
На правах рукописи

Су Линдэ

Численное решение обратных задач для параболических уравнений

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2019

Работа выполнена на кафедре вычислительных технологий Института математики и информатики ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова".

Научный руководитель: **Васильев Василий Иванович**
доктор физико-математических наук, профессор
«Институт математики и информатики» СВФУ,
заведующий кафедрой вычислительных технологий

Официальные оппоненты: **Карчевский Андрей Леонидович**,
доктор физико-математических наук, профессор РАН,
ФГБУН «Институт математики им. С.Л. Соболева» РАН
главный научный сотрудник лаборатория обратных
задач математической физики, г. Новосибирск
Тихонов Роман Семенович,
кандидат технических наук, научный сотрудник,
Институт проблем нефти и газа СО РАН,
«Якутский научный центр СО РАН», г. Якутск,
обособленное подразделение ФГБУН Федеральный
исследовательский центр

Ведущая организация: ФГБУН «Институт вычислительной математики
и математической геофизики» СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится «25» декабря 2019 года в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.306.04 при СВФУ им. М.К. Аммосова, расположенном по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского 58, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СВФУ им. М.К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58 и на сайте университета по адресу <https://www.s-vfu.ru/upload/iblock/da9/da9b754774f7f8268309b0f4b30f61a1.pdf>

Автореферат разослан «24» октября 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., доцент



Саввинова Н.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Диссертационная работа посвящена разработке численных методов решения обратных задач для параболических уравнений.

Разработка эффективных численных методов решения обратных задач для параболических уравнений является актуальной проблемой в силу их практической важности и связанной с этим необходимостью создания эффективных алгоритмов решения многомерных обратных задач.

Рассматриваемые в диссертации обратные задачи заключаются в идентификации неизвестных параметров задачи с помощью информации, полученной от ряда наблюдений до причинных факторов, которые их породили. В последние десятилетия, теория и методы решения обратных задач стали одной из самых быстроразвивающихся областей прикладной и вычислительной математики.

В классическом смысле обратная задача всегда рассматривается как некорректная задача, это означает, что многие стандартные численные методы не могут достичь высокой точности при решении обратных задач. Для приближенного решения этих задач основное внимание уделяется разработке устойчивых вычислительных алгоритмов, учитывающих особенности рассматриваемых обратных задач. Обратные задачи имеют широкий диапазон приложений в науке и технике, но, как правило, определение их решения сопряжено с трудностями:

- обратные задачи являются нелинейными по существу;
- обратные задачи некорректны или условно корректны;
- вычислительные алгоритмы решения обратных задач требуют больших вычислительных ресурсов.

Теоретическое исследование, разработка эффективных численных методов решения обратных задач привлекло внимание многих исследователей. В 1960-х годах А.Н. Тихонов выпустил серию работ по обратным и некорректным задачам, разработал методы регуляризации некорректных задач. В 1980-х годах китайский математик Feng Kang приступил к исследованию численного метода решения обратных задач. В 1994 году Per C. Hansen и многие другие его сотрудники разработали пакет подпрограмм Matlab для легкого проведения экспериментов с анализом и решением дискретных некорректных задач с помощью методов регуляризации. В последние годы профессора V. Isakov, D. Lesnic, A.M. Денисов, П.Н. Вабищевич, С.И. Кабанихин, С.А. Шишленин, В.Л. Камынин, Ali U. Sazaklioglu, M. Dehghan, В.И. Васильев, M. Li и T.S. Jiang и другие внесли большой вклад в

теорию и создание вычислительных методов решения обратных задач для параболических уравнений.

Цель диссертационной работы. Разработка и численная реализация эффективных вычислительных алгоритмов решения обратных задач для параболических уравнений на основе конечно-разностного метода, метода конечных элементов и бессеточного метода. Для достижения поставленной цели возникла необходимость решения следующих **задач**:

- разработать итерационный метод численного решения обратной задачи определения множителя правой части параболического уравнения, зависящего от пространственных переменных;
- разработать вычислительный алгоритм одновременной идентификации младшего (старшего) коэффициента и правой части параболического уравнения, зависящих от времени;
- разработать эффективный численный метод решения одномерной обратной задачи продолжения решения для параболического уравнения, в том числе, граничной обратной задачи;
- разработать эффективный бессеточный метод решения ретроспективной обратной задачи для параболического уравнения на основе использования локальных радиальных базисных функций.

Метод исследования. В работе использованы методы математической физики, теоретические основы численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, теории обратных задач, конечно-разностный метод, метод конечных элементов, бессеточный метод, язык высокого уровня Python и его библиотеки.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Новый итерационный метод численной идентификации множителя правой части параболического уравнения, зависящего от пространственных переменных.
2. Новый метод одновременного определения правой части и коэффициентов параболического уравнения, зависящих от времени.
3. Эффективный метод решения задачи продолжения и граничной обратной задачи для одномерного параболического уравнения.
4. Создание новых численных методов решения ретроспективной обратной задачи для параболического уравнения.

Выносимые положения соответствуют следующим пунктам паспорта специаль-

ности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1. Положения 1 и 2 соответствуют пункту паспорта 2 "Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей".

2. Положения 1, 2, 3 соответствуют пункту паспорта 3 "Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий".

3. Положения 1 – 4 соответствуют пункту паспорта 4 "Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента".

Научная новизна. Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

- для численного решения обратной задачи определения множителя правой части параболического уравнения, зависящего от пространственных переменных, предложен итерационный метод сопряженных градиентов;
- разработан вычислительный алгоритм одновременной идентификации младшего (старшего) коэффициента и правой части параболического уравнения, зависящих от времени;
- предложен численный метод решения одномерной задачи продолжения и граничной обратной задачи для параболического уравнения, заключающийся на суперпозиции решений двух краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на каждом временном слое;
- для решения ретроспективной обратной задачи для параболического уравнения предложены эффективные бессеточные методы, основанные на использовании локальных радиальных базисных функций.

Достоверность. Подтверждается использованием современных методов вычислительной математики, тестированием предложенных вычислительных алгоритмов решения обратных задач для параболических уравнений на модельных обратных задачах с точными аналитическими решениями.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в разработке новых численных методов решения обратных задач для параболических уравнений. Практическая значимость диссертационной работы определяется возможностью применения разработанных алгоритмов и программ в решении обратных задач теплофизики, теории фильтра-

ции и распространения загрязнений в сплошных средах.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Семинар «Математическое моделирование задач мультифизики в областях с трещинами» (Якутск), 2017;
- Семинар «Математическое моделирование сложных процессов» (Якутск), 2019;
- Шестая международная конференция по численному анализу и приложениям (Болгария), 2016;
- Международная конференция «Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления» (Якутск), 2017;
- Международная конференция «Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач» (Якутск), 2018;
- IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования (СКТеММ'19)» (Москва), 2019;
- Международная конференция «Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач» (Якутск), 2019;
- Одиннадцатая международная молодёжная научная школа и конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск), 2019.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, в том числе 3 статьях [1–3] в журналах, рекомендованных ВАК, и 5 статьях [4–8] в журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора. Заключается в обсуждении постановок задач и выбора методов их численного решения, в разработке вычислительных алгоритмов, составлении и отладке компьютерных программ, проведении численных расчетов. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы. Работа изложена на 124 страницах, содержит 40 рисунков и графиков, 16 таблиц, библиографию из 122 наименований.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 17-01-00689, № 17-01-00732 и Мегагранта Правительства РФ Соглашение № 14Y26.31.0013.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проведенных исследований, сформулирована цель, поставлены задачи, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы и приводится краткое изложение результатов диссертации, формулируются основные положения, выносимые на защиту, а также дано краткое изложение содержания диссертации по главам.

В **первой главе** разработан итерационный метод решения обратной задачи идентификации неизвестного множителя правой части параболического уравнения, зависящего только от пространственных переменных, с помощью условия переопределения – значения искомой функции в конечный момент времени $u(\mathbf{x}, T)$.

Рассмотрим параболическое уравнение с начальным и граничным условиями и условием переопределения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x}, t)\operatorname{grad} u) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x}, T) = u^T(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $0 < k_1 \leq k(\mathbf{x}, t) \leq k_2$. В задаче (1) заданы исходные данные: $g(\mathbf{x}, t)$, $u^0(\mathbf{x})$, $u^T(\mathbf{x})$, подлежит определению пара функций: $f(\mathbf{x})$, $u(\mathbf{x}, t)$.

Определим оператор \mathcal{A} – дискретный аналог эллиптического оператора в определяющем параболическом уравнении (1) на прямоугольной сетке, равномерной по каждому направлению с шагами $h_i = l_i/N_i, i = 1, 2, \dots, d$:

$$\mathcal{A}y = -\operatorname{div}(k(\mathbf{x}, t)\operatorname{grad} y) = \sum_{i=1}^d \mathcal{A}^{(i)}y, \quad \mathcal{A}^{(i)}y = -(k^{(i)}(\mathbf{x}, t) y_{\bar{x}_i})_{x_i}, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad (2)$$

где $k^{(i)}(\mathbf{x}, t) = k(x_1, \dots, x_i + 0.5h_i, \dots, x_d, t)$. Оператор \mathcal{A} на сеточных функциях, обращающихся в нуль на граничных узлах $y(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \partial\omega$, является самосопряженным, положительно определенным и ограниченным

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \quad 8k_1 \sum_{i=1}^d \frac{1}{l_i} \leq \|\mathcal{A}\| \leq 4k_2 \sum_{i=1}^d \frac{1}{h_i^2}.$$

Проводя аппроксимацию по времени на равномерной сетке с шагом $\tau = T/M$,

построим чисто неявный дискретный аналог задачи (1):

$$\begin{cases} \frac{y^{m+1} - y^m}{\tau} + \mathcal{A}_{m+\sigma}(\sigma y^{m+1} + (1 - \sigma)y^m) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, t_{m+\sigma}), & m = 0, \dots, M - 1, \\ y^0(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}), & y^M(\mathbf{x}) = u^T(\mathbf{x}), \quad \sigma \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3)$$

Численное решение системы уравнений (3) проведем с помощью быстро сходящегося итерационного метода сопряженных градиентов.

Приведем результаты численных расчетов на модельных задачах. Будем использовать следующие обозначения:

$$\text{Max } \epsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |f_k(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i)|, \quad \text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_k(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i))^2},$$

а также, зашумленное по нижеследующей формуле, дополнительное условие:

$$u_{\delta}^T(\mathbf{x}) = u^T(\mathbf{x}) + \delta\mu,$$

где δ – уровень шума, μ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(-0.5, 0.5)$.

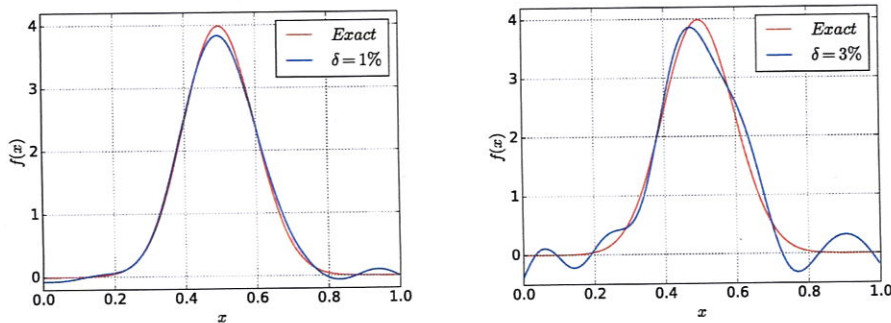


Рис. 1. Результаты обратной задачи с разными δ .

Пример 1. Одномерная задача. Исходные данные задаем в виде:

$$k(x, t) = 1, \quad g(x, t) = 1, \quad u^0(x) = 0, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, T], \quad l = T = 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{\nu\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-0.5l)^2}{2\nu^2}\right), \quad \nu = 10^{-1}.$$

Результаты расчетов, представленные на Рис.1, показывают достаточно хорошее совпадение восстановленного множителя правой части даже при задании в условии переопределения искусственного шума порядка одного и трех процентов. При увеличении шума точность идентификации искомого множителя падает.

Пример 2. Двумерная задача. Расчеты проводились при следующих значениях исходных данных задачи:

$$k(\mathbf{x}, t) = 1, \quad u^0 = 0, \quad g(\mathbf{x}, t) = 10 \exp(-t^2),$$

$$f(\mathbf{x}) = \exp(-(x_1 - 0.5l_1)^2 - (x_2 - 0.5l_2)^2),$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0, l_1] \times [0, l_2], \quad t \in [0, T], \quad l_1 = l_2 = 10, \quad T = 0.5.$$

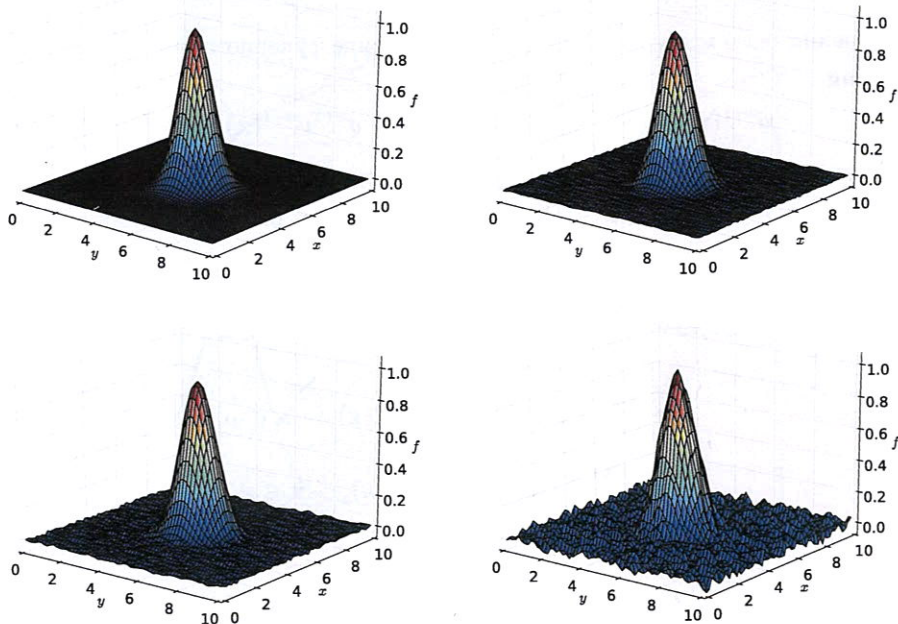


Рис. 2. Точное и вычисленные $f(\mathbf{x})$ с разным уровнем шума $\delta = 0.5\%, 1\%, 5\%$.

Во **второй** главе предлагается эффективный вычислительный алгоритм решения обратной задачи одновременного определения правой части и младшего (или старшего) коэффициента, зависящих от времени.

1. Одновременное определение правой части и младшего коэффициента.

Рассмотрим параболическое уравнение с начальным условием, граничным условием Дирихле и двумя условиями переопределения:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(\mathbf{x})\operatorname{grad} u) + p(t)u = q(t)g(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = \tilde{h}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x}^*, t) = \Phi(t), \quad u(\mathbf{x}^{**}, t) = \Psi(t), & \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**} \in \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Заданы функции: $k(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}, t), u^0(\mathbf{x}), \tilde{h}(\mathbf{x}, t), \Phi(t), \Psi(t)$, надо найти: $p(t), q(t), u(\mathbf{x}, t)$.

Чисто неявный дискретный аналог задачи (4) на каждом временном слое запишем в виде:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \mathcal{A}u^{n+1} + p^{n+1}u^n = q^{n+1}g^n, \quad \mathbf{x} \in \omega. \quad (5)$$

Решение системы уравнений (5) ищем в виде суперпозиции трех сеточных функций

$$u^{n+1}(\mathbf{x}) = y^{n+1}(\mathbf{x}) + p^{n+1}\mu^{n+1}(\mathbf{x}) + q^{n+1}\nu^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega$$

с граничными условиями, являющимися дискретными аналогами условий переопределения: $y^{n+1}(\mathbf{x}) = \tilde{h}(\mathbf{x}, t^{n+1}), \mu^{n+1}(\mathbf{x}) = \nu^{n+1}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\omega$. Таким образом, имеем три системы линейных уравнений с условиями Дирихле:

$$\frac{y^{n+1}(\mathbf{x}) - u^n(\mathbf{x})}{\tau} + \mathcal{A}y^{n+1}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

$$\frac{\mu^{n+1}(\mathbf{x})}{\tau} + \mathcal{A}\mu^{n+1}(\mathbf{x}) = -u^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

$$\frac{\nu^{n+1}(\mathbf{x})}{\tau} + \mathcal{A}\nu^{n+1}(\mathbf{x}) = g^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

двумя линейными уравнениями, получающимися из дополнительных условий

$$\begin{cases} p^{n+1}\mu^{n+1}(\mathbf{x}^*) + q^{n+1}\nu^{n+1}(\mathbf{x}^*) = \Phi^{n+1} - y^{n+1}(\mathbf{x}^*), \\ p^{n+1}\mu^{n+1}(\mathbf{x}^{**}) + q^{n+1}\nu^{n+1}(\mathbf{x}^{**}) = \Psi^{n+1} - y^{n+1}(\mathbf{x}^{**}). \end{cases}$$

В численных расчетах шум задается по формуле:

$$\Phi_\delta^n = \Phi^n + \delta\mu, \quad \Psi_\delta^n = \Psi^n + \delta\mu, \quad \delta - \text{уровень шума.}$$

μ - случайные величины из равномерного распределения в $[-1, 1]$

Пример 1. Для одномерной модельной задачи зададим следующие исходные данные:

$$\bar{\Omega} = [0, 1], \quad t \in [0, 2], \quad k(x) = 1, \quad g(x, t) = 6x(1 + \exp(10t - 5T)),$$

$$p(t) = -\frac{30t^2}{1 + 10t^3}, \quad q(t) = \frac{1 + 10t^3}{1 + \exp(10t - 5T)},$$

$$h = 0.005, \quad \tau = 0.002 \quad \text{и} \quad x^* = 0.25, \quad x^{**} = 0.5.$$

Результаты расчетов, представленные на Рис.3, показывают удовлетворительную точность идентификации коэффициентов $p(t)$, $q(t)$ при задании шума порядка 1 процента. При увеличении шума точность их определения падает.

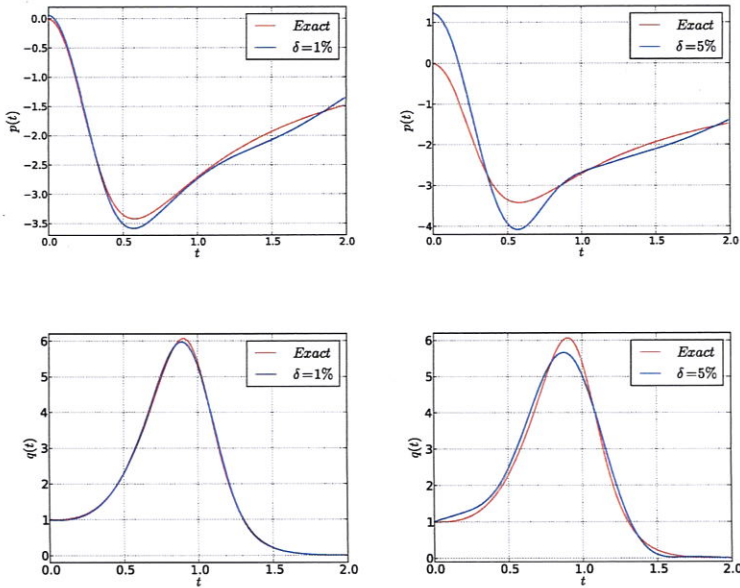


Рис. 3. Решение $p(t)$ и $q(t)$ с разными $\delta = 1\%$, 5% .

Пример 2. Приведем пример решения двумерной обратной задачи при:

$$k(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0, 1], \quad g(\mathbf{x}) = -6(x_1 + x_2), \quad u^0(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3,$$

$$p(t) = -\frac{2\zeta t \exp(-\zeta t^2)}{2 - \exp(-\zeta t^2)}, \quad q(t) = 2 - \exp(-\zeta t^2), \quad \zeta > 0 - \text{постоянная.}$$

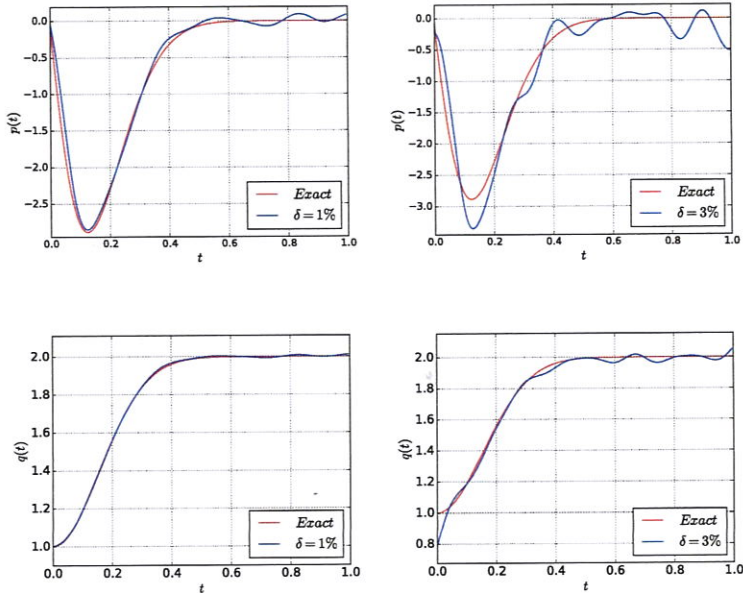


Рис. 4. Решение $p(t)$ и $q(t)$ с $\zeta = 20$ и разными $\delta = 1\%$, 3% .

Задача решена методом конечных элементов. Результаты численной реализации построенного вычислительного алгоритма представлены на рис.4.

2. Одновременное определение правой части и старшего коэффициента.

Рассмотрим параболическое уравнение с начальным условием, граничным условием Робина и дополнительными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\operatorname{div}(k(\mathbf{x})\operatorname{grad} u) + c(\mathbf{x})u = b(t)f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, T] \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \\ k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial n} + g(\mathbf{x})u = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in [0, T], \\ u(\mathbf{x}^*, t) = \Phi(t), u(\mathbf{x}^{**}, t) = \Psi(t), & \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**} \in \Omega, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (6)$$

Заданы функции $k(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}, t)$, $u^0(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$, $c(\mathbf{x})$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$. Требуется определить функции $a(t)$, $b(t)$, $u(\mathbf{x}, t)$.

Поставленную задачу будем решать методом конечных элементов с линейри-

зованной аппроксимацией по времени по схеме Кранка-Николсона:

$$\alpha(t^{n+1/2})\beta(t^{n+1/2}) = \frac{1}{2}\alpha(t^{n+1})\beta(t^n) + \frac{1}{2}\alpha(t^n)\beta(t^{n+1}) + o(\tau^2).$$

Имеем $\forall v \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{H}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} v dx + \frac{a^n}{2} \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) \text{grad } u^{n+1} \text{grad } v dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) u^{n+1} v ds \\ + \frac{a^{n+1}}{2} \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) \text{grad } u^n \text{grad } v dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) u^n v ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) u^n v dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) u^{n+1} v dx = \frac{b^n}{2} \int_{\Omega} f^{n+1} v dx + \frac{b^{n+1}}{2} \int_{\Omega} f^n v dx, \\ \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, 0) v dx = \int_{\Omega} u^0(\mathbf{x}) v dx. \end{aligned}$$

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений осуществляем с помощью метода суперпозиции трех сеточных функций:

$$u^{n+1}(\mathbf{x}) = y^{n+1}(\mathbf{x}) + a^{n+1} \mu^{n+1}(\mathbf{x}) + b^{n+1} \nu^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Для определения $y^{n+1}(\mathbf{x})$, мы используем уравнение

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{y^{n+1} - u^n}{\tau} v dx + \frac{a^n}{2} \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) \text{grad } y^{n+1} \text{grad } v dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) y^{n+1} v ds, \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) y^{n+1} v dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) u^n v ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) u^n v dx = \frac{b^n}{2} \int_{\Omega} f^{n+1} v dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, две другие функции $\mu^{n+1}(\mathbf{x})$, $\nu^{n+1}(\mathbf{x})$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\mu^{n+1}}{\tau} v dx + \frac{a^n}{2} \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) \text{grad } \mu^{n+1} \text{grad } v dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) \mu^{n+1} v ds \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) \mu^{n+1} v dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) \text{grad } u^n \text{grad } v dx, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\nu^{n+1}}{\tau} v dx + \frac{a^n}{2} \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) \text{grad } \nu^{n+1} \text{grad } v dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) \nu^{n+1} v ds \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) \nu^{n+1} v dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^n v dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы определить $a(t)$ и $b(t)$ используем дополнительные условия, в итоге получаем следующие линейные уравнения

$$\begin{cases} a^{n+1}\mu^{n+1}(\mathbf{x}^*) + b^{n+1}\nu^{n+1}(\mathbf{x}^*) = \Phi^{n+1} - y^{n+1}(\mathbf{x}^*), \\ a^n\mu^{n+1}(\mathbf{x}^{**}) + b^{n+1}\nu^{n+1}(\mathbf{x}^{**}) = \Psi^{n+1} - y^{n+1}(\mathbf{x}^{**}). \end{cases}$$

Пример. Приведем результаты расчетов двумерной модельной задачи при следующих исходных данных:

$$f(\mathbf{x}, t) = 10\pi^2 \cos(\pi x_1) \cos(2\pi x_2), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$g(\mathbf{x}) = 0, \quad c(\mathbf{x}) = 0, \quad k(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad t \in [0, 0.02],$$

$$a(t) = 2 - \frac{1 + (1 - \zeta t) \exp(\zeta(t - 0.5T))}{(1 + \exp(\zeta(t - 0.5T)))^2}, \quad b(t) = \exp\left(\frac{5\pi^2 t}{1 + \exp(\zeta(t - 0.5T))}\right).$$

Зашумление дополнительных условий проведем по формулам: $\Phi_\delta^n = \Phi^n + \delta \varrho \max \Phi$, $\Psi_\delta^n = \Psi^n + \delta \varrho \max \Psi$, δ – уровень шума, ϱ – случайные величины, равномерно распределенные в $[-0.5, 0.5]$, а $\max \Phi$ (или $\max \Psi$) – максимальное значение Φ (или Ψ).

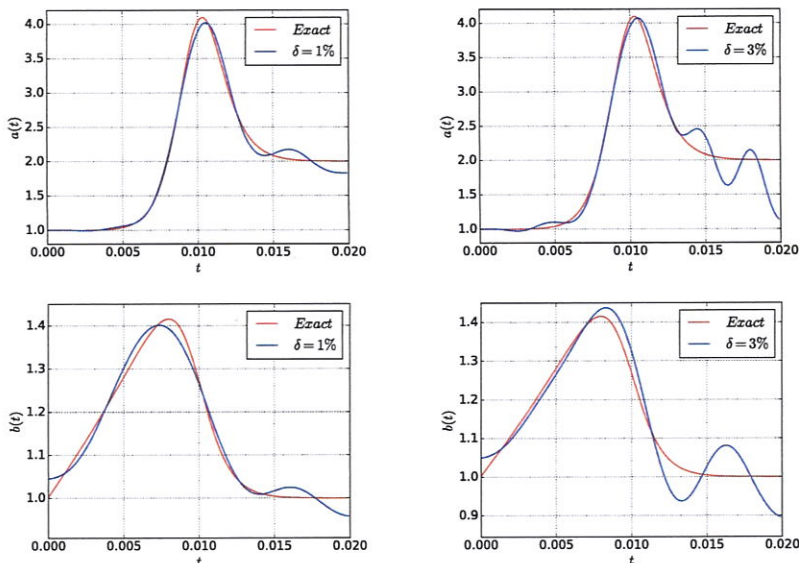


Рис. 5. Решение $a(t)$ и $b(t)$ с разными $\delta = 1\%$, 3% .

В расчетах используем $\tau = T/N$, $N = 100$ и $\mathbf{x}^* = (0.4, 0.3)$, $\mathbf{x}^{**} = (0.7, 0.8)$. Результаты расчетов, представленные на Рис.5, показывают достаточно хорошую точность восстановления искоемых коэффициентов параболического уравнения при малых значениях шума.

В третьей главе рассмотрим численное решение одномерной задачи продолжения решения. Требуется найти решение параболического уравнения, удовлетворяющее начальному и граничному условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x, t)u = f(x, t), & x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in [0, l], \\ -k(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu(t), & t \in (0, T], \end{cases} \quad (10)$$

а также условию переопределения

$$u(x^*, t) = \psi(t), \quad t \in (0, T].$$

Здесь x^* – заданная точка из $[0, l]$. Итак, заданы функции $k(x, t)$, $f(x, t)$, $u^0(x)$, $c(x, t)$, $\psi(t)$, $\mu(t)$, подлежит определению пара функций: $u(l, t) = \varphi(t)$, $u(x, t)$.

Конечно-разностный аналог поставленной задачи при переходе с $(n-1)$ -го временного слоя на n -ый временной слой имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} - \frac{1}{h} \left(k_{i+0.5}^n \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - k_{i-0.5}^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) + c_i^n u_i^n &= f_i^n \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \\ \frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\tau} - \frac{1}{h} \left(k_{0.5}^n \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \mu^n \right) + c_0^n u_0^n &= f_0^n, \quad u_m^n = \psi^n. \end{aligned}$$

Решение данной системы ищем в виде линейной комбинации сеточных функций:

$$u_i^n = y_i^n + \varphi^n v_i^n, \quad i = 0, 1, \dots, M.$$

Для вспомогательных функций на границах получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{y_0^n - y_0^{n-1}}{\tau} - \frac{1}{h} \left(k_{0.5}^n \frac{y_1^n - y_0^n}{h} + \mu^n \right) + c_0^n y_0^n &= f_0^n, \quad y_M^n = 0, \\ \frac{v_0^n}{\tau} - \frac{1}{h} \left(k_{0.5}^n \frac{v_1^n - v_0^n}{h} \right) + c_0^n v_0^n &= 0, \quad v_M^n = 1. \end{aligned}$$

После определения вспомогательных функций y_i^n , v_i^n , $i = 0, 1, \dots, M$ из дополнительного условия граничное условие Дирихле на правой границе вычисляем по формуле $u_m^n = (\psi^n - y_m^n) / \varphi^n$.

Численный пример. Рассмотрим пример со следующими данными:

$$u^0(x) = 0, \quad k(x, t) = 1, \quad c(x, t) = 1, \quad f(x, t) = 0,$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ \frac{2(T-t)}{T}, & \frac{T}{2} \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$\bar{\Omega} = [0, 1], \quad T = 1, \quad x^* = 0.8, \quad h = \tau = 0.01, \quad x^* = 0.5.$$

Возмущение дополнительного условия задаем по формуле: $\psi_\delta(t) = \psi(t) + 2\delta(\mu - \frac{1}{2})$, δ – уровень шума, μ – случайные величины равномерно распределенные в $[0, 1]$. Результаты расчетов с разным уровнем шума представлены на Рис.6.

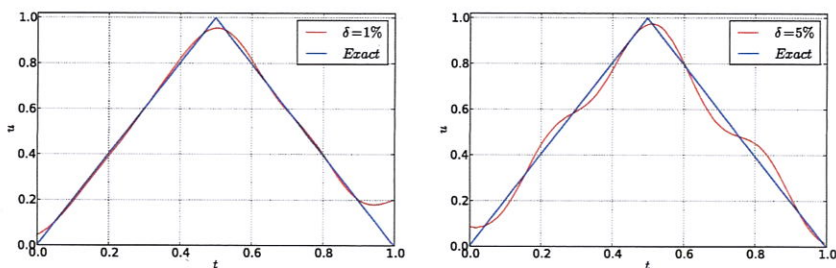


Рис. 6. Решение $\varphi(t)$ с уровнем шума $\delta = 1\%, 5\%$.

В **четвертой главе** рассмотрена ретроспективная обратная задача для параболического уравнения. В ней по заданному значению решения в конечный момент времени требуется найти решение задачи, включая начальное условие.

Рассмотрим параболическое уравнение с заданными граничным и финальным условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T), \\ u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T), \\ u(\mathbf{x}, T) = u^T(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (11)$$

В задаче (11) заданы: α , $f(\mathbf{x}, t)$, $u^T(\mathbf{x})$, $h(t)$. Требуется определить функцию $u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in [0, T)$. Для численного решения поставленной обратной задачи применили бессеточный метод, базирующийся на использовании локализованных радиальных базисных функций. Его преимущество заключается в том, что он строится без генерации сетки, и его легко применять для решения задач, определенных в нерегулярных вычислительных областях.

Предполагая, что в области Ω имеется n точек сбора, включающих n_B граничных точек и n_I внутренних точек. Для каждой точки сбора \mathbf{x}_i выбираем m ближайших соседних точек, чтобы сформировать соответствующую область локальной поддержки $\Omega = \{\mathbf{x}_i^k\}_{k=1}^m$. Используя взвешенную комбинацию нескольких ближайших значений функции, оператор Лапласа можно аппроксимировать с помощью выражения

$$\Delta u(\mathbf{x}_i) \approx \sum_{k=1}^m \omega_k^i u(\mathbf{x}_i^k).$$

Интерполяция в сочетании с радиальными базисными функциями имеет вид

$$u(\mathbf{x}_i) \approx \sum_{k=1}^m \lambda_k \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^k\|), \quad \Delta u(\mathbf{x}_i) \approx \sum_{k=1}^m \lambda_k \Delta \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^k\|).$$

Решив нижеследующую систему, мы можем определить все ω_k^i :

$$\sum_{k=1}^m \phi(\|\mathbf{x}_i^k - \mathbf{x}_i^{k^*}\|) \omega_k^i = \Delta \phi(\|\mathbf{x}_i^k - \mathbf{x}_i^{k^*}\|), \quad k^* = 1, 2, \dots, m.$$

Аппроксимируя производную по времени в уравнении теплопроводности имеем

$$\frac{u^{l+1}(\mathbf{x}) - u^l(\mathbf{x})}{\tau} = \alpha \Delta u^l(\mathbf{x}) + f^{l+1}(\mathbf{x}).$$

Используя вышеприведенную аппроксимацию оператора Лапласа, имеем

$$\alpha \sum_{k=1}^m \omega_k^i u^l(\mathbf{x}_i^k) + \frac{1}{\tau} u^l(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\tau} u^{l+1}(\mathbf{x}_i) - f^{l+1}(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n_I.$$

Построенную систему дополняем дискретным аналогом граничного условия

$$u^l(\mathbf{x}_i) = \tilde{h}^l(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n_B.$$

Поскольку каждый $f(\mathbf{x}_i^k)$ соответствует единственному $f(\mathbf{x}_j) \in \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$, то получаем систему линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей.

В расчетах используем следующее зашумленное финальное условие $u_0^T(\mathbf{x}) = u^T(\mathbf{x}) + \delta \mu$, δ – уровень шума, μ – случайные величины равномерно распределенные в $[0, 1]$.

Пример 1. В первом примере мы рассматриваем амeboподобную область с $n_B = 300$ и случайным образом выбираем $n_I = 1554$ внутренних точек и

$$u(x, y, t) = \exp(-t)(\cos x + \cos y).$$

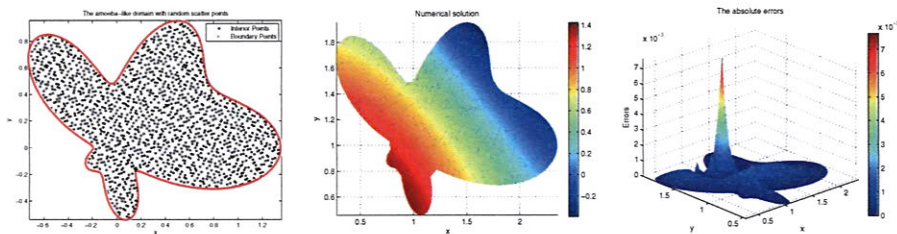


Рис. 7. Вычислительная область, численное решение, абсолютные ошибки.

$$T = 1.0, \quad \tau = 0.1, \quad m = 13, \quad \delta = 10^{-3}.$$

Граничные условия и конечные условия получены из аналитического решения.

Пример 2. Во втором примере мы рассматриваем звездообразную область с $n_B = 300$ граничными точками, случайным образом выбирая $n_I = 1424$ внутренних точек. Исходные данные задачи:

$$T = 1.0, \quad \tau = 0.1, \quad m = 9, \quad \delta = 10^{-3}.$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}t\right)\left(y \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) + x \sin\left(\frac{\pi}{2}y - \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

граничные условия и конечные условия получены из аналитического решения.

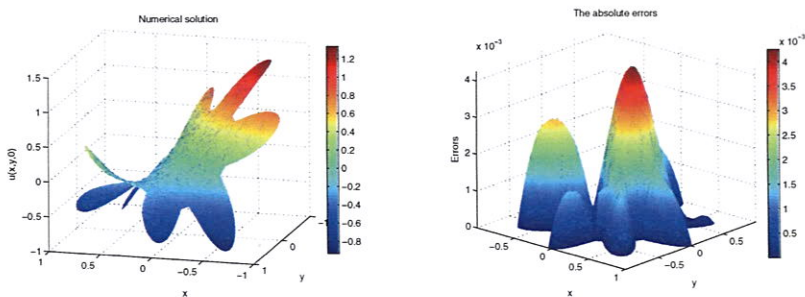


Рис. 8. Численное решение, абсолютные ошибки со случайными точками.

Заключение

Работа посвящена разработке и реализации численных методов решения обратных задач для параболических уравнений. В работе представлены следующие основные результаты:

1. Для численной реализации конечно-разностного аналога обратной задачи определения множителя правой части параболического уравнения, зависящего от пространственных переменных, предложен итерационный метод сопряженных градиентов. Численные расчеты, проведенные на одномерных и двумерных модельных задачах, показали достаточно быструю сходимость и высокую точность предложенного итерационного метода.

2. Разработан вычислительный алгоритм одновременной идентификации множителей младшего (старшего) коэффициента и правой части параболического уравнения, зависящих от времени. Метод заключается в представлении приближенного решения на верхнем временном слое в виде линейной комбинации трех краевых задач для эллиптического уравнения. Численная реализация на модельных одномерных и двумерных обратных задачах показала высокую эффективность предложенного вычислительного алгоритма.

3. Для численного решения одномерной граничной обратной задачи и задачи продолжения для параболического уравнения предложен численный метод, основанный на суперпозиции решений двух краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на каждом временном слое. Вычислительный эксперимент на модельных обратных задачах показал высокую эффективность предложенного метода.

4. Для численного решения ретроспективной обратной задачи теплопроводности предложены новые бессеточные методы, основанные на использовании локальных радиальных базисных функций. Результаты численной реализации на модельных задачах с точными решениями показали их хорошую точность и экономичность.

Публикации автора по теме диссертации

1. L.-D. Su *Finite difference method for the inverse problem of the simultaneous determination of the right-hand side and the lower coefficient in parabolic equations* // *Mathematical Notes of NEFU*. 2015. –Т. 22. –№. 4. –С. 91-98.
2. V. I. Vasiliev, L.-D. Su *Numerical method for solving boundary inverse problem of one-dimensional parabolic equation* // *Mathematical Notes of NEFU*. 2017. –Т. 24. –№. 2.–С. 108-117.
3. Л.-Д. Су, В. И. Васильев *Итерационная идентификация стационарной*

- правой части параболического уравнения // Математические Заметки СВ-ФУ. 2019. –Т. 26. –№. 1. –С. 81-90. DOI: 10.25587/SVFU.2019.101.27249
4. **L.-D. Su**, Z.-W. Jiang, T.-S. Jiang *Numerical method based on radial basis functions for solving reaction-diffusion equations*, in 2016 IEEE Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference (ITNEC) // Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. –С. 893-896. 2016. DOI: 10.1109/ITNEC.2016.7560490
 5. **L.-D. Su**, P. N. Vabishchevish, V. I. Vasiliev *The inverse problem of the simultaneous determination of the right-hand side and the lower coefficient in parabolic equation*, in Numerical Analysis and Its Applications // Springer International Publishing. –С. 633-639, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0_72
 6. **L.-D. Su**, T.-S. Jiang *Numerical method for solving nonhomogeneous backward heat conduction problem* // International Journal of Differential Equations. 2018. –Т. 2018, Article ID 1868921. 11 стр. DOI: 10.1155/2018/1868921
 7. **L.-D. Su** *A radial basis function (RBF)-finite difference (FD) method for the backward heat conduction problem* // Applied Mathematics and Computation. 2019. –Т. 354. –№. 1. –С. 232-247. DOI: 10.1016/j.amc.2019.02.035
 8. **L.-D. Su** *Numerical solution of two-dimensional nonlinear sine-Gordon equation using localized method of approximate particular solutions* // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2019. –Т. 108. –С. 95-107. DOI: 10.1016/j.enganabund.2019.08.018

Подписано в печать 21.10.2019. Формат 60x84/16.
Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.
Печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ № 290.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.

Отпечатано в типографии ИД СВФУ