

**Ван Ган**

**Алгоритмы матричных декомпозиций  
кватернионов двух типов и их приложения**

Специальность

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре «Вычислительные технологии» Института математики и информатики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова».

Научный руководитель: **Васильев Василий Иванович**,  
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты : **Пененко Алексей Владимирович**,  
доктор физико-математических наук,  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт вычислительной математики и математической геофизики «Сибирского отделения Российской академии наук»

**Широков Дмитрий Сергеевич**,  
доктор физико-математических наук, доцента,  
старшего научного сотрудника Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук»

Защита состоится « 9 » июня 2024 г. в «16:00» часов на заседании диссертационного совета 24.2.396.02 при СВФУ им М.К. Аммосова по адресу:  
677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, 42, ауд. 134.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке СВФУ им. М.К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58 и на сайте университета по адресу:  
<https://www.s-vfu.ru/upload/iblock/3d7/3d70c37f03cf8e68c5f8335a4a761b2e8.pdf>

Автореферат разослан « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 года

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
к. ф.-м. н.

Степанов С.П.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Моделирование кватернионов следует за потребностями развития многомерных информационных технологий и является актуальной темой исследований в областях, таких как квантовая механика, вращение твердых тел, аэрокосмическая инженерия, обработка сигналов и цветовая обработка изображений. А. Пуанкаре писал о кватернионах: «Их появление дало мощный толчок развитию алгебры; исходя от них, наука пошла по пути обобщения понятия числа, придя к концепциям матрицы и линейного оператора, пронизывающим современную математику. Это была революция в арифметике, подобная той, которую сделал Лобачевский в геометрии». Разделенные кватернионы являются дальнейшим расширением четырехмерной алгебры. В работе D.C. Brody и E.M. Graefe отмечается, что изучение алгебраических свойств и алгоритмов для некоммутативных разделенных кватернионов является ключом к развитию приложений кватернионной модели. Кватернионная алгебра  $\mathbf{Q}$  и разделенная кватернионная алгебра  $\mathbf{H}_s$  - это система гиперкомплексных чисел, состоящая из чисел следующих форм:

$$\mathbf{Q} = \{x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k, i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1\},$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$ ,  $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$ .

$$\mathbf{H}_s = \{x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k, i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1, ijk = 1\},$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$ ,  $ij = -ji = k, jk = -kj = -i, ki = -ik = j$ .

Многие ученые отмечают, что модель кватернионных матриц позволяет сохранить внутреннюю связь информации в многомерных данных. Матричные декомпозиции в четырехмерных алгебрах обеспечивают естественную и гибкую математическую основу при работе с мультимодальными данными. Изучение матричных декомпозиций в квантовой обработке информации играет ключевую роль в передаче и вычислении квантовых состояний. Н.Г. Марчук и Д.С. Широков расширили теорию представлений алгебры Клиффорда и разработали типичные методы, основанные на комплексных числах и кватернионах в задачах математической физики. В информатике алгоритмы кватернионов широко используются при обработке 3D-сигналов и цветных изображений,

включая шумоподавление сигнала, фильтрацию сигнала, сжатие и реконструкцию изображений. Это также важный инструмент в машинном обучении и распознавании информации. А.Б. Богатырев и др. предложили ряд новых аналитических методов синтеза многополосных фильтров, позволяющих получать фильтры минимально возможного порядка в широком диапазоне классов характеристик. И.Г. Казанцев с коллегами реализовали расширение приложений от кватернионов до высокоразмерных пространств данных. А.В. Пененко и др. исследовали обратные задачи для нелинейных моделей химического переноса с данными измерений типа изображений. Несмотря на то, что кватернионные матричные декомпозиции находят широкое применение в науке и технике, их решение сопряжено со многими трудностями: (1) Произведения кватернионов не являются коммутативными; (2) Операции с кватернионными матрицами достаточно ресурсоемки; (3) Разделенные кватернионы имеют специальные элементы, такие как делители нуля, нильпотентные элементы, нетривиальные идемпотенты и так далее.

В настоящее время наиболее известным и полезным программным обеспечением для вычисления матриц кватернионов является пакет программ для вычисления кватернионов на базе Matlab, разработанный S. Sangwine и N.L. Bihan в 2005 году. Однако эта программа в первую очередь основана на прямой арифметике кватернионов, а вычислительный процесс имеет высокую сложность и не способен вычислять результаты для данных высокой размерности. Во-вторых, алгоритм матричной декомпозиции не совершенен, и его сложно применять непосредственно к сложным задачам кватернионного моделирования. И снова не упоминается программа, связанная с алгоритмом разделенных кватернионных матриц. Кроме того, алгоритм декомпозиции матрицы в книге «Вычисление кватернионной матрицы», опубликованной M.S. Wei и др. в 2018 году, не является всеобъемлющим, и еще есть алгоритмы, требующие решения и оптимизации.

Таким образом, актуальной является задача создания новых вычислительных технологий, направленных на устойчивое и эффективное вычисление декомпозиции кватернионных матриц, а также на поиск новых решений некоторых задач обработки сигналов и цветных изображений.

**Целью** диссертационной работы является разработка эффективных алгоритмов декомпозиций четырехмерных алгебраических матриц, включая де-

композицию с низкого ранга, декомпозицию с полного ранга, декомпозицию по собственным значениям, декомпозицию по сингулярным значениям.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработка вещественных сохраняющих структуру алгоритмов для низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц.
2. Разработка сохраняющих структуру алгоритмов полноранговой декомпозиции матриц кватернионов, анализ времени выполнения и оценка ошибки алгоритмов.
3. Разработка алгоритмов обобщенной собственной декомпозиции разделенных кватернионных матриц, анализ времени выполнения и оценка ошибки алгоритмов.
4. Разработка алгоритмов декомпозиции по сингулярным значениям и обобщенная декомпозиция по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц.

**Основные положения, выносимые на защиту** соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 1.2.2. математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1. Новый алгоритм декомпозиции с низким рангом для кватернионных матриц используется для обеспечения чисто мнимых свойств при сжатии и шумоподавлении данных 3D-моделей (п.2);
2. Два новых сохраняющих структуру алгоритма полноранговой декомпозиций кватернионных матриц (п.2);
3. Эффективные алгоритмы обобщенной декомпозиции по собственным значениям разделенных кватернионных матриц для решения задачи распознавания цветных изображений (п.1, п.2);
4. Впервые представлена теория декомпозиции по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц и эффективный алгоритм внедрения и извлечения цветных водяных знаков на основе их декомпозиции (п.3, п.8).

**Научная и практическая значимость** заключается в разработке алгоритмов. Во-первых, теорий и быстрых алгоритмов, которые могут эффективно находить декомпозицию низкого ранга, декомпозицию полного ранга, обобщенную собственную декомпозицию и декомпозицию по сингулярным значе-

ниям матриц кватернионов и разделенных матриц кватернионов. Во-вторых, разработанный алгоритм имеет преимущества по скорости вычислений и анализу ошибок, а созданные схемы обработки сигналов и цветных изображений обладают высокой точностью и надежностью. **Практическая значимость** заключается в алгоритме, предложенном на языке программирования Matlab, и соответствующих ему решениях по обработке сигналов и цветных изображений, включая шумоподавление трехмерного сигнала, сжатие цветного изображения, распознавание цветных лиц, встраивание и извлечение цветных водяных знаков и т. д. Разработанный алгоритм может лучше решать поставленные практические задачи, что дополнительно проверяет возможность практического применения разработанного алгоритма.

**Научная новизна:**

1. Для решения задач сжатия цветных изображений и шумоподавления трехмерного сигнала разработан вещественный сохраняющий структуру алгоритм низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц;
2. Предложены два комплексных сохраняющих структуру алгоритма полноранговой декомпозиции кватернионных матриц для решения задачи цветного распознавания лиц;
3. Разработаны три обобщенных алгоритма декомпозиций по собственным значениям для разделенных кватернионных матриц и создана схема двумерного линейного дискриминантного анализа в алгебре разделения кватернионов для решения задач цветного распознавания лиц;
4. Предложены два вычислительных алгоритма декомпозиций по сингулярным значениям для разделенных кватернионных матриц для решения задач наименьших квадратов и цветного водяного знака.

**Достоверность** результатов обеспечены использованием корректно построенных математических моделей, использованием современных методов вычислительной математики, вычислительной реализацией предложенных алгоритмов и сравнением полученных результатов с результатами других авторов.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Тринадцатая международная молодёжная научная школа-конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач", Академгородок, Новосибирск, Россия, 2021;
- Международная конференция "Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные", СВФУ, Якутск, Россия, 2021;
- Евразийская конференция по прикладной математике, Академгородок, Новосибирск, Россия, 2021;
- V Всероссийская научная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", Якутск, Россия, 2022;
- The 3rd international conference on quaternion matrix computation and applications, Jinan, China, 2023;
- X Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия), Якутск, Россия, 2023;
- Научная школа для молодых ученых «Численное моделирование многомасштабных, мультифизических проблем освоения криолитозоны», Якутск, Россия, 2023;
- Семинар «Алгебры Клиффорда и приложения», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» Москва, Россия, 2024;
- Общеинститутский научный семинар, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН (ИВМиМГ СО РАН) Новосибирск, Россия, 2024;
- Семинар вычислительная математика и приложения, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН Москва, Россия, 2024.

**Публикации.** По теме диссертации было опубликовано 18 научных работ в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень (ВАК, Scopus, Web of Science) [1-18], получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [19].

**Личный вклад.** В статьях [1-7], в которых я являюсь первым автором, мной построены математические модели, доказаны теоремы о корректности полученных задач, разработаны и численно реализованы вычислительные алгоритмы. В работах [8-18] мной реализованы вычислительные алгоритмы, проведены расчеты и проведён анализ результатов вычислительных экспери-

ментов. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

**Объем и структура диссертационной работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем работы составляет 148 страниц с 39 рисунками и 11 таблицами. Список литературы содержит 156 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (гранты No. 23-41-00037 и No. 23-71-30013) и стипендия правительства КНР (No. 202008370340).

## Содержание работы

Во **введении** сформулирована цель работы, поставлены задачи, которые необходимо решить для достижения поставленной цели. Дается краткое содержание диссертации по главам. Ниже приводится описание некоторых символов, использованных в диссертации.

Обозначение	Описание
$\mathbf{R}$	Набор вещественных чисел
$\mathbf{C}$	Набор комплексных чисел
$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$	Набор кватернионов
$\mathbf{H}_s = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$	Набор разделенных кватернионов
$\mathbf{F}^{m \times n}$	Набор $m \times n$ матриц над $\mathbf{F}$
$A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k$	(Разделенная) кватернионная матрица
$R(A) = A_1$	Вещественная часть матрицы $A$
$\bar{A} = A_1 - A_2i - A_3j - A_4k$	Сопряжение матрицы $A$
$A^T = A_1^T + A_2^T i + A_3^T j + A_4^T k$	Транспонирование матрицы $A$
$A^{\mathbb{H}} = A_1^T - A_2^T i - A_3^T j - A_4^T k$	Сопряженное транспонирование матрицы $A$
$A^H = A_1^T - A_2^T i + A_3^T j + A_4^T k$	$i$ -Сопряженное транспонирование матрицы $A$
$A^{-1}$	Обратная матрица $A$
$A^\dagger$	Обобщенная обратная матрица $A$
$\ A\ _F$	Норма Фробениуса матрицы $A$

В **первой главе**, принимая во внимание избыточные вещественные части кватернионной модели в процессе вычисления и высокую сложность прямых операций между кватернионами, построен и усовершенствован алгоритм низкоранговой декомпозиции кватернионной матрицы в двух аспектах:



1. Создана новая форма декомпозиции чисто мнимой кватернионной матрицы низкого ранга (LRDQ), т.е.  $A \approx BC$ , где  $A$  и  $B$  – чисто мнимые кватернионные матрицы,  $C$  – вещественная матрица. Для этой декомпозиции в качестве функции затрат выбрано классическое евклидово расстояние

$$\min = \|A - BC\|_F^2 = \text{tr}[(A - BC)^{\mathbb{H}}(A - BC)]. \quad (1)$$

Оптимальный размер шага итерации матриц  $B$  и  $C$  определяется их частными производными, равными 0.

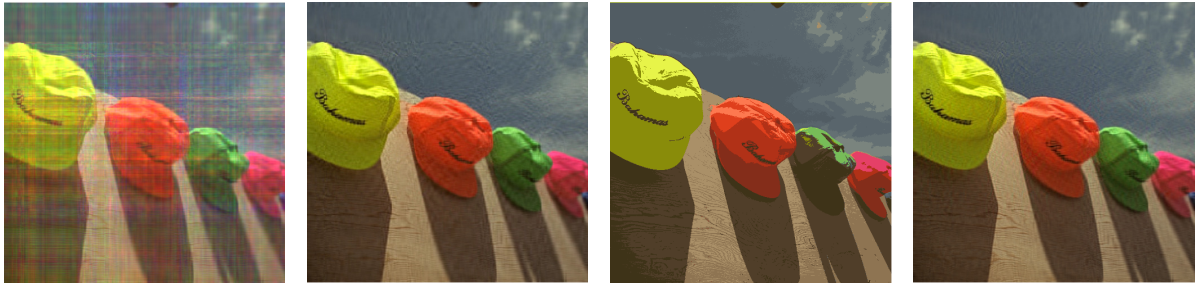
2. При фактическом итеративном вычислении ввиду того, что матрица кватернионов  $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbb{Q}^{m \times n}$  изоморфна вещественной матрице  $A^{\mathbb{R}}$ , то процесс вычисления может быть оптимизирован

$$A^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 \\ A_2 & A_1 & -A_4 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 \\ A_4 & -A_3 & A_2 & A_1 \end{bmatrix} \text{ удовлетворяет } \begin{cases} (A + B)_c^{\mathbb{R}} = A_c^{\mathbb{R}} + B_c^{\mathbb{R}}, \\ (AC)_c^{\mathbb{R}} = A^{\mathbb{R}}C_c^{\mathbb{R}}, \\ (aA)_c^{\mathbb{R}} = aA_c^{\mathbb{R}}, \end{cases} \quad (2)$$

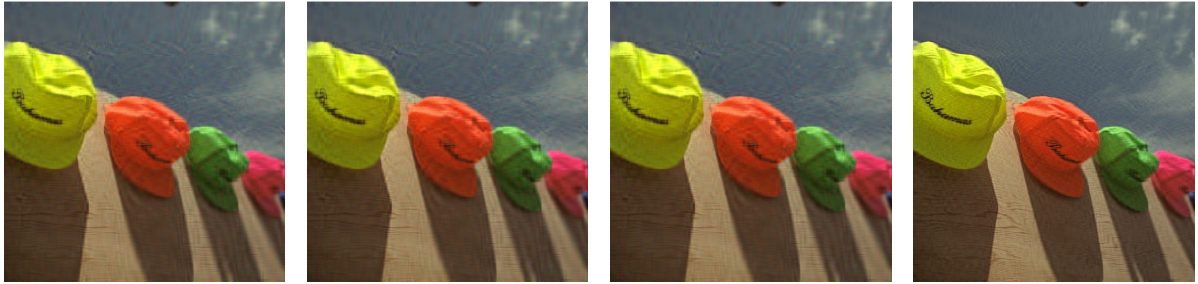
где  $A_c^{\mathbb{R}} = [A_1; A_2; A_3; A_4]$ .

**Пример 1.** Эксперимент по сжатию цветного изображения: Низкоразмерное хранение достигается путем декомпозиции исходного цветного изображения на две матрицы низкого ранга. Рис.1 демонстрируется производительность 8 алгоритмов сжатия при коэффициенте сжатия “6”. Рис.1(а)–(з) соответствует алгоритму TNMF (M.W. Berry и др. 2007), алгоритму SVD (S.K. Singh и др. 2009), алгоритму K-means (M.E. Celebi и др. 2011), алгоритму RBSVD (Y. Li и др. 2017), алгоритму QSVD1-3 (S.J. Sangwine, 2007; M. Wei, 2018; S.C. Pei, 2003) и нашему алгоритму LRDQ соответственно.

**Пример 2.** Эксперимент по шумоподавлению 3D-сигналов: на рис.2 (а) показаны 3 компонента движения (вертикальный, восток-запад и север-юг) данных 3D-волн. На рис.2(б) показана гибридная волна, полученная добавлением гауссовского белого шума с интенсивностью 0.01 к трехмерным волновым данным на рис.2(а). На рис.2(в) показаны приближительные исходные волновые данные, сгенерированные в результате применения описанного выше метода разделения волн на волне данных с добавленным шумом на рис.2(б). Очевидно, что метод разделения волн, основанный на алгоритме LRDQ, может хорошо имитировать исходные волновые данные.

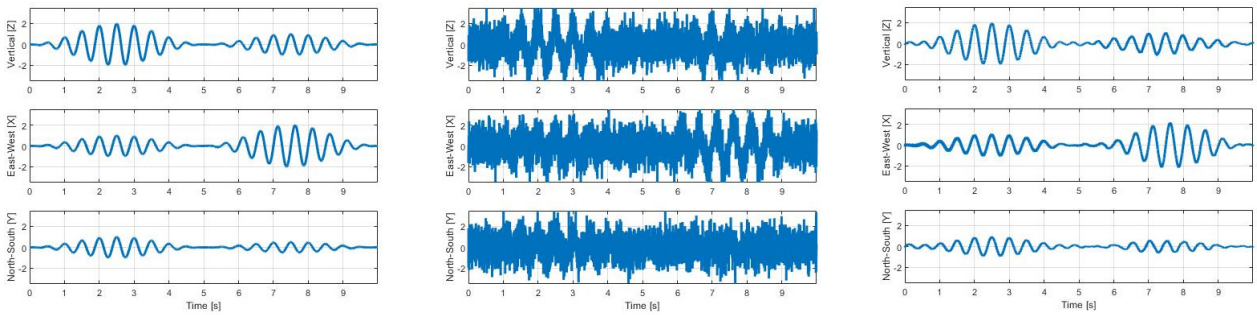


а) PSNR=20.4698 б) PSNR=31.0960 в) PSNR=27.8393 г) PSNR=32.3572



д) PSNR=29.8679 е) PSNR=29.8679 ж) PSNR=29.8679 з) PSNR=32.4452

Рис. 1: Сжатое изображение «Hats» с аналогичной степенью сжатия  $CR \approx 6$ .



а)

б)

в)

Рис. 2: Трехмерное разделение волн на основе LRDQ.

Во второй главе, два основных метода преобразования матриц используются для построения быстрых сохраняющих структуру алгоритмов для полной ранговой декомпозиции матриц кватернионов - Декомпозиция полного ранга матриц кватернионов на основе метода исключения Гаусса и ортогонализации Шмидта. При фактическом итеративном вычислении, поскольку матрица кватернионов  $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k = M_1 + M_2j = N_1 + kN_2 \in \mathbf{Q}^{m \times n}$  изоморфна, для следующих комплексных матриц  $A^{C_1}$  и  $A^{C_2}$ , процесс вычисления может быть оптимизирован

$$A^{C_1} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -\overline{M_2} & \overline{M_1} \end{bmatrix} \text{ удовлетворяет } \begin{cases} (A+B)_r^{C_1} = A_r^{C_1} + B_r^{C_1}, \\ (AC)_r^{C_1} = A_r^{C_1} C^{C_1}, \\ (aA)_r^{C_1} = aA_r^{C_1}, \end{cases} \quad (3)$$

$$A^{C_2} = \begin{bmatrix} N_1 & -\overline{N_2} \\ N_2 & \overline{N_1} \end{bmatrix} \text{ удовлетворяет } \begin{cases} (A+B)_r^{C_1} = A_r^{C_1} + B_r^{C_1}, \\ (AC)_r^{C_1} = A_r^{C_1} C^{C_1}, \\ (aA)_r^{C_1} = aA_r^{C_1}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $M_1 = A_1 + A_2i, M_2 = A_3 + A_4i, N_1 = A_1 + A_2i, N_2 = A_4 + A_3i \in \mathbf{C}^{m \times n}, A_r^{C_1} = [M_1; M_2], A_c^{C_2} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$ .

**Теорема 1. (QFRD)** Предположим, что  $A \in \mathbf{Q}^{m \times n}, \text{rank}(A) = r$ . Тогда существуют  $B^{C_1} \in \mathbf{C}^{2m \times 2r}, C^{C_1} \in \mathbf{C}^{2r \times 2n}, \text{rank}(B^{C_1}) = \text{rank}(C^{C_1}) = 2r$ , такие что  $A_r^{C_1} = B_r^{C_1} C^{C_1}$ , т.е.  $A = BC$ .

**Теорема 2. (QFRF)** Пусть  $A \in \mathbf{Q}^{m \times n}, \text{rank}(A) = r$ . Тогда существуют  $B^{C_2} \in \mathbf{C}^{2m \times 2r}, C_c^{C_2} \in \mathbf{C}^{2r \times n}$  и  $\text{rank}(B^{C_2}) = \text{rank}(C_c^{C_2}) = 2r$ , такой, что  $A_c^{C_2} = B^{C_2} C_c^{C_2} \iff A = BC$ . Более того, в этой точке любые два вектора столбца из  $B$  ортогональны друг другу.

**Пример 1.** Эксперимент по распознаванию цветных лиц: Из полноранговой декомпозиции матрицы кватернионов вычисляется решение задачи наименьших квадратов  $\min \|Ax - b\|$ , а затем цель идентификации достигается с помощью классификатора ближайшего соседа, как показано на рис.3.

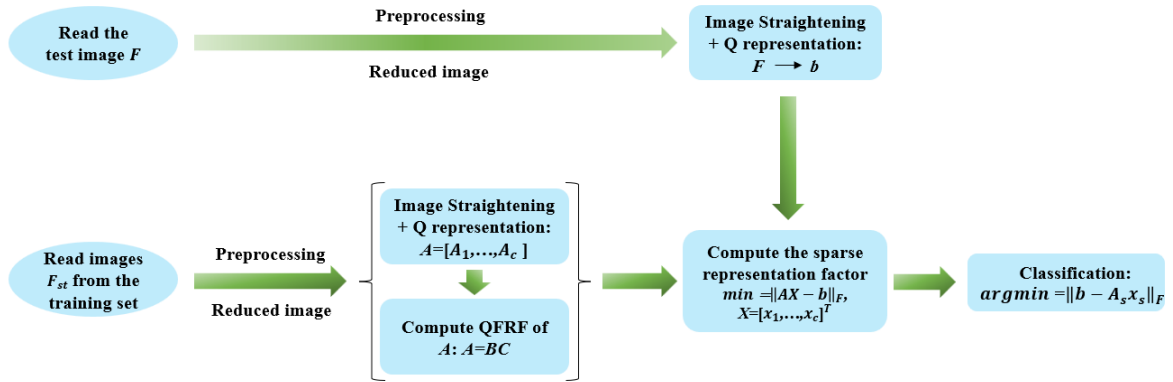


Рис. 3: Блок-схема распознавания лиц.

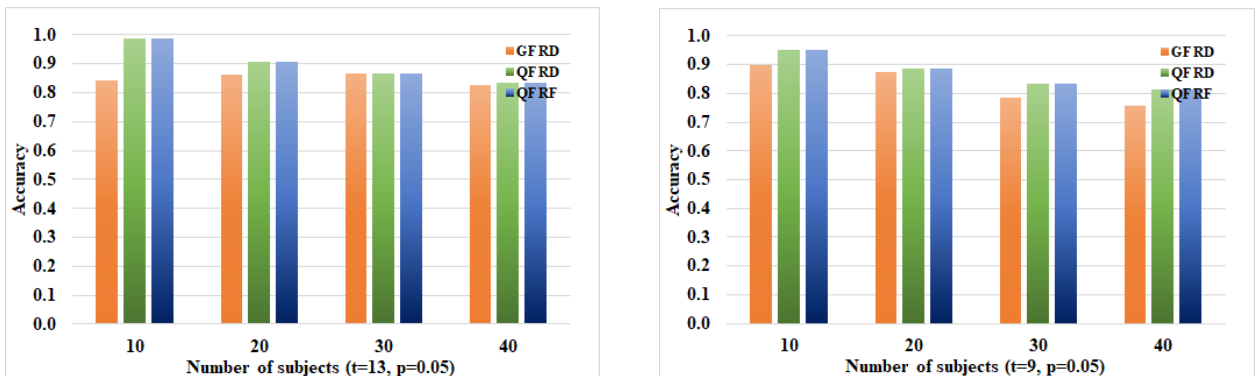


Рис. 4: Коэффициент распознавания GFRD, QFRD и QFRF.

На рис.4 показан выбор 10, 20, 30 и 40 фотографий в качестве испытуемых в двух базах данных. Первые 13 фотографий каждого испытуемого в базе данных «Faces95» используются в качестве тренировочных изображений, первые 9 фотографий каждого испытуемого в базе данных «FEI» используются в качестве тренировочных изображений, а остальные изображения используются в качестве тестовых изображений. Коэффициент распознавания показан на рисунке ниже. **GFRD** (Y. Lu и др. 2014) представляет собой традиционную схему распознавания лиц в оттенках серого, основанную на полном ранговом разложении, а **QFRD** и **QFRF** представляют цветовую схему распознавания лиц, основанную на кватернионной полноранговой разложении.

В третьей главе учитываются структурные особенности алгебры разделенных кватернионов, включая некоммутативность разделенных кватернионных произведений, существование делителей нуля, нильпотентных элементов и нетривиальных идемпотентов, невозможность точного определения ортогональности векторов разделенных кватернионов и ряд других трудностей. Посредством трех изоморфных вещественных или комплексных представлений

$$A^{R_1} = \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & -A_2 + A_4 \\ A_2 + A_4 & A_1 - A_3 \end{bmatrix}, A^{C_1} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2i & A_3 + A_4i \\ A_3 - A_4i & A_1 - A_2i \end{bmatrix}, A^{\mathbb{R}_1} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 & A_4 \\ A_2 & A_1 & A_4 & -A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 \\ A_4 & -A_3 & A_2 & A_1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

обобщенная проблема разложения собственных значений матриц разделенных кватернионов преобразуется в обобщенную задачу разложения собственных значений вещественных или комплексных матриц. Также разработана теория и алгоритм разложения исходной разделенной кватернионной матрицы.

**Теорема 3.** (GEDSQ) Пусть  $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$   $i$ -эрмитова матрица, а  $B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$   $i$ -эрмитова положительно определенная матрица. Тогда обобщенные собственные значения и собственные векторы  $(A, B)$  выглядят следующим образом:

1. Решение на основе изоморфного представления  $A^{R_1}$ :

$$\lambda_s = \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2}j, \quad (6)$$

$$\alpha_s = \frac{\hat{\beta}_{2s-1} + \hat{\beta}_{2s}}{2} + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} - \hat{\beta}_{2s}}{2}i + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} - \hat{\beta}_{2s}}{2}j + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} + \hat{\beta}_{2s}}{2}k,$$

где  $\sigma_{2s-1}, \sigma_{2s}, \beta_{2s-1} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{2s-1} \\ \hat{\beta}_{2s-1} \end{bmatrix}$ ,  $\beta_{2s} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{2s} \\ \hat{\beta}_{2s} \end{bmatrix}$  являются двумя соседними обобщенными собственными векторами  $(A^{R_1}, B^{R_1})$ .

2. Решение на основе изоморфного представления  $A^{C_1}$ :

$$\lambda_s = \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2}j, \quad \alpha_s = \frac{1}{4}[I_n, jI_n](Y_s + P_n^T \bar{Y}_s P_1) \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $\sigma_{2s-1}, \sigma_{2s}, Y_s = [v_{2s-1}, v_{2s}]Q$ ,  $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ,  $P_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_{2s-1}, v_{2s}$  являются двумя соседними обобщенными собственными векторами  $(A^{C_1}, B^{C_1})$ .

3. Решение на основе изоморфного представления  $A^{R_1}$ :

$$\lambda_s = \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2}j, \quad \alpha_s = \frac{1}{16}[I_n, iI_n, jI_n, kI_n](Y_s + R_n^T Y_s R_1 + S_n^T Y_s S_1 + T_n^T Y_s T_1) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ j \\ k \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $\sigma_{2s-1}, \sigma_{2s}, Y_s = [v_{4s-3}, v_{4s-2}, v_{4s-1}, v_{4s}]Q$ ,  $v_{4s-3}, v_{4s-2}, v_{4s-1}, v_{4s}$  являются двумя соседними обобщенными собственными векторами  $(A^{R_1}, B^{R_1})$ ,

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad R_n = \begin{bmatrix} 0 & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad S_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Пример 1.** Эксперименты с распознаванием цветных лиц. На основе приведенного выше алгоритма декомпозиции строится схема распознавания цветного лица с использованием классификатора ближайшего соседа посредством оптимальной проекции цветного лица на вектор признаков, как показано на рис.5.

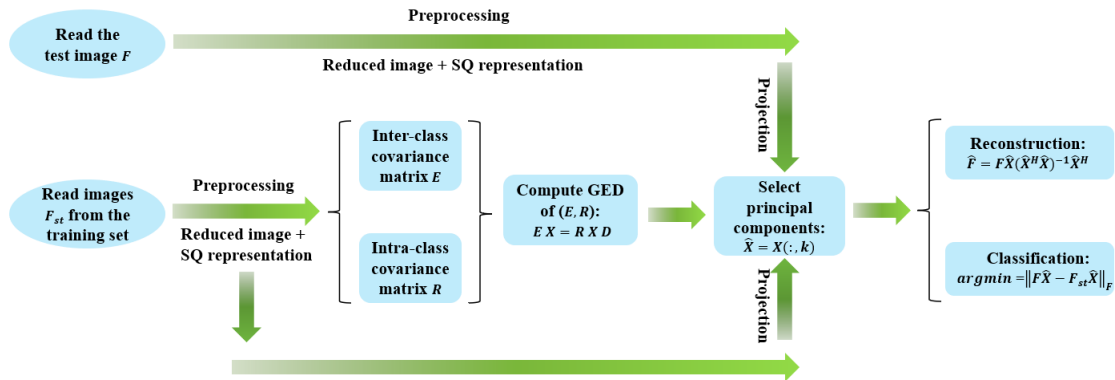


Рис. 5: Блок-схема распознавания лиц.

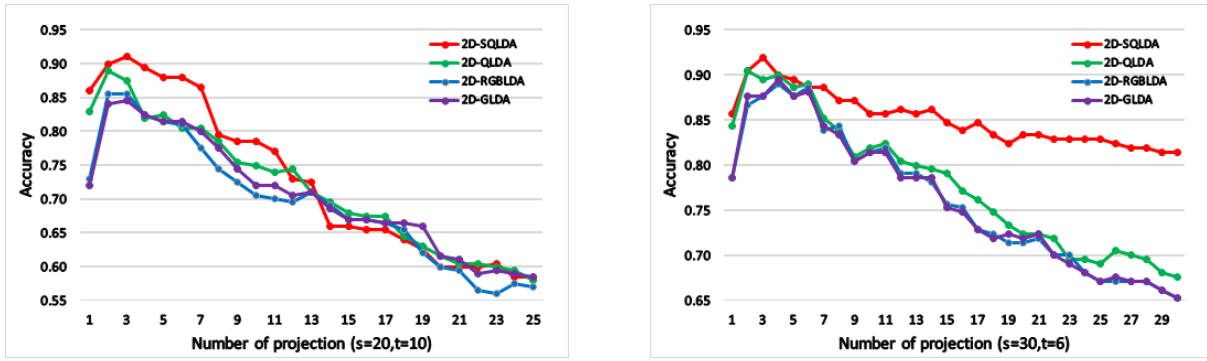


Рис. 6: Распознавание лиц на основе базы данных.

Она сравнивается с тремя традиционными схемами распознавания лиц в двух базах данных (база данных «Faces95», база данных «FEI»). **2D-SQLDA**: схема распознавания лиц на основе GEDSQ. **2D-QLDA** (S.T. Ling и др. 2022): схема распознавания лиц, основанная на совместной диагонализации кватернионных матриц. **2D-RGBLDA** (Q. Kang и др. 2012): схема распознавания лиц на основе трехцветных каналов RGB. **2D-GLDA** (M. Li и др. 2005): схема распознавания лиц на основе изображений в оттенках серого. На рис. 6 показан уровень точности распознавания лиц в двух базах данных. В «Faces95» отбираются 20 человек, и первые 10 изображений используются для тренировки, в базе данных «FEI» отбираются 30 человек, и первые 6 изображений используются для тренировки, а остальные изображения в базе данных используются для тестирования.

В четвертой главе используется изоморфная матрица вещественного представления, представленная в главе 3. Впервые были предложены теория и алгоритм сингулярной декомпозиции и обобщенной сингулярной декомпозиции разделенных кватернионных матриц.

**Теорема 4.** (SVDSQ) Пусть  $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$ . Тогда существуют две разделенные кватернионные унитарные матрицы  $U \in \mathbf{H}_s^{m \times m}$  и  $V \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$  такие, что

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H, \quad (9)$$

где  $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ ,  $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \dots \geq |\sigma_r| \geq 0$ ,  $\sigma_t = \frac{\tau_t + \tau_{n+t}}{2} + \frac{\tau_t - \tau_{n+t}}{2}j$ ,  $t = 1, 2, \dots, r$ ,  $r \leq n$ ,  $\tau_s = 0$  если  $s > p$ ,  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$  являются положительными сингулярными значениями  $A^{R_1}$ .

**Теорема 5.** (GSVDSQ) Пусть  $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbf{H}_s^{p \times n}$ ,  $m \geq n$ . Тогда существуют две унитарные матрицы  $U \in \mathbf{H}_s^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbf{H}_s^{p \times p}$ , две диагональные матрицы

$\Sigma_A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ ,  $\Sigma_B \in \mathbf{H}_s^{q \times q}$ , и неособая матрица  $W \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ , такие, что

$$U^H A W = \begin{bmatrix} \Sigma_A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V^H B W = \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где  $\Sigma_A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_n| \leq 1$ ,  $\Sigma_B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_q)$ ,  $1 \geq |\beta_1| \geq |\beta_2| \geq \dots \geq |\beta_q| \geq 0$ ,  $q = \min\{p, n\}$ .

В пятой главе новый алгоритм декомпозиции по сингулярным значениям для разделенных кватернионных матриц построен путем использования комбинаторного спаривания по четности сингулярных значений для декомпозиции по сингулярным значениям матриц вещественного представления. Исключаются сингулярные значения делителя нуля в процессе построения, обеспечивая при этом нормальную максимизацию сингулярных значений разделенного кватерниона.

**Замечание 6.** Следует отметить, что SVDSQ не является единственным по двум причинам:

1. Существование классов эквивалентности разделенных кватернионов приводит к неединственности SVDSQ. Предположим, что  $\sigma = a + bk$ . Тогда существует единственный разделенный кватернион  $p$  удовлетворяющий условию  $\sigma \sim \check{\sigma}$ , то есть  $\sigma = p\check{\sigma}p^H$ . Более того,  $A = \sum_{t=1}^r u_t p_t (p_t^H \sigma_t p_t) (v_t p_t)^H = \sum_{t=1}^r \check{u}_t \check{\sigma}_t \check{v}_t^H$ .

2. Разнообразие форм построения сингулярных значений приводит к неединственности SVDSQ. В таблице 1  $\tau_t, \tau_{n+t}, \tau_{2t-1}, \tau_{2t}$  являются сингулярными значениями  $A^{R_1}$  и  $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_{2n}$ .  $N(0)$  обозначает количество нулей в  $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$ .

Форма	Конструктивные формы	Модуль	Числа делителей нуля
1	$\sigma_t = \frac{\tau_t + \tau_{n+t}}{2} + \frac{\tau_t - \tau_{n+t}}{2}j$	$ \sigma_t ^2 =  \tau_t \tau_{n+t} $	$\begin{cases} N(0), & \text{если } N(0) \leq n; \\ 2n - N(0), & \text{если } N(0) > n; \end{cases}$
2	$\sigma_t = \frac{\tau_{2t-1} + \tau_{2t}}{2} + \frac{\tau_{2t-1} - \tau_{2t}}{2}k$	$ \sigma_t ^2 =  \tau_{2t-1} \tau_{2t} $	0 или 1

Таблица 1: Сингулярные значения разделенных кватернионных матриц.

**Пример 1.** Схема цветных водяных знаков создается на основе декомпозиции по сингулярным значениям разделенной матрицы кватернионов. Идея обработки заключается во внедрении водяного знака в матрицу, состоящую из наибольшего сингулярного значения блочной матрицы основного изображе-

ния, как показано на рис.7. Извлечение представляет собой обратный процесс, описанный на рис.8. Основными преимуществами этой схемы являются ее удовлетворительная производительность с точки зрения стеганографии, устойчивости и способности восстановления водяных знаков.

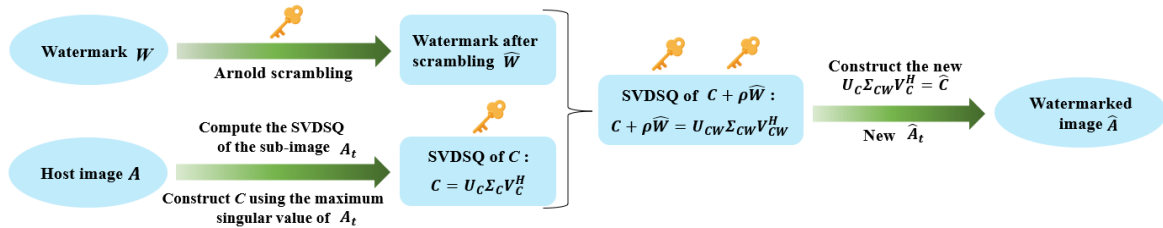


Рис. 7: Блок-схема встраивания водяного знака.

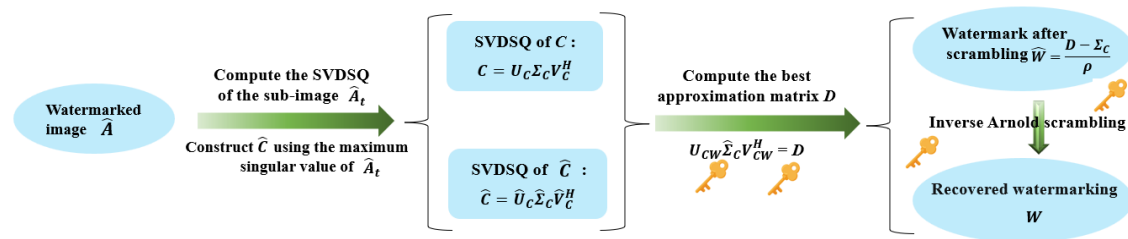


Рис. 8: Блок-схема извлечения водяного знака.

**I. Проверка невидимости схемы водяных знаков.** Для оценки невидимости водяного знака была выполнена всесторонняя проверка на видимость водяного знака  $\rho$  в интервале  $[0.02, 0.4]$ , как показано на рис.9. Из рис.9 видно, что предложенный алгоритм имеет хорошие характеристики маскирования водяных знаков. Не подвергаясь атаке, исходный водяной знак может быть практически полностью восстановлен.

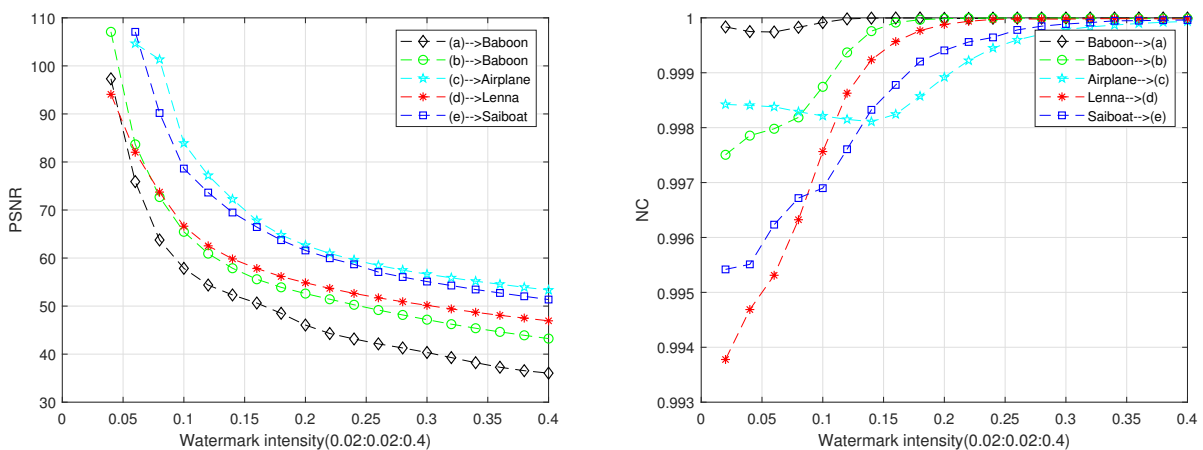


Рис. 9: PSNR изображений с водяными знаками и NC извлеченных водяных знаков.



**II. Проверка устойчивости схемы водяных знаков.** К изображению водяного знака применяются различные атаки (A1-Отсутствие атаки, A2-Гауссовский шум [0.01], A3-шум «соль и перец» [0.05], A4-спекл-шум [0.05], A5-коррекция яркости [0.3,1], A6-размытие [(5,5),0.5], A7-Гауссовская низкочастотная фильтрация [250], A8-Гауссовская гладкая фильтрация [150]), что в основном показывает устойчивость вычислительной схемы с точки зрения четкости извлекаемого водяного знака. В таблице 2 мы выбрали основное изображение  $512 \times 512$  и водяной знак  $32 \times 32$  для проверки надежности 3 схем водяных знаков. Выбор силы  $\rho$  водяного знака основан на достижении максимального значения NC без атаки.  $k$  представляет собой зашифрованное число. На данный момент значения NC изображений водяных знаков также указаны в таблице 2.

Атака	Наша схема	Y. Chen, 2021	Q. Su, 2013	Атака	Наша схема	Y. Chen, 2021	Q. Su, 2013
$k=1$	$\rho=0.25$	$T=0.055$	$T=0.15$	$k=1$	$\rho=0.25$	$T=0.055$	$T=0.15$
A1				A2			
NC	1.0000	1.0000	1.0000	NC	0.9951	0.9136	0.9876
A3				A4			
NC	0.9911	0.9890	0.9863	NC	0.9918	0.9096	0.9914
A5				A6			
NC	0.9939	0.9948	0.9601	NC	0.9995	0.9978	1.0000
A7				A8			
NC	0.9998	0.9989	1.0000	NC	0.9995	0.9926	0.9995

Таблица 2: Водяные знаки и NCs, извлеченные под воздействием атаки.

Очевидно, что все схемы водяных знаков, предложенные в данной диссертации, обладают хорошей устойчивостью к перечисленным атакам, где все значения NC остаются выше 0.99. Предлагаемый метод нанесения водяных знаков более адаптируем, чем другие схемы нанесения водяных знаков, когда

встроенный водяной знак извлекается на основе теста атаки, приведенный в данной диссертации.

## **Заключение**

Диссертация посвящена развитию теории и построению алгоритмов декомпозиции матриц в четырехмерной алгебре. В ходе выполнения диссертационной работы были получены следующие основные результаты:

1. Предложен вещественный сохраняющий структуру алгоритм для низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц. На его основе создана схема сжатия цветного изображения и схема шумоподавления трехмерного сигнала. Вычислительный эксперимент показал, что он имеет лучшие эффекты сжатия и хранения. В процессе шумоподавления не генерируются избыточные реальные части и эффект шумоподавления лучше;
2. Предложены два комплексных сохраняющих структуру алгоритма для полноранговых декомпозиций кватернионных матриц. На их основе создана схема классификации разреженного представления цветных изображений лиц;
3. С помощью трех изоморфных вещественных или комплексных представлений построены алгебраическая теория и алгоритм обобщенной декомпозиции по собственным значениям разделенных кватернионов. Созданы методы двумерного линейного дискриминантного анализа в алгебре разделенных кватернионов и новая схема цветового распознавания лиц. Численные расчеты показали его высокую точность;
4. Впервые построены теория и алгоритм обобщенной инверсии разделенной кватернионной матрицы декомпозиции по сингулярным значениям. На его основе предложены два новых алгебраических метода для решения задач наименьших квадратов;
5. Для разделенных кватернионных матриц предложен новый алгоритм декомпозиции по сингулярным значениям. На его основе разработана схема цветных водяных знаков, позволяющая обеспечить невидимость, устойчивость и восстановление водяных знаков. Предлагаемый метод водяных знаков более адаптируем, чем другие схемы водяных знаков.

## Публикации автора по теме диссертации

1. G. Wang, T. Jiang, V. I. Vasil'ev, Z. Guo. On singular value decomposition for split quaternion matrices and applications in split quaternionic mechanics // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2024. — Т. 436. — С. 1–12.
2. G. Wang. A real structure-preserving algorithm for the low-rank decomposition of pure imaginary quaternion matrices and its applications in signal processing // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. — 2023. — Т. 11, № 4. — С. 117–129.
3. G. Wang, T. Jiang, D. Zhang, V. I. Vasil'ev. An efficient method for the split quaternion equality constrained least squares problem in split quaternionic mechanics // *Computational and Applied Mathematics*. — 2023. — Т.42, № 258. — С. 1–13.
4. G. Wang, T. Jiang, V. I. Vasil'ev, Z. Guo. An efficient method for Maxwell's equations with a discrete double-curl operator in split quaternionic electromagnetics // *The European Physical Journal Plus*. — 2023. — Т. 341, № 138. — С. 1–6.
5. G. Wang, D. Zhang, V. I. Vasil'ev, T. Jiang. A complex structure-preserving algorithm for the full rank decomposition of quaternion matrices and its applications // *Numerical Algorithms*. — 2022. — Т. 91, № 4. — С. 1461–1481.
6. G. Wang, T. Jiang, Z. Guo, D. Zhang. A complex structure preserving algorithm for split quaternion matrix LDU decomposition in split quaternion mechanics // *Calcolo*. — 2021. — Т. 34. — С. 1–15.
7. G. Wang, D. Zhang, Z. Guo, T. Jiang. Cramer's rule over quaternions and split quaternions: A unified algebraic approach in quaternionic and split quaternionic mechanics // *Journal of Algebra and Its Applications*. — 2021. — Т. 20, № 5. — С. 2150080.
8. T. Jiang, G. Wang, Z. Guo, D. Zhang. Algebraic algorithms for a class of Schrödinger equations in split quaternionic mechanics // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2024. — С. 1-11.
9. D. Zhang, T. Jiang, G. Wang, V. I. Vasil'ev. On singular value decomposition and generalized inverse of a commutative quaternion matrix and applications // *Applied Mathematics and Computation*. — 2024. — Т. 460. — С. 128291.

10. *D. Zhang, T. Jiang, C. Jiang, G. Wang.* A complex structure-preserving algorithm for computing the singular value decomposition of a quaternion matrix and its applications // *Numerical Algorithms.* — 2024.— T. 95, № 1.— C. 267-283.
11. *D. Zhang, T. Jiang, G. Wang, V. I. Vasil'ev.* Two novel numerical methods for the diagonalisation of a reduced biquaternion matrix in the reduced biquaternionic algebra // *Linear and Multilinear Algebra.* — 2024.— T. 71, № 1.— C. 139-152.
12. *Z. Guo, T. Jiang, G. Wang, V. I. Vasil'ev.* Algebraic algorithms for eigenproblems of a reduced biquaternion matrix and applications // *Applied Mathematics and Computation.* — 2024.— T. 463.— C. 128358.
13. *T. Jiang, D. Zhang, Z. Guo, G. Wang, V. I. Vasil'ev.* Algebraic techniques for canonical forms and applications in split quaternionic mechanics // *Journal of Mathematics.* — 2023.— T. 2023.— C. 4599585.
14. *D. Zhang, T. Jiang, G. Wang, V. I. Vasil'ev.* An efficient method for the total least squares problem in reduced biquaternionic electromagnetics // *The European Physical Journal Plus.* — 2023.— T. 138, № 9.— C. 826.
15. *D. Zhang, G. Wang, V. I. Vasil'ev, T. Jiang.* Algebraic methods for equality constrained least squares problems in commutative quaternionic theory // *Mathematical Methods in the Applied Science.* — 2023.— T. 46, № 2.— C. 1699–1708.
16. *Z. Guo, T. Jiang, V. I. Vasil'ev, G. Wang.* A novel algebraic approach for the Schrodinger equation in split quaternionic mechanics // *Applied Mathematics Letters.* — 2023.— T. 137.— C. 108485.
17. *Z. Guo, T. Jiang, V. I. Vasil'ev, G. Wang* Complex structure-preserving method for Schrodinger equations in quaternionic quantum mechanics // *Numerical Algorithms.* — 2023.— C. 1-17.
18. *Z. Guo, T. Jiang, C. Jiang, G. Wang.* Algebraic techniques for eigenvalues and eigenvectors of a nectarine matrix in nectarine algebra // *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* — 2023.— T. 46, № 4.— C. 4751-4762.
19. *Ван Г.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Схема цветного водяного знака на основе разложения по сингулярному значению разделенных кватернионных матриц». 2024.