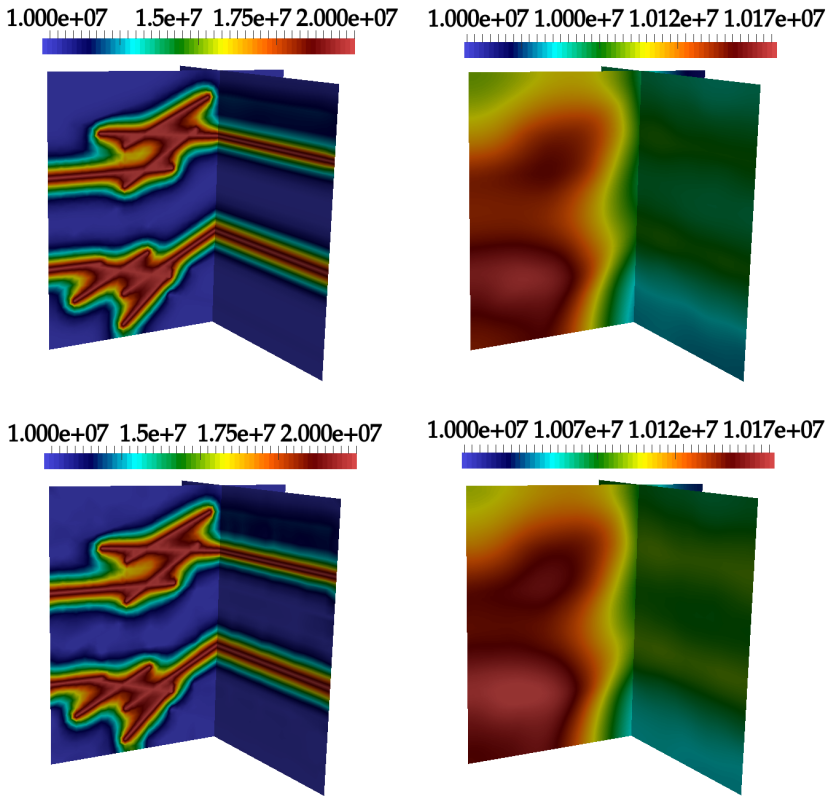

Рисунок 4.17: Численные результаты для трехмерной задачи для *случая 2*. Давление для первого континуума и второго континуума(слева направо). Первый ряд: мелкомасштабное решение. Второй ряд: многомасштабное решение с использованием 16 многомасштабных базисных функций.

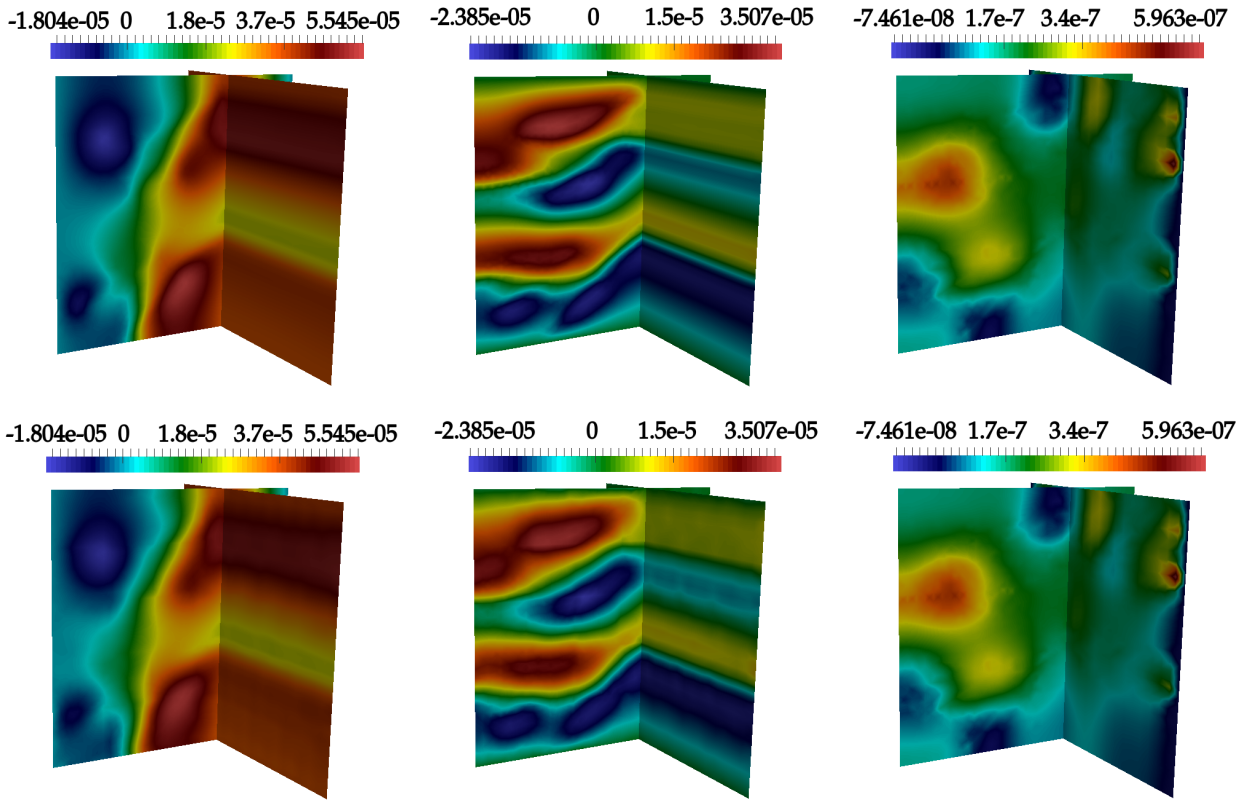

Рисунок 4.18: Численные результаты для трехмерной задачи для *случая 2*. Перемещение по направлению X, Y и Z в последний момент времени (слева направо). Первый ряд: мелкомасштабное решение. Второй ряд: многомасштабное решение с использованием 16 многомасштабных базисных функций.

Случай 1				
M_u	DOF_H^u	p_1 $e_{L^2}^{p_1}$ (%)	p_2 $e_{L^2}^{p_2}$ (%)	u $e_{L^2}^{u}$ (%)
$M_p = 1$				
1	1080	25.713	29.035	92.385
$M_p = 2$				
1	1512	20.461	22.644	130.73
2	2106	20.496	22.648	82.179
$M_p = 4$				
1	2376	6.453	6.991	86.899
2	3024	6.557	7.114	59.549
4	4320	6.626	7.190	22.580
$M_p = 8$				
1	4104	3.563	3.869	78.466
2	4752	3.647	3.974	44.919
4	6048	3.711	4.050	12.562
8	8640	3.709	4.052	11.773
$M_p = 12$				
1	5832	2.444	2.710	77.902
2	6480	2.481	2.755	43.286
4	7776	2.530	2.813	10.389
8	10368	2.529	2.813	8.518
12	12960	2.530	2.814	8.518
$M_p = 16$				
1	7560	1.898	2.080	76.300
2	8208	1.897	2.077	41.473
4	9504	1.889	2.064	9.687
8	12096	1.888	2.063	6.908
12	14688	1.888	2.064	6.170
16	17280	1.887	2.063	5.881

Случай 2				
M_u	DOF_H^u	p_1 $e_{L^2}^{p_1}$ (%)	p_2 $e_{L^2}^{p_2}$ (%)	u $e_{L^2}^{u}$ (%)
$M_p = 1$				
1	1080	59.899	5.43	94.965
$M_p = 2$				
1	1512	48.005	3.814	129.951
2	2106	48.005	3.814	125.738
$M_p = 4$				
1	2376	10.166	0.393	33.479
2	3024	10.166	0.393	28.824
4	4320	10.166	0.393	28.106
$M_p = 8$				
1	4104	4.252	0.102	27.899
2	4752	4.252	0.102	17.865
4	6048	4.252	0.102	14.073
8	8640	4.252	0.102	12.808
$M_p = 12$				
1	5832	1.976	0.041	27.204
2	6480	1.976	0.041	15.413
4	7776	1.976	0.041	8.532
8	10368	1.976	0.041	6.560
12	12960	1.976	0.041	5.460
$M_p = 16$				
1	7560	1.496	0.0292	27.244
2	8208	1.496	0.0292	15.500
4	9504	1.496	0.0292	8.294
8	12096	1.496	0.0292	6.153
12	14688	1.496	0.0292	4.887
16	17280	1.496	0.0292	4.340

Таблица 4.5: Относительные ошибки для перемещения и давлений с различным числом многомасштабных базисных функций для трехмерной задачи. Слева: Случай 1. Справа: Случай 2. Грубая сетка $5 \times 5 \times 5$. $DOF_h = 108045$

4.3 Встроенная модель трещины в численном моделировании потока жидкости и геомеханики с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов

Эффективное численное моделирование задач в трещиноватых пористых средах важно для многих реальных приложений, например, в нефтяных и газовых коллекторах, геотермальных месторождениях и подземного захоронения радиоактивных отходов [51, 112]. Математические модели задач течения жидкости в трещиновато-пористых средах строятся на основе смешанных размерных постановок [117,118]. Аппроксимация мелкой сетки зависит от конструкции сетки, где дискретная модель трещины используется для согласования сетки трещин и пористой матрицы [50, 122, 123], а в случае раздельного независимого построения сеток трещин и пористой матрицы используется встроенная модель трещины [120, 121, 124]. Смешанная постановка задачи потока аналогична подходам двойного континуума [91].

Для точного численного решения задачи пороупругости с использованием встроенной модели трещин необходимо использовать мелкую сетку, которая приводит к большой дискретной системе уравнений. Для уменьшения размера дискретной системы используются многомасштабные методы [42, 58, 59, 127]. В этой статье мы развиваем обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для решения проблем пороупругости в трещиноватых средах со встроенной моделью трещин. Мы строим многомасштабные базисные функции для давления и перемещения посредством решения локальных спектральных задач. Проведено численное исследование представленного метода для двумерных модельных задач в трещиноватых и неоднородных пороупругих средах. По этой работе опубликована следующая статья [80].

Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Пусть Ω - расчетная область для пористой матрицы, а γ - область трещины пониженного порядка. Мы рассматриваем математическую модель течения жидкости и геомеханики в трещиноватой пороупругой среде, которая описывается следующей системой уравнений для перемещения, давления в пористой матрице и трещин

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}\sigma(u)+\alpha\operatorname{grad}p=0, \quad x\in\Omega,\\
c_m\frac{\partial p_m}{\partial t}-\operatorname{div}(k_m\operatorname{grad}p_m)+r_{mf}(p_m-p_f)=f_m, \quad x\in\Omega,\\
c_f\frac{\partial p_f}{\partial t}-\operatorname{div}(k_f\operatorname{grad}p_f)-r_{fm}(p_m-p_f)=f_f, \quad x\in\gamma,
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

с линейной зависимостью между тензорами напряжения σ и деформации ε

$$
\sigma(u)=\lambda\varepsilon_v\mathscr{I}+2\mu\varepsilon(u), \quad \varepsilon(u)=0.5(\nabla u+(\nabla u)^T),
$$

где λ, μ - параметры Ламе, u - перемещение, p - давление, α - коэффициент Био, f - источник, $k_\alpha=\kappa_\alpha/\nu$, ν - вязкость, κ_α - проницаемость для $\alpha=m,f$, $r_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}r$, r - коэффициент переноса, $\eta_{\alpha\beta}$ - геометрические факторы, c_α - сжимаемость для $\alpha=m,f$. Обратите внимание, что мы пренебрегаем гравитационными силами, предполагая, что влияние механики на поток относительно невелико, и учитываем влияние давления пористой матрицы на перемещение.

В данной работе для иллюстрации представленного метода используется двумерная задача и рассматривается неявная схема аппроксимации времени с заданным шагом по времени τ. Пусть $\mathscr{T}_h=\cup_i\varsigma_i$ будет мелкомасштабным конечноэлементным разбиением области Ω, а $\mathscr{E}_\gamma=\cup_l\iota_l$ - сеткой трещин. N_f^m - количество ячеек в $\mathscr{T}_h$, N_f^f - количество ячеек для сетки трещин $\mathscr{E}_\gamma$.

Для аппроксимации задачи потока мы используем аппроксимацию конечного объема на структурированных мелких сетках и получаем следующую дискрет-

ную систему:

$$c_m \frac{p_{m,i} - \check{p}_{m,i}}{\tau} |\varsigma_i| + \sum_j T_{ij}(p_{m,i} - p_{m,j}) + \sum_l q_{il}(p_{m,i} - p_{f,l}) = f_m |\varsigma_i|, \quad \forall i = 1, N_f^m$$
$$c_f \frac{p_{f,l} - \check{p}_{f,l}}{\tau} |\iota_l| + \sum_n W_{ln}(p_{f,l} - p_{f,n}) - \sum_i q_{il}(p_{m,i} - p_{f,l}) = f_f |\iota_l|, \quad \forall l = 1, N_f^f \tag{4.25}$$

где $T_{ij} = k_m |E_{ij}| / \Delta_{ij}$ ($|E_{ij}|$ - длина интерфейса между ячейками ς_i и ς_j, Δ_{ij} - расстояние между средней точкой ячеек ς_i и ς_j), $W_{ln} = k_f / \Delta_{ln}$ (Δ_{ln} - расстояние между точками l и n), $|\varsigma_i|$ и $|\iota_l|$ - объем ячеек ς_i и ι_l, $q_{il} = r$ если $\varsigma_i \cap \iota_l \neq 0$ в противном случае равен нулю. Здесь $(\check{p}_m, \check{p}_f)$ - решение из предыдущего временного шага.

Для перемещения используется метод Галеркина с линейными базисными функциями.

$$\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\, dx - \int_\Omega \alpha p_m \mathscr{I} \cdot \varepsilon(v)\, dx = 0, \tag{4.26}$$

Таким образом, мы имеем следующий вычислительный алгоритм решения на мелкой сетке в матричной форме

- Решение системы давления для $p = (p_m, p_f)^T$:

$$\left(\frac{1}{\tau} M + A \right) p = F, \tag{4.27}$$

  где

$$M = \begin{pmatrix} M_m & 0 \\ 0 & M_f \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_m + \frac{1}{\tau} M_m \check{p}_m \\ F_f + \frac{1}{\tau} M_f \check{p}_f \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_m + Q & -Q \\ -Q & A_f + Q \end{pmatrix},$$

$$M_m = \{m_{ij}^m\}, \quad m_{ij}^m = \begin{cases} c_m |\varsigma_i| & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad M_f = \{m_{ln}^f\}, \quad m_{ln}^f = \begin{cases} c_f |\iota_l| & l = n, \\ 0 & l \neq n \end{cases},$$

  и A_m, A_f - матрицы проницаемости, Q - матрица переходного члена между пористой матрицей и трещинами, $F_m = \{f_i^m\}$, $f_i^m = f_m |\varsigma_i|$, $F_f = \{f_l^f\}$, $f_i^m = f_f |\iota_l|$.

- Решение системы перемещения для $u = (u_x, u_y)$

$$Du = B, \tag{4.28}$$

где D - матрица упругости и жесткости

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix},$$

и $D_{xx} = [d_{ij}^{xx}] = \int_\Omega \sigma_x(\psi_i) : \varepsilon_x(\psi_j)\, dx$, $D_{yy} = [d_{ij}^{yy}] = \int_\Omega \sigma_y(\psi_i) : \varepsilon_y(\psi_j)\, dx$, $D_{xy} = [d_{ij}^{xy}] = \int_\Omega \sigma_x(\psi_i) : \varepsilon_y(\psi_j)\, dx$, $B_x = [b_j^x] = \int_\Omega \alpha p_m \cdot \varepsilon_x(\psi_j)\, dx$, $B_y = [b_j^y] = \int_\Omega \alpha p_m \cdot \varepsilon_y(\psi_j)\, dx$ с линейными базисными функциями ψ_i.

Аппроксимация на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов

Для аппроксимации на грубой сетке задач пороупругости в трещиноватопористых средах мы используем обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (GMsFEM). GMsFEM содержит следующие шаги: (1) построение грубой и мелкой сеток; (2) создание проекционной матрицы с использованием локальных многомасштабных базисных функций; (3) построение системы грубой сетки с использованием проекционной матрицы; (4) решение грубомасштабной задачи и реконструкция решения на мелкой сетке.

Для построения многомасштабных базисных функций для давления и перемещения мы решаем спектральную задачу в ω_i

- давление, $\phi_j^{\omega_i} = (\phi_{m,j}^{\omega_i}, \phi_{f,j}^{\omega_i})$

$$A^{\omega_i} \phi_j^{\omega_i} = \lambda_{p,j} S^{\omega_i} \phi_j^{\omega_i},$$

- перемещение, $\Phi_j^{\omega_i} = (\Phi_{x,j}^{\omega_i}, \Phi_{y,x}^{\omega_i})$

$$D^{\omega^i} \Phi_j^{\omega_i} = \lambda_{u,j} G^{\omega_i} \Phi_j^{\omega_i},$$

где D^{ω_i} и A^{ω_i} - ограничения глобальных матриц D и A на локальную область ω_i.

Здесь

$$S^{\omega_i} = \begin{pmatrix} S_m^{\omega_i} & 0 \\ 0 & S_f^{\omega_i} \end{pmatrix}, \quad G^{\omega_i} = \begin{pmatrix} G_x^{\omega_i} & 0 \\ 0 & G_y^{\omega_i} \end{pmatrix},$$

$$S_m^{\omega_i} = \{s_{ij}^{\omega_i,m}\}, \quad s_{ij}^{\omega_i,m} = \begin{cases} k_m|\varsigma_i| & i=j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad S_f^{\omega_i} = \{s_{ln}^{\omega_i,f}\}, \quad s_{ln}^{\omega_i,f} = \begin{cases} k_f|\imath_l| & l=n, \\ 0 & l \neq n \end{cases},$$

и $G_x^{\omega_i} = G_y^{\omega_i} = [g_{ij}] = \int_{\omega_i}(\lambda + 2\mu)\psi_j dx$.

Мы формируем многомасштабные пространства для давления и перемещения, используя собственные векторы $\{\phi_1^{\omega_i}, \phi_2^{\omega_i}, ..., \phi_{L_p}^{\omega_i}\}$ и $\{\Phi_1^{\omega_i}, \Phi_2^{\omega_i}, ..., \Phi_{L_u}^{\omega_i}\}$, соответствующие первым наименьшим L_p и L_u собственные значения, где $\lambda_{p,1} \leq \lambda_{p,2} \leq ... \leq \lambda_{p,L_p}$ and $\lambda_{u,1} \leq \lambda_{u,2} \leq ... \leq \lambda_{u,L_u}$. Кроме того, для получения согласованных базисных функций мы используем линейные функции разбиение единицы χ^{ω_i}. Мы строим матрицы перехода R_u и R_p от мелкой сетки к грубой и используем ее для уменьшения размерности задачи.

$$R_u = \{\chi^{\omega_1}\Phi_1^{\omega_1}, \chi^{\omega_1}\Phi_2^{\omega_1}, ..., \chi^{\omega_1}\Phi_{L_u}^{\omega_1}, ..., \chi^{\omega_{N_c}}\Phi_1^{\omega_{N_c}}, \chi^{\omega_{N_c}}\Phi_2^{\omega_{N_c}}, ..., \chi^{\omega_{N_c}}\Phi_{L_u}^{\omega_{N_c}}\}$$

$$R_p = \{\chi^{\omega_1}\phi_1^{\omega_1}, \chi^{\omega_1}\phi_2^{\omega_1}, ..., \chi^{\omega_1}\phi_{L_p}^{\omega_1}, ...\chi^{\omega_{N_c}}\phi_1^{\omega_{N_c}}, \chi^{\omega_{N_c}}\phi_2^{\omega_{N_c}}, ..., \chi^{\omega_{N_c}}\phi_{L_p}^{\omega_{N_c}}, \}.$$

где χ^{ω_i} - линейные функции разбиения единицы, L_p и L_u - количество базисных функций для давления и перемещения, N_c - количество вершин грубой сетки.

Тогда систему уравнений можно перевести в грубую сетку, и мы получим следующий вычислительный алгоритм в матричной форме:

- Решение системы давления для $p_c = (p_{c,m}, p_{c,f})^T$:

$$\left(\frac{1}{\tau}M_c + A_c\right) p_c = F_c, \tag{4.29}$$

  где $M_c = R_p M R_p^T$, $A_c = R_p A R_p^T$ и $F_c = R_p F$.

- Решение системы перемещения для $u = (u_x, u_y)$

$$D_c u_c = B_c, \tag{4.30}$$

  где $D_c = R_u D R_u^T$ и $B_c = R_u B$.

После получения грубомасштабного решения мы можем восстановить мелкомасштабное решение $u_{ms} = R_u^T u_c$ и $p_{ms} = R_p^T p_c$. Затем мы представляем численные результаты для тестовых задач и сравниваем многомасштабные решения для давления и перемещения (p_{ms} и u_{ms}) с эталонными решениями с мелкой сеткой (p и u).

Численные результаты

В этом разделе мы рассматриваем задачу пороупругости в трещиноватой пористой среде и рассматриваем две тестовые задачи. Задаем параметры модельной задачи $E = 10[\text{Па}]$, $\nu = 0.3$, $k_m = 10^{-5}[\text{м}^2]$, $k_f = 1[\text{м}^2]$ для *теста 1*. Для *теста 2* используем неоднородные коэффициенты, где модуль упругости и неоднородная проницаемость представлены на рисунке 4.19. Мы устанавливаем следующие коэффициенты для обоих тестов $\alpha = 1$, $\sigma = k_m[\text{м}^2]$, $c_m = 0.1[\text{Па}]$ и $c_f = 0.01[\text{Па}]$. Расчет производится по $T = 100[\text{сек}]$ с шагом по времени $\tau = 10[\text{сек}]$. Расчетные сетки и распределение трещин представлены на рисунке 4.19. Мелкая сетка содержит 40401 вершину и 40000 ячеек. Для изучения представленного многомасштабного мы рассматриваем две грубые сетки 10×10 и 20×20.

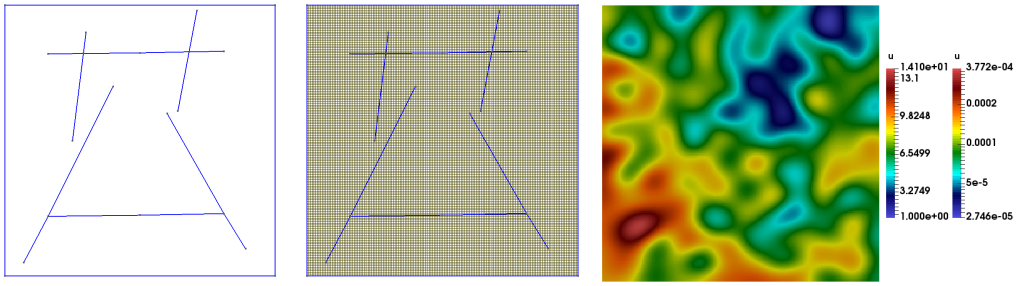

Рисунок 4.19: Распределение трещин, мелкая сетка, неоднородные проницаемости K и параметр упругости E (слева направо).

На рисунках 4.20 и 4.21 представлено распределение давления и перемещения по направлениям X и Y в конечный момент времени для 8 многомасштабных базисных функций в однородных и неоднородных средах. В таблице 4.6 мы представляем относительные ошибки L_2 для различного количества много-

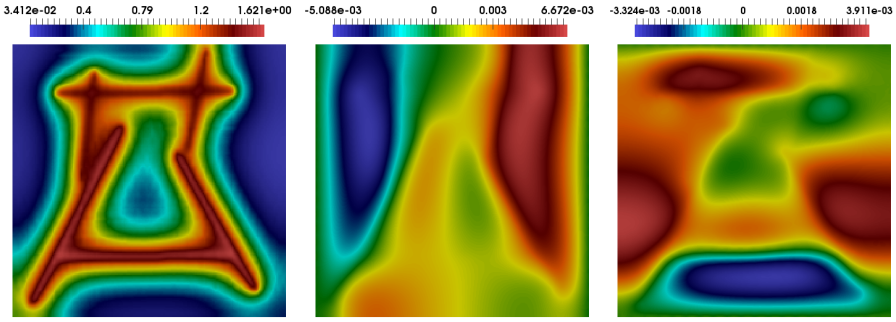

Рисунок 4.20: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени для 8 многомасштабных базисных функций для *теста 1*.

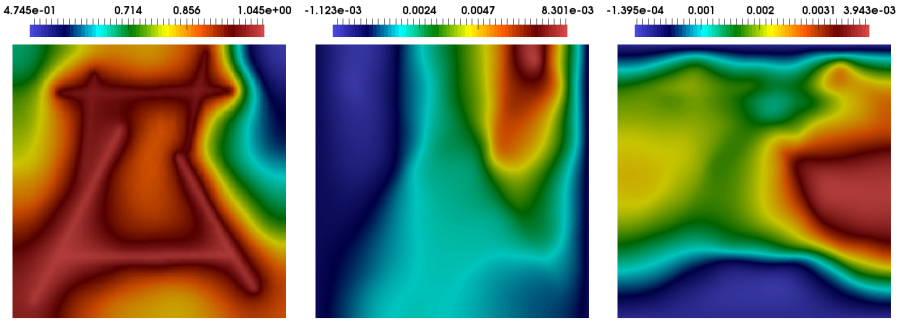

Рисунок 4.21: Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени для 8 многомасштабных базисных функций для *теста 2*.

масштабных базисных функций на грубой сетке 10×10 и 20×20 между решениями на многомасштабной и мелкой сетке. Представленные результаты задачи пороупругости показывают, что предложенный многомасштабный метод может обеспечить хорошую точность для небольшого числа многомасштабных базисных функций для встроенной модели трещины.

	10×10		20×20	
L	e^u	e^p	e^u	e^p
1	4.850	1.840	1.794	0.896
2	1.933	1.332	0.535	0.550
4	1.120	0.648	0.372	0.292
8	0.395	0.488	0.136	0.195
12	0.289	0.330	0.077	0.144

	10×10		20×20	
L	e^u	e^p	e^u	e^p
1	13.461	10.781	3.195	4.065
2	4.285	7.350	1.037	2.477
4	3.850	4.208	1.082	1.278
8	1.103	3.502	0.274	0.992
12	1.009	1.628	0.126	0.552

Таблица 4.6: Относительные погрешности в % для перемещения и давления с разным количеством многомасштабных базисных функций для *теста 1* (слева) и *теста 2* (справа). $L_p = L_u = L$.

4.4 Выводы

В этой главе мы рассмотрели задачи пороупругости в трещиноватых и неоднородных средах. Аппроксимации представлены на неструктурированной сетке для дискретной модели трещин, которая заметно учитывает геометрию трещин, и на структурированной сетке для встроенной модели трещин, не учитывающей трещины.

В первых двух подглавах мы использовали дискретную модель трещины для связанного потока, задачи механики и двойного континуума. Математическая модель в случае с двойным континуумом содержит связанную систему уравнений для давлений в каждом континууме и эффективное уравнение для перемещения с источниками объемной силы, которое пропорционально сумме градиентов давления для каждого континуума. Аппроксимация на грубой сетке строится с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (GMsFEM), в котором мы решаем локальные спектральные задачи для построения многомасштабных базисных функций для перемещения и давления в многоконтинуумных средах. Численные результаты представлены для двумерных и трехмерных задач. Представленные таблицы погрешностей показывают хорошую сходимость метода с большим уменьшением сложной дискретной системы и с размельчением грубой сетки получается меньше погрешностей в решении. Аппроксимация мелкой сетки для встроенной модели трещины построена на основе аппроксимации конечного объема для давления в трещиноватой среде и метода конечных элементов для перемещения. Многомасштабная аппроксимация разработана с использованием структурированной грубой сетки и основана на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов для давления и перемещения. Работоспособность метода проверена на двумерной модельной задаче. Так же как и предыдущий метод, EFM показывает хорошую точность, и чем меньше сетка, тем меньше погрешность.

Заключение

В диссертационной работе представлены решения задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах с помощью метода усреднения и обобщенного многомасштабного метода конечных элементов.

В диссертационной работе были получены следующие результаты:

- Представлены методы аппроксимации на грубой сетке для задачи пороупругости в неоднородных средах. Для решения уравнений в частных производных используются следующие аппроксимации на грубой сетке: обобщенный многомасштабный метод конечных элементов и метод усреднения. Из полученных результатов можно сделать вывод, что точность обобщенного многомасштабного метода конечных элементов тесно связана с количеством многомасштабных базисов, используемых при моделировании. А для метода усреднения нельзя контролировать уровень точности, как для многомасштабного метода, изменяя это число, что может быть важно в приложениях, где приемлем более приблизительный результат.
- Выполнены исследования по моделированию задачи вязкопороупругости. При построении математической модели для задачи вторичной консолидации была использована вязкоупругая формулировка Кельвина-Фойгта. Для численного решения связанной системы уравнений для давления и перемещения построена аппроксимация задачи посредством метода конечных элементов с использованием линейных базисных функций. Проведено численное исследование задачи при различных граничных условиях и построены графики численного сравнения моделей для давления и перемещения при различных коэффициентах вторичной консолидации.
- Рассмотрены математические модели для численного решения задач пороупругости мультиконтинуумных средах. При построении многомасштабного пространства использовались несвязные многомасштабные базисные

функции для давлений и перемещения. Представлена аппроксимация на мелкой сетке на основе метода конечных элементов и подхода дискретной модели трещины для двух- и трехмерных формулировок. Предлагаемый многомасштабный метод обеспечивает хорошую точность для задачи мультиконтинуума.

- Разработан обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задачи пороупругости в трещиноватых средах. Аппроксимация мелкой сетки построена на основе аппроксимации конечного объема для давления в трещиноватой среде и метода конечных элементов для перемещения. Исследуется GMsFEM для решения задачи потока и деформации в трещиноватых средах со встроенной моделью трещины. Работоспособность метода проверена на двумерной модельной задаче с различным количеством многомасштабных базисных функций.

Литература

1. K Terzaghi. Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodyn. *Spannungsercsheinungen, Sitzber. Ak. Wiss. Wien, Abt. IIa*, 123, 1923.

2. Karl Terzaghi, Ralph B Peck, and Gholamreza Mesri. *Soil mechanics in engineering practice*. John Wiley & Sons, 1996.

3. Leo Rendulic. Porenziffer und porenwasserdruck in tonen. *Der Bauingenieur*, 17:559–564, 1936.

4. Maurice A Biot. Le problem de la consolidation des matieres argileuses sous une charge. *Annaies de la Societe Scientifique de Bruxelles*, pages 110–113, 1935.

5. Maurice A Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, 12(2):155–164, 1941.

6. Maurice A Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of applied physics*, 26(2):182–185, 1955.

7. Maurice A Biot. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. *J. appl. Mech*, 23(1):91–96, 1956.

8. Maurice Anthony Biot. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of applied physics*, 27(3):240–253, 1956.

9. Maurice A Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of applied physics*, 33(4):1482–1498, 1962.

10. A Verruijt. Elastic storage of aquifers. in"flow through porous media edited by rjm dewiest, 1969.

11. James R Rice and Michael P Cleary. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Reviews of Geophysics*, 14(2):227–241, 1976.

12. RJ Atkin and RE Craine. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 29(2):209–244, 1976.

13. Ray M Bowen. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *International Journal of Engineering Science*, 20(6):697–735, 1982.

14. N Katsube and MM Carroll. The modified mixture theory for fluid-filled porous materials: applications. 1987.

15. Nikolai Sergeevich Bakhvalov and G Panasenko. *Homogenisation: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2012.

16. Enrique Sánchez-Palencia. Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture notes in physics*, 127, 1980.

17. Viktoria Savatorova, Alexey Talonov, AN Vlasov, and Dmitriy B Volkov-Bogorodsky. Multiscale modeling of gas flow through organic-rich shale matrix. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 7(1), 2016.

18. VL Savatorova, AV Talonov, and AN Vlasov. Homogenization of thermoelasticity processes in composite materials with periodic structure of heterogeneities. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 93(8):575–596, 2013.

19. Jean-Louis Auriault and E Sanchez-Palencia. Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *Journal de mécanique*, 16(4):575–603, 1977.

20. Hélène Dumontet. Study of a boundary layer problem in elastic composite materials. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 20(2):265–286, 1986.

21. Gilles A Francfort and François Murat. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Archive for Rational mechanics and Analysis*, 94(4):307–334, 1986.

22. R Abdelmoula and J-J Marigo. The effective behavior of a fiber bridged crack. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(11):2419–2444, 2000.

23. M Haboussi, H Dumontet, and JL Billoet. On the modelling of interfacial transition behaviour in composite materials. *Computational Materials Science*, 20(2):251–266, 2001.

24. Ulrich Hornung. *Homogenization and porous media*, volume 6. Springer Science & Business Media, 1996.

25. Svyatoslav Korneev and Ilenia Battiato. Sequential homogenization of reactive transport in polydisperse porous media. *Multiscale Modeling & Simulation*, 14(4):1301–1318, 2016.

26. John R Willis. Variational principles for dynamic problems for inhomogeneous elastic media. *Wave Motion*, 3(1):1–11, 1981.

27. Grégoire Allaire, Mariapia Palombaro, and Jeffrey Rauch. Diffractive behavior of the wave equation in periodic media: weak convergence analysis. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 188(4):561, 2009.

28. Enrico Priolo, José M Carcione, and Géza Seriani. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(2):681–693, 1994.

29. Gabriel Nguetseng. Homogenization structures and applications i. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 22(1):73–108, 2003.

30. Vladimir A Marchenko and Evgueni Ya Khruslov. *Homogenization of partial differential equations*, volume 46. Springer Science & Business Media, 2008.

31. Viktoria Savatorova, Alexey Talonov, AN Vlasov, and Dmitriy B Volkov-Bogorodsky. Brinkman's filtration of fluid in rigid porous media: multiscale analysis and investigation of effective permeability. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 6(3), 2015.

32. Peter Moczo, Jozef Kristek, Václav Vavrycuk, Ralph J Archuleta, and Ladislav Halada. 3d heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92(8):3042–3066, 2002.

33. Yann Capdeville and J-J Marigo. Second order homogenization of the elastic wave equation for non-periodic layered media. *Geophysical Journal International*, 170(2):823–838, 2007.

34. Y Capdeville and J-J Marigo. Shallow layer correction for spectral element like methods. *Geophysical Journal International*, 172(3):1135–1150, 2008.

35. Thomas Y Hou and Xiao-Hui Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of computational physics*, 134(1):169–189, 1997.

36. E ENGQUIST et al. The heterogeneous multiscale methods. *Commun. Math. Sci.*, 1:87–132, 2003.

37. Sebastian Bosma, Hadi Hajibeygi, Matei Tene, and Hamdi A Tchelepi. Multiscale finite volume method for discrete fracture modeling on unstructured grids (ms-dfm). *Journal of Computational Physics*, 351:145–164, 2017.

38. Christian Wolfsteiner, Seong H Lee, and Hamdi A Tchelepi. Well modeling in the multiscale finite volume method for subsurface flow simulation. *Multiscale Modeling & Simulation*, 5(3):900–917, 2006.

39. Hadi Hajibeygi, Dimitris Karvounis, and Patrick Jenny. A hierarchical fracture model for the iterative multiscale finite volume method. *Journal of Computational Physics*, 230(24):8729–8743, 2011.

40. Irina Sokolova, Muhammad Gusti Bastisya, and Hadi Hajibeygi. Multiscale finite volume method for finite-volume-based simulation of poroelasticity. *Journal of Computational Physics*, 379:309–324, 2019.

41. Yixuan Wang, Hadi Hajibeygi, and Hamdi A Tchelepi. Monotone multiscale finite volume method. *Computational Geosciences*, 20(3):509–524, 2016.

42. Yalchin Efendiev and Thomas Y Hou. *Multiscale finite element methods: theory and applications*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2009.

43. Yalchin Efendiev, Thomas Y Hou, Victor Ginting, et al. Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications. *Communications in Mathematical Sciences*, 2(4):553–589, 2004.

44. Yalchin Efendiev, Juan Galvis, Guanglian Li, and Michael Presho. Generalized multiscale finite element methods. nonlinear elliptic equations. *Communications in Computational Physics*, 15(3):733–755, 2014.

45. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Guanglian Li, and Maria Vasilyeva. Generalized multiscale finite element methods for problems in perforated heterogeneous domains. *Applicable Analysis*, 95(10):2254–2279, 2016.

46. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Wing Tat Leung. Constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 339:298–319, 2018.

47. Donald L Brown and Maria Vasilyeva. A generalized multiscale finite element method for poroelasticity problems i: linear problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 294:372–388, 2016.

48. Donald L Brown and Maria Vasilyeva. A generalized multiscale finite element method for poroelasticity problems ii: Nonlinear coupling. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 297:132–146, 2016.

49. Maria Vasilyeva, Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Jihoon Kim. Constrained energy minimization based upscaling for coupled flow and mechanics. *Journal of Computational Physics*, 376:660–674, 2018.

50. I Yucel Akkutlu, Yalchin Efendiev, Maria Vasilyeva, and Yuhe Wang. Multiscale model reduction for shale gas transport in poroelastic fractured media. *Journal of Computational Physics*, 353:356–376, 2018.

51. I Yucel Akkutlu, Yalchin Efendiev, Maria Vasilyeva, and Yuhe Wang. Multiscale model reduction for shale gas transport in a coupled discrete fracture and dual-continuum porous media. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 48:65–76, 2017.

52. Carlo D'Angelo and Anna Scotti. A mixed finite element method for darcy flow in fractured porous media with non-matching grids. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(2):465–489, 2012.

53. Thushan Chandrasiri Ekneligoda and Ki-Bok Min. Determination of optimum parameters of doublet system in a horizontally fractured geothermal reservoir. *Renewable energy*, 65:152–160, 2014.

54. Vivette Girault, Kundan Kumar, and Mary F Wheeler. Convergence of iterative coupling of geomechanics with flow in a fractured poroelastic medium. *Computational Geosciences*, 20(5):997–1011, 2016.

55. Anna Nissen, Eirik Keilegavlen, Tor Harald Sandve, Inga Berre, and Jan Martin Nordbotten. Heterogeneity preserving upscaling for heat transport in fractured geothermal reservoirs. *Computational Geosciences*, 22(2):451–467, 2018.

56. Ilenia Battiato, Daniel M Tartakovsky, Alexandre M Tartakovsky, and Timothy D Scheibe. Hybrid models of reactive transport in porous and fractured media. *Advances in Water Resources*, 34(9):1140–1150, 2011.

57. Patrick Jenny, SH Lee, and Hamdi A Tchelepi. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *Journal of Computational Physics*, 187(1):47–67, 2003.

58. Patrick Jenny, Seong H Lee, and Hamdi A Tchelepi. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media. *Multiscale Modeling & Simulation*, 3(1):50–64, 2005.

59. Yalchin Efendiev, Juan Galvis, and Thomas Y Hou. Generalized multiscale finite element methods (gmsfem). *Journal of Computational Physics*, 251:116–135, 2013.

60. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Wing Tat Leung, and Maria Vasilyeva. Reiterated multiscale model reduction using the generalized multiscale finite element method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 14(6), 2016.

61. Yalchin Efendiev, Seong Lee, Guanglian Li, Jun Yao, and Na Zhang. Hierarchical multiscale modeling for flows in fractured media using generalized multiscale finite element method. *GEM-International Journal on Geomathematics*, 6(2):141–162, 2015.

62. Yalchin Efendiev, Juan Galvis, Guanglian Li, and Michael Presho. Generalized multiscale finite element methods: Oversampling strategies. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 12(6), 2014.

63. Anders Logg, Kent-Andre Mardal, and Garth Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2012.

64. Satish Balay, William D Gropp, Lois Curfman McInnes, and Barry F Smith. Efficient management of parallelism in object-oriented numerical software libraries. In *Modern software tools for scientific computing*, pages 163–202. Springer, 1997.

65. Satish Balay, K Buschelman, V Eijkhout, WD Gropp, D Kaushik, MG Knepley, L Curfman McInnes, BF Smith, and H Zhang. Petsc users manual anl-95/11-revision 2.1. 5. *Argonne National Laboratory*, 2004.

66. Michael A Heroux, Roscoe A Bartlett, Vicki E Howle, Robert J Hoekstra, Jonathan J Hu, Tamara G Kolda, Richard B Lehoucq, Kevin R Long, Roger P Pawlowski, Eric T Phipps, et al. An overview of the trilinos project. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 31(3):397–423, 2005.

67. Michael A Heroux, James M Willenbring, and Robert Heaphy. Trilinos developers guide. Technical report, Technical Report SAND2003-1898, Sandia National Laboratories, 2003.

68. Joerg Walter, Mathias Koch, et al. ublas. *Boost C++ software library available from http://www. boost. org/doc/libs*, 2006.

69. Vicente Hernandez, Jose E Roman, and Vicente Vidal. Slepc: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 31(3):351–362, 2005.

70. Мария Васильевна Васильева, Александр Егорович Колесов, and Алексей Афанасьевич Тырылгин. Численное моделирование задачи вязкопороупругости грунтов. *Вестник Северо-Восточного федерального университета им. МК Аммосова*, (3 (59)), 2017.

71. Мария Васильевна Васильева, Василий Иванович Васильев, and Алексей Афанасьевич Тырылгин. Консервативная разностная схема для задач фильтрации в трещиноватых средах. *Математические заметки СВФУ*, 25(4), 2018.

72. Валентин Николаевич Алексеев, Мария Васильевна Васильева, Георгий Анатольевич Прокопьев, and Алексей Афанасьевич Тырылгин. Модели термоупругости для пористых материалов с учетом наличия трещин. *Математические заметки СВФУ*, 24(3), 2017.

73. Valentin N Alekseev, Aleksei A Tyrylgin, Maria V Vasilyeva, Vasiliy I Vasilyev, et al. Численное усреднение для задач теплопереноса в условиях криолитозоны. *Mathematical notes of NEFU*, 27(2):77–92, 2020.

74. Valentin Alekseev, Aleksey Tyrylgin, and M Vasilyeva. Generalized multiscale finite element method for elasticity problem in fractured media. In *International Conference on Finite Difference Methods*, pages 137–144. Springer, 2018.

75. Aleksey Tyrylgin, M Vasilyeva, and D Brown. Generalized multiscale finite element method for poroelasticity problems in heterogeneous media.

In *International Conference on Finite Difference Methods*, pages 566–573. Springer, 2018.

76. V Alekseev, U Gavrileva, D Spiridonov, A Tyrylgin, and M Vasilyeva. Numerical simulation of the transport and flow problems in perforated domains using generalized multiscale finite element method. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2025, page 100001. AIP Publishing LLC, 2018.

77. A Tyrylgin, M Vasilyeva, Q Zhang, D Spiridonov, and V Alekseev. Mathematical modeling of the fluid flow and geo-mechanics in the fractured porous media using generalized multiscale finite element method. *AIP Conference Proceedings*, 2025(1):100009, 2018.

78. Maria Vasilyeva and Aleksey Tyrylgin. Convolutional neural network for fast prediction of the effective properties of domains with random inclusions. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1158, page 042034. IOP Publishing, 2019.

79. A Tyrylgin, D Spiridonov, and M Vasilyeva. Numerical homogenization for poroelasticity problem in heterogeneous media. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1158, page 042030. IOP Publishing, 2019.

80. Aleksei Tyrylgin, Maria Vasilyeva, and Eric T Chung. Embedded fracture model in numerical simulation of the fluid flow and geo-mechanics using generalized multiscale finite element method. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1392, page 012075. IOP Publishing, 2019.

81. Aleksei Tyrylgin, Maria Vasilyeva, Denis Spiridonov, and Eric T Chung. Generalized multiscale finite element method for the poroelasticity problem in multicontinuum media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 374:112783, 2020.

82. Aleksei Tyrylgin, Yaoyao Chen, Maria Vasilyeva, and Eric T Chung. Multiscale model reduction for the allen-cahn problem in perforated domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, page 113010, 2020.

83. Maria Vasilyeva, Eric T Chung, Yalchin Efendiev, and Aleksey Tyrylgin. A three-level multi-continua upscaling method for flow problems in fractured porous media. *COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS*, 374(3):619–638, 2018.

84. Мария Васильевна Васильева and Алексей Афанасьевич Тырылгин. Вычислительная библиотека для численного усреднения задачи пороупругости в неоднородных средах. 2019.

85. Мария Васильевна Васильева and Алексей Афанасьевич Тырылгин. Вычислительная библиотека для численного моделирования задачи пороупругости в трещиноватых средах с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. 2019.

86. Nicola Castelletto, Sergey Klevtsov, Hadi Hajibeygi, and Hamdi A Tchelepi. Multiscale two-stage solver for biot's poroelasticity equations in subsurface media. *Computational Geosciences*, 23(2):207–224, 2019.

87. Robert Altmann, Eric Chung, Roland Maier, Daniel Peterseim, and Sai-Mang Pun. Computational multiscale methods for linear heterogeneous poroelasticity. *arXiv preprint arXiv:1801.00615*, 2018.

88. Jack Fellerman, Donald L Brown, and Maria Vasilyeva. On two-scale convergence of fluid-structure interaction problems with applications to poroelasticity. In *Poromechanics VI*, pages 125–132.

89. OP Iliev, AE Kolesov, and PN Vabishchevich. Numerical solution of plate poroelasticity problems. *Transport in Porous Media*, 115(3):563–580, 2016.

90. Alexandr E Kolesov, Petr N Vabishchevich, and Maria V Vasilyeva. Splitting schemes for poroelasticity and thermoelasticity problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(12):2185–2198, 2014.

91. GI Barenblatt, Iu P Zheltov, and IN Kochina. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 24(5):1286–1303, 1960.

92. Jihoon Kim. *Sequential methods for coupled geomechanics and multiphase flow*, volume 71. Citeseer, 2010.

93. IY Akkutlu, Yalchin Efendiev, and Maria Vasilyeva. Multiscale model reduction for shale gas transport in fractured media. *Computational Geosciences*, pages 1–21, 2015.

94. FJ Gaspar, JL Gracia, FJ Lisbona, and PN Vabishchevich. A stabilized method for a secondary consolidation biot's model. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 24(1):60–78, 2008.

95. Karl Terzaghi. Theory of consolidation. *Theoretical Soil Mechanics*, pages 265–296, 1943.

96. Anvarbek Meirmanov. Mathematical models for poroelastic flows. 2014.

97. VN Nikolaevskii. Mechanics of porous and fissured media [in russian]. *Nedra, Moscow*, 1984.

98. Petr V Sivtsev, Petr N Vabishchevich, and Maria V Vasilyeva. Numerical simulation of thermoelasticity problems on high performance computing systems. In *International Conference on Finite Difference Methods*, pages 364–370. Springer, 2014.

99. AD Mesquita and HB Coda. Alternative kelvin viscoelastic procedure for finite elements. *Applied Mathematical Modelling*, 26(4):501–516, 2002.

100. Jean Lemaitre and Jean-Louis Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press, 1994.

101. P Rapp, J Kurzyka, and W Szostak. The creep and relaxation in sandwich panels with the viscoelastic cores. *Light-weight Steel and Aluminium Structures, Elsevier, Amsterdam*, page 197, 1999.

102. Jean Salençon. *Handbook of continuum mechanics: General concepts thermoelasticity*. Springer Science & Business Media, 2012.

103. Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International journal for numerical methods in engineering*, 79(11):1309–1331, 2009.

104. Alexey Talonov and Maria Vasilyeva. On numerical homogenization of shale gas transport. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 301:44–52, 2016.

105. Louis J Durlofsky. Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media. *Water resources research*, 27(5):699–708, 1991.

106. Grégoire Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6):1482–1518, 1992.

107. Viktoria Savatorova, Alexey Talonov, and AN Vlasov. Upscaling of dual-porosity models for gas transport in organic-rich shales. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 7(3), 2016.

108. Francisco Armero. Formulation and finite element implementation of a multiplicative model of coupled poro-plasticity at finite strains under fully saturated conditions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 171(3-4):205–241, 1999.

109. Jihoon Kim, Hamdi A Tchelepi, and Ruben Juanes. Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Fixed-stress and fixed-strain splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(13-16):1591–1606, 2011.

110. Yu-Shu Wu, Yuan Di, Zhijiang Kang, and Perapon Fakcharoenphol. A multiple-continuum model for simulating single-phase and multiphase flow in naturally fractured vuggy reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 78(1):13–22, 2011.

111. Qiuqi Li, Yuhe Wang, and Maria Vasilyeva. Multiscale model reduction for fluid infiltration simulation through dual-continuum porous media with localized uncertainties. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 336:127–146, 2018.

112. I Yucel Akkutlu, Ebrahim Fathi, et al. Multiscale gas transport in shales with local kerogen heterogeneities. *SPE journal*, 17(04):1–002, 2012.

113. Yu-Shu Wu, Christine Ehlig-Economides, Guan Qin, Zhijang Kang, Wangming Zhang, Babatunde Ajayi, and Qingfeng Tao. A triple-continuum pressure-transient model for a naturally fractured vuggy reservoir. 2007.

114. Xiaonan Wang and Ahmad Ghassemi. A three-dimensional poroelastic model for naturally fractured geothermal reservoir stimulation. *GRC Transactions*, 36:575–582, 2012.

115. JE Warren, P Jj Root, et al. The behavior of naturally fractured reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 3(03):245–255, 1963.

116. Todd Arbogast, Jim Douglas, Jr, and Ulrich Hornung. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 21(4):823–836, 1990.

117. Vincent Martin, Jérôme Jaffré, and Jean E Roberts. Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(5):1667–1691, 2005.

118. Luca Formaggia, Alessio Fumagalli, Anna Scotti, and Paolo Ruffo. A reduced model for darcy's problem in networks of fractures. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 48(4):1089–1116, 2014.

119. Carlo D'ANGELO and Alfio Quarteroni. On the coupling of 1d and 3d diffusion-reaction equations: application to tissue perfusion problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(08):1481–1504, 2008.

120. Seong H Lee, MF Lough, and CL Jensen. Hierarchical modeling of flow in naturally fractured formations with multiple length scales. *Water resources research*, 37(3):443–455, 2001.

121. Liyong Li, Seong Hee Lee, et al. Efficient field-scale simulation for black oil in a naturally fractured reservoir via discrete fracture networks and homogenized media. In *International oil & gas conference and exhibition in China*. Society of Petroleum Engineers, 2006.

122. Liyong Li, Seong H Lee, et al. Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 11(04):750–758, 2008.

123. Mohammad Karimi-Fard, Luis J Durlofsky, Khalid Aziz, et al. An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2003.

124. Matei Tene, MS Al Kobaisi, H Hajibeygi, et al. Algebraic multiscale solver

for flow in heterogeneous fractured porous media. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2015.

125. Eric Chung, Yalchin Efendiev, and Thomas Y Hou. Adaptive multiscale model reduction with generalized multiscale finite element methods. *Journal of Computational Physics*, 320:69–95, 2016.

126. Ivan Lunati and Patrick Jenny. Multiscale finite-volume method for compressible multiphase flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, 216(2):616–636, 2006.

127. Hadi Hajibeygi, Giuseppe Bonfigli, Marc Andre Hesse, and Patrick Jenny. Iterative multiscale finite-volume method. *Journal of Computational Physics*, 227(19):8604–8621, 2008.

128. Matei Tene, Mohammed Saad Al Kobaisi, and Hadi Hajibeygi. Algebraic multiscale method for flow in heterogeneous porous media with embedded discrete fractures (f-ams). *Journal of Computational Physics*, 321:819–845, 2016.

129. Nicola Castelletto, Sergey Klevtsov, Hadi Hajibeygi, and Hamdi A Tchelepi. Multiscale two-stage solver for biot's poroelasticity equations in subsurface media. *Computational Geosciences*, pages 1–18, 2018.

130. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Wing Tat Leung, Maria Vasilyeva, and Yating Wang. Non-local multi-continua upscaling for flows in heterogeneous fractured media. *Journal of Computational Physics*, 372:22–34, 2018.

131. Maria Vasilyeva, Eric T Chung, Siu Wun Cheung, Yating Wang, and Georgy Prokopev. Nonlocal multicontinua upscaling for multicontinua flow problems in fractured porous media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 355:258–267, 2019.