

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет
имени М. К. Аммосова"

На правах рукописи

Ван Ган

**Алгоритмы матричных декомпозиций
кватернионов двух типов и их приложения**

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Васильев Василий Иванович

Якутск 2024

Содержание

Введение	5
1 Вещественный сохраняющий структуру алгоритм для низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц и его применение	19
1.1 Вещественные представления кватернионных матриц	21
1.2 Вещественный сохраняющий структуру алгоритм для LRDQ . .	22
1.3 Численные эксперименты и приложения	26
1.4 Выводы	32
2 Два комплексных сохраняющих структуру алгоритма для полно-ранговых декомпозиций кватернионных матриц и их приложения	34
2.1 Комплексные представления кватернионных матриц	35
2.2 Два сохраняющих структуру алгоритма	37
2.3 Обобщенные обратные представления на основе декомпозиции матриц	47
2.4 Численные эксперименты и приложения	51
2.5 Выводы	58
3 Обобщенная собственная декомпозиция разделенных кватернионных матриц и её приложения	59
3.1 Изоморфные представления разделенных кватернионных матриц	60
3.2 Три алгебраических метода для GEDSQ	63
3.3 Двумерный линейный дискриминантный анализ и распознавание цветочных лиц на основе GEDSQ	75
3.4 Выводы	83

4	Декомпозиция по сингулярным значениям и обобщенная декомпозиция по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц и их приложения	85
4.1	Обобщённая обратная разделённых кватернионных матриц	88
4.2	SVDSQ и GSVDSQ	91
4.3	Численные эксперименты и приложения	98
4.4	Выводы	106
5	Дальнейшие исследования декомпозиции по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц и её применение в схемах цветного водяного знака	107
5.1	Новый алгоритм SVDSQ для цветных изображений	109
5.2	Встраивание и извлечение изображений с водяными знаками на основе SVDSQ	113
5.3	Численный экспериментальный анализ	116
5.4	Выводы	125
	Заключение	127
	Литература	129
	Публикации автора	147

СПИСОК СИМВОЛОВ

Обозначение	Описание
\mathbf{R}	Набор вещественных чисел
\mathbf{C}	Набор комплексных чисел
$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$	Набор кватернионов
$\mathbf{Q}_{\text{pi}} = \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$	Набор чистых мнимых кватернионов
$\mathbf{H}_s = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$	Набор разделенных кватернионов
$\mathbf{F}^{m \times n}$	Набор $m \times n$ матриц над \mathbf{F}
$A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k$	(Разделенная) кватернионная матрица
$\text{Re}(A) = A_1$	Вещественная часть матрицы A
$\text{Im}(A) = A_2i + A_3j + A_4k$	Мнимая часть матрицы A
$\text{rank}(A)$	Ранг матрицы A
I_n	$n \times n$ тождественная матрица
$\bar{A} = A_1 - A_2i - A_3j - A_4k$	Сопряжение матрицы A
$\tilde{A} = A_1 - A_2i + A_3j + A_4k$	i -Сопряжение матрицы A
$A^T = A_1^T + A_2^T i + A_3^T j + A_4^T k$	Транспонирование матрицы A
$A^{\text{H}} = A_1^T - A_2^T i - A_3^T j - A_4^T k$	Сопряженное транспонирование матрицы A
$A^{\text{H}} = A_1^T - A_2^T i + A_3^T j + A_4^T k$	i -Сопряженное транспонирование матрицы A
A^{-1}	Обратная матрица A
A^\dagger	Обобщенная обратная матрица A
$ x $	Модуль элемента x
$\ A\ _2$	Спектральная норма матрицы A
$\ A\ _F$	Норма Фробениуса матрицы A

Таблицы умножения для \mathbf{Q} и \mathbf{H}_s

\mathbf{Q}	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

\mathbf{H}_s	1	i	j	k
1	1	i	j	$-k$
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	1	$-i$
k	k	j	i	1

Введение

Кватернионы были впервые предложены W.R.Hamilton в 1843 году и имеют следующую форму:

$$x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k, \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – вещественные числа и $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$. Первоначально они использовались только в некоторых простых приложениях в механике твердого тела и не могли быть связаны с практическими инженерными технологиями, потому долгое время не были известны [1]. До 1960-х годов известный американский физик, профессор S.L.Adler [2] перечислил алгебраические и аналитические методы решения задач кватернионной квантовой механики и квантовой теории поля. Используя метод аксиоматизации векторных пространств, он первоначально заложил математические основы кватернионной квантовой механики и квантовой теории поля [3–5]. С тех пор такие исследователи, как Д.С.Широков, провели по-новому оценили кватернион [6–8] и квантовая механика кватернионов стала важной отраслью современной квантовой механики. Физики постепенно осознали, что для того, чтобы осознать единство четырех основных взаимодействий между элементарными частицами, необходимо расширить и улучшить рациональный уровень понимания и создать новую систему теоретической физики, и одна из возможностей состоит в том, чтобы создать кватернионную квантовую механику, которая является более общей, чем общая квантовая механика [9–18].

Разделенные кватернионы являются дальнейшим теоретическим нововведением четырехмерных алгебраических систем, предложенным J.Cockle в 1849 году [19] и имеют следующую форму:

$$x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k, \quad i^2 = -1, j^2 = k^2 = ijk = 1,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – вещественные числа и $ij = -ji = k, jk = -kj = -i, ki = -ik = j$. Изучая взаимосвязь между усложненной классической и неэрмитовой квантовой механикой, исследователи обнаружили, что существуют связи с кватернионной и разделенной кватернионной механикой [20, 21]. Основным выводом заключается в том, что усложненные механические системы с реальными энергиями, широко изученные в литературе за последнее десятилетие, можно альтернативно рассматривать как определенные разделённые кватернионные расширения, лежащие в основе реальных механических систем. Эта идентификация приводит к возможности использования алгебраических методов кватернионов и разделённых кватернионов для решения некоторых сложных открытых вопросов в усложненной классической и квантовой механике [22–31].

Будучи двумя уникальными некоммутативными алгебрами Клиффорда [32–35], кватернионы и разделённые кватернионы не только играют центральную роль в квантовой механике [36–42], но и их приложения вышли далеко за пределы квантовой механики, затронув широкий спектр областей, включая математическую теорию [43–47], информатику [48, 49], вращение пространства [50, 51], инженерное дело [52] и электромагнетизм [53–58]. Такая междисциплинарная интеграция и приложения вдохновили на углублённое изучение кватернионов и разделённых кватернионов, а также способствовали взаимному усилению и инновациям между теоретическими исследованиями и практическими приложениями. Особенно в последние годы были созданы модели сигналов и цветных изображений, основанные на четырехмерной алгебре, чтобы поддерживать корреляцию компонентов многомерных данных. Это также привело к изучению ряда смежных проблем.

Кватернионная модель трехмерного сигнала была создана N.L.Bihan в 2004 году для обеспечения нелинейной корреляции компонентов трехмерного сигнала [59]. Трехмерные поляризованные волновые данные о временных рядах могут быть представлены некоторыми чисто воображаемыми кватернионами.

Модель выглядит следующим образом:

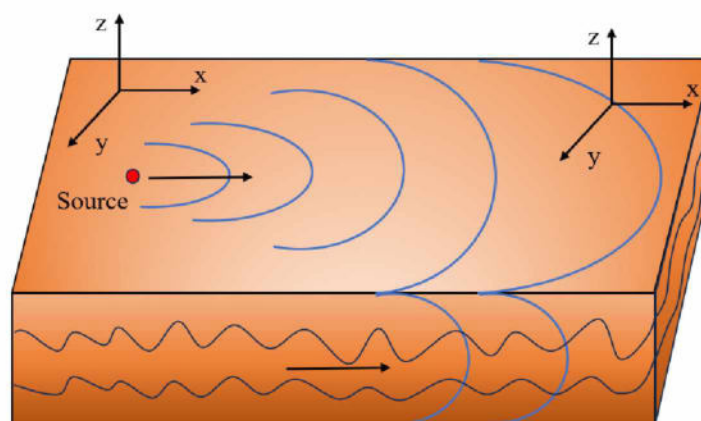


Рисунок 1: Векторное сенсорное моделирование поляризованных сейсмических волн.

В случае векторно-сенсорного режима из трех ортогональных компонентов (x , y и z), каждый из которых записывает сигнал из N временных отсчетов, мы можем записать набор из трех дискретизированных сигналов ($x(n)$, $y(n)$ и $z(n)$, при $n = 1, 2, \dots, N$) в кватернионном сингле $s(n)$, таком как $s(n) = x(n)i + y(n)j + z(n)k$.

Что касается обработки сигналов, традиционные методы векторно-сенсорной обработки записывают сигналы по измерению расстояния (связанного с количеством датчиков / апертурой решетки). Недостаток этого «длинного векторного» подхода заключается в том, что тип вектора и внутренние связи сигнала локально искажаются после реорганизации данных в большие векторы. Напротив, модели сигналов, основанные на многомерных алгебраических структурах, в некоторой степени сохраняют внутренние связи между информацией о компонентах [60–62]. При использовании векторных датчиков для наблюдения компонентов анизотропных полей, таких как электромагнитные [63–65], сейсмические [66–68], механические [69–73] и акустические волны [74, 75], в зависимости от области применения и типа датчика, один коаксиальный датчик может регистрировать от двух (двухкомпонентные датчики) до шести (три E-компонента и три B-компонента электромагнитное волновое

поле) сигналов. Низкоразмерные модели сигналов больше не могут удовлетворять потребностям обработки информации о данных, и необходимо создание простых высокоразмерных моделей. Многие ученые также проводили исследования в этой области [76–82].

Кватернионная модель для цветных изображений представлена S.J.Sangwine [83]. Каждый пиксель цветного изображения представляет собой комбинацию трех основных цветов: красного (R), зеленого (G) и синего (B) в определенном соотношении. Согласно модели кватернионов, каждый пиксель цветного изображения можно рассматривать как чисто мнимый кватернион $q(x, y) = r(x, y)i + g(x, y)j + b(x, y)k$, где $r(x, y)$, $g(x, y)$ и $b(x, y)$ представляют значения красного, зеленого и синего цветов в точках (x, y) на изображении соответственно. Следовательно, может быть установлена следующая модель для цветного изображения A :



Рисунок 2: Чисто мнимая кватернионная модель для цветного изображения.

т.е., $A = Ri + Gj + Bk \in \mathbf{Q}_{pi}^{m \times n}$, $R, G, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Задачи обработки цветных изображений. Изображения являются одним из наиболее важных носителей информации, используемых в различных областях, таких как медицинская визуализация, оборонная отрасль, произведения искусства и т.д [84–88]. Растущее использование цифровых изображений поднимает вопросы безопасности хранения, идентификации и передачи. В настоящее время изучение методов обработки изображений в оттенках серого является относительно законченным [89–96], и исследователи постепенно обращают свое внимание на проблемы обработки цветных изображений. Цветное изображение представляет собой комбинацию из трех изображений в оттенках серого,

что делает изучение проблемы цветного изображения более сложным. Модель цветного изображения, основанная на четырехмерной алгебре, обеспечивает внутреннюю связь между каналами и вводит новый подход к обработке цветного изображения, поскольку три канала цветного изображения имеют сильную спектральную взаимосвязь [83]. Хотя кватернионная схема цветного изображения обеспечивает внутреннюю связь между тремя цветовыми каналами, структура алгебраических операций сложна и требует много времени [97–100]. Вопрос о том, как создать более эффективные и быстрые алгоритмы четырехмерного моделирования для решения следующих задач с изображениями, также является сегодня главной темой исследований.

(1) Сжатие цветных изображений. Хранение и передача цветных цифровых изображений создает проблему сжатия изображений. Цель состоит в преобразовании и объединении исходных данных изображения в соответствии с определенными правилами, чтобы охарактеризовать изображение как можно меньшим количеством битов и, в то же время, максимально сохранить качество изображения до тех пор, пока оно удовлетворяет соответствующим требованиям. С момента начала исследований по сжатию изображений в 1948 году методы и приемники обработки изображений в оттенках серого значительно продвинулись вперед. Однако цветные изображения представляют собой комбинацию трех изображений в оттенках серого, что может значительно повысить достоверность информации по сравнению с изображениями в оттенках серого. Это также делает сжатие цветных изображений более сложным, чем сжатие отдельных изображений в оттенках серого [101–103].

(2) Распознавание лиц. В то время, как традиционные системы распознавания лиц, в основном, основано на полутоновых изображениях, цветные изображения предоставляют более богатую информацию, включая цвет кожи, цвет глаз и т.д., что позволяет повысить точность распознавания и справиться с разнообразием черт человеческого лица. Кроме того, ожидается, что технология цвет-

ного распознавания лиц повысит безопасность и снизит вероятность неpravильной идентификации и выдачи себя за другого, что сыграл важную роль в таких сферах безопасности, как аутентификация и контроль доступа. Кроме того, технология распознавания цвета лица расширяет сферу применения, включая такие области, как медицинская диагностика и распознавание эмоций, что открывает новые возможности для всех сфер жизни общества. Поэтому исследования в области распознавания цветных лиц имеют большое значение для развития и применения технологии распознавания лиц. В последние годы многие авторы провели исследования в этой области [104–106].

(3) Встраивание и извлечение цветных водяных знаков. С быстрым развитием компьютерных и сетевых технологий цифровые изображения, аудио и видеопродукция все чаще нуждаются в эффективном методе защиты авторских прав. Кроме того, информационная безопасность системы связи в сетевой среде также подвергается все большему риску. Технология нанесения водяных знаков на цифровые изображения обеспечивает потенциально решение вышеуказанной проблемы. В последние годы исследование схем цветных водяных знаков стало одной из актуальных тем. В основном его можно разделить на три направления исследований: схемы цветных водяных знаков на основе матричной декомпозиции [99, 107, 108]; схемы цветных водяных знаков на основе вейвлет-преобразования [109–111]; схемы цветных водяных знаков на основе бинаризации водяных знаков и матричной декомпозиции [112–114].

Вышеприведенное обсуждение показывает, что существует необходимость разработки и обновления новых теорий и алгоритмов матричных декомпозиций для четырехмерных алгебр как с точки зрения квантовой механики, многомерной электромагнетики, так и обработки сигналов и цветных изображений. С развитием науки и техники низкоразмерные теории и алгоритмы больше не могут отвечать потребностям научных исследований. С этой целью исследование сосредоточено на матричных декомпозициях четырехмерных алгебр и дают

некоторые теории, алгоритмы и соответствующие прикладные исследования.

Целью диссертационной работы является разработка эффективных алгоритмов декомпозиций четырехмерных алгебраических матриц, включая декомпозицию с низкого ранга, декомпозицию с полного ранга, декомпозицию по собственным значениям, декомпозицию по сингулярным значениям.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Разработка вещественных сохраняющих структуру алгоритмов для низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц.
2. Разработка сохраняющих структуру алгоритмов полноранговой декомпозиции матриц кватернионов, анализ времени выполнения и оценка ошибки алгоритмов.
3. Разработка алгоритмов обобщенной собственной декомпозиции разделенных кватернионных матриц, анализ времени выполнения и оценка ошибки алгоритмов.
4. Разработка алгоритмов декомпозиции по сингулярным значениям и обобщенная декомпозиция по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц.

Основные положения, выносимые на защиту соответствуют следующим пунктам паспорта специальности 1.2.2. — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1. Новый алгоритм декомпозиции с низким рангом для кватернионных матриц используется для обеспечения чисто мнимых свойств при сжатии и шумоподавлении данных 3D-моделей (п.2);
2. Два новых сохраняющих структуру алгоритма полноранговой декомпозиций кватернионных матриц (п.2);

3. Эффективные алгоритмы обобщенной декомпозиции по собственным значениям разделенных кватернионных матриц для решения задачи распознавания цветных изображений (п.1, п.2);
4. Впервые представлена теория декомпозиции по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц и эффективный алгоритм внедрения и извлечения цветных водяных знаков на основе их декомпозиции (п.3, п.8).

Научная и практическая значимость заключается в разработке алгоритмов. Во-первых, теорий и быстрых алгоритмов, которые могут эффективно находить декомпозицию низкого ранга, декомпозицию полного ранга, обобщенную собственную декомпозицию и декомпозицию по сингулярным значениям матриц кватернионов и разделенных матриц кватернионов. Во-вторых, разработанный алгоритм имеет преимущества по скорости вычислений и анализу ошибок, а созданные схемы обработки сигналов и цветных изображений обладают высокой точностью и надежностью. **Практическая значимость** заключается в алгоритме, предложенном на языке программирования Matlab, и соответствующих ему решениях по обработке сигналов и цветных изображений, включая шумоподавление трехмерного сигнала, сжатие цветного изображения, распознавание цветных лиц, встраивание и извлечение цветных водяных знаков и т.д. Разработанный алгоритм может лучше решать поставленные практические задачи, что дополнительно проверяет возможность практического применения разработанного алгоритма.

Научная новизна:

1. Для решения задач сжатия цветных изображений и шумоподавления трехмерного сигнала разработан вещественный сохраняющий структуру алгоритм низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц;
2. Предложены два комплексных сохраняющих структуру алгоритма полно-

ранговой декомпозиции кватернионных матриц для решения задачи цветного распознавания лиц;

3. Разработаны три обобщенных алгоритма декомпозиций по собственным значениям для разделенных кватернионных матриц и создана схема двумерного линейного дискриминантного анализа в алгебре разделения кватернионов для решения задач цветного распознавания лиц;
4. Предложены два вычислительных алгоритма декомпозиций по сингулярным значениям для разделенных кватернионных матриц для решения задач наименьших квадратов и цветного водяного знака.

Достоверность результатов обеспечены использованием корректно построенных математических моделей, использованием современных методов вычислительной математики, вычислительной реализацией предложенных алгоритмов и сравнением полученных результатов с результатами других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Тринадцатая международная Молодёжная научная школа конференция "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач", Академгородок, Новосибирск, Россия, 12.04.2021 – 22.04.2021;
- Международная конференция "Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные", СВФУ им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия, 18.07.2021-25.07.2021;
- Евразийская конференция по прикладной математике, Академгородок, Новосибирск, Россия, 16.12.2021 – 21.12.2021;
- V Всероссийская Научная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", Якутск, Россия, 05.09.2022 – 07.09.2022;

- The 3rd international conference on quaternion matrix computation and applications, Jinan, China, 12.05.2023 – 14.05.2023;
- X международная конференция по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия), Якутск, Россия, 16.07.2023 – 20.07.2023;
- Научная школа для молодых учёных «Численное моделирование многомасштабных, мультифизических проблем освоения криолитозоны», Якутск, Россия, 21.07.2023-22.07.2023;
- Семинар «Алгебры Клиффорда и приложения», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» Москва, Россия, 05.03.2024;
- Общеинститутский научный семинар, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН (ИВМиМГ СО РАН) Новосибирск, Россия, 06.03.2024;
- Семинар вычислительная математика и приложения, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН Москва, Россия, 13.03.2024.

Публикации. По теме диссертации было опубликовано 18 научных работ в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК, Scopus, Web of Science [A1–A18], получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [A19].

Личный вклад. В статьях [A1–A7], автором которых я являюсь, мной построены математические модели, доказаны теоремы о корректности полученных задач, разработаны и численно реализованы вычислительные алгоритмы. В работах [A8–A18] мной реализованы вычислительные алгоритмы, проведены расчеты и проведён анализ результатов вычислительных экспериментов. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

Объем и структура диссертационной работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объем работы составляет 148 страниц с 39 рисунками и 11 таблицами. Список литературы содержит 156 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (гранты No.23-41-00037 и No.23-71-30013) и стипендия правительства КНР (No.202008370340).

В первой главе построены кватернионные модели цветных изображений и трехмерных сигналов. Учитывая, что модель кватернионов создает избыточные вещественные части в процессе вычислений и высокую сложность прямых операций между кватернионами, алгоритм построен и усовершенствован в двух аспектах: (1) Создается новая форма декомпозиции низкого ранга чисто мнимой кватернионной матрицы, т.е. $A = BC$, где A и B – чисто мнимые кватернионные матрицы, а C – вещественная матрица. Когда итерационный метод наименьших квадратов используется для решения оптимальной итерационной матрицы, произведение чисто мнимой матрицы кватернионов и вещественной матрицы не приводят к получению общей матрицы кватернионов, но все равно будет чисто мнимой матрицей кватернионов, т.е. позволит избежать создания избыточных вещественных частей в модели. (2) При помощи изоморфной вещественной матрицы представления кватернионных матриц создан вещественный сохраняющий структуру алгоритм для низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц. Вычислительная сложность составляет всего 1/4 от прямой операции над кватернионной матрицей. На основе этого алгоритма декомпозиции устанавливается схема сжатия цветного изображения, и основные преимущества этой схемы сжатия заключаются в том, что по сравнению со схемой сжатия цветного изображения кватерниона SVD операция сохраняет чисто мнимое свойство значения; по сравнению с традиционной схемой трёхканальной матричной декомпозиции эта операция поддерживает спектральные

отношения между красным, зеленым и синим каналами. Кроме того, была разработана схема шумоподавления 3D-сигнала. Избыточные реальные части не генерируются в процессе шумоподавления, и эффект шумоподавления лучше.

В второй главе вводятся две изоморфные комплексные матрицы представления матриц кватернионов и их соответствующие алгебраические свойства. Метод исключения Гаусса и метод ортогонализации Грама-Шмидта используются для создания двух видов сохраняющих структуру алгоритмов для полноранговой декомпозиции кватернионных матриц, которые имеют свои преимущества и недостатки с точки зрения скорости и точности вычислений. Полноранговая декомпозиция матрицы кватернионов на основе исключения Гаусса численно реализуется быстрее, но имеет меньшую точность вычислений. Полноранговая декомпозиция матрицы кватернионов, основанное на методе ортогонализации Грама-Шмидта, выполняется медленнее, но обладает более высокой вычислительной точностью, поскольку единичная ортогональность векторов-столбцов в матрице B всегда поддерживается в процессе ее вычисления. Кроме того, предложены формы декомпозиции по полному рангу для обобщенных обратных кватернионных матриц. На основе этого алгоритма декомпозиции создана схема классификации разреженного представления цветных изображений лиц. Осуществимость предложенной схемы демонстрируется соответствующими примерами применения.

В третьей главе вводится соответствие между несколькими изоморфными вещественными матрицами представлений и комплексными матрицами представлений матриц разделенных кватернионов и соответствующие алгебраические свойства, учитывая структурные особенности алгебры разделённых кватернионов, включая некоммутативность разделенных кватернионных произведений, существование делителей нуля, нильпотентных элементов и нетривиальных идемпотентных элементов, невозможность точно определить ортогональность векторов разделенных кватернионов и ряд других трудностей. По-

средством трех изоморфных вещественных или комплексных представлений обобщенная проблема декомпозиции собственных значений матриц разделенных кватернионов преобразуется в обобщенную задачу декомпозиции собственных значений вещественных или комплексных матриц. Построена и получена алгебраическая теория и алгоритм обобщенной декомпозиции на собственные значения исходной разделенной кватернионной матрицы. Кроме того, на этой основе создан метод двумерного линейного дискриминантного анализа в алгебре разделенных кватернионов и новая схема цветового распознавания лиц. Эксперименты показали высокую точность распознавания.

В четвертой главе используется эффективная 2×2 матрица вещественного представления матрицы разделенных кватернионов из раздела 3, которая соответствует любому разделенному кватерниону. Впервые построены теория и алгоритм обобщенной обратной разделенной кватернионной матрицы декомпозиции по сингулярным значениям и обобщенной декомпозиции по сингулярным значениям. В отличие от декомпозиции по сингулярным значениям на поле комплексных чисел и кольца кватернионов, декомпозиция по сингулярным значениям матрицы разделенных кватернионов не является единственной по форме, и её сингулярные значения не обязательно являются вещественными числами. Она имеет новую форму: $a + bh$, $a, b \in \mathbf{R}$, $h = \cos(w)j + \sin(w)k$, $0 \leq w \leq 2\pi$. На основе декомпозиции по сингулярным значениям и обобщенной декомпозиции по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц даны новые алгебраические методы для задач наименьших квадратов с разделенным кватернионом и задач наименьших квадратов с ограниченным равенством.

В пятой главе представлен новый алгоритм декомпозиции по сингулярным значениям для разделенных кватернионных матриц, построенный путем использования комбинаторного спаривания по четности сингулярных значений для декомпозиции по сингулярным значениям матриц вещественного представления. Аналогично кватернионной модели цветных изображений, основное

преимущество создания модели разделенного кватерниона для цветных изображений заключается в том, что три пары сильно связанных коэффициента разделенного кватерниона компенсируют потерю корреляции между различными цветовыми каналами. Предложенная модель цветного изображения разделенного кватерниона наследует данное преимущество кватернионов и имеет простую структурную форму SVD с очень небольшим временем расчета. Такое же количество сингулярных значений также может привести к более высокой точности восстановления изображения. Более того, схема цветных водяных знаков создается на основе декомпозиции по сингулярным значениям матриц разделенных кватернионов, что имеет существенные преимущества, заключающиеся в том, что схема работает удовлетворительно с точки зрения невидимости, надёжности и способности восстановления водяных знаков, когда встроенный водяной знак извлекается на основе теста атаки, приведённого в работе. Предлагаемый метод водяных знаков более адаптируем, чем другие схемы водяных знаков.

В заключении представлено краткое изложение полученных результатов в процессе работы над диссертацией.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, д.ф.м.н., профессору Василию Ивановичу Васильеву и консультанту PhD, профессору Tongsong Jiang за многолетнюю поддержку и научное руководство. Автор выражает благодарность PhD, профессору Ялчину Эфендису за постоянную поддержку, ценные советы и конструктивные замечания. Автор также признателен сотрудникам Международной научно-исследовательской лаборатории мирового уровня «Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления» Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова за поддержку, творческую и благожелательную атмосферу, в которой выполнена работа.

Глава 1

Вещественный сохраняющий структуру алгоритм для низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц и его применение

В области компьютерной графики и компьютерного зрения кватернионы широко используются для представления трехмерных вращений и положений, поэтому низкоранговая декомпозиция кватернионных матриц может выделить ключевую информацию о вращениях или положениях, что способствует исследованиям и применениям в области обработки изображений, трехмерной реконструкции и т.д. Кроме того, использование низкоранговой декомпозиции может снизить затраты на хранение и вычисление, повысив эффективность обработки данных и имеющее важное значение для обработки крупных наборов данных или реального времени. Однако в процессе вычислений кватернионной алгебры часто возникают неизбежные вещественные части. Вопрос о том, как обеспечить чисто мнимое свойство модели цветного изображения, также является приоритетом исследования. Это породило тему исследования данной главы — низкоранговая декомпозиция чисто мнимых кватернионных матриц (LRDQ). Кроме того, эта матричная декомпозиция имеет особую форму $A \approx BC$, где $A \in \mathbb{Q}_{\text{pi}}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{Q}_{\text{pi}}^{m \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, r — выбранный ранг. Мы описали матрицу B как базовую информационную матрицу A , а C — это энергетическое значение базовой информационной матрицы B . Прямые операции между кватернионами отнимают много времени и, используя алгебраические изоморфные отображения матриц кватернионов, мы даем новый вещественный сохраняющий структуру итерационный алгоритм наименьших квадратов для решения декомпозиции низкого ранга. По сравнению с алгоритмом кватернионов предложенный в этой главе алгоритм представляется более эффективным, основанным

на реальных операциях. Кроме того, мы используем специальную итерационную структуру для построения реального алгоритма сохранения структуры для низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц. Более того, с одной стороны, мы применяем предложенный алгоритм к задаче сжатия цветного изображения. В последние годы широкое использование цифровых изображений побудило нас к рассмотрению проблем хранения и передачи информации об изображениях. Также появилось много результатов исследований по сжатию изображений. В работе [115] M.W.Berry и др. представлен алгоритм приближенной неотрицательной матричной факторизации низкого ранга (NMF), его развитие и использование для извлечения и идентификации признаков в области анализа спектральных данных. S.K.Singh и др. преобразовали цветное изображение RGB в формат YCbCr и осуществили сжатие цветного изображения, выполнив SVD над новыми тремя компонентами [116]. Обработка цветных изображений с помощью алгоритма кластеризации K-Means также является одной из схем сжатия [117]. Кватернионная матрица SVD для декомпозиции и сжатия цветных изображений также получило широкое распространение, включая использование инструментария кватернионов [118], вещественный сохраняющий структуру алгоритм [97, 98], метод эквивалентной комплексной матрицы [119] и т.д. Кроме того, в работе Li и др. [103] построена схема сжатия цветного изображения, основанная на реальном матричном блоке SVD. С другой стороны, механические системы, такие как механические волны, сейсмические волны, акустические волны и т.д., часто требуют трехмерных моделей для их представления и обработки. N.L.Vihan и др. продемонстрировали, что модель поляризованных волн, основанная на четырехмерной алгебре, может лучше поддерживать внутреннюю связь трех компонентов. Это также закладывает основу для использования методов матричной декомпозиции в четырехмерной алгебре для изучения проблем разделения сейсмических волн и подавления механических волн [71, 120–122].

1.1 Вещественные представления кватернионных матриц

Для любой кватернионной матрицы $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{Q}^{m \times n}$ его вещественная матрица представления имеет следующий вид [98]:

$$A^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 \\ A_2 & A_1 & -A_4 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 \\ A_4 & -A_3 & A_2 & A_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4m \times 4n}, \quad (1.1)$$

где $A^{\mathbb{R}} = [A_c^{\mathbb{R}}, R_m A_c^{\mathbb{R}}, S_m A_c^{\mathbb{R}}, T_m A_c^{\mathbb{R}}]$, $A_c^{\mathbb{R}} = [A_1; A_2; A_3; A_4]$, $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbf{R}^{m \times n}$,

$$R_m = \begin{bmatrix} 0 & -I_m & 0 & 0 \\ I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad S_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_m \\ I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I_m \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & 0 \\ I_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

I_m – тождественная матрица, R_m, S_m, T_m - три унитарные матрицы. На основании (1.1) легко доказать следующие утверждения:

Предложение 1.1 [98] Пусть $A, B \in \mathbf{Q}^{m \times n}$, $C \in \mathbf{Q}^{n \times p}$, $a \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} (A + B)^{\mathbb{R}} &= A^{\mathbb{R}} + B^{\mathbb{R}}, (AC)^{\mathbb{R}} = A^{\mathbb{R}}C^{\mathbb{R}}, (aA)^{\mathbb{R}} = aA^{\mathbb{R}}, \\ (A + B)_c^{\mathbb{R}} &= A_c^{\mathbb{R}} + B_c^{\mathbb{R}}, (AC)_c^{\mathbb{R}} = A_c^{\mathbb{R}}C_c^{\mathbb{R}}, (aA)_c^{\mathbb{R}} = aA_c^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Предложение 1.2 [98] Пусть $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{Q}^{m \times n}$. Тогда

$$\|A\|_F = \|A_c^{\mathbb{R}}\|_F = \sqrt{\|A_1\|_F^2 + \|A_2\|_F^2 + \|A_3\|_F^2 + \|A_4\|_F^2}. \quad (1.2)$$

В инженерных задачах целевые функции часто являются вещественнозначными и неаналитическими. Следовательно, при решении задач оптимизации

с использованием теории кватернионов ключевым моментом является нахождение стационарных точек скалярных вещественнозначных функций, которые зависят от матрицы кватернионов, и направления, в котором такие функции имеют максимальные скорости изменения. Хи и др. [123] провели большое исследование в этой области и заложили основу для предлагаемого нами алгоритма. Здесь мы перечислим только некоторые производные кватернионных матричных функций, которые нам необходимы.

$f(Q)$	$\nabla_{\bar{Q}} f$
$\text{tr}(AQ)$	$-\frac{1}{2}A^T$
$\text{tr}(Q^{\mathbb{H}}B)$	$\text{Re}(B)A$
$\text{tr}(AQB)$	$-\frac{1}{2}A^T B^{\mathbb{H}}$
$\text{tr}(AQ^{\mathbb{H}}B)$	$\text{Re}(B)A$
$\text{tr}(AQ^{\mathbb{H}}QB)$	$\text{Re}(QB)A - \frac{1}{2}(AQ^{\mathbb{H}})^T B^{\mathbb{H}}$
$\text{tr}(AQ^{\mathbb{H}}BQC)$	$\text{Re}(BC)A - \frac{1}{2}(AQ^{\mathbb{H}}B)^T C^{\mathbb{H}}$

Таблица 1.1: Матричные функции $f : \mathbb{Q}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{Q}^{m \times n}$ и соответствующие градиенты.

1.2 Вещественный сохраняющий структуру алгоритм для LRDQ

Матричные декомпозиции широко используются в обработке сигналов, обработке цветных изображений, управлении системами, статистическом анализе и других областях. Фактически кватернионная декомпозиция низкого ранга является задачей оптимизации. Методом мультипликативной подстановки исходная матрица $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ преобразуется в произведение двух матриц меньших размерностей, т.е. $A \approx BC$, где $B \in \mathbb{Q}^{m \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$. Существует множество целевых функций и критериев итерации для декомпозиции матрицы. Наиболее часто используемыми методами являются неотрицательные целевые функции и критерии итерации, основанные на евклидовом расстоянии следующим образом:

Целевая функция:
$$\min = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [A_{ij} - (BC)_{ij}]^2,$$

s.t. $B_{is} \geq 0; C_{sj} \geq 0; i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n.$

Итерационные критерии:

$$B_{is}^{(k+1)} = B_{is}^{(k)} \frac{(AC^T)_{is}}{(BCC^T)_{is}}, \quad C_{sj}^{(k+1)} = C_{sj}^{(k)} \frac{(B^T A)_{sj}}{(B^T BC)_{sj}}.$$

Все вышеуказанные итерационные критерии получаются путем вычисления частных производных соответствующих целевых функций, затем с использованием метода градиентного спуска для получения соответствующих мультипликативных критериев обновления и, наконец, выбора соответствующего размера шага для итераций обновления матриц B, C . Для кватернионной низкоранговой декомпозиции классическое евклидово расстояние по-прежнему выбирается в качестве функции стоимости:

$$\begin{aligned} \min &= \|A - BC\|_F^2 = \text{tr}[(A - BC)^{\mathbb{H}}(A - BC)] \\ &= \text{tr}[A^{\mathbb{H}}A] - \text{tr}[A^{\mathbb{H}}BC] - \text{tr}[C^{\mathbb{H}}B^{\mathbb{H}}A] + \text{tr}[C^{\mathbb{H}}B^{\mathbb{H}}BC], \end{aligned} \quad (1.3)$$

и форма компонента (1.3)

$$\begin{aligned} \min &= \|A - BC\|_F^2 = \sum_{m,n} |a_{mn} - \sum_k b_{mk}c_{kn}|^2 \\ &= \sum_{m,n} (a_{mn} - \sum_k b_{mk}c_{kn})(\bar{a}_{mn} - \sum_k \bar{b}_{mk}c_{kn}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где a_{ij} – элемент i -й строки и j -го столбца матрицы кватернионов A , b_{ik} – элемент матрицы кватернионов B , c_{kj} – элемент вещественной матрицы C . Поскольку матрица C является вещественной матрицей, частная производная c_{ij} для вышеуказанной целевой функции имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \|A - BC\|_F^2}{\partial c_{ij}} &= \sum_{m,n} \frac{\partial \sum_k b_{mk} c_{kn}}{\partial c_{ij}} (\bar{a}_{mn} - \sum_k b_{mk} c_{kn}) - \sum_{m,n} (a_{mn} - \sum_k b_{mk} c_{kn}) \frac{\partial \sum_k b_{mk} c_{kn}}{\partial c_{ij}} \\
&= - \sum_m b_{mi} (a_{mj} - \sum_k \bar{b}_{mk} c_{kj}) - \sum_m (a_{mj} - \sum_k b_{mk} c_{kj}) \bar{b}_{mi} \\
&= - \sum_m b_{mi} (\bar{a}_{mj} - \overline{(BC)_{mj}}) - \sum_m (a_{mj} - (BC)_{mj}) b_{mi} \\
&= -2\text{Re}(\sum_m b_{mi} (\bar{a}_{mj} - \overline{(BC)_{mj}})) \\
&= -2\text{Re}(B^T (\bar{A} - \overline{BC})),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

пусть $\frac{\partial \|A - BC\|_F^2}{\partial c_{ij}} = 0$, тогда глобальный минимизатор $C_{\text{gm}} = \text{Re}(B^T \bar{B})^{-1} \text{Re}(B^T \bar{A})$.

По (1.4) и A, B - две чисто мнимые кватернионные матрицы, т.е.

$$\begin{aligned}
\text{Re}(B^T \bar{B}) &= \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & B_3^T & B_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ -B_2 \\ -B_3 \\ -B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2^T & B_3^T & B_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_2 \\ -B_3 \\ -B_4 \end{bmatrix}, \\
\text{Re}(B^T \bar{A}) &= \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & B_3^T & B_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \\ -A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2^T & B_3^T & B_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_2 \\ -A_3 \\ -A_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Кроме того, поскольку матрица B является кватернионной матрицей, а ее частная производная использует правило производной матрицы кватерниона из таблицы 1, мы можем получить следующие результаты:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\bar{B}} \|A - BC\|_F^2 &= \frac{1}{2} (A^{\mathbb{H}})^T C^T - \text{Re}(A) C^T + \text{Re}(BC) C^T - \frac{1}{2} (C^T B^{\mathbb{H}})^T C^T \\
&= -(\text{Re}(A) - \frac{1}{2} \bar{A} + \frac{1}{2} \overline{BC} - \text{Re}(BC)) C^T \\
&= -\frac{1}{2} (A - BC) C^T,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

пусть $\nabla_{\bar{B}} \|A - BC\|_F^2 = 0$, тогда глобальный минимизатор $B_{\text{gm}} = AC^T (CC^T)^{-1}$.

Согласно (1.1), A - чисто мнимая кватернионная матрица, C - вещественная матрица, т.е.

$$AC^T(CC^T)^{-1} \iff \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 \\ A_2 & A_1 & -A_4 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 \\ A_4 & -A_3 & A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T(CC^T)^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 C^T(CC^T)^{-1} \\ A_3 C^T(CC^T)^{-1} \\ A_4 C^T(CC^T)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Объединив вышеуказанные целевые функции матричной декомпозиции и критерии оптимальной итерации для B, C , мы получаем следующий алгоритм о декомпозиции низкого ранга для кватернионных матриц (LRDQ):

Алгоритм 1.1: Для любой чисто мнимой кватернионной матрицы $A = A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{Q}_{\text{pi}}^{m \times n}$. Ввод A_2, A_3, A_4 и наилучший ранг r , вывод $B_2, B_3, B_4 \in \mathbf{R}^{m \times r}, C \in \mathbf{R}^{r \times n}$, т.е. $B = B_2i + B_3j + B_4k \in \mathbf{Q}_{\text{pi}}^{m \times r}$, такой, что $\min = \|A - BC\|_F$.

Шаг 1. Инициализация.

```
[m, n] = size(A2); W = rand(3m, r); H = rand(r, n); tol = 1e - 10; t = 0;
AA = [A2; A3; A4]; N1 = norm(AA - [W(1 : m, :) * H; W(m + 1 : 2m, :) *
H; W(2m + 1 : 3m, :) * H], 'fro'); N2 = N1 - 0.001;
```

Шаг 2. Циклическое тело метода наименьших квадратов.

```
while abs(N2 - N1) > tol
t = t + 1; N1 = N2;
H = inv([W(1 : m, :)', W(m + 1 : 2m, :)', W(2m + 1 : 3m, :)'] * [-W(1 :
m, :); -W(m + 1 : 2m, :); -W(2m + 1 : 3m, :)]) * [W(1 : m, :)', W(m +
1 : 2m, :)', W(2m + 1 : 3m, :)'] * (-AA);
HINV = H' * inv(H * H'); W = [A2 * HINV; A3 * HINV; A4 * HINV];
N2 = norm(AA - [W(1 : m, :) * H; W(m + 1 : 2m, :) * H; W(2m + 1 :
3m, :) * H], 'fro');
end
```

Шаг 3. Вывод результатов.

```
C = H; B2 = W(1 : m, :); B3 = W(m + 1 : 2m, :); B4 = W(2m + 1 : 3m, :).
```

Пример 1.1 Для имитации данных 3D-сигнала (например, сигнала цветного изображения) и начальных условий, A_2, A_3, A_4 и начальные матрицы W_2, W_3, W_4, H определяются как: $m = n = 20, 40, \dots, 500$; $r = 15, 30, \dots, 375$; $W_2 = \text{rand}(m, r)$; $W_3 = \text{rand}(m, r)$; $W_4 = \text{rand}(m, r)$; $H = \text{rand}(r, n)$; $A_2 = 255 \times \text{rand}(m, n)$; $A_3 = 255 \times \text{rand}(m, n)$; $A_4 = 255 \times \text{rand}(m, n)$. Все расчеты выполняются на компьютере Intel Core i7@1.80GHZ/16GB с использованием MATLAB R2018b.

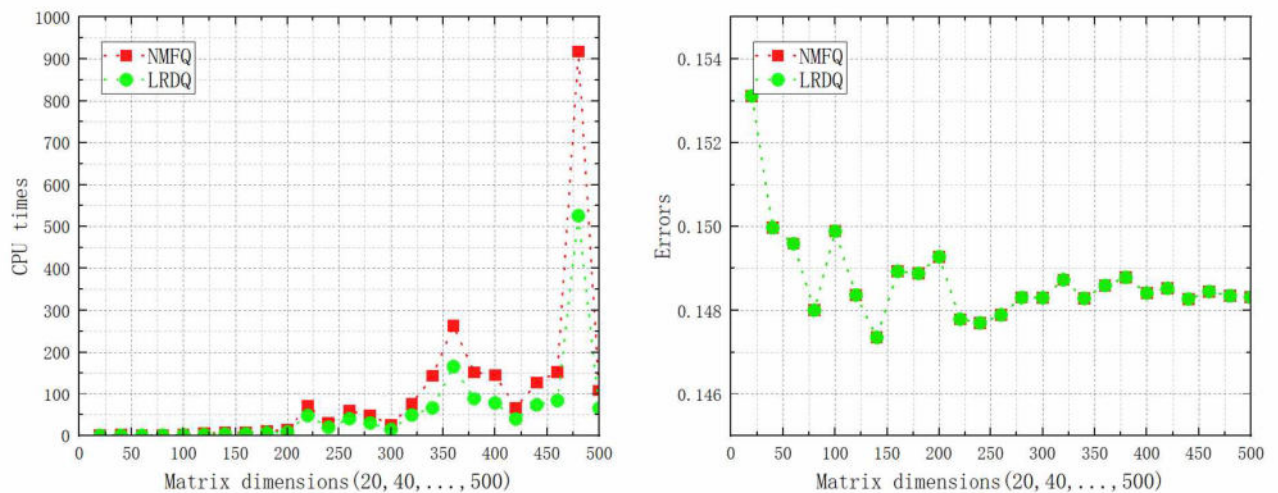


Рисунок 1.1: Сравнение алгоритма QNMF и алгоритма LRDQ.

На рис.1.1 показано сравнение производительности алгоритма 1.1 с алгоритмом QNMF в работах [124]. Очевидно, что при одинаковых начальных условиях и пороговых значениях алгоритм 1 быстрее по времени, поскольку это – вещественные матричные операции.

1.3 Численные эксперименты и приложения

Схема сжатия цветного изображения на основе алгоритма LRDQ выглядит следующим образом:

Алгоритм 1.2: Схема сжатия цветного изображения, основанная на низкоранговой декомпозиции кватернионной матрицы: требуется сжать исходное цветное изображение A .

Шаг 1. В соответствии со степенью сжатия вычислим ранг матрицы декомпозиции, необходимый для декомпозиции низкого ранга $r \approx \frac{3mn}{CR(3m+n)}$;

Шаг 2. При заданном кватернионном представлении цветного изображения вычисляем её соответствующую низкоранговую декомпозицию $\min = \|A - B_r C_r\|_F^2$;

Шаг 3. Восстановим приблизительное исходное изображение, используя матрицу декомпозиции низкого ранга $B_r C_r = A_r$.

Пример 1.2 Для классического цветного изображения рис.1.2 ((a) 500×500 пикселей; (b) 500×500 пикселей; (c) 512×512 пикселей; (d) 512×512 пикселей). Каждое цветное изображение может быть выражено как $A = Ri + Gj + Bk \in \mathbb{Q}_{pi}^{n \times n}$.

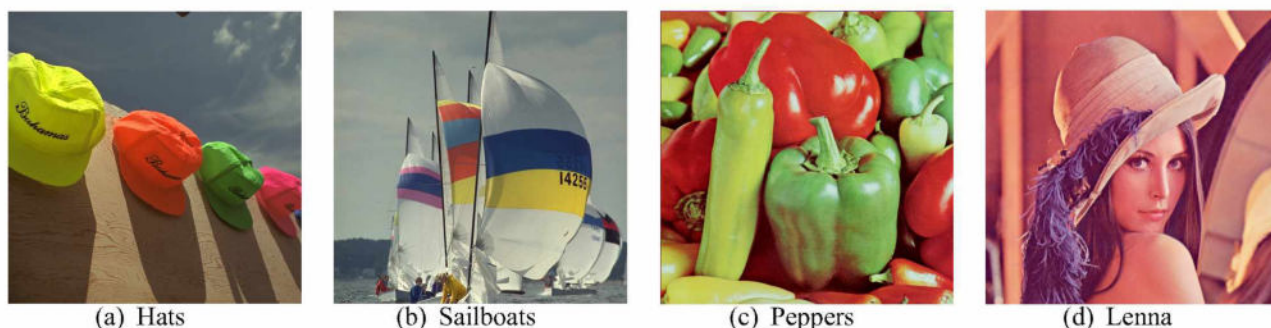


Рисунок 1.2: 4 исходных изображения.

Для сравнения визуальной достоверности нескольких схем сжатия приводим несколько показателей анализа производительности. Например, пиковое отношение «сигнал/шум» (PSNR), структурное сходство (SSIM) и коэффициент сжатия между исходным и сжатым изображением. Их формулы определяются следующим образом:

$$SSIM = \frac{(2\mu_A \mu_{A_r} + C_1) (2\sigma_{AA_r} + C_2)}{(\mu_A^2 + \mu_{A_r}^2 + C_1) (\sigma_A^2 + \sigma_{A_r}^2 + C_2)},$$

где A_r – сжатое изображение, $\mu_A, \mu_{A_r}, \sigma_A, \sigma_{A_r}$, и σ_{AA_r} – локальные средние значения, стандартные отклонения и взаимная ковариация для изображений A и

A_r , $C_1 = (0.01 \times L)^2$, $C_2 = (0.03 \times L)^2$ – константы регуляризации для яркости и контрастности, G – указанное значение динамического диапазона.

$$\text{PSNR} = 10 \lg \frac{3n^2 \times 255^2}{\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^n \sum_{z=1}^3 (A(x, y, z) - A_r(x, y, z))^2},$$

где A_r - сжатое изображение, $A(:, :, 1) = R$, $A(:, :, 2) = G$, $A(:, :, 3) = B$.

$$\text{CR} = \frac{\text{Data capacity of the original image}}{\text{Data capacity of the compressed image}}$$

описывает коэффициент сжатия изображения к исходному изображению. Взяв в качестве примера цветное изображение порядка $n \times n$, коэффициент сжатия соответствующей схемы сжатия вычисляется следующим образом,

$$\begin{aligned} \text{CR}_{\text{TNMF}} &= \frac{3n^2}{6nr}, & \text{CR}_{\text{TSVD}} &= \frac{3n^2}{6nr + 3r}, & \text{CR}_{\text{K-means}} &= \frac{24n^2}{ln^2 + 24k}, & \text{CR}_{\text{RBSVD}} &= \frac{3n^2}{4nr + r}, \\ \text{CR}_{\text{QSVD1}} &= \frac{3n^2}{8nr + r}, & \text{CR}_{\text{QSVD2}} &= \frac{3n^2}{8nr + r}, & \text{CR}_{\text{QSVD3}} &= \frac{3n^2}{8nr + r}, & \text{CR}_{\text{LRDQ}} &= \frac{3n^2}{4nr}, \end{aligned}$$

где r – выбранный ранг цветного изображения, k – выбранное количество цветов, l – интенсивность цвета и $k = 2^l$. Кроме того, CR_{TNMF} обозначает формулу степени сжатия схемы сжатия, сгенерированной путем вычисления не отрицательной матричной декомпозиции для матриц R, G, B соответственно [115]. CR_{TSVD} – коэффициент сжатия схемы сжатия, сгенерированного путем первого преобразования цветного изображения в $YCbCr$ и последующего вычисления SVD матриц Y, Cb, Cr соответственно [116]. $\text{CR}_{\text{K-means}}$ – степень сжатия, сгенерированная алгоритмом кластеризации K-means [117]. CR_{RBSVD} – коэффициент сжатия, порожденный SVD блока вещественных матриц $[R; G; B]$ [103]. CR_{QSVD1} – коэффициент сжатия, порожденный кватернионным SVD (QTFM) [118]. CR_{QSVD2} – степень сжатия, сгенерированная кватернионным сохраняющим структуру алгоритмом SVD [97, 98]. CR_{QSVD3} – коэффициент сжатия, созданный алгоритмом SVD эквивалентной комплексной матрицы кватернионной матрицы [119]. CR_{LRDQ} – коэффициент сжатия предложенный в данной работе.

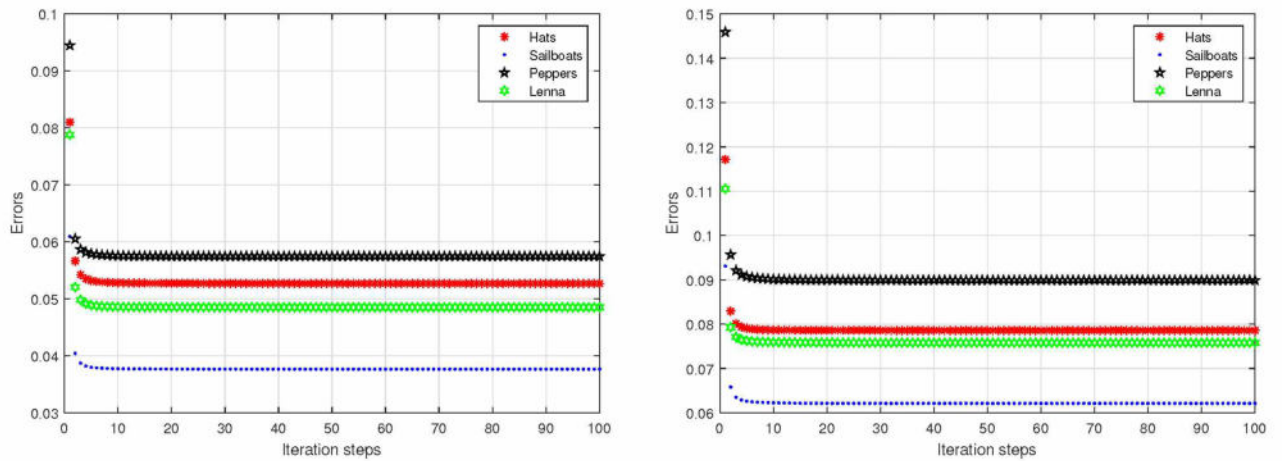


Рисунок 1.3: Шаги итерации и относительные ошибки четырех изображений ($CR \approx 5$, $CR \approx 10$).

На рис.1.3 показаны итерационные шаги нашего алгоритма и соответствующие ошибки $(\frac{\|A - B_r C_r\|_F}{\|A\|_F})$ восстановления для двух степеней сжатия ($CR \approx 5$, $CR \approx 10$). Понятно, что наш алгоритм стабилизировал цветное изображение на рис.1.3 менее чем за 10 шагов.

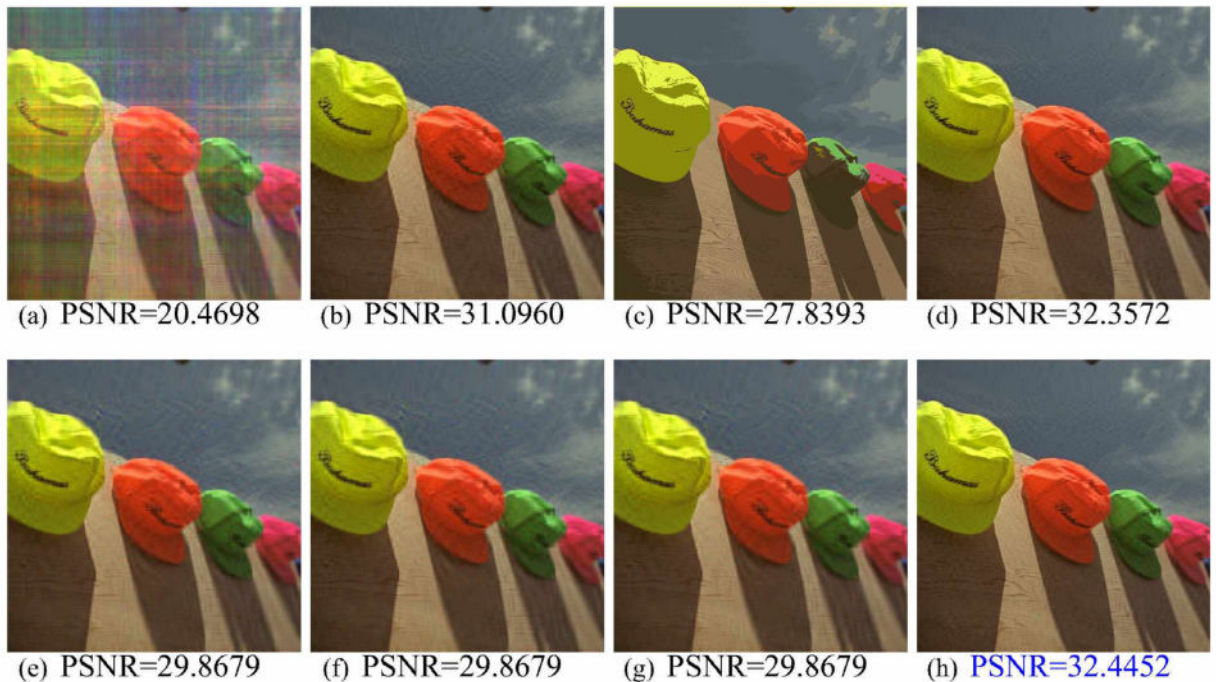


Рисунок 1.4: Сжатое изображение «Hats» с аналогичной степенью сжатия $CR \approx 6$.

На рис.1.4(a) – рис.1.4(h) показаны приблизительные изображения, полученные с помощью вышеуказанных 8 схем сжатия. (a) – (h) соответствуют алгоритму TNMF, алгоритму TSVD, алгоритму K-means, алгоритму RBSVD, ал-

горитму QSVD1-3 и нашему алгоритму LRDQ соответственно. Очевидно, что производительность схемы сжатия, приведенной здесь для примеров изображений, намного выше, чем у других схем сжатия. Кроме того, производительность схемы сжатия для различных цветных изображений и различных коэффициентов сжатия можно увидеть в следующей таблице.

I	CR	PS1/SS1	PS2/SS2	PS3/SS3	PS4/SS4	PS5 – 7/SS5 – 7	PS8/SS8
(a)	4	18.1286/0.7590	33.0785/0.9675	35.1811/0.9829	34.8408/0.9771	31.6101/0.9604	34.9138/0.9774
	6	20.4698/0.7917	31.0960/0.9583	27.8393/0.9493	32.3572/0.9666	29.8679/0.9488	32.4452/0.9669
	8	20.2042/0.7932	29.7791/0.9515	24.1287/0.9034	30.9527/0.9598	28.6349/0.9388	30.9527/0.9598
	12	21.6301/0.7296	28.2324/0.9423	20.7745/0.8498	29.0703/0.9477	27.2761/0.9280	29.0704/0.9477
	24	23.8287/0.8514	25.4854/0.9203	17.5060/0.3734	26.2309/0.9244	24.7357/0.8965	26.4646/0.9275
(b)	4	12.0969/0.4378	32.9269/0.9233	36.6474/0.9702	35.2330/0.9423	30.9188/0.9001	35.3248/0.9433
	6	12.9041/0.4671	30.2497/0.8938	30.6674/0.8967	32.1141/0.9129	28.7167/0.8708	32.2265/0.9143
	8	15.1900/0.4934	28.6065/0.8735	27.2174/0.8504	30.3204/0.8908	27.2982/0.8496	30.3204/0.8908
	12	17.2556/0.5332	26.8023/0.8477	23.1879/0.8031	28.1032/0.8599	25.7570/0.8199	28.1032/0.8599
	24	19.7106/0.6030	23.9899/0.8039	19.4305/0.6201	25.0386/0.8101	23.0703/0.7624	25.2810/0.8143
(c)	4	11.3774/0.7516	31.0225/0.9814	31.7066/0.9831	31.9484/0.9845	29.5972/0.9753	32.0095/0.9847
	6	13.3744/0.7870	28.6369/0.9710	26.4309/0.9530	29.6039/0.9752	27.4184/0.9629	29.6887/0.9756
	8	13.9984/0.7929	27.0934/0.9616	23.9879/0.9229	28.0548/0.9667	25.8709/0.9510	28.0548/0.9667
	12	16.1135/0.8203	24.8596/0.9442	20.4566/0.8629	25.7622/0.9493	23.7759/0.9298	25.7622/0.9493
	24	18.3606/0.8477	21.7217/0.9082	16.9960/0.8032	22.3917/0.9112	20.4225/0.8799	22.3917/0.9112
(d)	4	11.6024/0.7408	31.1823/0.9808	34.3428/0.9903	32.7990/0.9860	29.6019/0.9739	32.8716/0.9862
	6	14.5010/0.8143	28.7203/0.9698	29.6524/0.9746	30.1923/0.9765	27.5896/0.9626	30.2874/0.9769
	8	15.9049/0.8353	27.3447/0.9620	26.8859/0.9561	28.6376/0.9683	26.2849/0.9537	28.6376/0.9683
	12	18.4860/0.8699	25.5018/0.9503	23.7737/0.9300	26.6168/0.9552	24.4656/0.9391	26.6168/0.9552
	24	19.3479/0.8562	22.8513/0.9323	19.2541/0.8777	23.5307/0.9301	21.8397/0.9210	23.5307/0.9301

Таблица 1.2: PSNR и SSIM на рис.1.2 (a, b, c, d) с аналогичной степенью сжатия.

В таблицах 1.2 показаны значения PSNR и значения SSIM для 8 алгоритмов сжатия с различными коэффициентами сжатия. PS1/SS1 – PS8/SS8 соответствуют алгоритму TNMF, алгоритму TSVD, алгоритму K-means, алгоритму RBSVD, алгоритму QSVD1-3 и нашему алгоритму LRDQ соответственно. Алгоритмы QSVD1-3 имеют одинаковую производительность сжатия с разницей только во времени работы, т.е. $PS5 = PS6 = PS7$, $SS5 = SS6 = SS7$. По сравнению с традиционными алгоритмами сжатия цветных изображений предлагаемая схема сжатия цветных изображений, основанная на модели декомпозиции низкого ранга, способна сохранять информацию об изображении на более высоком уровне, а соответствующие PSNR и SSIM относительно высоки при тех

же условиях сжатия.

Пример 1.3 В механических системах данные о дискретных волновых сигналах, таких как механические волны, сейсмические волны и акустические волны, часто собираются датчиками в трех измерениях. Однако собранная информация часто также смешивается с некоторым шумом. Основываясь на сильной корреляции между 3D-волнами, использование LRDQ для разделения волн также является одним из наших приложений.

Шаг 1. Собрать данные о 3D-волновом сигнале. Восток – запад: $x = (x(1), x(2), \dots, x(N))$; Север – юг: $y = (y(1), y(2), \dots, y(N))$; Вертикальный: $z = (z(1), z(2), \dots, z(N))$.

Шаг 2. Волновые сигналы обычно представляются в виде временных рядов, поэтому сначала измеренный сигнал необходимо преобразовать в матрицу для подготовки к LRDQ. Матрицы Hankel наиболее широко используются из-за их свойства сдвига нулевой фазы и вейвлет-подобных свойств [59, 120]. Требуется построить матрицы Hankel из данных трехмерного волнового сигнала и соответствующую чисто мнимую кватернионную матричную модель: $A = Xi + Yj + Zk \in \mathbb{Q}_{pi}^{m \times n}$.

$$X = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(n) \\ x(2) & x(3) & \dots & x(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(m) & x(m+1) & \dots & x(N) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(n) \\ y(2) & y(3) & \dots & y(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(m) & y(m+1) & \dots & y(N) \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z(1) & z(2) & \dots & z(n) \\ z(2) & z(3) & \dots & z(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z(m) & z(m+1) & \dots & z(N) \end{bmatrix},$$

где $1 < n < N, m = N - n + 1$.

Шаг 3. Требуется разложить матрицу сигнала и выбрать соответствующий ранг для восстановления исходных данных волнового сигнала $A_r = B_r C_r$, где B_r, C_r – две матрицы декомпозиций низкого ранга A , r – выбранный ранг. Разделенные волновые данные могут быть получены путем извлечения первой строки и последнего столбца A_r .

На рис.1.5(a) показаны 3 компонента движения (вертикальный, восток–запад и север–юг) для данных трехмерной волны. На рис.1.5(b) показана гибридная волна, генерируемая добавлением гауссовских белых шумов интенсивностью 0.01 к данным трехмерной волны на рис.1.5(a). На рис.1.5(c) показаны приблизительные данные исходной волны, сгенерированные при выполнении описанного выше метода разделения волн для волны с добавлением шума на рис.1.5(c). Очевидно, что метод разделения волн, основанный на LRDQ, может хорошо имитировать исходные волновые данные.

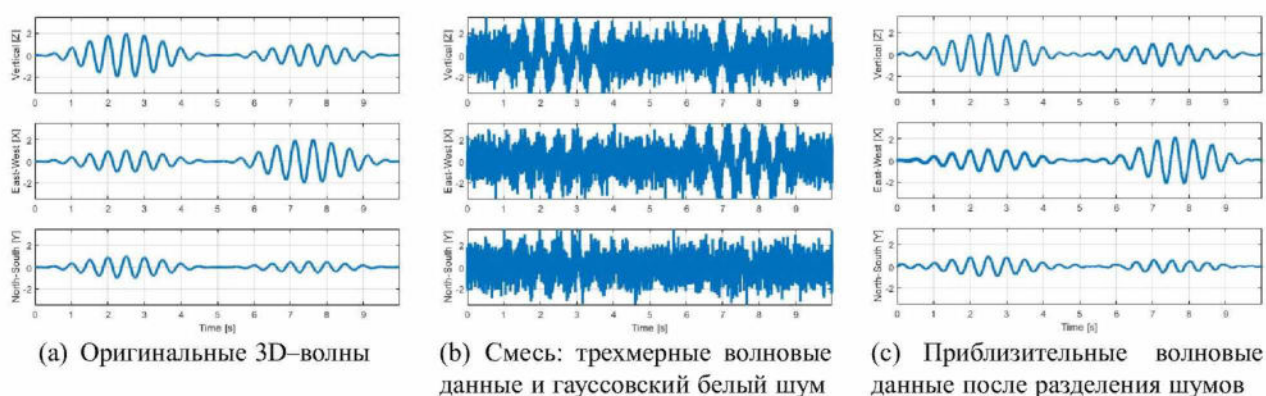


Рисунок 1.5: Трехмерное разделение волн на основе LRDQ.

1.4 Выводы

В этой главе изучена декомпозиция низкого ранга чисто мнимых кватернионных матриц и построен вещественный сохраняющий структуру алгоритм, основанный на итерациях наименьших квадратов и изоморфно матрицах.

- (1) По сравнению с прямой операцией с кватернионами вычислительные затраты сокращаются за счет использования изоморфного вещественного представления, преобразованного в реальные операции;
- (2) Создана новая схема сжатия цветного изображения с использованием чисто мнимой кватернионной матричной декомпозиции. Основными преимуществами схемы сжатия являются: по сравнению с кватернионным SVD алгоритмом сжатия цветного изображения операции сохраняют чисто мнимое свойство зна-

чений и не производят вещественных частей; по сравнению с традиционным алгоритмом трехканальной матричной декомпозиции, в модели цветного изображения чисто мнимый кватернион поддерживает внутреннюю связь цветового канала;

(3) Создана эффективная схема шумоподавления 3D-сигнала, и в процессе шумоподавления избыточные реальные части не генерируются.

Глава 2

Два комплексных сохраняющих структуру алгоритма для полноранговых декомпозиций кватернионных матриц и их приложения

Как фундаментальное свойство матричных алгебр, декомпозиция по полному рангу всегда является актуальной темой. В области распознавания лиц полная ранговая декомпозиция позволяет избежать итеративных шагов и решить проблему разреженной системы напрямую, сэкономить много времени и повысить точность классификации. В статье [125] авторы предложили быстрый и надежный метод распознавания лиц, названный повышением разреженности с помощью полной ранговой декомпозиции. Предложенный метод сначала представлял тестовую выборку в виде линейной комбинации обучающих данных так же, как и разреженное представление, затем производил полную ранговую декомпозицию матрицы обучающих данных. Наконец, они получили обобщенную обратную матрицу обучающих данных и выявили общее решение линейного уравнения. В области системного управления компенсатор системы полного ранга распространил внутреннее управление моделью на систему с недостатком структурного ранга, что эффективно устранило особенность, заключающуюся в том, что метод управления моделью подходит только для квадратных систем. В работе [126] авторы предложили метод управления внутренней моделью для структурированных систем с дефицитом ранга, основанный на полной ранговой декомпозиции. Система была преобразована в систему ранжирования по столбцам путем разработки предварительного компенсатора. Затем разрабатывается компенсатор обратной связи для улучшения динамических характеристик системы полного разряда и уменьшения трудностей при проектировании контроллера. В области численных вычислений, декомпозиция по полному ран-

гу также широко используется. Многие псевдоинверсии матрицы или матричных функций над полем рациональных чисел требуют полной ранговой декомпозиции матрицы для получения наилучшего представления [127–131]. Однако в кольце кватернионов эти исследования пока остаются незавершенными. Основанный на широком применении алгебры кватернионов и полной ранговой декомпозиции в вышеуказанных областях, сохраняющий структуру алгоритм значительно повышает своевременность декомпозиции матрицы кватернионов, и его результаты в определенной степени лучше, чем у набора инструментов для кватернионов (QTFM). Мы находим, что комплексный сохраняющий структуру алгоритм также эффективен для полной ранговой декомпозиции кватернионной матрицы. Теоретическая основа комплексного сохраняющего структуру алгоритма такая же, как и у вещественного сохраняющего структуру алгоритма, но форма записи его алгоритма относительно проста, размеры матрицы уменьшены наполовину, и ученые не изучали и не приводили полный алгоритм ранговой декомпозиции кватернионных матриц. В этом разделе мы выводим два комплексных сохраняющих структуру алгоритма для полной ранговой декомпозиции кватернионных матриц, используя метод исключения Гаусса (QFRD) и метод ортогонализации Грама-Шмидта (QFRF), и доказываем форму полной ранговой декомпозиции обобщенной обратной кватернионной матрицы. Кроме того, описанный выше алгоритм полноранговой декомпозиции применяется для классификации разреженных представлений цветных изображений с хорошими результатами классификации.

2.1 Комплексные представления кватернионных матриц

Для любой кватернионной матрицы $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k = M_1 + M_2j = N_1 + kN_2 \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ две изоморфные матрицы комплексного представления имеют

следующие формы [98, 132]

$$A^{C_1} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2m \times 2n}, \quad A^{C_2} = \begin{bmatrix} N_1 & -\overline{N_2} \\ N_2 & \overline{N_1} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2m \times 2n}, \quad (2.1)$$

где $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $M_1 = A_1 + A_2i$, $M_2 = A_3 + A_4i$, $N_1 = A_1 + A_2i$, $N_2 = A_4 + A_3i \in \mathbf{C}^{m \times n}$. В дополнение,

$$Q_m^T A^{C_1} Q_n = \overline{A^{C_1}}, \quad Q_m^T A^{C_2} Q_n = \overline{A^{C_2}}, \quad (2.2)$$

где $Q_l = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{bmatrix}$, I_l - тождественная матрица, Q_l - унитарная матрица. По (2.1) и (2.2) легко доказать следующие результаты.

Предложение 2.1 [133] Пусть $A, B \in \mathbf{Q}^{m \times n}$, $C \in \mathbf{Q}^{n \times p}$, $a \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} (A + B)^C &= A^C + B^C, & (AC)^C &= A^C C^C, & (aA)^C &= aA^C, \\ (A + B)_r^{C_1} &= A_r^{C_1} + B_r^{C_1}, & (AC)_r^{C_1} &= A_r^{C_1} C^{C_1}, & (aA)_r^{C_1} &= aA_r^{C_1}, \\ (A + B)_c^{C_2} &= A_c^{C_2} + B_c^{C_2}, & (AC)_c^{C_2} &= A^{C_2} C_c^{C_2}, & (aA)_c^{C_2} &= aA_c^{C_2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $C = \{C_1, C_2\}$, $A_r^{C_1} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$, $A_c^{C_2} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$.

Основываясь на свойстве изометрии двух изоморфных пространств на нормированном пространстве, норма Фробениуса кватернионной матрицы $A \in \mathbf{Q}^{m \times n}$ определяется

$$\|A\|_F \equiv \|A_r^{C_1}\|_F = \|A_c^{C_2}\|_F = \sqrt{\|A_1\|_F^2 + \|A_2\|_F^2 + \|A_3\|_F^2 + \|A_4\|_F^2}. \quad (2.4)$$

Предложение 2.2 [133] Даны две кватернионные матрицы A, B . Тогда

- (1) $\text{rank}(A) = \frac{1}{2}\text{rank}(A^{C_1}) = \frac{1}{2}\text{rank}(A^{C_2})$;
- (2) $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) \iff \text{rank}(A^C) = \text{rank}(B^C)$, $A, B \in \mathbf{Q}^{m \times n}$;
- (3) $\text{rank}(A^{\mathbb{H}}) = \text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A^T)$, $\text{rank}(A^{\mathbb{H}}A) = \text{rank}(A)$, $A \in \mathbf{Q}^{m \times n}$.

2.2 Два сохраняющих структуру алгоритма

I. QFRD на основе исключения Гаусса. Предположим, что $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{Q}^n$ с $x_i \neq 0$. Тогда существуют вектор $l_i = (0, \dots, 0, l_{i+1}, \dots, l_n)^T$ и матрица

$$L_i = I_n - l_i e_i^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -l_{i+1,i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -l_{n,i} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

такие, что $L_i x = (x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)^T$, где $l_{k,i} = x_k x_i^{-1} = \frac{x_k \bar{x}_i}{\|x_i\|^2}$, $k = i+1, \dots, n$. L_i , l_i , $l_{k,i}$ обозначают матрицу преобразования Гаусса, вектор преобразования Гаусса и множитель соответственно. Для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ процесс полноранговой декомпозиции A выглядит следующим образом:

(1) Если $a_{11} \neq 0$, построить L_1 такую, что

$$L_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix} = A^{(2)}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -l_{21} & 1 & & \\ -l_{31} & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ -l_{m1} & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

(2) Если $a_{11} = 0$. Предположим, что существует $a_{i1} \neq 0$. Поменяйте местами строки 1 и i из A , т.е. существует матрица перестановок P_1 такая, что $L_1 P_1 A = A^{(2)}$.

(3) Аналогично, результат после шага $k-1$, мы имеем следующие результаты,

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & a_{mk}^{(k)} & \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

В приведенном выше процессе, если $a_{kk}^{(k)} = a_{kk+1}^{(k)} = \dots = a_{mk}^{(k)} = 0$, затем перейдите к операции с элементом столбца $k + 1$. После шага r выше, преобразуйте исходную матрицу кватернионов в верхнюю треугольную матрицу,

$$L_r P_r \dots L_1 P_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1r}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\iff A = P^{-1} L^{-1} \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} = [B \quad *] \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} = BC,$$

где $L = L_r \dots L_1$; $P = Q_r \dots Q_2 P_1$; $Q_i = (L_{i-1} \dots L_1)^{-1} P_i (L_{i-1} \dots L_1)$; $2 \leq i \leq r$; $L_r P_r \dots L_1 P_1 A = L_r P_r \dots L_2 L_1 Q_2 P_1 A = L_r \dots L_1 Q_r \dots Q_2 P_1 A = LPA$.

Основываясь на вышеприведенном процессе вычисления, мы используем изоморфную комплексную матрицу представления кватернионной матрицы, преобразуем соответствующую операцию к комплексному полю и объем вычислений и получаем сохраняющий структуру алгоритм декомпозиции полного ранга. Пусть $l_i = l_i^{(1)} + l_i^{(2)}j \in \mathbf{Q}^n$, где $l_i^{(j)} = (0, \dots, 0, l_{i,i}^{(j)}, l_{i+1,i}^{(j)}, \dots, l_{n,i}^{(j)})^T$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2$, и

$$L_i^{C_1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 0 & & & \\ 0 & \dots & & & \vdots & \dots & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots & & 0 & \\ \vdots & & -l_{i+1,i}^{(1)} & \dots & \vdots & & -l_{i+1,i}^{(2)} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & -l_{n,i}^{(1)} & \dots & 1 & 0 & \dots & -l_{n,i}^{(2)} & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & & 1 & & & & \\ \vdots & \dots & & & \vdots & \dots & & & & \\ \vdots & & 0 & & \vdots & & 1 & \\ \vdots & & \frac{l_{i+1,i}^{(2)}}{l_{i+1,i}^{(1)}} & \dots & \vdots & & -\frac{l_{i+1,i}^{(1)}}{l_{i+1,i}^{(2)}} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{l_{n,i}^{(2)}}{l_{n,i}^{(1)}} & \dots & 0 & 0 & \dots & -\frac{l_{n,i}^{(1)}}{l_{n,i}^{(2)}} & \dots & 1 \end{array} \right], \quad (2.9)$$

$$\left(L_i^{C_1}\right)^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & & & \vdots & \cdots & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots & & 0 & \\ \vdots & & l_{i+1,i}^{(1)} & \cdots & \vdots & & l_{i+1,i}^{(2)} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & l_{n,i}^{(1)} & \cdots \cdots 1 & 0 & \cdots & l_{n,i}^{(2)} & \cdots \cdots 0 \\ \hline 0 & & & & 1 & & & \\ \vdots & \cdots & & & 0 & \cdots & & \\ \vdots & & 0 & & \vdots & & 1 & \\ \vdots & & -\overline{l_{i+1,i}^{(2)}} & \cdots & \vdots & & \overline{l_{i+1,i}^{(1)}} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -\overline{l_{n,i}^{(2)}} & \cdots \cdots 0 & 0 & \cdots & \overline{l_{n,i}^{(1)}} & \cdots \cdots 1 \end{array} \right], \quad (2.10)$$

$l_{k,i}^{(1)} = \frac{x_k^{(1)} \overline{x_i^{(1)}} + x_k^{(2)} \overline{x_i^{(2)}}}{\|x_i\|^2}$, $l_{k,i}^{(2)} = \frac{-x_k^{(1)} x_i^{(2)} + x_k^{(2)} x_i^{(1)}}{\|x_i\|^2}$, $\|x_i\|^2 = \|x_i^{(1)}\|^2 + \|x_i^{(2)}\|^2$, $i < k \leq n$, $j = 1, 2$. Для любой матрицы $A = A_1 + A_2 i + A_3 j + A_4 k = M_1 + M_2 j \in \mathbf{Q}^{m \times n}$, $M_1 = (a_{ij}^{(1)})$, $M_2 = (a_{ij}^{(2)}) \in \mathbf{C}^{m \times n}$. Пусть исходная матрица будет следующей:

$$A^{C_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} & a_{m1}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \\ \hline -\overline{a_{11}^{(2)}} & \cdots & -\overline{a_{1n}^{(2)}} & \overline{a_{11}^{(1)}} & \cdots & \overline{a_{1n}^{(1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a_{m1}^{(2)}} & \cdots & -\overline{a_{mn}^{(2)}} & \overline{a_{m1}^{(1)}} & \cdots & \overline{a_{mn}^{(1)}} \end{array} \right]. \quad (2.11)$$

(1) Если $\|a_{11}\|^2 = \|a_{11}^{(1)}\|^2 + \|a_{11}^{(2)}\|^2 > 0$, постройте комплексную матрицу представления матрицы L_1 , где $l_{i1}^{(1)} = (a_{i1}^{(1)} \overline{a_{11}^{(1)}} + a_{i1}^{(2)} \overline{a_{11}^{(2)}}) / \|a_{11}\|^2$, $l_{i1}^{(2)} = (-a_{i1}^{(1)} a_{11}^{(2)} + a_{i1}^{(2)} a_{11}^{(1)}) / \|a_{11}\|^2$, $i = 2, \dots, m$. Тогда

$$L_1^{C_1} A^{C_1} = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{a}_{11}^{(1)} & \hat{M}_{12}^{(1)} & \hat{a}_{11}^{(2)} & \hat{M}_{12}^{(2)} \\ 0 & \hat{M}_{22}^{(1)} & 0 & \hat{M}_{22}^{(2)} \\ \hline -\hat{a}_{11}^{(2)} & -\hat{M}_{12}^{(2)} & \hat{a}_{11}^{(1)} & \hat{M}_{12}^{(1)} \\ 0 & -\hat{M}_{22}^{(2)} & 0 & \hat{M}_{22}^{(1)} \end{array} \right], \quad (2.12)$$

$L_1^{C_1} A^{C_1}$ – это комплексная матрица представления $\begin{bmatrix} \hat{a}_{11}^{(1)} & \hat{M}_{12}^{(1)} \\ 0 & \hat{M}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{a}_{11}^{(2)} & \hat{M}_{12}^{(2)} \\ 0 & \hat{M}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} j$.
 $\hat{M}_{12}^{(1)}, \hat{M}_{12}^{(2)} \in \mathbf{C}^{1 \times (n-1)}$, $\hat{M}_{22}^{(1)}, \hat{M}_{22}^{(2)} \in \mathbf{C}^{(m-1) \times (n-1)}$ подматрицы после преобразования Гаусса M_1 и M_2 .

(2) Если $\|a_{11}\|^2 = \|a_{11}^{(1)}\|^2 + \|a_{11}^{(2)}\|^2 = 0$, выберите $i_0 (2 \leq i_0 \leq m)$ таким образом, чтобы $\|a_{i_0 1}\|^2 = \|a_{i_0 1}^{(1)}\|^2 + \|a_{i_0 1}^{(2)}\|^2 > 0$, поменяйте местами строки 1 и i_0 из A , т.е. существует реальная матрица перестановок P_1 такая, что,

$$P_1^{C_1} A^{C_1} = \begin{bmatrix} a_{i_0 1}^{(1)} & \cdots & a_{i_0 n}^{(1)} & a_{i_0 1}^{(2)} & \cdots & a_{i_0 n}^{(2)} \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline -a_{i_0 1}^{(2)} & \cdots & -a_{i_0 n}^{(2)} & a_{i_0 1}^{(1)} & \cdots & a_{i_0 n}^{(1)} \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline -a_{11}^{(2)} & \cdots & -a_{1n}^{(2)} & a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

где $P_1^{C_1} A^{C_1}$ удовлетворяет (1), постройте матрицу L_1 таким образом, что,

$$L_1^{C_1} P_1^{C_1} A^{C_1} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11}^{(1)} & \hat{M}_{12}^{(1)} & \hat{a}_{11}^{(2)} & \hat{M}_{12}^{(2)} \\ 0 & \hat{M}_{22}^{(1)} & 0 & \hat{M}_{22}^{(2)} \\ \hline -\hat{a}_{11}^{(2)} & -\hat{M}_{12}^{(2)} & \hat{a}_{11}^{(1)} & \hat{M}_{12}^{(1)} \\ 0 & -\hat{M}_{22}^{(2)} & 0 & \hat{M}_{22}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

После описанного выше шага l , M_1, M_2 являются двумя единичными верхними треугольными матрицами, т.е.:

$$L_r^{C_1} P_r^{C_1} \cdots L_1^{C_1} P_1^{C_1} A^{C_1} = \begin{bmatrix} \hat{M}^{(1)} & \hat{M}^{(2)} \\ 0 & 0 \\ \hline -\hat{M}^{(2)} & \hat{M}^{(1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Чтобы унифицировать представление, все P_1, \dots, P_r существуют на дисплее, но не все из них существуют в реальной работе. $\hat{M}^{(1)}, \hat{M}^{(2)} \in \mathbf{C}^{r \times n}$ являются преобразованной по Гауссу подматрицей матриц M_1, M_2 , то матрица

комплексного представления декомпозиции полного ранга матрица

$$C^{C_1} = \begin{bmatrix} \hat{M}^{(1)} & \hat{M}^{(2)} \\ -\hat{M}^{(2)} & \hat{M}^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2r \times 2n}, \quad B^{C_1} = P^{C_1} L^{C_1}(:, |1:r, n:n+r|) \in \mathbf{C}^{2m \times 2r}, \quad (2.16)$$

где $P^{C_1} = (Q_r^{C_1} \dots Q_2^{C_1} P_1^{C_1})^{-1}$; $Q_i^{C_1} = (L_{i-1}^{C_1} \dots L_1^{C_1})^{-1} P_i^{C_1} (L_{i-1}^{C_1} \dots L_1^{C_1})$; $2 \leq i \leq r$; $L_r^{C_1} = (L_r^{C_1} \dots L_1^{C_1})^{-1}$.

Теорема 2.3 Предположим, что $A \in \mathbf{Q}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. Тогда существуют $B^{C_1} \in \mathbf{C}^{2m \times 2r}$, $C^{C_1} \in \mathbf{C}^{2r \times 2n}$, $\text{rank}(B^{C_1}) = \text{rank}(C^{C_1}) = 2r$, так что $A^{C_1} = B^{C_1} C^{C_1}$, т.е. $A = BC$.

Согласно (2.3), нам нужно только вычислить первую строку блоков матрицы комплексного представления в реальной работе программы. Далее мы приводим вещественный сохраняющий структуру алгоритм описанного выше процесса.

Алгоритм 2.1(Алгоритм QFRD на основе определения Гаусса): Для любой матрицы $A = M_1 + M_2 j \in \mathbf{Q}^{m \times n}$. Ввод $M_1, M_2 \in \mathbf{C}^{m \times n}$, вывод $B_1, B_2 \in \mathbf{C}^{m \times r}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{C}^{r \times n}$, т.е. $B = B_1 + B_2 j$, $C = C_1 + C_2 j$, так что $A = BC$.

Шаг 1. Инициализация.

$$\begin{aligned} M &= [M_1, M_2]; \quad [m, n] = \text{size}(M_1); \quad BB = [\text{eye}(m, n), \text{zeros}(m, n)]; \\ W &= \text{eye}(m); \quad N = \text{eye}(m); \quad j = 1; \quad p = 1 : m; \quad \text{tol} = 1e - 10; \end{aligned}$$

Шаг 2. Циклическое тело метода исключения Гаусса.

$$\begin{aligned} &\text{while } j \leq \min(m, n) \\ &d = [M(j, j), M(j, j+n)] * [M(j, j), M(j, j+n)]'; \\ &\text{if } d > 0 \\ &BB(j+1:m, [j, j+n]) = M(j+1:m, [j, j+n]) * \text{CR1}(\overline{M(j, j)})/d, \\ &\quad -M(j, j+n)/d); \\ &M(j+1:m, [j, j+n]) = \text{zeros}(m-j, 2); \\ &M(j+1:m, [j+1:n, j+1+n:2n]) = M(j+1:m, [j+1:n, j+1+n:2n]) - \\ &\quad BB(j+1:m, [j, j+n]) * \text{CR1}(M(j, j+1:n), M(j, j+1+n:2n)); \end{aligned}$$

```

else k = j + 1;
while k <= m
d = [M(j,j), M(j, j + n)] * [M(j,j), M(j, j + n)]';
if d > 0
M([j, k], :) = M([k, j], :); p([j, k]) = p([k, j]);
BB(j + 1 : m, [j, j + n]) = M(j + 1 : m, [j, j + n]) * CR1(overline{M(j,j)}/d,
-M(j, j + n)/d);
M(j + 1 : m, [j, j + n]) = zeros(m - j, 2);
M(j + 1 : m, [j + 1 : n, j + 1 + n : 2n]) = M(j + 1 : m, [j + 1 : n, j + 1 + n
: 2n]) - BB(j + 1 : m, [j, j + n]) * CR1(M(j, j + 1 : n), M(j, j + 1 + n : 2n));
break;
else k = k + 1; end end
end j = j + 1; end

```

Шаг 3. Выходные результаты.

```

for k = 1 : m
N(k, :) = W(p(k), :);
end
for j = n : -1 : 1
id = find(sum((([M(:, j), M(:, j + n)]. * [overline{M(:, j)}, overline{M(:, j + n)}])') > tol, 1, 'last'));
if id > 0 break; end
end
C1 = M(1 : id, 1 : n); C2 = M(1 : id, n + 1 : 2n);
B1 = N * BB(:, 1 : id); B2 = N * BB(:, n + 1 : n + id);

```

В алгоритме 2.1 функция CR1 является матричной функцией комплексного представления кватернионной матрицы, т.е., $CR1(M_1, M_2) = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -\overline{M_2} & \overline{M_1} \end{bmatrix}$.

II. QFRF на основе ортогонализации Грама-Шмидта. Задан произвольный

набор кватернионных векторов $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Q}^m$. Тогда существует множество ортогональных базисов $b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathbb{Q}^m$, таких, что

$$\text{span} \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \text{span} \{b_1, b_2, \dots, b_r\}, \quad (2.17)$$

в этом случае внутреннее произведение $\langle b_i, b_j \rangle = 0, i \neq j$, $\text{span} \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ обозначает векторное пространство, состоящее из множества векторов $[b_1, b_2, \dots, b_r]$. Стоит отметить, что поскольку кольцо кватерниона не удовлетворяет мультипликативному коммутативному правилу, контекст рассматривает только правильную линейную корреляцию (или некорреляцию) и правильную линейную комбинацию векторов. То есть, если a_i может быть линейно представлен набором векторов $[b_1, b_2, \dots, b_r]$, то существует набор кватернионов $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{Q}$, такой, что $a_i = b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_r k_r$. Определите процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Установите

$$b_i = a_p - b_1 \frac{\langle b_1, a_p \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} - \dots - b_{i-1} \frac{\langle b_{i-1}, a_p \rangle}{\langle b_{i-1}, b_{i-1} \rangle} \text{ if } a_p - \dots - b_{i-1} \frac{\langle b_{i-1}, a_p \rangle}{\langle b_{i-1}, b_{i-1} \rangle} \neq 0. \quad (2.18)$$

В противном случае, $b_i = a_q - b_1 \frac{\langle b_1, a_q \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} - \dots - b_{i-1} \frac{\langle b_{i-1}, a_q \rangle}{\langle b_{i-1}, b_{i-1} \rangle}$, a_q - это первый ненулевой вектор, который делает $a_q - b_1 \frac{\langle b_1, a_q \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} - \dots - b_{i-1} \frac{\langle b_{i-1}, a_q \rangle}{\langle b_{i-1}, b_{i-1} \rangle}$ ненулевым, $i = 1, 2, \dots, r, 1 \leq p \leq n, p+1 \leq q \leq n$. Для любой матрицы $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{Q}^{m \times n}, a_s \in \mathbb{Q}^m, s = 1, 2, \dots, n$ процесс полноранговой декомпозиции A выглядит следующим образом:

(1) Если $a_1 \neq 0$, постройте следующие матрицы кватернионов, удовлетворяющие $b_1 = a_1$. В противном случае $b_1 = a_s, a_s$ является первым ненулевым вектором в наборе векторов $[a_2, \dots, a_n]$.

(2) Если $a_2 - b_1 \frac{b_1^\dagger a_2}{\|b_1\|^2} \neq 0$, постройте следующие матрицы кватернионов, удовлетворяющие

$$b_2 = a_2 - b_1 \frac{b_1^\dagger a_2}{\|b_1\|^2}, \text{ т.е., } [a_1, a_2] = [b_1, b_2] \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1^\dagger a_2}{\|b_1\|^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

В противном случае, $b_2 = a_i - b_1 \frac{b_1^- a_i}{\|b_1\|^2}$, a_i - это первый ненулевой вектор, который составляет уравнение $a_i - b_1 \frac{b_1^- a_i}{\|b_1\|^2} \neq 0$, $3 \leq i \leq n$.

(3) После шага r , описанного выше, мы можем получить следующий результат,

$$b_r = a_p - b_1 \frac{b_1^{\mathbb{H}} a_p}{\|b_1\|^2} - \dots - b_{r-1} \frac{b_{r-1}^{\mathbb{H}} a_p}{\|b_{r-1}\|^2}, \quad \text{т.е.},$$

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, b_r] \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1^{\mathbb{H}} a_2}{\|b_1\|^2} & \frac{b_1^- a_3}{\|b_1\|^2} & \dots & \frac{b_1^{\mathbb{H}} a_p}{\|b_1\|^2} & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \frac{b_2^- a_3}{\|b_2\|^2} & \dots & \frac{b_2^{\mathbb{H}} a_p}{\|b_2\|^2} & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \end{bmatrix} = BC, \quad (2.20)$$

$$\text{где } B = [b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, b_r], C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1^{\mathbb{H}} a_2}{\|b_1\|^2} & \frac{b_1^- a_3}{\|b_1\|^2} & \dots & \frac{b_1^{\mathbb{H}} a_p}{\|b_1\|^2} & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \frac{b_2^- a_3}{\|b_2\|^2} & \dots & \frac{b_2^{\mathbb{H}} a_p}{\|b_2\|^2} & * & \dots & * \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \end{bmatrix}. \quad \text{Кроме того, фор-}$$

ма C не определяется однозначно приведенным выше уравнением, которое связано с тем, являются ли первые r столбцы A линейно независимыми, но также может принимать следующий вид,

$$A = [b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, b_r] \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1^- a_2}{\|b_1\|^2} & * & \dots & * & \frac{b_1^{\mathbb{H}} a_p}{\|b_1\|^2} & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & \frac{b_2^{\mathbb{H}} a_p}{\|b_2\|^2} & * & \vdots & \dots & * \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \vdots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & * \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Основываясь на описанном выше процессе ортогонализации полной ранговой декомпозиции и изоморфизме матрицы кватернионов с ее матрицей комплексного представления и блоком первого столбца матрицы комплексного представления, мы приводим следующий комплексный сохраняющий струк-

туру алгоритм полной ранговой декомпозиции.

Для любой матрицы $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbf{Q}^{m \times n}$, $a_s = \beta_{s1} + k\beta_{s2} \in \mathbf{Q}^m$, $\beta_{s1}, \beta_{s2} \in \mathbf{C}^m$, $s = 1, 2, \dots, n$, процесс для полной ранговой декомпозиции A выглядит следующим образом:

(1) Если $a_{1c}^{C_2} \neq 0$, постройте следующую комплексную матрицу, удовлетворяющую

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

где $a_1 = \beta_{11} + k\beta_{12} \in \mathbf{Q}^m$, $b_1 = b_{11} + kb_{12} \in \mathbf{Q}^m$, т.е., $a_{1c}^{C_2} = b_{1c}^{C_2} \iff a_1 = b_1$. В противном случае $b_{1c}^{C_2} = a_{ec}^{C_2}$, $a_{ec}^{C_2}$ является первым блоком столбцов матрицы вещественного представления первого ненулевого вектора в наборе векторов $[a_2, \dots, a_n]$, $2 \leq e \leq n$.

(2) Если $a_{2c}^{C_2} - b_1^{C_2} \frac{(b_1^{C_2})^H a_{2c}^{C_2}}{\|b_{1c}^{C_2}\|^2} \neq 0$, постройте следующую комплексную матрицу, удовлетворяющую

$$\begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & -\bar{b}_{12} \\ b_{12} & \bar{b}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^H & b_{12}^H \\ -b_{12}^T & b_{11}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta_{21}}{\|b_{11}\|^2 + \|b_{12}\|^2} \\ \frac{\beta_{22}}{\|b_{11}\|^2 + \|b_{12}\|^2} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

т.е.,

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & -\bar{b}_{12} & -\bar{b}_{22} \\ b_{12} & b_{22} & \bar{b}_{11} & \bar{b}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \hat{c}_{21} \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & \hat{c}_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

где $\hat{c}_{21} = \frac{b_{11}^H \beta_{21} + b_{12}^H \beta_{22}}{\|b_{11}\|^2 + \|b_{12}\|^2}$, $\hat{c}_{22} = \frac{-b_{12}^T \beta_{21} + b_{11}^T \beta_{22}}{\|b_{11}\|^2 + \|b_{12}\|^2}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & \hat{c}_{21} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & \hat{c}_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{Q}^{2 \times 2}$, т.е., $[a_1, a_2]^{C_2} = [b_1, b_2]^{C_2} C \iff [a_1, a_2] = [b_1, b_2] C$. В противном случае $b_{2c}^{C_2} = a_{fc}^{C_2} - b_1^{C_2} \frac{(b_1^{C_2})^H a_{fc}^{C_2}}{\|b_{1c}^{C_2}\|^2}$, $a_{fc}^{C_2}$ является первым блоком матрицы комплексного представления первого ненулевого вектора, который составляет уравнение $a_{fc}^{C_2} - b_1^{C_2} \frac{(b_1^{C_2})^H a_{fc}^{C_2}}{\|b_{1c}^{C_2}\|^2} \neq 0$, $3 \leq f \leq n$.

(3) После шага r , описанного выше, мы можем получить следующий результат,

$$b_{rc}^{C_2} = a_{gc}^{C_2} - b_1^{C_2} \frac{(b_1^{C_2})^H a_{gc}^{C_2}}{\|b_{1c}^{C_2}\|^2} - \dots - b_{r-1}^{C_2} \frac{(b_{r-1}^{C_2})^H a_{gc}^{C_2}}{\|b_{r-1c}^{C_2}\|^2}, \quad r \leq g \leq n, \quad (2.25)$$

т.е.,
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{r1} & -\bar{b}_{12} & \dots & -\bar{b}_{r2} \\ b_{12} & \dots & b_{r2} & \bar{b}_{11} & \dots & \bar{b}_{r1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & * & & \end{bmatrix}, \quad A_c^{C_2} =$$

$B^{C_2} C_c^{C_2} \iff A = BC$, где $B = [b_{11}, \dots, b_{r1}] + k[b_{12}, \dots, b_{r2}] \in \mathbf{Q}^{m \times r}$ и

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & * & & \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & * & & \end{bmatrix} \in \mathbf{Q}^{r \times n}.$$

Кроме того, форма C не определяется однозначно приведенным выше уравнением, которое связано с тем, являются ли первые r столбцы A линейно независимыми.

Теорема 2.4 Пусть $A \in \mathbf{Q}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. Тогда существуют $B^{C_2} \in \mathbf{C}^{2m \times 2r}$, $C_c^{C_2} \in \mathbf{C}^{2r \times n}$ и $\text{rank}(B^{C_2}) = \text{rank}(C_c^{C_2}) = 2r$, такой, что $A_c^{C_2} = B^{C_2} C_c^{C_2} \iff A = BC$. Более того, в этой точке любые два вектора-столбца из B ортогональны друг другу.

Алгоритм 2.2(Алгоритм QFRF на основе ортогонализации Грама-Шмидта): Дано $A = A_1 + A_2 i + A_3 j + A_4 k \in \mathbf{Q}^{m \times n}$. Ввод $N_1 = A_1 + A_2 i$, $N_2 = A_4 + A_3 i \in \mathbf{C}^{m \times n}$, вывод $B_1, B_2 \in \mathbf{C}^{m \times r}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{C}^{r \times n}$, т.с., $B = B_1 + kB_2$, $C = C_1 + kC_2$, такой, что $A = BC$.

Шаг 1. Инициализация.

$$\begin{aligned} AC &= [N_1; N_2]; \quad M = AC; \quad [m, n] = \text{size}(N_1, 1); \quad r = 0; \quad BC = \text{zeros}(2m, n); \\ CC &= \text{zeros}(2n, n); \end{aligned}$$

Шаг 2. Циклическое тело.

while norm(M,'fro') > 1e - 10 & r <= m

Определите первый следующий ненулевой столбец M. В реальной работе мы используем норму столбца меньше 10^{-10} до 0 и находим первый ненулевой столбец n_1 из M с помощью следующей команды:

```
[m1, n1] = find(M(1 : m, :) * conj(M(1 : m, :)) + M(m + 1 : 2m, :) * conj(M(m + 1 : 2m, :))) > 1e - 10, 1); r = r + 1; BC(:, r) = M(:, n1);
```

```
for h = r : n
```

```
CC([r, r + n], h) = CR2(M(1 : m, n1)', -M(m + 1 : 2m, n1).') * (M(:, h) / norm(M(:, n1))^2); end
```

```
M = AC - CR2(BC(1 : m, :), BC(m + 1 : 2 * m, :)) * CC; end
```

Шаг 3. Вывод B_1, B_2, C_1, C_2 .

```
C1 = CC(1 : r, :); C2 = CC(n + 1 : n + r, :);
```

```
B1 = BC(1 : m, 1 : r); B2 = BC(m + 1 : 2m, 1 : r).
```

В алгоритме 2.2 функция CR2 является матричной функцией комплексного представления кватернионной матрицы, т.е. $CR2(N_1, N_2) = \begin{bmatrix} N_1 & -\overline{N_2} \\ N_2 & \overline{N_1} \end{bmatrix}$.

2.3 Обобщенные обратные представления на основе декомпозиции матриц

Для любой матрицы $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ рассмотрим следующие матричные уравнения,

$$(1) AXA = A; \quad (2) XAX = X; \quad (3) (AX)^{\mathbb{H}} = AX; \quad (4) (XA)^{\mathbb{H}} = XA, \quad (2.26)$$

где $X \in \mathbb{Q}^{n \times m}$. X называется $\{i, j, \dots\}$ обобщенной инверсией A если X удовлетворяет условиям Пенроуза $(i), (j), \dots$ в уравнении (2.26). Обозначим X через $A^{(i, j, \dots)}$ и множество всех $A^{(i, j, \dots)}$ через $A\{i, j, \dots\}$. Говорят, что единствен-

нос решение $A^{(1,2,3,4)}$ из (2.26) является обобщенной инверсией A и обозначим его через $A^\dagger \equiv A^{(1,2,3,4)}$.

Предложение 2.5 Пусть $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$. Затем

- (a) If $\text{rank}(A) = m$, then $A^\dagger = A^{\mathbb{H}}(AA^{\mathbb{H}})^{-1}$;
- (b) If $\text{rank}(A) = n$, then $A^\dagger = (A^{\mathbb{H}}A)^{-1}A^{\mathbb{H}}$.

Доказательство. (a). Поскольку $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^{\mathbb{H}}) = m$, ясно, что $AA^{\mathbb{H}}$ является неособой матрицей кватернионов, т.е., $AA^{\mathbb{H}}(AA^{\mathbb{H}})^{-1} = I_m$ и $A^\dagger = A^{\mathbb{H}}(AA^{\mathbb{H}})^{-1}$. (b) может быть проверен аналогичным образом.

Предложение 2.6 Пусть $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$, и $0 < s \leq r$ выбранные целые числа. Тогда справедливы следующие общие представления для псевдоинверсий:

- (a) $A\{2\} = \{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbb{Q}^{s \times m}, YA \in \mathbb{Q}^{s \times n}, \text{rank}(YA) = s\}$.
- (b) $A\{1, 2\} = \{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbb{Q}^{r \times m}, YA \in \mathbb{Q}^{r \times n}, \text{rank}(YA) = r\}$.
- (c) $A\{2, 3\} = \{Y(AY)^\dagger \mid Y \in \mathbb{Q}^{n \times s}, AY \in \mathbb{Q}^{m \times s}, \text{rank}(AY) = s\}$.
- (d) $A\{2, 4\} = \{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbb{Q}^{s \times m}, YA \in \mathbb{Q}^{s \times n}, \text{rank}(YA) = s\}$.

Доказательство. (a). Предположим, что $X \in A\{2\}$ и существует полная ранговая декомпозиция $X = BC$, $B \in \mathbb{Q}^{n \times s}$, $C \in \mathbb{Q}^{s \times m}$, $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = s$. Затем

$$BCABC = BC \iff B(CAB - I)C = 0, \quad (2.27)$$

это подразумевает $CAB = I$, легко доказать, что $B \in CA\{1, 2, 3, 4\}$, т.е., $B = (CA)^\dagger$. Следовательно,

$$X = (CA)^\dagger C \in \{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbb{Q}^{s \times m}, YA \in \mathbb{Q}^{s \times n}, \text{rank}(YA) = s\}. \quad (2.28)$$

С другой стороны, для произвольного $(YA)^\dagger Y \in \{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbf{Q}^{s \times m}, YA \in \mathbf{Q}^{s \times n}, \text{rank}(YA) = s\}$, очевидно, удовлетворяет

$$(YA)^\dagger Y \Lambda (YA)^\dagger Y = (YA)^\dagger [Y \Lambda (YA)^\dagger] Y = (YA)^\dagger Y, \quad (2.29)$$

т.е., $\{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbf{Q}^{s \times m}, YA \in \mathbf{Q}^{s \times n}, \text{rank}(YA) = s\} \subseteq A\{2\}$.

(b). Поскольку $A\{1, 2\} \subseteq A\{1\}$, для любого $X \in A\{2\}$, X также должен удовлетворять $X \in A\{1\}$, т.е.,

$$r \geq s \leq \text{rank}(\Lambda (YA)^\dagger Y \Lambda) = \text{rank}(\Lambda) = r, \quad (2.30)$$

это подразумевает $\text{rank}(YA) = r$.

С другой стороны, для произвольного $(YA)^\dagger Y \in \{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbf{Q}^{r \times m}, Y \Lambda \in \mathbf{Q}^{r \times n}, \text{rank}(Y \Lambda) = r\}$, очевидно, удовлетворяет

$$A(YA)^\dagger Y A = Y^\dagger [Y A (YA)^\dagger] Y A = Y^\dagger Y A = A, \quad (2.31)$$

т.е., $\{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbf{Q}^{r \times m}, Y \Lambda \in \mathbf{Q}^{r \times n}, \text{rank}(Y \Lambda) = r\} \subseteq A\{1, 2\}$.

(c). Предположим, что $X \in A\{2\}$ и существует полная ранговая декомпозиция $X = BC$, $B \in \mathbf{Q}^{n \times s}$, $C \in \mathbf{Q}^{s \times m}$, $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = s$. Тогда $BC \Lambda BC = BC \iff B(C \Lambda B - I)C = 0$, это подразумевает $C \Lambda B = I$, легко доказать, что $C \in AB\{1, 2, 3, 4\}$, т.е., $C = (AB)^\dagger$. Следовательно,

$$X = B(\Lambda B)^\dagger \in \{Y(\Lambda Y)^\dagger \mid Y \in \mathbf{Q}^{n \times s}, \Lambda Y \in \mathbf{Q}^{m \times s}, \text{rank}(\Lambda Y) = s\}. \quad (2.32)$$

Более того, поскольку $\text{rank}(\Lambda Y) = s$, X также удовлетворяет $X \in A\{3\}$, т.е., $A\{2, 3\} \subseteq \{Y(\Lambda Y)^\dagger \mid Y \in \mathbf{Q}^{n \times s}, \Lambda Y \in \mathbf{Q}^{m \times s}, \text{rank}(\Lambda Y) = s\}$.

С другой стороны, для произвольного $Y(\Lambda Y)^\dagger \in \{Y(\Lambda Y)^\dagger \mid Y \in$

$\mathbf{Q}^{n \times s}$, $AY \in \mathbf{Q}^{m \times s}$, $\text{rank}(AY) = s$ }, очевидно, удовлетворяет

$$\begin{aligned} Y(AY)^\dagger AY(AY)^\dagger &= Y(AY)^\dagger [AY(AY)^\dagger] = Y(AY)^\dagger, \\ (AY(AY)^\dagger)^\mathbb{H} &= ((AY)^\mathbb{H})^\dagger (AY)^\mathbb{H} = (AY)[((AY)^\mathbb{H}(AY))^\dagger (AY)^\mathbb{H}] = AY(AY)^\dagger, \end{aligned} \quad (2.33)$$

т.е., $\{Y(AY)^\dagger \mid Y \in \mathbf{Q}^{n \times s}, AY \in \mathbf{Q}^{m \times s}, \text{rank}(AY) = s\} \subseteq A\{2, 3\}$.

(d) может быть проверен аналогичным образом.

Предложение 2.7 Пусть $A \in \mathbf{Q}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$. Тогда справедливы следующие общие представления для псевдоинверсий:

$$(a) A\{1, 2, 3\} = \{Y(AY)^\dagger \mid Y \in \mathbf{Q}^{n \times r}, AY \in \mathbf{Q}^{m \times r}, \text{rank}(AY) = r\}.$$

$$(b) A\{1, 2, 4\} = \{(YA)^\dagger Y \mid Y \in \mathbf{Q}^{r \times m}, YA \in \mathbf{Q}^{r \times n}, \text{rank}(YA) = r\}.$$

Доказательство. (a). Поскольку $A\{1, 2, 3\} \subseteq A\{2, 3\}$, для любого $X \in A\{2, 3\}$, X также должен удовлетворять $X \in A\{1\}$, т.е.,

$$r \geq s \leq \text{rank}(AY(AY)^\dagger A) = \text{rank}(A) = r, \quad (2.34)$$

это подразумевает $\text{rank}(AY) = r$.

С другой стороны, для произвольного $Y(AY)^\dagger \in \{Y(AY)^\dagger \mid Y \in \mathbf{Q}^{n \times r}, AY \in \mathbf{Q}^{m \times r}, \text{rank}(AY) = r\}$, очевидно, удовлетворяет $Y(AY)^\dagger \in A\{2, 3\}$, и

$$(AY(AY)^\dagger A - A)Y = 0, \quad (2.35)$$

благодаря относительной произвольности Y , легко получить $AY(AY)^\dagger A - A = 0$, т.е., $\{Y(AY)^\dagger \mid Y \in \mathbf{Q}^{n \times r}, AY \in \mathbf{Q}^{m \times r}, \text{rank}(AY) = r\} \subseteq A\{1, 2, 3\}$.

(b) может быть проверен аналогичным образом.

Теорема 2.8 Предположим, что матрица $A \in \mathbf{Q}^{m \times n}$ имеет полную ранговую декомпозицию $A = BC$, в которой $B \in \mathbf{Q}^{m \times r}$, $C \in \mathbf{Q}^{r \times n}$, $\text{rank}(B) = \text{rank}(C) = r > 0$. Тогда $A^\dagger = C^\mathbb{H}(CC^\mathbb{H})^{-1}(B^\mathbb{H}B)^{-1}B^\mathbb{H}$ – является обобщенной обратной

матрицей из A .

Доказательство. Предположим, что существует декомпозиция полного ранга $A = BC$ из $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, где $\text{rank}(A) = r$, $B \in \mathbb{Q}^{m \times r}$, $C \in \mathbb{Q}^{r \times n}$, затем на $A^\dagger = A\{1, 2, 3, 4\} \subseteq A\{1, 2, 3\}$, для любого $X = Y(AY)^\dagger \in A\{1, 2, 3\}$, $\text{rank}(AY) = r$, пусть $AY = B$, и в этом случае,

$$BCY = B \iff Y = C^\dagger, \quad (2.36)$$

т.е., $X = Y(AY)^\dagger = C^\dagger B^\dagger = C^\mathbb{H}(CC^\mathbb{H})^{-1}(B^\mathbb{H}B)^{-1}B^\mathbb{H}$.

Предложение 2.9 Предполагается, что $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^n$. Тогда, если кватернионное линейное уравнение $Ax = b$ рассматривается как задача наименьших квадратов, наборы его решений и совместимая линейная система $Ax = AA^\dagger b$ совпадают. Общее решение задачи наименьших квадратов кватернионов имеет следующее выражение $x = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)y$, в котором $y \in \mathbb{Q}^n$ - любой вектор кватерниона.

2.4 Численные эксперименты и приложения

Пример 2.1 Дана матрица кватернионов $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, где $m = n = 25 : 25 : 500$, $A_1 = \text{rand}(m, n)$, $A_2 = \text{rand}(m, n)$, $A_3 = \text{rand}(m, n)$, $A_4 = \text{rand}(m, n)$. Сравните время работы процессора и ошибки $\eta = \frac{\|A - BC\|_F}{\|A\|_F}$ из 4 алгоритмов для полной ранговой декомпозиции кватернионной матрицы: (а) DAFR1: Алгоритм кватернионов, основанный на исключении Гаусса; (б) DAFR2: Алгоритм кватернионов, основанный на ортогонализации Грама-Шмидта; (с) QFRD: комплексный сохраняющий структуру алгоритм, основанный на исключении Гаусса; QFRF: комплексный сохраняющий структуру алгоритм, основанный на ортогонализации Грама-Шмидта.

На рис.2.1 показана производительность 4 алгоритмов декомпозиций кватернионных матриц по полному рангу. Хотя алгоритм QFRF работает медлен-

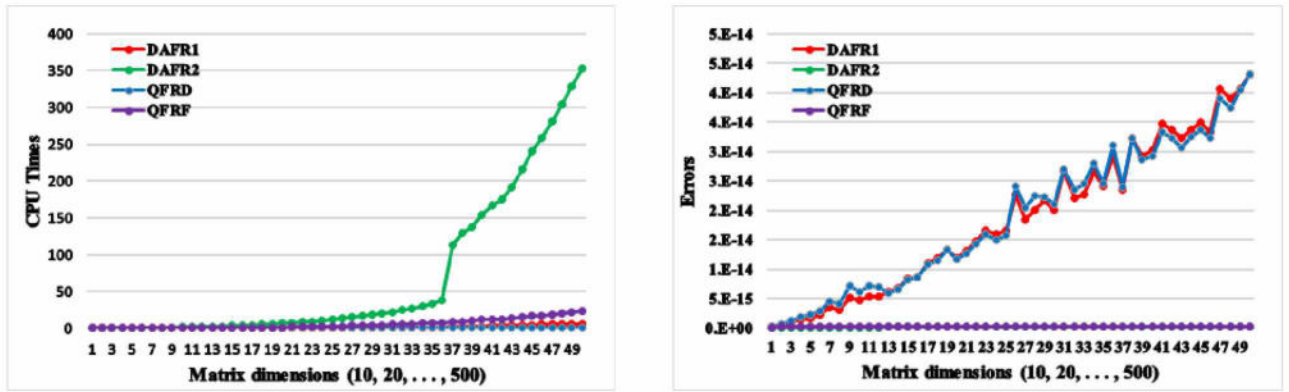


Рисунок 2.1: Сравнение 4 алгоритмов декомпозиции по полному рангу кватернионных матриц.

нее, чем алгоритм в [133], он имеет меньшую вычислительную ошибку. Когда требования к точности вычислений высоки, вы можете выбрать алгоритм QFRF.

Пример 2.2 Даны две матрицы $A = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2j = \mathbf{A}_1 + k\mathbf{A}_2 \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $Y = \mathbb{Y}_1 + \mathbb{Y}_2j = \mathbf{Y}_1 + k\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{Q}^{m \times p}$, где

$$A = \begin{bmatrix} 7 + 8i + 4j + 6k & 3 + 3i + 9j + 7k & 13 + 14i + 22j + 20k \\ 10 + 4i + 5j + 10k & 1 + 2i + 5j + 3k & 12 + 8i + 15j + 16k \\ 5 + i + 5j + 2k & 6 + 3i + 9j + 7k & 17 + 7i + 23j + 16k \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -68 + 79i + 80j + 5k & -46 + 50i + 81j + 56k \\ -35 + 65i + 80j + 21k & -20 + 24i + 67j + 49k \\ -33 + 71i + 85j - 16k & -31 + 45i + 92j + 36k \end{bmatrix}.$$

Вычислите обобщенное обратное значение A и решение минимальной нормы $AX = Y$, используя декомпозиции полного ранга A .

I. Результаты вычислений, полученные по алгоритму 2.1.

(1) Согласно (2.1) мы имеем

$$\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 7 + 8i & 3 + 3i & 13 + 14i \\ 10 + 4i & 1 + 2i & 12 + 8i \\ 5 + i & 6 + 3i & 17 + 7i \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 + 6i & 9 + 7i & 22 + 20i \\ 5 + 10i & 5 + 3i & 15 + 16i \\ 5 + 2i & 9 + 7i & 23 + 16i \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -68 + 79i & -46 + 50i \\ -35 + 65i & -20 + 24i \\ -33 + 71i & -31 + 45i \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 80 + 5i & 81 + 56i \\ 80 + 21i & 67 + 49i \\ 85 - 16i & 92 + 36i \end{bmatrix}.$$

(2) Запустив алгоритм 2.1, легко получить

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.1030 - 0.2545i & 1 \\ 0.4545 - 0.3333i & -0.5254 - 0.7089i \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.3697 + 0.2061i & 0 \\ 0.0303 + 0.1212i & -0.2200 + 0.1824i \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 7.0000 + 8.0000i & 3.0000 + 3.0000i & 13.0000 + 14.0000i \\ 0 & -4.9576 + 3.8970i & -9.9152 + 7.7939i \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 4.0000 + 6.0000i & 9.0000 + 7.0000i & 22.0000 + 20.0000i \\ 0 & -6.2182 - 4.1576i & -12.4364 - 8.3152i \end{bmatrix},$$

т.е., полная ранговая декомпозиция A равно $A = BC$, где

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.1030 - 0.2545i - 0.3697j + 0.2061k & 1 \\ 0.4545 - 0.3333i + 0.0303j + 0.1212k & -0.5254 - 0.7089i - 0.2200j + 0.1824k \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 + 8i + 4j + 6k & 3 + 3i + 9j + 7k & 13 + 14i + 22j + 20k \\ 0 & -4.9576 + 3.8970i - 6.2182j - 4.1576k & -9.9152 + 7.7939i - 12.4364j - 8.3152k \end{bmatrix}.$$

(3) Согласно теореме 2.8, легко получить

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} -0.0012 - 0.0218i + 0.0135j + 0.0029k & 0.0421 - 0.0052i - 0.0163j - 0.0485k & -0.0325 + 0.0198i + 0.0035j + 0.0353k \\ 0.0022 + 0.0107i - 0.0111j - 0.0030k & -0.0214 + 0.0005i + 0.0105j + 0.0256k & 0.0202 - 0.0113i - 0.0077j - 0.0235k \\ 0.0033 - 0.0005i - 0.0087j - 0.0032k & -0.0006 - 0.0043i + 0.0047j + 0.0027k & 0.0078 - 0.0028i - 0.0120j - 0.0117k \end{bmatrix}.$$

(4) Согласно теореме 2.9, легко получить

$$X = A^\dagger Y = \begin{bmatrix} 1.8333 + 1.6667i + 0.1667j + k & 1.1667 - 0.1667i + 0.6667j - 0.1667k \\ -0.3333 + 0.3333i + 0.3333j & 0.3333 + 0.6667i + 0.3333j + 0.6667k \\ 1.1667 + 2.3333i + 0.8333j + k & 1.8333 + 1.6667i + 1.3333j + 1.1667k \end{bmatrix}.$$

II. Результаты вычислений, полученные по алгоритму 2.2.

(1) Согласно (2.1) мы имеем

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 + 8i & 3 + 3i & 13 + 14i \\ 10 + 4i & 1 + 2i & 12 + 8i \\ 5 + i & 6 + 3i & 17 + 7i \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4i + 6 & 9i + 7 & 22i + 20 \\ 5i + 10 & 5i + 3 & 15i + 16 \\ 5i + 2 & 9i + 7 & 23i + 16 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} -68 + 79i & -46 + 50i \\ -35 + 65i & -20 + 24i \\ -33 + 71i & -31 + 45i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 80i + 5 & 81i + 56 \\ 80i + 21 & 67i + 49 \\ 85i - 16 & 92i + 36 \end{bmatrix}.$$

(2) Запустив алгоритм 1.2, легко получить

$$B_1 = \begin{bmatrix} 7 + 8i & | & 1.1345 - 1.2386i \\ 10 + 4i & | & -2.9176 + 1.0412i \\ 5 + i & | & 4.6030 + 2.1670i \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4i + 6 & | & 3.6594i + 1.2082 \\ 5i + 10 & | & -2.5488i - 3.9805 \\ 5i + 2 & | & 4.0716i + 6.0499 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & | & 0.6247 + 0.1432i & | & 2.2495 + 0.2863i \\ 0 & | & 1 & | & 2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & | & 0.3080i + 0.0217 & | & 0.6161i + 0.0434 \\ 0 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

т.е. полная ранговая декомпозиция A равно $A = BC$, где

$$B = \begin{bmatrix} 7 + 8i + 4j + 6k & | & 1.1345 - 1.2386i + 3.6594j + 1.2082k \\ 10 + 4i + 5j + 10k & | & -2.9176 + 1.0412i - 2.5488j - 3.9805k \\ 5 + i + 5j + 2k & | & 4.6030 + 2.1670i + 4.0716j + 6.0499k \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & | & 0.6247 & | & 0.1432i & | & 0.3080j & | & 0.0217k & | & 2.2495 & | & 0.2863i & | & 0.6161j & | & 0.0434k \\ 0 & | & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

(3) Согласно теореме 2.8, легко получить

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} -0.0012 - 0.0218i + 0.0135j + 0.0029k & | & 0.0421 - 0.0052i - 0.0163j - 0.0485k & | & -0.0325 + 0.0198i + 0.0035j + 0.0353k \\ 0.0022 & | & 0.0107i - 0.0111j - 0.0030k & | & -0.0214 & | & 0.0005i & | & 0.0103j & | & 0.0256k & | & 0.0202 - 0.0113i - 0.0077j - 0.0235k \\ 0.0033 - 0.0005i - 0.0087j - 0.0032k & | & -0.0006 - 0.0043i & | & 0.0047j & | & 0.0027k & | & 0.0078 - 0.0028i - 0.0120j - 0.0117k \end{bmatrix}.$$

(4) Согласно теореме 2.9, легко получить

$$X = A^\dagger Y = \begin{bmatrix} 1.8333 + 1.6667i + 0.1667j + k & | & 1.1667 - 0.1667i + 0.6667j - 0.1667k \\ -0.3333 + 0.3333i + 0.3333j & | & 0.3333 + 0.6667i + 0.3333j + 0.6667k \\ 1.1667 + 2.3333i + 0.8333j + k & | & 1.8333 + 1.1667i + 1.3333j + 1.1667k \end{bmatrix}.$$

Пример 2.3 Дается набор обучающих данных для распознавания лиц по цвету, и соответствующие тестовые выборки классифицируются. Обучающий набор делится на категории c . Цель состоит в том, чтобы точно предсказать метку b из заданных обучающих выборок класса c . Для каждого класса s пусть $\delta_s : \mathbf{Q}^N \rightarrow \mathbf{Q}^{n_s}$ - характеристическая функция, которая выбирает коэффициенты, связанные с i -ым классом. Тестовая выборка b может быть аппроксимиро-

вана $\hat{b}_s = A_s \delta_i(x)$, которая использует вектор δ_s из каждого класса. Используя остаток реконструкции для i -го класса $r_s(b) = \|b - \hat{b}_s\|_F$, мы можем получить приблизительное разреженное представление и результаты классификации тестового изображения. Конкретный алгоритм заключается в следующем.

Алгоритм 2.3(Алгоритм классификации цветных изображений лиц по разреженному представлению):

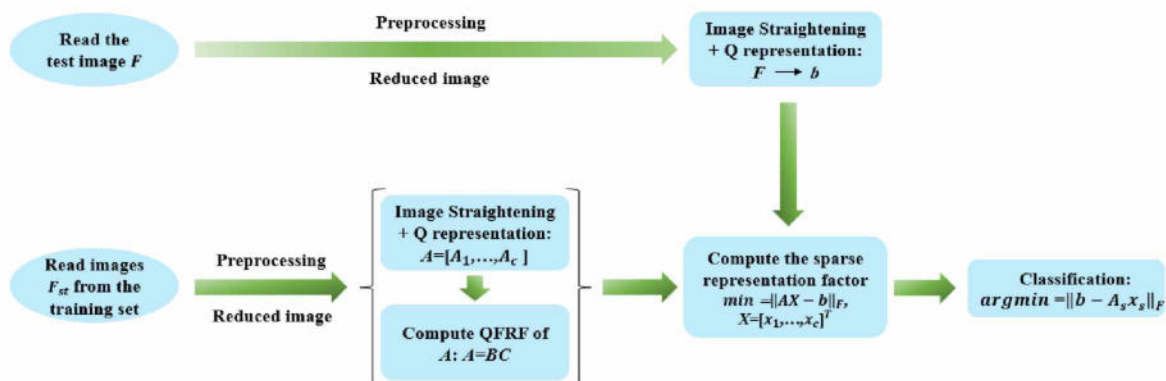


Рисунок 2.2: Блок-схема распознавания цветного лица.

Шаг 1. Чтобы повысить скорость извлечения признаков и снизить вычислительную сложность, цветные обучающие и тестовые изображения подвергаются предварительной обработке с уменьшением размерности;

Шаг 2. Для каждого обучающего изображения выпрямите $F_{st} \in \mathbf{R}^{m \times n \times 3} \rightarrow G_{st} \in \mathbf{Q}^{mn}$ и постройте обучающую матрицу $A = [A_1, \dots, A_c] \in \mathbf{Q}^{M \times N}$, где $A_s = [G_{s1}, \dots, G_{sn_s}]$, $s = 1, \dots, c$, $t = 1, \dots, n_s$. Для тестового изображения выпрямите $F \in \mathbf{R}^{m \times n \times 3} \rightarrow b \in \mathbf{Q}^{mn}$;

Шаг 3. Используя алгоритм QFRD/QFRF, вычислите полную ранговую декомпозицию обучающей матрицы A ;

Шаг 4. Вычислите обобщенную обратную величину A и минимальное нормальное решение задачи $\min \|Ax - b\|$;

Шаг 5. Вычислите идентификатор b : $\text{Identity}(b) = \arg \min_s \{\|b - A_s x_s\|_F\}$.

Сравниваются следующие три схемы распознавания лиц: **GFRD**: Схема распознавания лиц на основе изображения в оттенках серого [125]. **QFRD**: Схема распознавания лиц на основе QFRD. **QFRF**: Схема распознавания лиц, основанная на QFRF.

(1) Эксперименты по распознаванию лиц основаны на базе данных Faces95 [134]. База данных фиксирует информацию о лице каждого объекта по мере его постепенного приближения к камере. Наблюдаются большие изменения в пропорциях головы и небольшие изменения в наклоне головы. Исходный размер каждого изображения составляет 180×200 пикселей. В следующем эксперименте размер изображения был изменен до 9×10 пикселей. На рис.2.3 показаны 20 объектов, а на рис.2.4 показаны все изображения одного объекта.



Рисунок 2.3: Некоторые объекты в базе данных Faces95.



Рисунок 2.4: Изображения одного объекта в базе данных Faces95.

На рис.2.5 показана точность трех схем идентификации. Выберите 10, 20, 30 и 40 человек в качестве испытуемых в базе данных Faces95. Первые 7 и первые 13 фотографий каждого объекта используются в качестве обучающих изображений, а остальные изображения используются в качестве тестовых изображений.

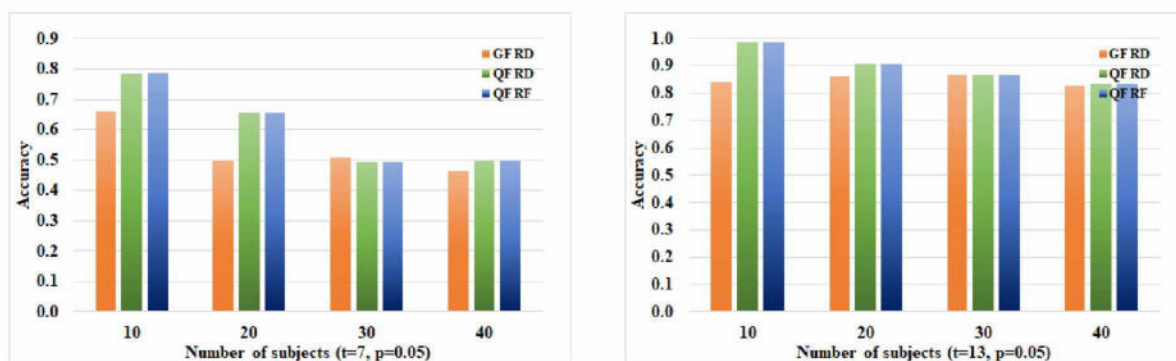


Рисунок 2.5: Распознавание лиц на основе базы данных Faces95 (10, 20, 30 и 40 субъектов).

(2) Эксперименты по распознаванию лиц, основанные на базе данных FEI [135]. База данных фиксировала информацию о лице каждого субъекта при различном освещении, разных ракурсах (поворот на 180 градусов) и различных выражениях (счастливое, грустное, нейтральное и т.д.). Существует приблизительно разница в размере 10% между каждой экспозицией. Исходный размер каждого изображения составляет 640×480 пикселей. В следующем эксперименте размер изображения был изменен до 32×24 пикселей. На рис.2.6 показаны 20 объектов, а на рис.2.7 показаны все изображения одного объекта.



Рисунок 2.6: Некоторые объекты в базе данных FEI.



Рисунок 2.7: Изображения одного объекта в базе данных FEI.

На рис.2.8 показана точность трех схем идентификации. Выберите 10, 20, 30 и 40 человек в качестве испытуемых в базе данных FEI. Первые 5 и первые

9 фотографий каждого объекта используются в качестве обучающих изображений, а остальные изображения используются в качестве тестовых изображений.

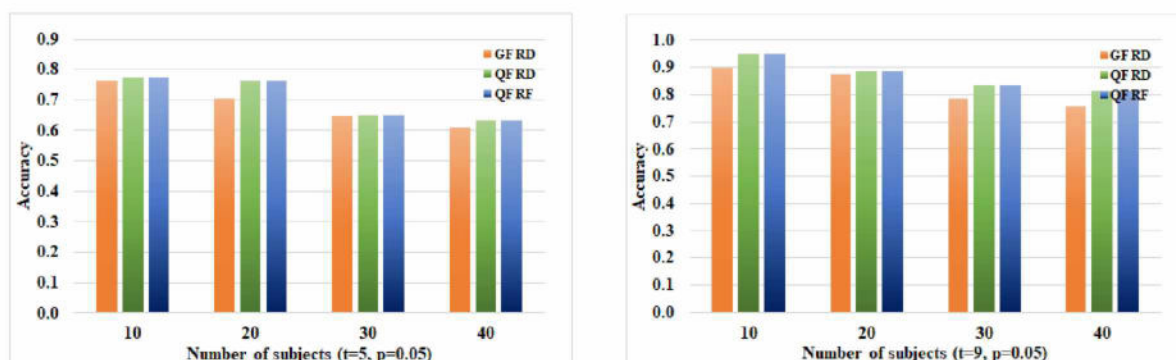


Рисунок 2.8: Распознавание лиц на основе базы данных FEI (10, 20, 30 и 40 субъектов).

2.5 Выводы

В этой главе обсуждаются два комплексных сохраняющих структуру алгоритма полной ранговой декомпозиции кватернионных матриц на основе метода исключения Гаусса и метода ортогонализации кватернионных матриц Грама-Шмидта. Кроме того, расширено и доказано представление полной ранговой декомпозиции обобщенной обратной кватернионной матрицы. Наконец, алгоритм декомпозиции применяется к классификации цветных изображений с разреженным представлением. Осуществимость и своевременность предложенных алгоритмов демонстрируются соответствующими примерами применения.

Глава 3

Обобщенная собственная декомпозиция разделенных кватернионных матриц и её приложения

Основываясь на важной роли алгебры разделенных кватернионов в обработке цветных изображений, механических систем и электромагнетизма, теоретических и алгоритмических исследований обобщенных собственных значений разделенных кватернионных матриц является актуальным и необходимым. В статье [136, 137] Jiang и др. систематически исследовали проблему диагонализации и проблеме собственных значений разделенных кватернионных матриц. Также на этой основе Guo и др. исследовали проблему собственных значений разделенных кватернионных эрмитовых матриц [138]. В работе [139] авторы вывели существование обобщенных собственных значений разделенных кватернионных матриц и дали метод нахождения комплексных собственных значений разделенных кватернионных матриц. Однако, похоже, что обсуждение и изучение проблемы обобщенных собственных значений разделенных кватернионных матриц не ограничивается комплексными значениями. Подобно собственным значениям разделенных кватернионных матриц [140], они теоретически должны содержать другие формы классов эквивалентности случаев.

С этой целью в этой главе мы рассмотрим обобщенную собственную декомпозицию разделенных кватернионных матриц при различных формах изоморфизма эквивалентности и приведем соответствующие обобщенные теоремы о собственной декомпозиции и алгебраические методы. Кроме того, для задачи распознавания цветных лиц создан двумерный метод линейного дискриминантного анализа, основанный на алгебре разделенных кватернионов. Численные примеры демонстрируют эффективность предложенной теории и метода.

3.1 Изоморфные представления разделенных кватернионных матриц

Дана произвольная матрица $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$. Его несколько вещественных матриц представления размером 2×2 имеют следующие формы:

$$A^{R_1} = \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & -A_2 + A_4 \\ A_2 + A_4 & A_1 - A_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}, \quad A^{R_2} = \begin{bmatrix} A_1 + A_4 & A_2 + A_3 \\ -A_2 + A_3 & A_1 - A_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}, \quad (3.1)$$

$$A^{R_3} = \begin{bmatrix} A_1 - A_3 & A_2 + A_4 \\ -A_2 + A_4 & A_1 + A_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}, \quad A^{R_4} = \begin{bmatrix} A_1 - A_4 & -A_2 + A_3 \\ A_2 + A_3 & A_1 + A_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}, \quad (3.2)$$

и существуют три матрицы $P_1 = \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $P_3 = \begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}$ удовлетворяющих A^{R_2} , A^{R_3} и A^{R_4} подобны:

$$A^{R_2} = P_1^{-1} A^{R_1} P_1, \quad A^{R_3} = P_2^{-1} A^{R_1} P_2, \quad A^{R_4} = P_3^{-1} A^{R_1} P_3. \quad (3.3)$$

Кроме того, его несколько 2×2 комплексных матриц представления имеют следующие формы:

$$A^{C_1} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2i & A_3 + A_4i \\ A_3 - A_4i & A_1 - A_2i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2m \times 2n}, \quad A^{C_2} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2i & A_4 - A_3i \\ A_4 + A_3i & A_1 - A_2i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2m \times 2n}, \quad (3.4)$$

$$A^{C_3} = \begin{bmatrix} A_1 - A_2i & A_3 - A_4i \\ A_3 + A_4i & A_1 + A_2i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2m \times 2n}, \quad A^{C_4} = \begin{bmatrix} A_1 - A_2i & A_4 + A_3i \\ A_4 - A_3i & A_1 + A_2i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2m \times 2n}, \quad (3.5)$$

и существуют три матрицы $P_4 = \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $P_5 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $P_6 = \begin{bmatrix} 0 & iI \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $P_7 = \begin{bmatrix} I & I \\ -iI & iI \end{bmatrix}$ удовлетворяют A^{C_2} , A^{C_3} , A^{C_4} и A^{R_1} подобны,

$$A^{C_2} = P_4^{-1} A^{C_1} P_4, \quad A^{C_3} = P_5^{-1} A^{C_1} P_5, \quad A^{C_4} = P_6^{-1} A^{C_1} P_6, \quad A^{R_1} = P_7^{-1} A^{C_1} P_7. \quad (3.6)$$

Его две 4×4 вещественные матрицы представления имеют следующие формы:

$$A^{\mathbb{R}_1} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 & A_4 \\ A_2 & A_1 & A_4 & -A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 \\ A_4 & -A_3 & A_2 & A_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4m \times 4n}, \quad A^{\mathbb{R}_2} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ -A_2 & A_1 & -A_4 & A_3 \\ A_3 & -A_4 & A_1 & -A_2 \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4m \times 4n}. \quad (3.7)$$

Аналогичную взаимосвязь также можно обнаружить в следующем:

$$A^{\mathbb{C}_1} = \begin{bmatrix} I_n & iI_n & I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n & I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n & iI_n & -I_n \\ iI_n & I_n & -iI_n & -I_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & 0 & 0 \\ \overline{M_2} & \overline{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & M_2 \\ 0 & 0 & \overline{M_2} & \overline{M_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & iI_n & I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n & I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n & iI_n & -I_n \\ iI_n & I_n & -iI_n & -I_n \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$A^{\mathbb{C}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_n & iI_n \\ I_n & iI_n & 0 & 0 \\ -I_n & iI_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_n & iI_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & 0 & 0 \\ \overline{M_2} & \overline{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & M_2 \\ 0 & 0 & \overline{M_2} & \overline{M_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_n & iI_n \\ I_n & iI_n & 0 & 0 \\ -I_n & iI_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_n & iI_n \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

где $M_1 = A_1 + A_2i$, $M_2 = A_3 + A_4i \in \mathbf{C}^{m \times n}$.

Все изоморфные матрицы представления строятся на основе следующего уравнения. Пусть $f = \{R_1, R_2, R_3, R_4, C_1, C_2, C_3, C_4, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2\}$. Тогда

$$(A + B)^f = A^f + B^f, \quad (AC)^f = A^f C^f, \quad (aA)^f = aA^f, \quad (3.10)$$

где $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $C \in \mathbf{H}_s^{n \times p}$, $a \in \mathbf{R}$.

Понятно, что в общем случае $(A^{\mathbb{H}})^f \neq (A^f)^{\mathbb{H}}$. Но для i -сопряженного транспонирования A^H из A мы можем получить $(A^H)^f = (A^f)^H$. Более того, следующие симметрии справедливы для матрицы комплексного представления $A^{\mathbb{C}_1}$ и матрицы вещественного представления $A^{\mathbb{R}_1}$,

$$Q_m^T A^{\mathbb{C}_1} Q_n = \overline{A^{\mathbb{C}_1}}, \quad R_m^T A^{\mathbb{R}_1} R_n = A^{\mathbb{R}_1}, \quad S_m^T A^{\mathbb{R}_1} S_n = A^{\mathbb{R}_1}, \quad T_m^T A^{\mathbb{R}_1} T_n = A^{\mathbb{R}_1}, \quad (3.11)$$

$$\text{где } R_t = \begin{bmatrix} 0 & -I_t & 0 & 0 \\ I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \\ 0 & 0 & -I_t & 0 \end{bmatrix}, \quad S_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \\ I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_t \\ 0 & 0 & -I_t & 0 \\ 0 & -I_t & 0 & 0 \\ I_t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_t = \begin{bmatrix} 0 & I_t \\ I_t & 0 \end{bmatrix}.$$

Основываясь на свойстве изометрии двух изоморфных пространств в нормированном пространстве, норма Фробениуса разделенной кватернионной матрицы $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$ определяется

$$\begin{aligned} \|A\|_F &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \|A^R\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \|A^C\|_F = \frac{1}{2} \|A^{\mathbb{R}}\|_F \\ &= \sqrt{\|A_1\|_F^2 + \|A_2\|_F^2 + \|A_3\|_F^2 + \|A_4\|_F^2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

тогда $\|\cdot\|_F$ равна унитарно-инвариантной норме разделенных кватернионных матриц, где $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$, $\mathbb{R} = \{\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2\}$.

Согласно работе [141], $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ определена положительно (строго положительно), если ее комплексная матрица представления A^C определена положительно (строго положительно). Поскольку A^C , A^R и $A^{\mathbb{R}}$ являются подобными отношениями, то они имеют одинаковую положительную определенность.

Предложение 3.1 [142] Предположим, что $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ является симметричной матрицей, а $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ является симметричной положительно определенной матрицей. Тогда существует неособая матрица $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ и диагональная матрица $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$, такая, что

$$AV = BVD, \quad (3.13)$$

где $V = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, $\beta_t \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_t \in \mathbf{R}$, $t = 1, 2, \dots, n$. В этом случае σ_t, β_t являются обобщенным собственным значением и собственным вектором (A, B) .

Предложение 3.2 [143] Предположим, что $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ является эрмитовой матрицей, а $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ является эрмитовой положительно определенной матрицей.

Тогда существует декомпозиция Холецкого для B такос, что обобщенная собственная задача (A, B) преобразуется в собственную задачу эрмитовой матрицы, т.е.

$$Ax = Bx\lambda \iff [L^{-1}A(L^H)^{-1}]L^Hx = L^Hx\lambda, \quad (3.14)$$

где $B = LL^H$, L – верхняя треугольная матрица. В этом случае все собственные значения эрмитовой матрицы $L^{-1}A(L^H)^{-1}$ являются действительными числами, т.е. все обобщенные собственные значения (A, B) являются вещественными числами.

Предложение 3.3 [139] Пусть $A, B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbf{H}_s$. Тогда λ называется обобщенным правым собственным значением (A, B) если

$$Ax = Bx\lambda, \quad (3.15)$$

для некоторого ненулевого $x \in \mathbf{H}_s^{n \times 1}$. Здесь x называется правым собственным вектором, соответствующим λ . В дальнейшем обобщенное правое собственное значение будет синонимично называться обобщенным собственным значением.

Предложение 3.4 [139] Предположим, что $A, B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, λ является обобщенным собственным значением (A, B) и ρ – несингулярный разделенный кватернион. Тогда $\rho^{-1}\lambda\rho$ также является обобщенным собственным значением (A, B) . Этот класс обобщенных собственных значений, генерируемых λ , может быть выражен как $[\lambda]$. Множество всех обобщенных собственных значений (A, B) обозначается как $\Lambda_{(A, B)}$.

3.2 Три алгебраических метода для GEDSQ

I. Обобщенная собственная дскомпозиция разделенного кватернионного матричного карандаша по 2×2 представленное вещественной матрицей

Дана i -эрмитова матрица $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ и i -эрмитова положительно определенная матрица $B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, существует неособая матрица $V \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ и диагональ-

ная матрица $D \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$, такая, что

$$A^{R_1}V = B^{R_1}VD \quad \text{and} \quad A^{R_1}\beta_l = B^{R_1}\beta_l\sigma_l, \quad (3.16)$$

где $V = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n}]$, $\beta_t \in \mathbf{R}^{2n \times 1}$, $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n})$, $\sigma_t \in \mathbf{R}$, σ_t -обобщенное собственное значение (A^{R_1}, B^{R_1}) , β_t -собственный вектор, соответствующий σ_t , $t = 1, 2, \dots, 2n$.

Чтобы восстановить обобщенные собственные значения и собственные векторы (A, B) из (A^{R_1}, B^{R_1}) , приведены следующие шаги:

(1) Объедините диагональные элементы D , используя следующие эквивалентности:

$$\lambda_s = \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2}j, \quad 1 \leq s \leq n. \quad (3.17)$$

(2) Объедините векторы столбцов V , используя следующие эквивалентности:

$$\alpha_s = \frac{\hat{\beta}_{2s-1} + \hat{\beta}_{2s}}{2} + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} - \hat{\beta}_{2s}}{2}i + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} - \hat{\beta}_{2s}}{2}j + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} + \hat{\beta}_{2s}}{2}k, \quad (3.18)$$

где $\beta_{2s-1} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{2s-1} \\ \hat{\beta}_{2s-1} \end{bmatrix}$, $\beta_{2s} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{2s} \\ \hat{\beta}_{2s} \end{bmatrix}$ являются двумя соседними обобщенными

собственными векторами (A^{R_1}, B^{R_1}) , $\hat{\beta}_{2s-1}, \hat{\beta}_{2s-1}, \hat{\beta}_{2s}, \hat{\beta}_{2s} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $1 \leq s \leq n$.

Следовательно, комбинируя (3.17) и (3.18), можно получить следующее уравнение:

$$A^{R_1}[\beta_{2s-1}, \beta_{2s}] = B^{R_1}[\beta_{2s-1}, \beta_{2s}] \begin{bmatrix} \sigma_{2s-1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2s} \end{bmatrix} \iff A\alpha_s = B\alpha_s\lambda_s, \quad (3.19)$$

где β_{2s-1}, β_{2s} – два вектора столбца из V , $\sigma_{2s-1}, \sigma_{2s}$ – два диагональных элемента из D , $1 \leq s \leq n$.

Теорема 3.5 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ i -эрмитова матрица, а $B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ i -эрмитова по-

положительно определенная матрица. Тогда некоторые обобщенные собственные значения и собственные векторы (A, B) выглядят следующим образом,

$$\lambda_s = \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2}j, \quad (3.20)$$

$$\alpha_s = \frac{\hat{\beta}_{2s-1} + \hat{\beta}_{2s}}{2} + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} - \hat{\beta}_{2s}}{2}i + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} - \hat{\beta}_{2s}}{2}j + \frac{\hat{\beta}_{2s-1} + \hat{\beta}_{2s}}{2}k, \quad (3.21)$$

где $\sigma_{2s-1}, \sigma_{2s}, \hat{\beta}_{2s-1}, \hat{\beta}_{2s-1}, \hat{\beta}_{2s}, \hat{\beta}_{2s}$ задаются формулами (3.17)-(3.18).

Замечание 3.6 Представленные в этом разделе теория и метод обобщают результаты, приведенные в работе [139], и обобщенные собственные значения (A, B) не ограничиваются комплексными числами. Кроме того, дана специальная форма $(a + bj, a, b \in \mathbf{R})$ обобщенных собственных значений, отличающаяся от обобщенных собственных значений эрмитова матричного карандаша над полем комплексных чисел и кольцом кватернионов.

Следствие 3.7 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ i -эрмитова матрица (т.е. B - единичная матрица в теореме 3.5). Тогда некоторые собственные значения и векторы A могут быть получены аналогично (3.20) и (3.21).

II. Обобщенная собственная декомпозиция разделенного кватернионного матричного карандаша по 2×2 представлениям комплексных матриц

Дана i -эрмитова матрица $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ и i -эрмитова положительно определенная матрица $B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, некоторые решения обобщенной задачи о собственной декомпозиции могут быть даны с помощью следующего конструктивного доказательства и вывода.

(1) Из предложения 3.2. ясно, что (A^{C_1}, B^{C_1}) имеет следующие обобщенные собственные значения и собственные векторы:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n} \in \mathbf{R}, \quad v_1, v_2, \dots, v_{2n} \in \mathbf{C}^{2n}. \quad (3.22)$$

В то же время (σ_l, v_l) также является приближенным решением задачи $\min =$

$\|A^{C_1}v_t - B^{C_1}v_t\sigma_t\|_F, t = 1, 2, \dots, 2n$. В дополнение,

$$\begin{aligned} \min &= \left\| A^{C_1}[v_{2s-1}, v_{2s}] - B^{C_1}[v_{2s-1}, v_{2s}] \begin{bmatrix} \sigma_{2s-1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2s} \end{bmatrix} \right\|_F \\ &= \left\| A^{C_1}[v_{2s-1}, v_{2s}]Q - B^{C_1}[v_{2s-1}, v_{2s}]QQ^H \begin{bmatrix} \sigma_{2s-1} & 0 \\ 0 & \sigma_{2s} \end{bmatrix} Q \right\|_F \\ &= \left\| A^{C_1}Y_s - B^{C_1}Y_s \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{2s} + 1 + \sigma_{2s}}{2} & \frac{\sigma_{2s} - 1 - \sigma_{2s}}{2} \\ \frac{\sigma_{2s} - 1 - \sigma_{2s}}{2} & \frac{\sigma_{2s} + 1 + \sigma_{2s}}{2} \end{bmatrix} \right\|_F, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $Y_s = [v_{2s-1}, v_{2s}]Q, 1 \leq s \leq n, Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

(2) Постройте соответствующие решения обобщенной задачи о декомпозиции на собственные значения, используя (3.22) и (3.23),

$$\alpha_s^{C_1} = \frac{1}{2}(Y_s + P_n^T \bar{Y}_s P_1), \quad (3.24)$$

$$\lambda_s^{C_1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} & \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} \\ \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} & \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} j \right) C_1, \quad (3.25)$$

где $P_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, 1 \leq s \leq n$. Построение (3.24) и (3.25) выполнено на основе того, что выполняются следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left\| A^{C_1}Y_s - B^{C_1}Y_s\lambda_s^{C_1} \right\|_F, \left\| P_n^T A^{C_1} P_n P_n^T Y_s P_1 - P_n^T B^{C_1} P_n P_n^T Y_s P_1 P_1^T \lambda_s^{C_1} P_1 \right\|_F \\ = \left\| \overline{A^{C_1}(P_n^T Y_s P_1)} - \overline{B^{C_1}(P_n^T Y_s P_1)} \lambda_s^{C_1} \right\|_F = \left\| A^{C_1}(P_n^T \bar{Y}_s P_1) - B^{C_1}(P_n^T \bar{Y}_s P_1) \lambda_s^{C_1} \right\|_F, \\ \\ \min \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| A^{C_1}Y_s - B^{C_1}Y_s\lambda_s^{C_1} \right\|_F, \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| A^{C_1}\hat{Y}_s - B^{C_1}\hat{Y}_s\lambda_s^{C_1} \right\|_F \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| A^{C_1}\alpha_s^{C_1} - B^{C_1}\alpha_s^{C_1}\lambda_s^{C_1} \right\|_F = \left\| A\alpha_s - B\alpha_s\lambda_s \right\|_F, \end{array} \right.$$

где $\hat{Y}_s = \frac{1}{2}(Y_s + P_n^T \bar{Y}_s P_1), Y_s = [v_{2s-1}, v_{2s}]Q, 1 \leq s \leq n$. Как может быть проверено обширной статьей [137] о разделенных кватернионах, $\frac{1}{2}(Y_s + P_n^T \bar{Y}_s P_1)$

является формой построения, удовлетворяющей матрице комплексного представления, а также является решением задачи $\min = \|A^{C_1}Y - B^{C_1}Y\lambda_s^{C_1}\|_F$. В этом случае существует разделенный кватернионный вектор α_s такой, что $\alpha_s^{C_1} = \hat{Y}_s$. Следовательно, с помощью приведенного выше вывода мы также можем получить следующую теорему.

Теорема 3.8 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ является i -эрмитовой матрицей, а $B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ i -эрмитова положительно определенная матрица. Тогда некоторые решения обобщенной задачи о собственной декомпозиции выглядят следующим образом:

$$\lambda_s = \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2}j, \quad \alpha_s = \frac{1}{4}[I_n, jI_n](Y_s + P_n^T \bar{Y}_s P_1) \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

где $\sigma_{2s-1}, \sigma_{2s}, Y_s, P_n$ задаются формулами (3.24)-(3.25).

III. Обобщенная собственная декомпозиция разделенного кватернионного матричного карандаша по 4×4 представления вещественной матрицей

Учитывая i -эрмитову матрицу $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ и i -эрмитову положительно определенную матрицу $B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, некоторые решения обобщенной задачи о собственной декомпозиции могут быть даны с помощью следующего конструктивного доказательства и вывода.

(1) Из предложения 3.2 ясно, что $(A^{\mathbb{R}_1}, B^{\mathbb{R}_1})$ имеет следующие обобщенные собственные значения и собственные векторы:

$$\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n}, \sigma_{2n} \in \mathbf{R}, \quad v_1, v_2, \dots, v_{4n} \in \mathbf{R}^{4n}. \quad (3.27)$$

В то же время (σ_t, v_t) также является приближенным решением задачи $\min = \|A^{\mathbb{R}_1}v_t - B^{\mathbb{R}_1}v_t\sigma_t\|_F, t = 1, 2, \dots, 4n$. В дополнение,

$$\begin{aligned}
& \left\| A^{\mathbb{K}_1} [v_{4s-3}, v_{4s-2}, v_{4s-1}, v_{4s}] - B^{\mathbb{K}_1} [v_{4s-3}, v_{4s-2}, v_{4s-1}, v_{4s}] \begin{bmatrix} \sigma_{2s-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{2s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{2s} \end{bmatrix} \right\|_F \\
&= \left\| A^{\mathbb{K}_1} [v_{4s-3}, v_{4s-2}, v_{4s-1}, v_{4s}] Q - B^{\mathbb{K}_1} [v_{4s-3}, v_{4s-2}, v_{4s-1}, v_{4s}] Q Q^H \begin{bmatrix} \sigma_{2s-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2s} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{2s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{2s} \end{bmatrix} \right\|_F Q \quad (3.28) \\
&= \left\| A^{\mathbb{K}_1} Y_s - B^{\mathbb{K}_1} Y_s \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} & 0 \\ \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} & 0 \\ \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{2s} - \sigma_{2s-1}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{2s} + \sigma_{2s-1}}{2} \end{bmatrix} \right\|_F,
\end{aligned}$$

$$\text{где } Y_s = [v_{4s-3}, v_{4s-2}, v_{4s-1}, v_{4s}] Q, \quad 1 \leq s \leq n, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

(2) Постройте соответствующие решения обобщенной задачи о декомпозиции на собственные значения, используя (3.29) и (3.30)

$$\alpha_s^{\mathbb{R}_1} = \frac{1}{4} (Y_s + R_n^H Y_s R_n + S_n^H Y_s S_n + T_n^H Y_s T_n), \quad (3.29)$$

$$\lambda_s^{\mathbb{R}_1} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} & 0 \\ \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} & 0 \\ \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{2s} - \sigma_{2s-1}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{2s} + \sigma_{2s-1}}{2} \end{bmatrix} \left(\frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2} \right) \mathbb{R}_1, \quad (3.30)$$

$$\text{где } R_n = \begin{bmatrix} 0 & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad S_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & -I_n & 0 \\ 0 & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq$$

$s \leq n$. Построение (3.29) и (3.30) выполнено на основе того, что выполняются следующие уравнения:

$$\begin{cases} \min = \| A^{\mathbb{K}_1} Y_s - B^{\mathbb{K}_1} Y_s \lambda_s^{\mathbb{R}_1} \|_F = \| A^{\mathbb{K}_1} (R_n^H Y_s R_n) - B^{\mathbb{K}_1} (R_n^H Y_s R_n) \lambda_s^{\mathbb{K}_1} \|_F, \\ \min = \| A^{\mathbb{K}_1} Y_s - B^{\mathbb{K}_1} Y_s \lambda_s^{\mathbb{R}_1} \|_F = \| A^{\mathbb{K}_1} (S_n^H Y_s S_n) - B^{\mathbb{K}_1} (S_n^H Y_s S_n) \lambda_s^{\mathbb{K}_1} \|_F, \\ \min = \| A^{\mathbb{K}_1} Y_s - B^{\mathbb{K}_1} Y_s \lambda_s^{\mathbb{R}_1} \|_F = \| A^{\mathbb{K}_1} (T_n^H Y_s T_n) - B^{\mathbb{K}_1} (T_n^H Y_s T_n) \lambda_s^{\mathbb{K}_1} \|_F, \end{cases} \quad (3.31a)$$

$$\min = \frac{1}{2} \|A^{\mathbb{R}_1} Y_s - B^{\mathbb{R}_1} Y_s \lambda_s^{\mathbb{R}_1}\|_{F'} = \frac{1}{2} \|A^{\mathbb{R}_1} \hat{Y}_s - B^{\mathbb{R}_1} \hat{Y}_s \lambda_s^{\mathbb{R}_1}\|_{F'} \quad (3.31b)$$

$$\frac{1}{2} \|A^{\mathbb{R}_1} \alpha_s^{\mathbb{R}_1} - B^{\mathbb{R}_1} \alpha_s^{\mathbb{R}_1} \lambda_s^{\mathbb{R}_1}\|_{F'} \quad \|A \alpha_s - B \alpha_s \lambda_s\|_F,$$

где $\hat{Y}_s = \frac{1}{4}(Y_s + R_n^T Y_s R_1 + S_n^T Y_s S_1 + T_n^T Y_s T_1)$, $Y_s = [v_{4s-3}, v_{4s-2}, v_{4s-1}, v_{4s}]Q$, $1 \leq s \leq n$. Как можно проверить в обширной статье [144] о разделенных кватернионах, $\frac{1}{4}(Y_s + R_n^T Y_s R_1 + S_n^T Y_s S_1 + T_n^T Y_s T_1)$ - это форма построения, которая удовлетворяет матрице реального представления, а также является решением задачи $\min = \|A^{\mathbb{R}_1} Y - B^{\mathbb{R}_1} Y \lambda_s^{\mathbb{R}_1}\|_F$. Кроме того, существует вектор разделенных кватернионов α_s такой, что $\alpha_s^{\mathbb{R}_1} = \hat{Y}_s$.

Теорема 3.9 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ - i -эрмитова матрица, а $B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ - i -эрмитова положительно определенная матрица. Тогда некоторые решения обобщенной задачи о собственной декомпозиции выглядят следующим образом:

$$\lambda_s = \frac{\sigma_{2s-1} + \sigma_{2s}}{2} + \frac{\sigma_{2s-1} - \sigma_{2s}}{2}j,$$

$$\alpha_s = \frac{1}{16}[I_n, iI_n, jI_n, kI_n](Y_s + R_n^T Y_s R_1 + S_n^T Y_s S_1 + T_n^T Y_s T_1) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ j \\ k \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

где $\sigma_{2s-1}, \sigma_{2s}, Y_s, R_n, S_n, T_n$ задаются формулами (3.29)-(3.30).

Пример 3.1 Даны две i -эрмитовы матрицы $A, B \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ и B положительно определенная матрица, где

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 45 + 34j - 26k & 28 - 15i + 32j - 5k & 47 - 19i + 5j - 14k & & & \\ 28 + 15i + 32j - 5k & 30 + 26j + 4k & 42 + 43j + 7k & & & \\ 47 + 19i + 50j - 14k & 42 + 43j + 7k & 70 + 64j + 12k & & & \end{array} \right],$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 30 + 28j & 26 + 2i + 25j - k & 26 - i + 26j + k & & & \\ 26 - 2i + 25j - k & 27 + 24j - 4k & 24 - 3i + 23j + k & & & \\ 26 + i + 26j + k & 24 + 3i + 23j + k & 27 + 22j + 2k & & & \end{array} \right].$$

Вычислите обобщенные собственные значения и собственные векторы матричного расслоения (A, B) .

Метод 1: (1) Легко получить A^{R_1}, B^{R_1} и соответствующие обобщенные собственные значения и собственные векторы.

$$A^{R_1} = \begin{bmatrix} 79 & 60 & 97 & -26 & 10 & 5 \\ 60 & 56 & 85 & -20 & 4 & 7 \\ 97 & 85 & 134 & -33 & 7 & 12 \\ \hline -26 & -20 & -33 & 11 & -4 & -3 \\ 10 & 4 & 7 & -4 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 12 & -3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B^{R_1} = \begin{bmatrix} 58 & 51 & 52 & 0 & -3 & 2 \\ 51 & 51 & 47 & 1 & -4 & 4 \\ 52 & 47 & 49 & 0 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_1 = 91.0638, \sigma_2 = 13.7380, \sigma_3 = 1.8983, \sigma_4 = 0.6531, \sigma_5 = 0.1463, \sigma_6 = 0.0006,$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} -0.1220 \\ -1.7348 \\ 1.6287 \\ 2.2564 \\ -2.6091 \\ 1.3303 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} -0.4099 \\ -0.0428 \\ 0.5342 \\ -0.3539 \\ 0.0065 \\ 0.0633 \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} -0.4390 \\ 0.5031 \\ -0.0088 \\ -0.0747 \\ 0.2139 \\ -0.3708 \end{bmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{bmatrix} 0.0669 \\ -0.1941 \\ 0.1902 \\ 0.2883 \\ -0.0915 \\ -0.2616 \end{bmatrix}, \quad \beta_5 = \begin{bmatrix} 0.0023 \\ 0.0867 \\ -0.0091 \\ 0.2852 \\ 0.2760 \\ 0.1352 \end{bmatrix}, \quad \beta_6 = \begin{bmatrix} 0.1315 \\ 0.1300 \\ -0.2146 \\ -0.1276 \\ -0.2494 \\ 0.0160 \end{bmatrix},$$

т.е., $A^{R_1}\beta_t = B^{R_1}\beta_t\sigma_t, t = 1, 2, \dots, 6$. σ_t - обобщенное собственное значение (A^{R_1}, B^{R_1}) , β_t - обобщенный собственный вектор, соответствующий σ_t .

(2) Из теоремы 3.5 легко получить:

$$\lambda_1 = 52.4009 + 38.6629j, \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} -0.2379 + 1.3332i + 0.1159j + 0.9233k \\ -0.8641 - 1.2831i - 0.8706j - 1.3260k \\ 0.8460 + 0.3981i + 0.7827j + 0.9322k \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1.2757 + 0.6226j, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} -0.0753 - 0.0708i - 0.3637j - 0.0039k \\ 0.2058 + 0.2040i + 0.2973j + 0.0099k \\ -0.1352 - 0.2805i + 0.1264j - 0.0903k \end{bmatrix},$$

$$\lambda_3 = 0.0734 + 0.0728j, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} -0.0627 + 0.0669i + 0.0650j + 0.2183k \\ -0.0814 + 0.0730i + 0.1681j + 0.2030k \\ 0.0184 + 0.1749i - 0.0276j - 0.0397k \end{bmatrix},$$

т.е., $L\alpha_s = B\alpha_s\lambda_s, s = 1, 2, 3$.

(3) Очевидно, что λ_s и α_s являются обобщенными собственными значениями и

собственным вектором (A, B) соответственно. В этом случае все обобщенные собственные значения (A, B) могут быть записаны как $\Lambda_{(A,B)} = [52.4009 + 38.6629j] \cup [1.2757 + 0.6226j] \cup [0.0734 + 0.0728j]$.

Метод 2: (1) Легко получить A^{C_1}, B^{C_1} и соответствующие обобщенные собственные значения и собственные векторы.

$$A^{C_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 45 & 28 - 15i & 47 - 19i & 34 - 26i & 32 - 5i & 50 - 14i \\ 28 + 15i & 30 & 42 & 32 - 5i & 26 + 4i & 43 + 7i \\ 47 + 19i & 42 & 70 & 50 - 14i & 43 + 7i & 64 + 12i \\ \hline 34 + 26i & 32 + 5i & 50 + 14i & 45 & 28 + 15i & 47 + 19i \\ 32 + 5i & 26 - 4i & 43 - 7i & 28 - 15i & 30 & 42 \\ 50 + 14i & 43 - 7i & 64 - 12i & 47 - 19i & 42 & 70 \end{array} \right],$$

$$B^{C_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 26 + 2i & 26 - i & 28 & 25 - i & 26 + i \\ 26 - 2i & 27 & 24 - 3i & 25 - i & 24 - 4i & 23 + i \\ 26 + i & 24 + 3i & 27 & 26 + i & 23 + i & 22 + 2i \\ \hline 28 & 25 + i & 26 - i & 30 & 26 - 2i & 26 + i \\ 25 + i & 24 + 4i & 23 - i & 26 + 2i & 27 & 24 + 3i \\ 26 - i & 23 - i & 22 - 2i & 26 - i & 24 - 3i & 27 \end{array} \right],$$

$$\sigma_1 = 91.0638, \sigma_2 = 13.7380, \sigma_3 = 1.8983, \sigma_4 = 0.6531, \sigma_5 = 0.1463, \sigma_6 = 0.0006,$$

$$v_1 \begin{bmatrix} -1.0762 + 1.1811i \\ 0.2170 - 2.2049i \\ 0.2969 + 1.4571i \\ 0.9425 - 1.2903i \\ -2.1171 + 0.6529i \\ 1.4870 + 0.0000i \end{bmatrix}, \quad v_2 \begin{bmatrix} -0.2584 - 0.2826i \\ -0.0306 + 0.0010i \\ 0.3698 + 0.0889i \\ -0.3173 + 0.2144i \\ -0.0295 - 0.0081i \\ 0.3804 + 0.0000i \end{bmatrix}, \quad v_3 \begin{bmatrix} 0.0454 - 0.3116i \\ -0.1428 + 0.3592i \\ 0.2620 - 0.0124i \\ -0.0601 - 0.3091i \\ 0.1596 + 0.3521i \\ -0.2623 + 0.0000i \end{bmatrix},$$

$$v_4 \begin{bmatrix} 0.1927 + 0.0816i \\ -0.1330 + 0.0730i \\ -0.0706 - 0.2175i \\ -0.1371 - 0.1581i \\ -0.0284 + 0.1491i \\ 0.2287 + 0.0000i \end{bmatrix}, \quad v_5 \begin{bmatrix} -0.2013 - 0.0120i \\ -0.1988 + 0.0480i \\ -0.0949 - 0.0129i \\ 0.2011 + 0.0152i \\ 0.1906 + 0.0743i \\ 0.0958 + 0.0000i \end{bmatrix}, \quad v_6 \begin{bmatrix} 0.0858 - 0.1107i \\ 0.0529 - 0.1917i \\ -0.1416 + 0.0636i \\ 0.1236 + 0.0658i \\ 0.1268 + 0.1532i \\ -0.1552 + 0.0000i \end{bmatrix},$$

т.е., (σ_t, v_t) является приближенным решением $\|A^{C_1}v - B^{C_1}v\sigma\|_F = \min, t = 1, 2, \dots, 6$.

(2) Из теоремы 3.8 легко получить:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 52.4009 + 38.6629j, \quad \alpha_1 &= \begin{bmatrix} -0.0374 + 1.2016i - 0.0963j + 1.2698k \\ -0.9506 - 1.4324i - 0.9495j - 1.4253k \\ 0.8867 + 0.7730i + 0.8972j + 0.6841k \end{bmatrix}, \\ \lambda_2 = 1.2757 + 0.6226j, \quad \alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0.1576 - 0.0395i - 0.1722j + 0.0370k \\ -0.0439 + 0.1146i + 0.0608j - 0.1074k \\ -0.1498 - 0.1150i + 0.1495j + 0.1026k \end{bmatrix}, \\ \lambda_3 = 0.0734 + 0.0728j, \quad \alpha_3 &= \begin{bmatrix} -0.0190 - 0.0361i + 0.0188j + 0.0088k \\ -0.0411 - 0.0324i + 0.0328j + 0.0061k \\ 0.0072 + 0.0253i - 0.0064j - 0.0382k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

i.e., $A\alpha_s = B\alpha_s\lambda_s, s = 1, 2, 3$.

(3) Очевидно, что λ_s и α_s являются обобщенными собственными значениями и собственным вектором $(A, B), s = 1, 2, 3$. В этом случае все обобщенные собственные значения (A, B) могут быть записаны как $\Lambda_{(A,B)} = [52.4009 + 38.6629j] \cup [1.2757 + 0.6226j] \cup [0.0734 + 0.0728j]$.

Метод 3: (1) Легко получить $A^{\mathbb{R}^1}, B^{\mathbb{R}^1}, 4n$ и соответствующие обобщенные собственные значения и собственные векторы.

$$A^{\mathbb{R}^1} = \begin{bmatrix} 45 & 28 & 47 & 0 & 15 & 19 & 34 & 32 & 50 & -26 & -5 & -14 \\ 28 & 30 & 42 & -15 & 0 & 0 & 32 & 26 & 43 & -5 & 4 & 7 \\ 47 & 42 & 70 & -19 & 0 & 0 & 50 & 43 & 64 & -14 & 7 & 12 \\ \hline 0 & -15 & -19 & 45 & 28 & 47 & -26 & -5 & -14 & -34 & -32 & -50 \\ 15 & 0 & 0 & 28 & 30 & 42 & -5 & 4 & 7 & -32 & -26 & -43 \\ 19 & 0 & 0 & 47 & 42 & 70 & -14 & 7 & 12 & -50 & -43 & -64 \\ \hline 34 & 32 & 50 & -26 & -5 & -14 & 45 & 28 & 47 & 0 & 15 & 19 \\ 32 & 26 & 43 & -5 & 4 & 7 & 28 & 30 & 42 & -15 & 0 & 0 \\ 50 & 43 & 64 & -14 & 7 & 12 & 47 & 42 & 70 & -19 & 0 & 0 \\ \hline -26 & -5 & -14 & -34 & -32 & -50 & 0 & -15 & -19 & 45 & 28 & 47 \\ -5 & 4 & 7 & -32 & -26 & -43 & 15 & 0 & 0 & 28 & 30 & 42 \\ -14 & 7 & 12 & -50 & -43 & -64 & 19 & 0 & 0 & 47 & 42 & 70 \end{bmatrix},$$

$$B^{\mathbb{R}_1} = \begin{bmatrix} 30 & 26 & 26 & 0 & -2 & 1 & 28 & 25 & 26 & 0 & -1 & 1 \\ 26 & 27 & 24 & 2 & 0 & 3 & 25 & 24 & 23 & -1 & -4 & 1 \\ 26 & 24 & 27 & -1 & -3 & 0 & 26 & 23 & 22 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 30 & 26 & 26 & 0 & -1 & 1 & -28 & -25 & -26 \\ -2 & 0 & -3 & 26 & 27 & 24 & -1 & -4 & 1 & -25 & -24 & -23 \\ 1 & 3 & 0 & 26 & 24 & 27 & 1 & 1 & 2 & -26 & -23 & -22 \\ \hline 28 & 25 & 26 & 0 & -1 & 1 & 30 & 26 & 26 & 0 & -2 & 1 \\ 25 & 24 & 23 & -1 & -4 & 1 & 26 & 27 & 24 & 2 & 0 & 3 \\ 26 & 23 & 22 & 1 & 1 & 2 & 26 & 24 & 27 & -1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -28 & -25 & -26 & 0 & 2 & -1 & 30 & 26 & 26 \\ -1 & -4 & 1 & -25 & -24 & -23 & -2 & 0 & -3 & 26 & 27 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & -26 & -23 & -22 & 1 & 3 & 0 & 26 & 24 & 27 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_1 = 91.0638, \sigma_1 = 91.0638, \sigma_2 = 13.7380, \sigma_2 = 13.7380, \sigma_3 = 1.8983, \sigma_3 = 1.8983, \\ \sigma_4 = 0.6531, \sigma_4 = 0.6531, \sigma_5 = 0.1463, \sigma_5 = 0.1463, \sigma_6 = 0.0006, \sigma_6 = 0.0006,$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.0842 \\ 1.2291 \\ -1.1529 \\ -1.5957 \\ 1.8433 \\ -0.9391 \\ 0.0884 \\ 1.2242 \\ -1.1504 \\ -1.5954 \\ 1.8465 \\ -0.9422 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -3.1913 \\ 3.6866 \\ -1.8783 \\ -0.1684 \\ -2.4582 \\ 2.3058 \\ 3.1909 \\ -3.6931 \\ 1.8844 \\ 0.1768 \\ 2.4485 \\ -2.3009 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -0.2808 \\ -0.0304 \\ 0.3759 \\ -0.2603 \\ 0.0035 \\ 0.0581 \\ -0.2603 \\ 0.0035 \\ 0.0581 \\ -0.2985 \\ -0.0304 \\ 0.3791 \\ -0.2398 \\ 0.0057 \\ 0.0314 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -0.2603 \\ 0.0035 \\ 0.0581 \\ 0.2808 \\ 0.0304 \\ -0.3759 \\ 0.2398 \\ -0.0057 \\ -0.0314 \\ -0.2985 \\ -0.0304 \\ 0.3791 \\ 0.3791 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 0.1728 \\ -0.2811 \\ 0.2427 \\ -0.2633 \\ 0.2653 \\ 0.0994 \\ 0.0760 \\ -0.0040 \\ -0.2377 \\ 0.3056 \\ -0.3865 \\ 0.1197 \end{bmatrix}, v_6 = \begin{bmatrix} 0.5265 \\ -0.5306 \\ -0.1988 \\ 0.3455 \\ -0.5622 \\ 0.4854 \\ 0.6111 \\ -0.7731 \\ 0.2215 \\ -0.1521 \\ 0.0080 \\ 0.4755 \end{bmatrix}, \\ v_7 = \begin{bmatrix} -0.1824 \\ 0.1404 \\ 0.0458 \\ -0.1027 \\ -0.0576 \\ 0.2241 \\ 0.1186 \\ 0.0448 \\ -0.2273 \\ -0.1725 \\ 0.1450 \\ 0.0256 \end{bmatrix}, v_8 = \begin{bmatrix} 0.1027 \\ 0.0576 \\ -0.2211 \\ -0.1824 \\ 0.1404 \\ 0.0458 \\ -0.1725 \\ 0.1450 \\ 0.0256 \\ -0.1186 \\ -0.0418 \\ 0.2273 \end{bmatrix}, v_9 = \begin{bmatrix} 0.1323 \\ 0.1734 \\ 0.0572 \\ 0.1522 \\ 0.1084 \\ 0.0768 \\ -0.1299 \\ -0.0803 \\ -0.0671 \\ 0.1543 \\ 0.1881 \\ 0.0684 \end{bmatrix}, v_{10} = \begin{bmatrix} -0.3043 \\ -0.2168 \\ -0.1537 \\ 0.2647 \\ 0.3469 \\ 0.1145 \\ 0.3085 \\ 0.3762 \\ 0.1368 \\ 0.2598 \\ 0.1606 \\ 0.1341 \end{bmatrix}, v_{11} = \begin{bmatrix} -0.0654 \\ -0.0190 \\ 0.1284 \\ 0.1238 \\ 0.1980 \\ -0.0871 \\ -0.1331 \\ -0.1514 \\ 0.1528 \\ 0.0435 \\ 0.1290 \\ 0.0288 \end{bmatrix}, v_{12} = \begin{bmatrix} 0.1238 \\ 0.1980 \\ -0.0871 \\ 0.0654 \\ 0.0190 \\ -0.1284 \\ -0.0435 \\ -0.1290 \\ -0.0268 \\ -0.1331 \\ -0.1514 \\ 0.1528 \end{bmatrix},$$

т.е., (σ_t, v_t) является приближенным решением $\|A^{\mathbb{R}_1}v - B^{\mathbb{R}_1}v\sigma\|_F = \min, t = 1, 2, \dots, 12$.

(2) Из теоремы 3.9 легко получить:

$$\lambda_1 = 52.4009 + 38.6629j, \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.1705 - 3.3702i + 0.1956j - 3.3992k \\ 2.6024 + 3.9152i + 2.6020j + 3.9121k \\ -2.4408 - 2.0143i - 2.4453j - 1.9766k \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1.2757 + 0.6226j, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} -0.0880 - 0.0150i - 0.0880j - 0.0150k \\ 0.1008 + 0.0429i + 0.1008j + 0.0429k \\ -0.0018 - 0.0743i - 0.0018j - 0.0743k \end{bmatrix},$$

$$\lambda_3 = 0.0734 + 0.0728j, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} -0.0488 - 0.1652i + 0.0470j - 0.0515k \\ -0.1265 - 0.1536i + 0.0607j - 0.0561k \\ 0.0207 + 0.0292i - 0.0138j - 0.1319k \end{bmatrix},$$

т.е., $A\alpha_s = B\alpha_s\lambda_s, s = 1, 2, 3$.

(3) Очевидно, что λ_s and α_s являются обобщенными собственными значениями и собственным вектором $(A, B), s = 1, 2, 3$. В этом случае все обобщенные собственные значения (A, B) могут быть записаны как $\Lambda_{(A,B)} = [52.4009 + 38.6629j] \cup [1.2757 + 0.6226j] \cup [0.0734 + 0.0728j]$.

Пример 3.2 Пусть $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k$ - i -эрмитова матрица, $B = B_1 + B_2i + B_3j + B_4k \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ - i -эрмитова положительно определенная матрица и $n = 10, 20, 30, \dots, 500, C_1 = \text{rand}(n, n); A_1 = C_1^T + C_1; C_2 = \text{rand}(n, n); A_2 = C_2^T - C_2; C_3 = \text{rand}(n, n); A_3 = C_3^T + C_3; C_4 = \text{rand}(n, n); A_4 = C_4^T + C_4; B_1 = \text{diag}(\text{rand}(m, 1) + \text{ones}(n, 1)); B_2 = \text{zeros}(n, n); B_3 = \text{zeros}(n, n); B_4 = \text{zeros}(n, n)$. Рассчитайте время работы процессора и абсолютную погрешность ($\eta = \|AX - BXD\|_F, X = [\alpha_1, \dots, \alpha_n], D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$) вышеуказанных трех методов.

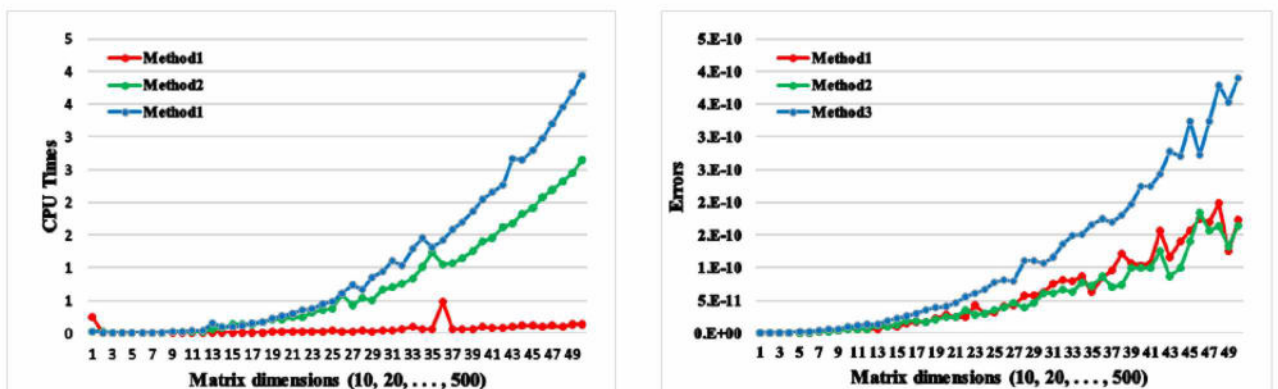


Рисунок 3.1: Сравнение трех алгоритмов GEDSQ.

На рис.3.1 показана эффективность трех методов для решения обобщенной

характеристической задачи о разделенных кватернионах, причем первый метод имеет преимущество во времени.

3.3 Двумерный линейный дискриминантный анализ и распознавание цветных лиц на основе GEDSQ

I. История развития представления модели распознавания цветного лица. Математические модели представления цветных изображений прошли несколько этапов в своем развитии, используя различные математические инструменты и методы.

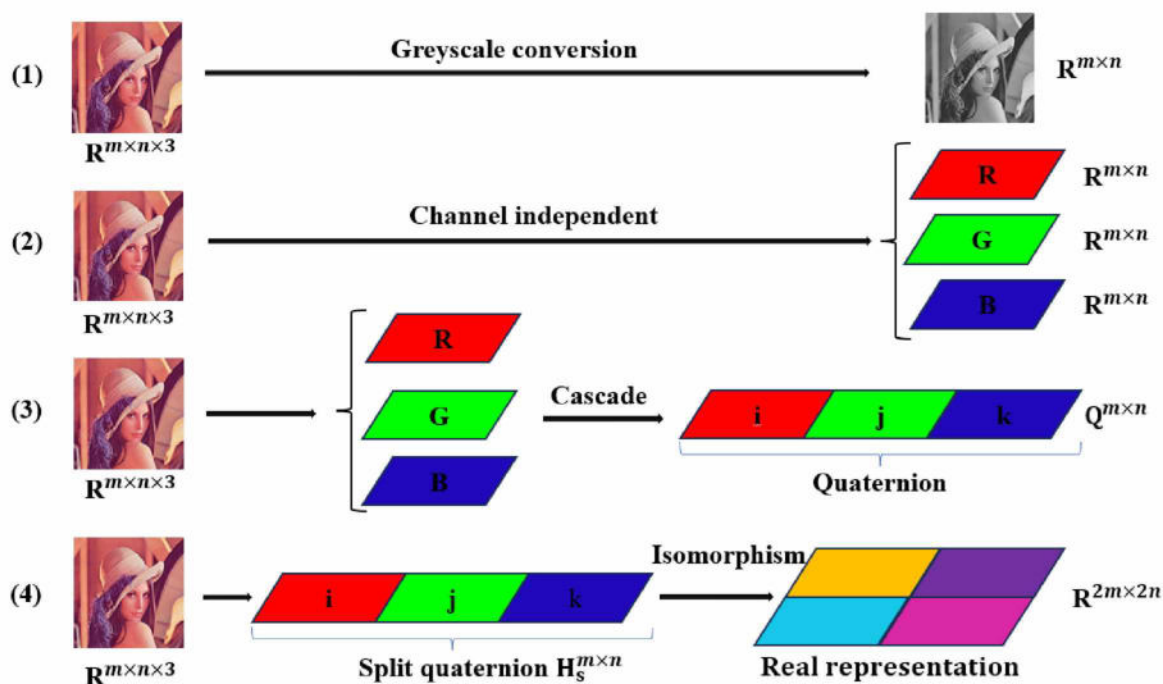


Рисунок 3.2: Математическая модель представления цветных изображений.

(1) Преобразование цветных изображений в изображения в серых оттенках. На данном этапе технология получения изображений в серых оттенках разработана относительно успешно и может применяться непосредственно.

(2) RGB модель цветных изображений. В этой модели каждый пиксель состоит из значений интенсивности этих трех каналов. Это один из наиболее интуитив-

но понятных методов представления цвета.

(3) Кватернионная матричная модель цветных изображений. Для поддержания сильной корреляции и спектральной взаимосвязи между тремя цветовыми каналами введена эта четырехмерная алгебраическая модель. Однако вычисление кватернионов относительно сложно. Это не только требует сохранения алгебраической структуры, но и увеличивает объем вычислений.

(4) Модель цветных изображений с разделенной кватернионной матрицей. Кватернионная модель для цветных изображений представлена S.J. Sangwine. Каждый пиксель цветного изображения представляет собой комбинацию трех основных цветов: красного (R), зеленого (G) и синего (B) в определенном соотношении. Аналогичным образом возможно построить модель разделенных кватернионов для описания цветного изображения, даже если разделенные кватернионы не имеют той же алгебраической структуры, что и кватернионы. Следовательно, для цветного изображения может быть создана чисто воображаемая модель матрицы разделенных кватернионов, показанная ниже:

$$A = Ri + Gj + Bk \in \mathbf{H}_s^{m \times n}, \quad (3.33)$$

где $R, G, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, элементы в R, G, B представляют красные, зеленые и сине-серые значения точки на изображении A . Она не только наследует структурные преимущества кватернионной модели, но также изоморфна любым $2m \times 2n$ вещественным матрицам, сокращая объем вычислений.

II. Схема распознавания цветного изображения лиц на основе GEDSQ

(1) Предварительная обработка изображения лица для обучающего набора. Выполнение 2D-LDA на цветных изображениях включает этап предварительной обработки. Во-первых, предварительная обработка помогает в выделении признаков, позволяя 2D-LDA сосредоточиться на максимизации различий между классами. Это улучшает распознавательные признаки и делает уменьшенное

представление более подходящим для классификации или других задач. Во-вторых, уменьшение размерности снижает вычислительную сложность, что особенно полезно для приложений с ограниченными ресурсами или в режиме реального времени. Кроме того, это облегчает эффективную визуализацию и понимание структур изображений в пространстве меньшей размерности. Более того, этот процесс помогает устранить мультиколлинеарность и ускоряет обучение модели за счет решения задач высокой размерности.

(2) Схема распознавания цветного изображения лиц и схема реконструкции цветного изображения лиц. LDA - классический метод распознавания образов и статистического обучения. Он направлен на максимизацию расстояния между классами при минимизации расстояния внутри классов, эффективно улучшая различие между различными категориями. Ниже приведены основные концепции и этапы 2D-SQLDA.

Предположим, что в обучающем наборе $T_s, s = 1, \dots, c$ есть N обучающих образцов цветных изображений и c известных классов шаблонов. l -е обучающее изображение в s -м классе обозначается $m \times n$ чисто воображаемой матрицей разделенной кватернионов $F_{st} \in \mathbf{H}_s^{m \times n}, t = 1, 2, 3, \dots, n_s$. n_s обозначает количество выборок изображений в s -м классе, удовлетворяющих $n_1 + n_2 + \dots + n_c = N$. Тестовое изображение представлено в виде $F \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$.

Внутриклассовое среднее лицо и матрица рассеяния:

$$\bar{F}_s = \frac{F_{s1} + F_{s2} + \dots + F_{sn_s}}{n_s}, \quad R = \sum_{s=1}^c \sum_{t=1}^{n_s} \frac{(F_{st} - \bar{F}_s)^H (F_{st} - \bar{F}_s)}{N}, \quad (3.34)$$

где $\bar{F}_s (s = 1, 2, \dots, c)$ обозначает среднее изображение s -го класса.

Межклассовое среднее лицо и матрица рассеяния:

$$\bar{F} = \frac{\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_c}{c}, \quad E = \sum_{s=1}^c \frac{n_s (\bar{F}_s - \bar{F})^H (\bar{F}_s - \bar{F})}{N}, \quad (3.35)$$

где \bar{F} обозначает среднее изображение всех обучающих изображений. Очевидно, что R и E — две i -эрмитовые разделенные кватернионные матрицы.

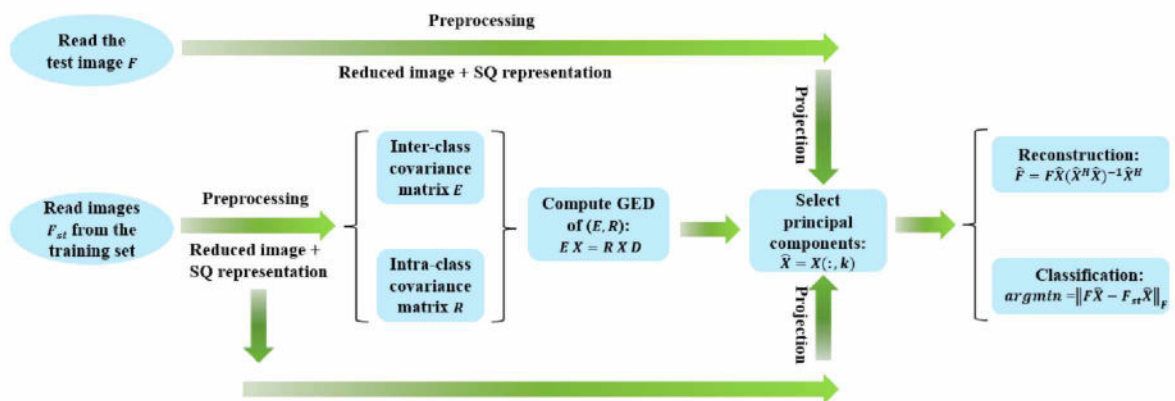


Рисунок 3.3: Блок-схема распознавания цветных лиц и реконструкции цветных лиц.

Из (3.20) и (3.21) легко найти обобщенную декомпозицию по собственным значениям пучка матрицы рассеяния следующим образом:

$$E\alpha_s = R\alpha_s\lambda_s \quad \text{и} \quad EX = R X \Lambda, \quad (3.36)$$

где $X = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$. Далее, в качестве направления проекции выбираются собственные векторы $\hat{X} = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$, соответствующие наибольшим собственным значениям, и проецируются тестовые изображения лиц и изображения тренировочного лица в этом направлении. Наконец, классификатор ближайшего соседа используется для поиска показателей классификации для тестовой поверхности, т.е.

$$\text{Identidy}(F) = \arg \min_s (\|F \hat{X} - F_{st} \hat{X}\|_F). \quad (3.37)$$

где F обозначает тестовое изображение, F_{st} обозначает все обучающие изображения, $s = 1, 2, \dots, c$, $t = 1, 2, \dots, n_s$.

Альтернативно, приближенное исходное изображение лица \hat{F} можно получить, реконструировав изображение $F \hat{X}$ в пространстве проекций с помощью следу-

ющего уравнения:

$$\hat{F} = (F\hat{X})[(\hat{X}^H\hat{X})^{-1}\hat{X}^H], \quad (3.38)$$

где векторы-столбцы в \hat{X} линейно независимы, т. е. \hat{X} — матрица полного ранга столбца, поэтому обобщенная обратная $\hat{X}^\dagger = (\hat{X}^H\hat{X})^{-1}\hat{X}^H$ удовлетворена.

III. Эксперименты и анализы. Сравняются следующие четыре схемы распознавания лиц: **2D-SQLDA**: Схема распознавания лиц, основанная на GEDSQ. **2D-QLDA**: Схема распознавания лиц, основанная на совместной диагонализации кватернионных матриц [145]. **2D-RGBLDA**: Схема распознавания лиц, основанная на трехцветных каналах RGB [146]. **2D-GLDA**: Схема распознавания лиц, основанная на изображении в масштабе серого [147].

(1) Эксперименты по распознаванию лиц основаны на базе данных Faces95 [134]. База данных фиксирует информацию о лице каждого объекта по мере его постепенного приближения к камере. Наблюдаются большие изменения в пропорциях головы и небольшие изменения в наклоне головы. Исходный размер каждого изображения составляет 180×200 пикселей. В следующем эксперименте размер изображения был изменен до 27×30 пикселей. На рис.3.4 показаны 20 объектов, а на рис.3.5 показаны все изображения одного объекта.



Рисунок 3.4: Некоторые объекты в базе данных Faces95.

На рис.3.6 показана производительность распознавания лиц при выборе 20 человек из базы данных Faces95 в качестве испытуемых: первые 6 и 10 изображений каждого испытуемого были в качестве обучающих изображений, а остальные - в качестве тестовых изображений. На рис.3.7 показаны результаты распознавания лиц 40 и 60 человек, выбранных в качестве испытуемых из ба-



Рисунок 3.5: Изображения одного объекта в базе данных Faces95.

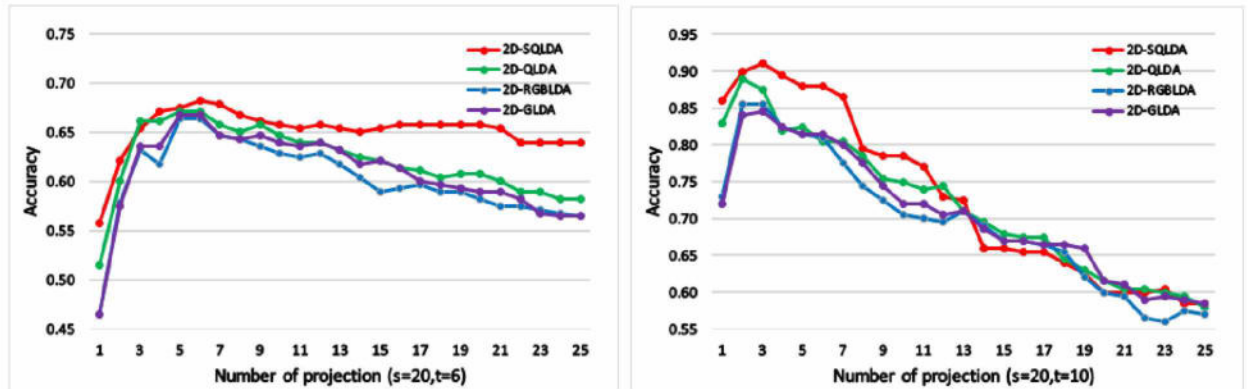


Рисунок 3.6: Распознавание лиц на основе базы данных Faces95 (20 субъектов).

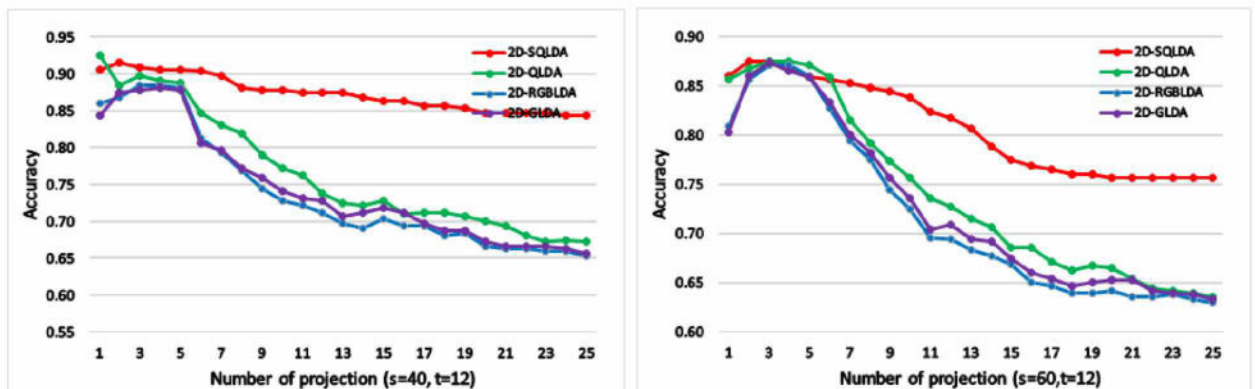


Рисунок 3.7: Распознавание лиц на основе базы данных Faces95 (40 и 60 субъектов).

зы данных Faces95, соответственно. Причем первые 12 изображений каждого испытуемого являются обучающими, а остальные - тестовыми.

Кроме того, время выполнения эксперимента для базы данных Faces95, описанное выше, представлено в таблице 3.1. T_{tra} обозначает время обучения, а T_{cla} обозначает время классификации. В экспериментах время выполнения не является уникальным, и здесь приведены только приблизительные статисти-

Times(s)	2D-SQLDA		2D-QLDA		2D-RGBLDA		2D-GLDA	
	T_{tra}	T_{cla}	T_{tra}	T_{cla}	T_{tra}	T_{cla}	T_{tra}	T_{cla}
$s = 20, t = 6$	1.2213	31.7351	1.5268	30.5455	3.6288	24.8718	1.3250	24.2529
$s = 20, t = 10$	1.9616	34.8028	2.0450	34.8376	5.5985	23.7205	1.9712	23.8521
$s = 40, t = 12$	4.6621	73.5022	5.5714	70.1423	14.1571	55.9512	5.4060	55.6592
$s = 60, t = 12$	6.9304	126.9734	7.8390	119.0013	20.4525	86.7537	7.2170	86.9032

Таблица 3.1: Экспериментальное время (секунды) в базе данных Faces 95.

ческие данные. Относительно легко увидеть, что время обучения 2D-SQLDA является самым коротким из четырех схем распознавания лиц, а время распознавания 2D-GLDA является самым коротким.

(2) Эксперименты по распознаванию лиц, основанные на базе данных FEI [135]. База данных фиксировала информацию о лице каждого субъекта при различном освещении, разных ракурсах (поворот на 180 градусов) и различных выражениях (счастливое, грустное, нейтральное и т.д.). Приблизительно существует разница в размере 10% между каждой экспозицией. Исходный размер каждого изображения составляет 640×480 пикселей. В следующем эксперименте размер изображения был изменен до 32×24 пикселей. На рис.3.8 показаны 30 объектов, а на рис.3.9 показаны все изображения одного объекта.

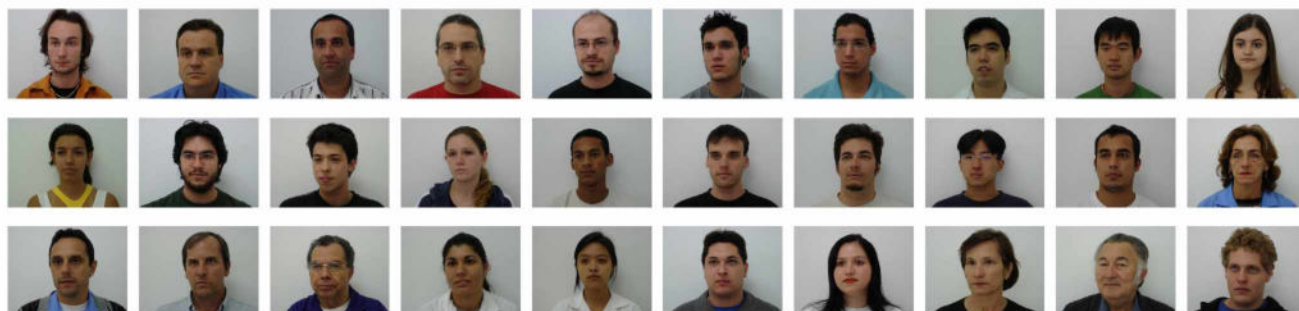


Рисунок 3.8: Некоторые объекты в базе данных FEI.



Рисунок 3.9: Изображения одного объекта в базе данных FEI.

На рис.3.10 показана эффективность распознавания лиц при выборе 30 че-

ловек из базы данных лиц FEI в качестве испытуемых: первые 3 и 6 изображений каждого испытуемого были в качестве обучающих изображений, а остальные - в качестве тестовых изображений. На рис.3.11 показана эффективность распознавания лиц при выборе 60 человек из базы данных лиц FEI в качестве испытуемых, первые 3 и 6 изображений каждого испытуемого были в качестве обучающих изображений, а остальные - в качестве тестовых изображений.

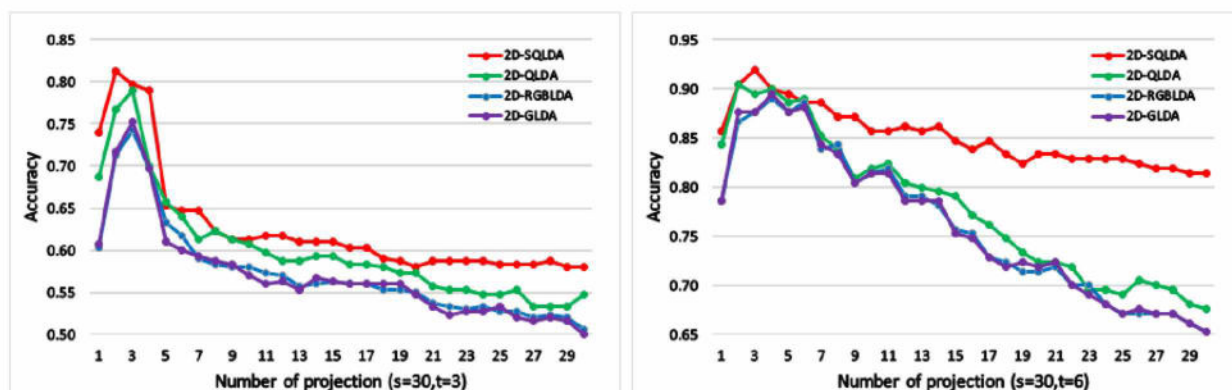


Рисунок 3.10: Распознавание лиц на основе базы данных FEI (30 субъектов).

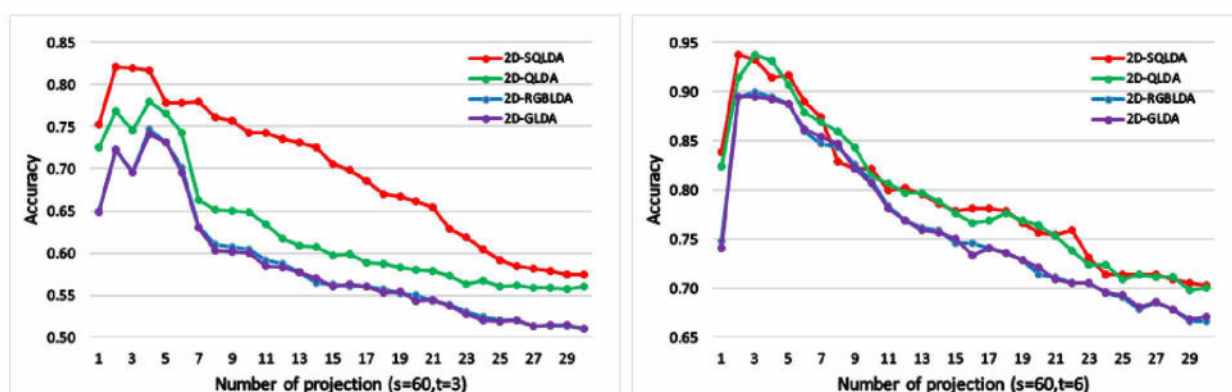


Рисунок 3.11: Распознавание лиц на основе базы данных FEI (60 субъектов).

Как и в таблице 3.1, в таблице 3.2 также указано время экспериментального выполнения описанной выше базы данных FEI.

Для того, чтобы описать эффект реконструкции нашей схемы, мы восстановили 6-е изображение для эксперимента на рис.10 (30 испытуемых, у каждого из которых первые 6 изображений были тренировочными). На рис. 12 показаны реконструированные изображения для 2D-SQLDA с различными осями проекции.

Times(s)	2D-SQLDA		2D-QLDA		2D-RGBLDA		2D-GLDA	
	T_{tra}	T_{cla}	T_{tra}	T_{cla}	T_{tra}	T_{cla}	T_{tra}	T_{cla}
$s = 30, t = 3$	3.338	110.387	3.395	115.952	9.1849	97.509	3.359	96.117
$s = 30, t = 6$	6.372	109.654	6.171	110.884	17.483	96.102	6.011	98.012
$s = 60, t = 3$	6.639	230.030	6.956	235.630	18.296	205.995	6.859	206.643
$s = 60, t = 6$	12.662	233.115	12.827	239.439	37.363	214.680	12.937	207.663

Таблица 3.2: Экспериментальное время (секунды) в базе данных FEI.

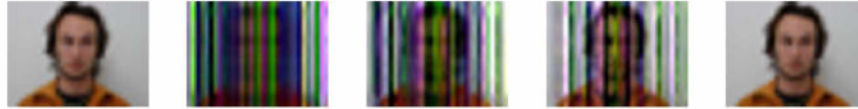


Рисунок 3.12: Некоторые реконструированные изображения 2D-SQLDA.

Из приведенных выше экспериментов следует, что если для проецирования выбраны первые несколько проекционных осей, например, первые 5, скорость распознавания может достигать максимума; выбор слишком большого количества проекционных осей, напротив, влияет на точность распознавания, что может быть вызвано сохранением слишком большого количества исходной информации в процессе уменьшения размерности. Кроме того, мы также обнаружили, что точность распознавания может быть ограничена размером сжатия изображения, количеством проекционных осей и количеством обучающих выборок, и результаты варьируются в зависимости от выбора различных параметров. В целом, точность схемы распознавания 2D-LDA, основанной на четырехмерной алгебре, намного выше, чем у схем в масштабе серого и RGB, а 2D-SQLDA также быстрее, чем 2D-QLDA.

3.4 Выводы

В этой главе i -сопряженные и изоморфные матрицы представления разделенных кватернионных матриц используются для изучения и получения следующих основных результатов:

- (1) Впервые исследована обобщенная проблема собственных значений i -эрмитовых матриц и устанавливается теория об обобщенных собственных де-

композициях в разделенной кватернионной алгебре. В отличие от обобщенных собственных значений матриц в комплексном поле и кольца кватернионов, обобщенные собственные значения и собственные векторы i -эрмитова пучка матриц не уникальны. Кроме того, число обобщенных собственных значений и соответствующих собственных векторов бесконечно.

(2) Используя передовую технологию GEDSQ, в рамках алгебры разделенных кватернионов был создан метод 2D-LDA. Этот метод не только использует преимущества, присущие алгебре разделенных кватернионов, но и вводит новую схему распознавания лиц по цвету, которая демонстрирует два преимущества: модель цветного изображения, основанная на алгебре разделенных кватернионов, превосходит традиционную алгебру кватернионов своими уникальными структурными преимуществами. В дополнение к сохранению целостности информации о цвете на изображении модель также упрощает расчет GED. Такая вычислительная эффективность особенно выгодна на этапе обучения и может значительно сократить время обработки, особенно в больших базах данных; схемы распознавания лиц, основанные на алгебре разделенных кватернионов, демонстрируют беспрецедентную адаптивность к сложным задачам распознавания образов. Повышенная надежность системы позволяет ей справляться со сложными и динамично меняющимися сценариями идентификации с превосходной точностью и надежностью.

Декомпозиция по сингулярным значениям и обобщенная декомпозиция по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц и их приложения

Декомпозиция по сингулярным значениям является ключом к обработке матричной информации и является полезным инструментом для решения задач матричной алгебраической структуры. Целью этого раздела является уточнение теории матричной алгебры разделенной кватернионной механики, введение численных алгоритмов для соответствующих алгебраических задач и предоставление теоретического и алгоритмического руководства для некоторых нерешенных задач в области сложной механики, таких как классическое квантовое соответствие усложненной механики, характеристика объединенных систем в РТ-симметричной квантовой механике, механика, теория пространства-времени, согласующаяся со сложными гамильтонианами и классическими уравнениями Максвелла, и т.д. Множество разделенных кватернионов \mathbf{H}_s аналогичны множеству кватернионов – это также некоммутативная 4-мерная алгебра Клиффорда. Однако, \mathbf{H}_s содержит три типа специальных элементов, таких как: (i) делители нуля: $a = \frac{1}{2}(1 + j)$ и $b = \frac{1}{2}(1 - j)$ являются двумя делителями нуля, таким образом, $a, b \neq 0, ab = 0$. (ii) нильпотентные элементы: $a = i - j$ является нильпотентным элементом, таким образом, $a^n = 0, n = 2, \dots$. (iii) нетривиальные идемпотенты: $a = \frac{1}{2}(1 + j)$ является нетривиальным идемпотентом, таким образом, $a^n = a, n = 1, 2, \dots$. Очевидно, что алгебраическая структура \mathbf{H}_s более сложна по сравнению с алгеброй кватернионов. Исследовательские проекты по алгебраической системе разделенных кватернионов также являются более сложными.

В последние годы некоторые теории матричной декомпозиции разделенных кватернионных матриц не были усовершенствованы, несмотря на растущее число исследований и применений системы разделенных кватернионов. В статье [148] автор изучил задачу декомпозиции по сингулярным значениям разделенного кватерниона и привел теорему декомпозиции по сингулярным значениям для обратимого и необратимого разделенного кватерниона. В работах [136, 149, 150] авторы последовательно изучали задачу диагонализации, задачи наименьших квадратов, задачу о собственных значениях и задачу уравнения Шредингера для разделенных кватернионных матриц. В статье [151] мы изучили задачу LDU декомпозиции разделенных кватернионных матриц, дали быстрый алгоритм и его применение. Основываясь на важной роли декомпозиции по сингулярным значениям в задачах алгебраической структуры разделенных кватернионов, ученые в данной области до сих пор не дали соответствующей теоремы или формы для декомпозиции по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц. Мы рассматриваем следующие проблемы.

Предположим, что a является произвольным разделенным кватернионом, который имеет декомпозицию по сингулярным значениям, удовлетворяющее $a = \bar{u}\sigma v$, где \bar{u} - сопряженная транспозиция u , $\bar{u}u = 1$, $\bar{v}v = 1$ и σ - вещественное число. Используя мультипликативные свойства ($\bar{u}\bar{v} = \bar{v}\bar{u}$) разделенных кватернионов в статье [152], мы можем получить следующий результат:

$$\bar{a}a = \bar{v}\sigma\bar{u}u\sigma v = \sigma^2 \geq 0. \quad (4.1)$$

Однако $\bar{a}a$ обязательно является неотрицательным числом, т.е. предположение не выполняется. Аналогично, результат может быть получен и для случая разделенных кватернионных матриц. Также обязательно существование традиционной SVD матрицы на кольце разделённых кватернионов.

Для любой квадратной матрицы A разделённых кватернионов, если существует разделённый кватернион λ и ненулевой вектор α , удовлетворяющий

$A\alpha = \alpha\lambda(A\alpha = \lambda\alpha)$, то λ можно называть правым (левым) собственным значением A , α - соответствующим собственным вектором. Используя алгебраический метод, описанный в работе [150], мы получили собственную декомпозицию $A^H A$ следующим образом,

$$A = \begin{bmatrix} 1-j & 0 \\ 0 & 1+j \end{bmatrix}, \quad A^H A = \begin{bmatrix} 2-2j & 0 \\ 0 & 2+2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+2j & 0 \\ 0 & 2+2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^H, \quad (4.2)$$

где A^H - i -сопряженная транспозиция A , а $2+2j$ - собственное значение $A^H A$. Очевидно, что, основываясь на i -сопряженной транспозиции матрицы разделенных кватернионов, собственные значения $A^H A$ необязательно являются действительными числами. По аналогии, сингулярные значения A также могут не являться вещественными числами.

Rafal в [148] и Сао в [153] изучили обобщенную обратную задачу для разделенного кватерниона, доказали существование единственного обобщенного обратного разделенного кватерниона. Но все это рассматривается только для разделенного кватерниона, а для случая матриц мы также рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Существует ли обобщенная обратная матрица разделенного кватерниона A ? Как найти обобщенную обратную матрицу разделенного кватерниона A ?

Задача 2. Существует ли сингулярная декомпозиция разделенной кватернионной матрицы A ? Имеет ли сингулярная декомпозиция разделенной кватернионной матрицы ту же форму, что и традиционная сингулярная декомпозиция комплексной и кватернионной матрицы, или в чем различия? Как найти декомпозицию по сингулярным значениям разделенной кватернионной матрицы A ?

Задача 3. Существует ли GSVD для карандаша матрицы разделенных кватернионов (A, B) ? Как найти GSVD карандаша матрицы разделенных кватернионов (A, B) ?

4.1 Обобщённая обратная разделённых кватернионных матриц

Для матрицы вещественного представления A^{R_1} разделённой кватернионной матрицы $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$:

$$A^{R_1} = \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & -A_2 + A_4 \\ A_2 + A_4 & A_1 - A_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}. \quad (4.3)$$

Очевидно, что достаточным условием для того, чтобы A была унитарной матрицей, является то, что ее вещественная матрица представления A^{R_1} является унитарной матрицей. Дана произвольная матрица $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}$, $B_{ts} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $t, s = 1, 2$. Постройте следующую разделённую кватернионную матрицу

$$A = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} + \frac{B_{21} - B_{12}}{2}i + \frac{B_{11} - B_{22}}{2}j + \frac{B_{21} + B_{12}}{2}k, \quad (4.4)$$

тогда по (4.4) мы имеем $A^{R_1} = B$. Разделённые кватернионы образуют вещественное векторное пространство четырех измерений с $\{1, i, j, k\}$ в качестве основы. Функция, которая отображает $\{1, i, j, k\}$ на следующие четыре матрицы, индуцирует алгебраический изоморфизм от разделённых кватернионов приводит к вещественным матрицам 2×2 :

$$1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad j \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad k \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Для любой матрицы $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$ существует следующая карта изоморфизма:

$$A \xrightarrow{A^{R_1}} A_1 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + A_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + A_3 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + A_4 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

При заданной матрице $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$ обобщенной обратной матрице A является разделенная кватернионная матрица X со следующими условиями Пенроуза:

$$(1) AXA = A, (2) XAX = X, (3) (AX)^H = AX, (4) (XA)^H = XA. \quad (4.7)$$

Определение 4.1 Для $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $X \in \mathbf{H}_s^{n \times m}$ называется (x, y, \dots) обобщенная обратная к A матрица, если X удовлетворяет условиям Пенроуза $(x), (y), \dots$ в уравнении (4.7). Обозначим X через $A^{(x,y,\dots)}$ и множество всех $A^{(x,y,\dots)}$ через $A\{x, y, \dots\}$. Единственное решение $A^{(1,2,3,4)}$ уравнений (4.7) является обобщенная обратная к A матрица, и она обозначается через $A^\dagger \equiv A^{(1,2,3,4)}$.

С помощью (4.3) мы рассматриваем эквивалентную форму уравнения (4.7),

$$\begin{aligned} \Lambda^{R_1} X^{R_1} \Lambda^{R_1} &= \Lambda^{R_1}, & X^{R_1} \Lambda^{R_1} X^{R_1} &= X^{R_1}, \\ (\Lambda^{R_1} X^{R_1})^H &= \Lambda^{R_1} X^{R_1}, & (X^{R_1} \Lambda^{R_1})^H &= X^{R_1} \Lambda^{R_1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В частности, благодаря единственности обобщенной обратной к A матрица, мы имеем:

$$(\Lambda^\dagger)^{R_1} = (\Lambda^{R_1})^\dagger, \quad \Lambda^\dagger = ((\Lambda^{R_1})^\dagger)^{R_1^{-1}}, \quad (4.9)$$

где R_1^{-1} обозначает обратную операцию вещественного представления, т.е., аналогично (4.4). Нужно найти разделенную кватернионную матрицу X , соответствующую $(\Lambda^{R_1})^\dagger$.

Теорема 4.2 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$. Тогда МР-обобщенный обратный к A матрица имеет следующий вид:

$$A^\dagger = ((A^{R_1})^\dagger)^{R_1^{-1}}, \quad (4.10)$$

где A^{R_1} - вещественная матрица представления A .

Теорема 4.2 дает алгоритм нахождения обобщенной обратной части разделенной кватернионной матрицы, и мы приводим простой алгоритм следующим образом.

Алгоритм 4.1(Обобщенный обратный алгоритм разделенной кватернионной матрицы): Ввод $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$. Выведите $X \in \mathbf{H}_s^{n \times m}$ таким образом, чтобы X удовлетворяло (4.7).

Шаг 1. Вычисляем вещественную матрицу представления A^{R_1} для A ;

Шаг 2. Вычисляем МР-обобщенный обратный к A^{R_1} матрица с помощью функции `pinv(AR1)` в Matlab,

$$(A^{R_1})^\dagger = \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & -A_2 + A_4 \\ A_2 + A_4 & A_1 - A_3 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix};$$

Шаг 3. Вычисляем МР обобщенную обратную к A^\dagger матрица от A . Постройте следующую разделенную кватернионную матрицу:

$$A^\dagger = X = \frac{X_{11} + X_{22}}{2} + \frac{X_{21} - X_{12}}{2}i + \frac{X_{11} - X_{22}}{2}j + \frac{X_{21} + X_{12}}{2}k.$$

Как частный случай, для разделенного кватерниона $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \in \mathbf{H}_s$, $q^{R_1} = \begin{bmatrix} q_1 + q_3 & -q_2 + q_4 \\ q_2 + q_4 & q_1 - q_3 \end{bmatrix}$ мы легко можем получить следующие результаты прямым вычислением:

(1) Если $q\bar{q} \neq 0$, то $\det(q^{R_1}) \neq 0$, мы имеем:

$$(q^{R_1})^\dagger = \frac{1}{\det(q^{R_1})} \begin{bmatrix} q_1 - q_3 & q_2 - q_4 \\ -q_2 - q_4 & q_1 + q_3 \end{bmatrix} \iff q^\dagger = \frac{\bar{q}}{q\bar{q}}; \quad (4.11)$$

(2) Если $q\bar{q} = 0$ и $q \neq 0$, то $\det(q^{R_1}) = 0$, мы имеем:

$$(q^{R_1})^\dagger = \frac{1}{\text{tr}(q^{R_1}(q^{R_1})^H)} \begin{bmatrix} q_1 + q_3 & q_2 + q_4 \\ -q_2 + q_4 & q_1 - q_3 \end{bmatrix} \iff q^\dagger = \frac{\tilde{q}}{2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)}; \quad (4.12)$$

(3) Если $q = 0$, то $q^\dagger = 0$.

Подводя итог, мы получаем следующие результаты:

$$q^\dagger = \begin{cases} \frac{q}{q\bar{q}}, & q\bar{q} \neq 0, \\ \frac{\tilde{q}}{2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)}, & q\bar{q} = 0, q \neq 0, \\ 0, & q\bar{q} = 0, q = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Замечание 4.3 Теорема 4.2 не только даст алгебраический метод нахождения МР-обобщенной обратной матрицы разделенного кватерниона, но и обобщает МР-обобщенную обратную от разделенного кватерниона в работах [148, 153] на матричный случай.

4.2 SVDSQ и GSVDSQ

I. SVD разделенных кватернионных матриц. Для любой матрицы $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, без потери общности, пусть $m \geq n$ в данном контексте согласно теории сингулярной декомпозиции вещественной матрицы [142]. Существуют две унитарные матрицы $\hat{U} \in \mathbf{R}^{2m \times 2m}$ и $\hat{V} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ такие, что

$$\hat{U}^H A^{R_1} \hat{V} = \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m \times 2n}. \quad (4.14)$$

Пусть $\hat{U} = [\hat{U}_1, \hat{U}_2]$, где $\hat{U}_1 \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}$, $\hat{U}_2 \in \mathbf{R}^{2m \times (2m-2n)}$, тогда

$$A^{R_1} = \hat{U} \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m \times 2n} \hat{V}^H = \hat{U}_1 \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \hat{V}_1^H, \quad (4.15)$$

где $p = \text{rank}(A^{R_1})$, $\hat{\Sigma}_p = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p)$, $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_p > 0$.

С помощью (4.4) построим $U_1^{R_1} = \hat{U}_1$, $U_2^{R_1} = \hat{U}_2$, $V^{R_1} = \hat{V}$, и

$$\sigma_t = \frac{\tau_t + \tau_{p+1}t}{2} + \frac{\tau_t - \tau_{n+1}t}{2}j, \quad t = 1, 2, \dots, r, \quad r \leq \min\{m, n\}, \quad (4.16)$$

где $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ являются положительными сингулярными значениями A^{R_1} ,

$\tau_s = 0$ если $s > p$. Кроме того, по формс построения сингулярных значений и $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_p > 0$, легко получить $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \dots \geq |\sigma_r| \geq 0$. Следовательно, комбинируя (4.14), (4.15) и (4.16), существует диагонально матрица разделенных кватернионов $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ такая, что

$$A = U_1 \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} V^H = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} V^H = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} V^H, \quad (4.17)$$

где $U = [U_1, U_2]$. Понятно, U^{R_1} является перестановкой столбцов матрицы \hat{U} , $(U^{R_1})^H U^{R_1} = U^{R_1} (U^{R_1})^H = I_{2n}$, т.е., $U^H U = U U^H = I_n$ и U - это разделенная кватернионная унитарная матрица.

Теорема 4.4(SVDSQ) Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$. Тогда существуют две разделенные кватернионные унитарные матрицы $U \in \mathbf{H}_s^{m \times m}$ и $V \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ такие, что

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H, \quad (4.18)$$

где $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \dots \geq |\sigma_r| \geq 0$, $\sigma_t = \frac{\tau_t + \tau_{n+1-t}}{2} + \frac{\tau_t - \tau_{n+1-t}}{2} j$, $t = 1, 2, \dots, r$, $r \leq n$, $\tau_s = 0$ если $s > p$, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ являются положительными сингулярными значениями A^{R_1} .

В приведенной выше теореме $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ называются сингулярными значениями A и удовлетворяют следующему виду

$$A = \sum_{t=1}^r u_t \sigma_t v_t^H, \quad (4.19)$$

где u_t, v_t - векторы столбцов U, V соответственно, и σ_t - диагональный элемент Σ_r , $t = 1, 2, \dots, r$.

Алгоритм 4.2(алгоритм SVD разделенной кватернионной матрицы): Ввод $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, выход $U \in \mathbf{H}_s^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $V \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, так что $A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$.

Шаг 1. Вычисляем матрицу реального представления A^{R_1} из A ;

Шаг 2. Вычисляем дeкoмпoзицию пo сингулярным значениям A^{R_1} , используя функцию $\text{svd}(A^{R_1})$ в Matlab, $A^{R_1} = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}^H = [\hat{U}_1, \hat{U}_2] \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{V}^H$, и пусть $\hat{\Sigma}_p = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p)$, $\hat{U}_1 = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{13} & U_{14} \end{bmatrix}$, $\hat{U}_2 = \begin{bmatrix} U_{21} & U_{22} \\ U_{23} & U_{24} \end{bmatrix}$, $\hat{V} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$;

Шаг 3. Вычисляем дeкoмпoзицию пo сингулярным значениям A . Постройте следующие разделенные кватернионы и матрицы разделенных кватернионов с помощью (4.7),

$$\sigma_t = \frac{\tau_t + \tau_{n+1-t}}{2} + \frac{\tau_t - \tau_{n+1-t}}{2} j; \quad U_1 = \frac{U_{11} + U_{14}}{2} + \frac{U_{13} - U_{12}}{2} i + \frac{U_{11} - U_{14}}{2} j + \frac{U_{13} + U_{12}}{2} k, \quad U_2 = \frac{U_{21} + U_{24}}{2} + \frac{U_{23} - U_{22}}{2} i + \frac{U_{21} - U_{24}}{2} j + \frac{U_{23} + U_{22}}{2} k, \quad V = \frac{V_{11} + V_{22}}{2} + \frac{V_{21} - V_{12}}{2} i + \frac{V_{11} - V_{22}}{2} j + \frac{V_{21} + V_{12}}{2} k, \text{ где } l = 1, 2, \dots, r, \quad r \leq \min\{m, n\}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p - \text{положительные сингулярные значения } A^\sigma, \text{ и } \tau_s = 0 \text{ если } s > p. \text{ Очевидно, что } \Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), U = [U_1, U_2], V \text{ удовлетворяет } A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H.$$

Замечание 4.5 В отличие от традиционной сингулярной дeкoмпoзиции пo вещественным (комплексным) и кватернионным полям, сингулярные значения разделенной кватернионной матрицы не обязательно являются неотрицательными вещественными числами, а имеют новую форму $a + bj$, в которой $a, b \in \mathbf{R}$. Кроме того, пусть $\sigma = a + bj$, $\check{\sigma} = a + bh$, $a, b \in \mathbf{R}$, $h = (\cos w)j + (\sin w)k$, $0 \leq w \leq 2\pi$. Тогда существует унитарный разделенный кватернион p такой, что $\sigma \sim \check{\sigma}$, т.е., $\sigma = p \check{\sigma} p^H$, где $p = \cos(\frac{w}{2}) - \sin(\frac{w}{2})i$, доказательство сходства двух элементов можно найти в статье [137]. Более того, по (4.19),

$$A = \sum_{t=1}^r u_t p_t (p_t^H \sigma_t p_t) (v_t p_t)^H = \sum_{t=1}^r \check{u}_t \check{\sigma}_t \check{v}_t^H, \quad (4.20)$$

очевидно, что дeкoмпoзицию пo сингулярным значениям разделенной кватер-

нионной матрицы не является уникальным.

Следствие 4.6 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$. Тогда обобщенное значение A задается следующим образом:

$$A^\dagger = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H, \quad (4.21)$$

где $\Sigma_r^\dagger = \text{diag}(\sigma_1^\dagger, \sigma_2^\dagger, \dots, \sigma_r^\dagger)$, $\sigma_l = a_l + b_l j$, U, V являются матрицами декомпозиции по сингулярным значениям A в теореме 4.4.

II. GSVD разделенных кватернионных матриц. Для любой матрицы $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $B \in \mathbf{H}_s^{p \times n}$, без потери общности, пусть $m \geq n$ в контексте, согласно теории GSVD двух вещественных матриц [142], существуют две унитарные матрицы $\hat{U} \in \mathbf{R}^{2m \times 2m}$, $\hat{V} \in \mathbf{R}^{2p \times 2p}$, две диагональные матрицы $\hat{\Sigma}_A \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$, $\hat{\Sigma}_B \in \mathbf{R}^{2q \times 2q}$ и неособая матрица $\hat{W} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$, такое, что

$$\hat{U}^H A^{R_1} \hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_A \\ 0 \end{bmatrix}_{2m \times 2n}, \quad \hat{V}^H B^{R_1} \hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2p \times 2n}, \quad (4.22)$$

где $\hat{U} = [u_1, \dots, u_{2m}]$, $u_s \in \mathbf{R}^{2m \times 1}$; $\hat{V} = [v_1, \dots, v_{2p}]$, $v_t \in \mathbf{R}^{2p \times 1}$; $\hat{\Sigma}_A = \text{diag}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{r_1}, 1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$, $0 \leq \hat{\alpha}_1 \leq \hat{\alpha}_2 \leq \dots \leq \hat{\alpha}_{r_1} < 1$; $\hat{\Sigma}_B = \text{diag}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_{r_1}, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{2q \times 2q}$, $1 \geq \hat{\beta}_1 \geq \hat{\beta}_2 \geq \dots \geq \hat{\beta}_{r_1} > 0$, $q = \min\{p, n\}$, $\hat{\alpha}_l^2 + \hat{\beta}_l^2 = 1$, $l = 1, 2, \dots, q$, $r_1 = \text{rank}(B^{R_1})$ и $\hat{W} = [\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{2n}]$, $\hat{w}_z \in \mathbf{R}^{2n \times 1}$. Аналогично теореме 4.4 и алгоритму 4.2: теперь, чтобы извлечь обобщенные сингулярные значения и векторы матрицы (A, B) из (A^{R_1}, B^{R_1}) , мы получаем следующие результаты:

Теорема 4.7(GSVDSQ) Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $B \in \mathbf{H}_s^{p \times n}$, $m \geq n$. Тогда существуют две унитарные матрицы $U \in \mathbf{H}_s^{m \times m}$, $V \in \mathbf{H}_s^{p \times p}$, две диагональные матрицы $\Sigma_A \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, $\Sigma_B \in \mathbf{H}_s^{q \times q}$ и неособая матрица $W \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, такое, что

$$U^H A W = \begin{bmatrix} \Sigma_A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V^H B W = \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

где $\Sigma_A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), 0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_n| \leq 1, \Sigma_B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_q), 1 \geq |\beta_1| \geq |\beta_2| \geq \dots \geq |\beta_q| \geq 0, q = \min\{p, n\}$.

Алгоритм 4.3(алгоритм GSVD разделенной кватернионной матрицы): Ввод

$A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}, B \in \mathbf{H}_s^{p \times n}$, выход $U \in \mathbf{H}_s^{m \times m}, \Sigma_A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}, V \in \mathbf{H}_s^{n \times n}, \Sigma_B \in \mathbf{H}_s^{n \times p}, W \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$, так что $U^H A W = \begin{bmatrix} \Sigma_A \\ 0 \end{bmatrix}, V^H B W = \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Шаг 1. Вычисляем GSVD матричного карандаша (A^{R_1}, B^{R_1}) .

Шаг 2. Объединим диагональные элементы $\hat{\Sigma}_A, \hat{\Sigma}_B$, используя следующие эквивалентности:

$$\alpha_e = \begin{cases} \frac{\hat{\alpha}_{2e-1}}{2} - \frac{\hat{\alpha}_{2e}}{2} + \frac{\hat{\alpha}_{2e-1}}{2} - \frac{\hat{\alpha}_{2e}}{2} j, & 1 \leq e \leq r, \\ 1, & r < e \leq n, \end{cases} \quad \beta_f = \begin{cases} \frac{\hat{\beta}_{2f-1}}{2} - \frac{\hat{\beta}_{2f}}{2} + \frac{\hat{\beta}_{2f-1}}{2} - \frac{\hat{\beta}_{2f}}{2} j, & 1 \leq f \leq r, \\ 0, & r < f \leq q, \end{cases}$$

$$\text{где } 1 \leq e \leq n, 1 \leq f \leq q, r = \begin{cases} \frac{r_1+1}{2}, & \text{если } r_1 \text{ нечетно,} \\ \frac{r_1}{2}, & \text{если } r_1 \text{ четно} \end{cases}, r_1 =$$

$\text{rank}(B^{R_1})$. Кроме того, с конструктивными формами α_e, β_f и $0 \leq \hat{\alpha}_1 \leq \hat{\alpha}_2 \leq \dots \leq \hat{\alpha}_{2e} \leq 1, 1 \geq \hat{\beta}_1 \geq \hat{\beta}_2 \geq \dots \geq \hat{\beta}_{2f} \geq 0$, легко получить $0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_n| \leq 1$ и $1 \geq |\beta_1| \geq |\beta_2| \geq \dots \geq |\beta_q| \geq 0$.

Шаг 3. Объединим векторы-столбцы $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$, используя следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} \mu_g &= \frac{\check{u}_{2g-1} + \check{u}_{2g}}{2} + \frac{\check{u}_{2g} - \check{u}_{2g-1}}{2} i + \frac{\check{u}_{2g-1} + \check{u}_{2g}}{2} j + \frac{\check{u}_{2g-1} - \check{u}_{2g}}{2} k, \\ \nu_h &= \frac{\check{v}_{2h-1} + \check{v}_{2h}}{2} + \frac{\check{v}_{2h} - \check{v}_{2h-1}}{2} i + \frac{\check{v}_{2h-1} + \check{v}_{2h}}{2} j + \frac{\check{v}_{2h-1} - \check{v}_{2h}}{2} k, \\ \omega_l &= \frac{\check{w}_{2l-1} + \check{w}_{2l}}{2} + \frac{\check{w}_{2l} - \check{w}_{2l-1}}{2} i + \frac{\check{w}_{2l-1} + \check{w}_{2l}}{2} j + \frac{\check{w}_{2l-1} - \check{w}_{2l}}{2} k, \end{aligned}$$

где $1 < g \leq m, 1 \leq h \leq p, 1 < l \leq n$. $\check{u}_s, \check{u}_s \in \mathbf{R}^{m \times 1}, \check{v}_t, \check{v}_t \in \mathbf{R}^{p \times 1}, \check{w}_z, \check{w}_z \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ удовлетворить $\begin{bmatrix} \check{u}_s \\ \check{u}_s \end{bmatrix} = u_s, \begin{bmatrix} \check{v}_t \\ \check{v}_t \end{bmatrix} = v_t, \begin{bmatrix} \check{w}_z \\ \check{w}_z \end{bmatrix} = w_z, s = 1, 2, \dots, 2m; t = 1, 2, \dots, 2p; z = 1, 2, \dots, 2n$. Следовательно, существуют две диагонально разделенные кватернионные матрицы

$\Sigma_A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \Sigma_B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_q)$, такие, что

$$\begin{cases} \hat{U}^H A^{R_1} \hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_A \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{V}^H B^{R_1} \hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \iff \begin{cases} U^H A W = \begin{bmatrix} \Sigma_A \\ 0 \end{bmatrix}, \\ V^H B W = \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

где $U = [\mu_1, \dots, \mu_m] \in \mathbf{H}_s^{m \times m}, V = [\nu_1, \dots, \nu_p] \in \mathbf{H}_s^{p \times p}$ – две унитарные разделенные кватернионные матрицы, $W = [\omega_1, \dots, \omega_n] \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ – несобая разделенная кватернионная матрица.

Следствие 4.8 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}, B \in \mathbf{H}_s^{p \times n}, m \geq n$. $U^H A W = \begin{bmatrix} \Sigma_A \\ 0 \end{bmatrix}$ и $V^H B W = \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ являются GSVD матричного карандаша (A, B) . Тогда GSVD разделенных кватернионных матриц не похож на GSVD над полями действительных и комплексных чисел, он обладает следующими особыми свойствами:

- (1) $U^H U = I_m, V^H V = I_p$. U^H, V^H являются i -сопряженной транспозицией U и V , соответственно.
- (2) $\Sigma_A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \Sigma_B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_q), \alpha_e, \beta_f$ необязательно являются вещественными числами, но они существуют в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \alpha_{e1} + \alpha_{e3}j, & \beta_f &= \beta_{f1} + \beta_{f3}j, \\ 0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_n| \leq 1, & & 1 \geq |\beta_1| \geq |\beta_2| \geq \dots \geq |\beta_q| \geq 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $\alpha_{e1}, \alpha_{e3}, \beta_{f1}, \beta_{f3} \in \mathbf{R}, 1 \leq e \leq n, 1 \leq f \leq \min\{p, n\}$.

- (3) $\Sigma_A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \Sigma_B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_q), \alpha_f = \alpha_{f1} + \alpha_{f3}j, \beta_f = \beta_{f1} + \beta_{f3}j$ удовлетворяют

$$\alpha_{f1}^2 + \alpha_{f3}^2 + \beta_{f1}^2 + \beta_{f3}^2 = 1 \iff \|\alpha_f\|_F^2 + \|\beta_f\|_F^2 = 1, \quad (4.25)$$

где $\alpha_{f1}, \alpha_{f3}, \beta_{f1}, \beta_{f3} \in \mathbf{R}, 1 \leq f \leq \min\{p, n\}$.

Доказательство. (1) и (2): В силу конструктивной формы SVD-матриц (A, B) их, очевидно, легко доказать. (3): Учитывая диагональные элементы Σ_A и Σ_B , $\alpha_f = \alpha_{f1} + \alpha_{f3}j$; $\beta_f = \beta_{f1} + \beta_{f3}j$,

$$\alpha_{f1} \quad \frac{\hat{\alpha}_{2f-1} + \hat{\alpha}_{2f}}{2}, \quad \alpha_{f3} \quad \frac{\hat{\alpha}_{2f-1} - \hat{\alpha}_{2f}}{2}, \quad \beta_{f1} \quad \frac{\hat{\beta}_{2f-1} + \hat{\beta}_{2f}}{2}, \quad \beta_{f3} \quad \frac{\hat{\beta}_{2f-1} - \hat{\beta}_{2f}}{2}, \quad (4.26)$$

и $\hat{\alpha}_{2f-1}^2 + \hat{\beta}_{2f-1}^2 = 1$, $\hat{\alpha}_{2f}^2 + \hat{\beta}_{2f}^2 = 1$, где $\hat{\alpha}_{2f-1}$, $\hat{\alpha}_{2f}$, $\hat{\beta}_{2f-1}$, $\hat{\beta}_{2f}$ являются диагональными элементами $\hat{\Sigma}_A$ и $\hat{\Sigma}_B$. Затем

$$\alpha_{f1}^2 + \alpha_{f3}^2 + \beta_{f1}^2 + \beta_{f3}^2 = \frac{1}{4}(2\hat{\alpha}_{2f-1}^2 + 2\hat{\alpha}_{2f}^2 + 2\hat{\beta}_{2f-1}^2 + 2\hat{\beta}_{2f}^2) = 1. \quad (4.27)$$

Следствие 4.9 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $B = I_n$, $m \geq n$. Тогда декомпозиция по сингулярным значениям A выглядит следующим образом:

$$U^H A V = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

где $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_e = \alpha_e \beta_e^\dagger$, α_e, β_e диагональные элементы Σ_A, Σ_B . U, Σ_A, Σ_B, V GSVD матричного карандаша (A, B) .

Доказательство. Если $B = I_n$, то его вещественная матрица представления $B^{R_1} = I_{2n}$. По свойствам GSVD двух вещественных матриц (A^{R_1}, I_{2n}) легко получить

$$\hat{U}^H A^{R_1} \hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{A/B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies U^H A V = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

где $\hat{\Sigma}_{A/B} = \text{diag}(\hat{\alpha}_1/\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\alpha}_{r_1}/\hat{\beta}_{r_1})$, $r_1 = \text{rank}(B^{R_1})$, Σ могут быть получены из конструктивной формы (3.2) и $\hat{\Sigma}_{A/B}$, U, V могут быть получены из конструктивной формы (3.3) и \hat{U}, \hat{V} .

Замечание 4.10 В отличие от традиционного GSVD над комплексными и кватернионными полями обобщенные сингулярные значения двух разделенных кватернионных матриц не обязательно являются неотрицательными веществен-

ными числами, а имеют новый вид $a + bj$, в котором $a, b \in \mathbf{R}$. Кроме того, пусть $\alpha = a + bj, \check{\alpha} = a + bh, \beta = c + dj, \check{\beta} = c + dh, a, b, c, d \in \mathbf{R}, h = (\cos w)j + (\sin w)k, 0 \leq w \leq 2\pi$. Тогда существует унитарный разделенный кватернион p такой, что $\alpha \sim \check{\alpha}, \beta \sim \check{\beta}$, т.е., $\alpha = p\check{\alpha}p^H, \beta = p\check{\beta}p^H$, где $p = \cos(\frac{w}{2}) - \sin(\frac{w}{2})i$, доказательство сходства двух элементов можно найти в статье [137]. Более того,

$$A = \sum_{e=1}^n u_e \alpha_e w_e = \sum_{e=1}^n u_e p_e (p_e^H \alpha_e p_e) (p_e^H w_e) = \sum_{e=1}^n \check{u}_e \check{\alpha}_e \check{w}_e, \quad (4.30)$$

$$B = \sum_{f=1}^q v_f \beta_f w_f = \sum_{f=1}^q v_f p_f (p_f^H \beta_f p_f) (p_f^H w_f) = \sum_{f=1}^q \check{v}_f \check{\beta}_f \check{w}_f, \quad (4.31)$$

где u_e - вектор e -го столбца из U , v_f - вектор f -го столбца из V , и w_e, w_f два вектора строк из W^{-1} , $\check{w}_e = p_e^H w_e, \check{w}_f = p_f^H w_f, 1 \leq e \leq n, 1 \leq f \leq q = \min\{p, n\}$. Очевидно, что GSVDSQ не уникален.

4.3 Численные эксперименты и приложения

I. Задача наименьших квадратов, основанная на SVDSQ. Учитывая задачу разделения кватернионных наименьших квадратов (SQLS),

$$\|AX - B\|_F = \min, \quad (4.32)$$

где $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}, B \in \mathbf{H}_s^{m \times p}$. Более того,

$$\|AX - B\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \|(\Lambda X - B)^{R_1}\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Lambda^{R_1} X^{R_1} - B^{R_1}\|_F, \quad (4.33)$$

и общие решения реальной задачи LS (4.33) таковы:

$$X^{R_1} = (\Lambda^{R_1})^\dagger B^{R_1} + (I_{2n} - (\Lambda^{R_1})^\dagger \Lambda^{R_1})Y, \quad (4.34)$$

где $Y \in \mathbf{R}^{2n \times 2p}$ - произвольная вещественная матрица. С помощью (4.4) мы можем установить, что $Z \in \mathbf{H}_s^{n \times p}$ удовлетворяет $Z^{R_1} = Y$ и получить следующую теорему 4.11 задачи SQLS (4.32). Более того, минимальное нормальное решение (4.32) равно $X_{LS}^{R_1} = (A^{R_1})^\dagger B^{R_1}$.

Теорема 4.11 Дано $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $B \in \mathbf{H}_s^{m \times p}$. Тогда общее решение X и решение с минимальной нормой X_{LS} имеют следующие формы соответственно:

$$X = A^\dagger B + (I_m - A^\dagger A)Z, \quad \text{and} \quad X_{LS} = A^\dagger B, \quad (4.35)$$

где $Z \in \mathbf{H}_s^{n \times p}$ - произвольная раздельная кватернионная матрица.

Пример 4.1 Учитывая матрицы разделенных кватернионов A, B следующим образом, вычислите SVD, обобщенную обратную величину A и решение минимальной нормы для (4.32).

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 + 10i + 2j + 7k & 4 + 3i + 7j + k & -8 - 7i + 2j - k & & & \\ -2 + 6i - 4j + k & 1 + 2i + j + 3k & 9 + 3i + 7j + 2k & & & \\ 1 + 2i + 2j + 2k & 3 - 3i + j + k & -1 + 5i + 8j + 7k & & & \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 + 3i + j + 2k & 1 + 6i + 3j + 4k & & & & \\ 4 + 4j & 3i + 2k & & & & \\ 5 + 2i + 4k & 3 + j & & & & \end{array} \right].$$

С помощью алгоритма SVDSQ мы можем получить сингулярное разложение значения A следующим образом:

$$\gg \left[\begin{array}{ccc} 16.9333 + 10.0567j & 0 & 0 \\ 0 & 11.9819 + 9.1327j & 0 \\ 0 & 0 & 8.1115 + 7.8331j \end{array} \right],$$

$$U = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -0.0527 - 0.5317i - 0.2923j - 0.1318k & 0.0356 - 0.3568i + 0.0310j - 0.2171k & -0.5500 - 0.1122i - 0.1776j + 0.2972k & & & \\ 0.0331 - 0.2967i + 0.5581j + 0.2500k & -0.4772 - 0.0665i + 0.1949j - 0.2593k & -0.1153 - 0.0003i - 0.1541j - 0.4031k & & & \\ 0.0865 + 0.3606i + 0.0478j - 0.0941k & -0.0518 - 0.6624i - 0.2098j + 0.0206k & 0.1393 + 0.2732i - 0.5197j - 0.0359k & & & \end{array} \right],$$

$$V = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -0.6332 + 0.0975i + 0.0622j - 0.2066k & -0.4836 + 0.0306i - 0.1492j - 0.0009k & -0.3609 - 0.1199i + 0.2422j + 0.2874k & & & \\ -0.2991 - 0.0599i + 0.0955j + 0.2207k & 0.3663 - 0.0638i - 0.5329j + 0.0153k & -0.4118 + 0.2593i - 0.3293j - 0.2853k & & & \\ 0.1770 + 0.0988i + 0.5915j - 0.0339k & -0.3449 + 0.3739i - 0.1991j + 0.1481k & 0.1003 - 0.3305i - 0.3045j - 0.2747k & & & \end{array} \right],$$

и обобщенная обратная величина A ,

$$A^\dagger = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6884 - 0.2122i - 0.0977j - 0.7380k & -0.2852 + 0.3666i - 0.3285j + 0.4679k & -0.9409 - 0.1711i + 0.5089j + 0.8017k & & & \\ -0.3250 - 0.4204i - 0.4201j + 0.3192k & 0.3115 + 0.0631i + 0.5039j - 0.0313k & 0.2395 + 0.8133i + 0.3845j - 0.4781k & & & \\ -0.2590 + 0.3394i + 0.3201j + 0.2532k & 0.0406 - 0.3439i - 0.0891j - 0.2604k & 0.4159 - 0.2944i - 0.5078j - 0.1544k & & & \end{array} \right],$$

поэтому решение минимальной нормы для (4.32) имеет следующий вид:

$$X_{LS} = A^\dagger B = \begin{bmatrix} -3.1705 - 0.3362i + 1.0808j + 2.5471k & -3.7615 + 2.1846i - 0.3557j + 4.6141k \\ 1.7501 + 2.4787i + 1.6079j - 1.2457k & 3.0649 + 2.1565i + 3.3744j - 1.2308k \\ 1.1469 - 1.5112i - 1.4022j - 1.1425k & 0.9285 - 2.4730i - 1.4961j - 2.0944k \end{bmatrix}.$$

Пример 4.2 Дана разделенная кватернионная матрица $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $X = X_1 + X_2i + X_3j + X_4k \in \mathbf{H}_s^{n \times p}$, $B = AX$. Пусть

$$h \in \{1, 2, \dots, 50\}, m = 10h, n = 10h, p = 5h,$$

$$X_1 = \text{rand}(n, p), X_2 = \text{rand}(n, p), X_3 = \text{rand}(n, p), X_4 = \text{rand}(n, p),$$

$$A_1 = \text{rand}(m, n), A_2 = \text{rand}(m, n), A_3 = \text{rand}(m, n), A_4 = \text{rand}(m, n),$$

где $\text{rand}()$ - функция случайной матрицы в Matlab и $\text{rand}(m, n)$ обозначает генерацию случайной $m \times n$ вещественной матрицы с элементами матрицы в диапазоне от 0 до 1. Вычислите время работы процессора и относительные ошибки ($\eta_k = \frac{\|X - X_k\|_F}{\|X\|_F}$) двух алгоритмов (алгоритм SVDLS и алгоритм в статье [151]) для решения (4.32). В статье [151] приведены процедура и примеры решения системы линейных уравнений с разделенными кватернионами. Для задачи SQLS (4.32) мы преобразуем ее в нормальное уравнение ($A^H A = A^H B$) для алгоритмического сравнения.

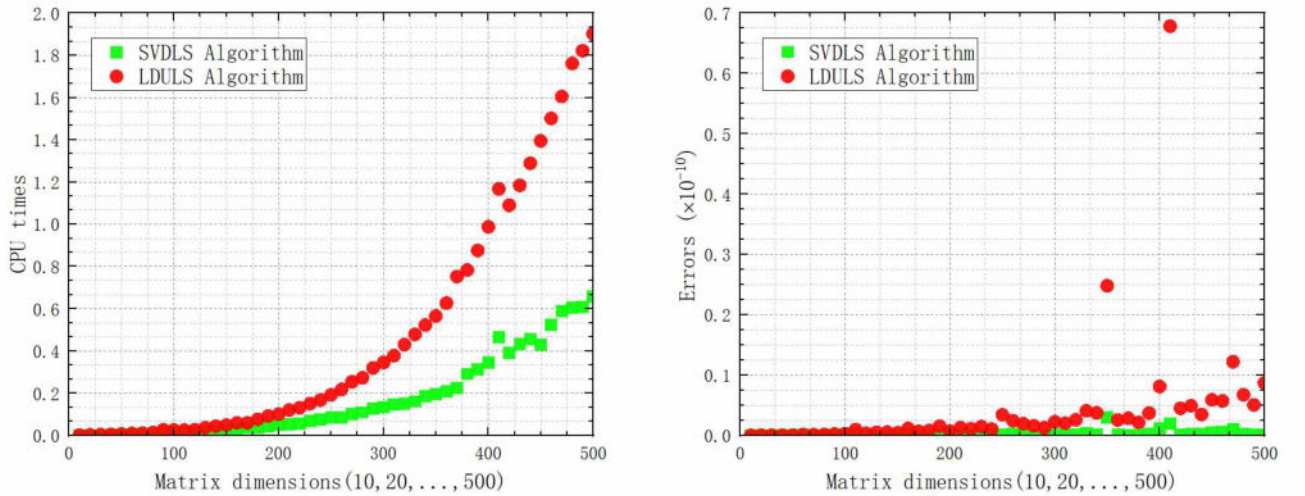


Рисунок 4.1: Сравнение алгоритма SVDLS и алгоритма LDULS.

Пример 4.2 показывает, что алгоритм SVDLS имеет гораздо меньшее время

выполнения для задачи (4.32), чем алгоритм в [151], использующий матричную LDU декомпозиции. Что касается относительных вычислительных ошибок, алгоритм SVDLS также намного меньше, чем алгоритм в [151]. Потенциальными факторами, влияющими на разницу во времени вычислений и ошибки, являются следующие: (1) Алгоритм декомпозиции LDU поддерживает структуру разделенного кватерниона в операции. Хотя время вычисления сокращается до $\frac{1}{2}$ от фактической операции, алгоритм использует метод частичного поворота, чтобы избежать нулевых делителей в процессе вычисления, что увеличивает объем вычислений при декомпозиции LDU . (2) Предложенный алгоритм полностью изоморфен задаче с разделенной кватернионной матрицей кватернионов задаче с вещественной матрицей в 2×2 и не требует учета существования нулевых делителей в процессе работы. Кажется, что это алгоритм без структуры, но каждый шаг операции поддерживает определенную изоморфную взаимосвязь, и вычислительная сложность реальных операций обычно ниже, чем у сложных операций.

II. Задача наименьших квадратов с ограниченным на равенством на основе GSVDSQ. Учитывая задачу разделения кватернионных наименьших квадратов с ограниченным равенством (SQLSE),

$$\|Ax - b\|_F = \min, \quad \text{подлежит} \quad Cx = d, \quad (4.36)$$

где $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $C \in \mathbf{H}_s^{p \times n}$, $b \in \mathbf{H}_s^{m \times 1}$, $d \in \mathbf{H}_s^{p \times 1}$, $m \geq n$. Рассмотрим следующие проблемы:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_F^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|A^{R_1} Y - b^{R_1}\|_F^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_A \\ 0 \end{bmatrix}^{R_1} (W^{R_1})^{-1} Y - (U^{R_1})^H b^{R_1} \right\|_F^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{e=1}^n \left\| \begin{bmatrix} \check{\alpha}_e & 0 \\ 0 & \check{\alpha}_{m+e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{y}_e \\ \check{y}_{m+e} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \check{b}_e \\ \check{b}_{m+e} \end{bmatrix} \right\|_F^2 + \sum_{e=n+1}^m \left\| \begin{bmatrix} \check{b}_e \\ \check{b}_{m+e} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{e=1}^n \|\alpha_e^{R_1} y_e^{R_1} - b_e^{R_1}\|_F^2 + \sum_{e=n+1}^m \|b_e^{R_1}\|_F^2 \right) = \sum_{e=1}^n \|\alpha_e y_e - b_e\|_F^2 + \sum_{e=n+1}^m \|b_e\|_F^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где $U^H b = [b_1; b_2; \dots; b_m] \in \mathbf{H}_s^{m \times 1}$, $b_e^{R_1} = \begin{bmatrix} \check{b}_e \\ \check{b}_{m+e} \end{bmatrix}$, $y_e^{R_1} = \begin{bmatrix} \check{y}_e \\ \check{y}_{n+e} \end{bmatrix}$, $\check{b}_e, \check{b}_{m+e}, \check{y}_e, \check{y}_{n+e} \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$, $(W^{R_1})^{-1} Y = [\check{y}_1; \dots; \check{y}_{2n}] \in \mathbf{R}^{2n \times 2}$. Более того,

(1) Если r_1 чётно, то

$$\begin{aligned} \|Bx - d\|_F^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|B^{R_1} Y - d^{R_1}\|_F^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{R_1} (W^{R_1})^{-1} Y - (V^{R_1})^H d^{R_1} \right\|_F^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{f=1}^r \left\| \begin{bmatrix} \check{\beta}_f & 0 \\ 0 & \check{\beta}_{p+f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{y}_f \\ \check{y}_{n+f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \check{d}_f \\ \check{d}_{p+f} \end{bmatrix} \right\|_F^2 + \sum_{f=r+1}^p \left\| \begin{bmatrix} \check{d}_f \\ \check{d}_{p+f} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{f=1}^r \|\beta_f^{R_1} y_f^{R_1} - d_f^{R_1}\|_F^2 + \sum_{f=r+1}^p \|d_f^{R_1}\|_F^2 \right) = \sum_{f=1}^r \|\beta_f y_f - d_f\|_F^2 + \sum_{f=r+1}^p \|d_f\|_F^2, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $V^H d = [d_1; d_2; \dots; d_p] \in \mathbf{H}_s^{p \times 1}$, $d_f^{R_1} = \begin{bmatrix} \check{d}_f \\ \check{d}_{p+f} \end{bmatrix}$, $y_f^{R_1} = \begin{bmatrix} \check{y}_f \\ \check{y}_{n+f} \end{bmatrix}$, $\check{d}_f, \check{d}_{p+f}, \check{y}_f, \check{y}_{n+f} \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$, $(W^{R_1})^{-1} Y = [\check{y}_1; \dots; \check{y}_{2n}] \in \mathbf{R}^{2n \times 2}$.

(2) Если r_1 нечётно, то

$$\begin{aligned} \|Bx - d\|_F^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|B^{R_1} Y - d^{R_1}\|_F^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{R_1} (W^{R_1})^{-1} Y - (V^{R_1})^H d^{R_1} \right\|_F^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{f=1}^r \left\| \begin{bmatrix} \check{\beta}_f & 0 \\ 0 & \check{\beta}_{p+f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{y}_f \\ \check{y}_{n+f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \check{d}_f \\ \check{d}_{p+f} \end{bmatrix} \right\|_F^2 + \sum_{f=r+1}^p \left\| \begin{bmatrix} \check{d}_f \\ \check{d}_{p+f} \end{bmatrix} \right\|_F^2 - \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \check{d}_{p+r} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{f=1}^r \|\beta_f^{R_1} y_f^{R_1} - d_f^{R_1}\|_F^2 + \sum_{f=r+1}^p \|d_f^{R_1}\|_F^2 - \|\check{d}_r^{R_1}\|_F^2 \right) \\ &= \sum_{f=1}^r \|\beta_f y_f - d_f\|_F^2 + \sum_{f=r+1}^p \|d_f\|_F^2 - \|\check{d}_r\|_F^2, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $V^H d = [d_1; d_2; \dots; d_p] \in \mathbf{H}_s^{p \times 1}$, $d_f^{R_1} = \begin{bmatrix} \check{d}_f \\ \check{d}_{p+f} \end{bmatrix}$, $\check{d}_r^{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \check{d}_{p+r} \end{bmatrix}$, $y_f^{R_1} = \begin{bmatrix} \check{y}_f \\ \check{y}_{n+f} \end{bmatrix}$, $\check{d}_f, \check{d}_{p+f}, \check{y}_f, \check{y}_{n+f} \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$, $(W^{R_1})^{-1} Y = [\check{y}_1; \dots; \check{y}_{2n}] \in \mathbf{R}^{2n \times 2}$.

Подводя итог, (4.39) имеет решения только тогда, когда

$$\begin{cases} \sum_{f=r+1}^p \|d_f\|_F^2 = 0, & \text{rank}(B^{R_1}) \text{ чётно,} \\ \sum_{f=r+1}^p \|d_f\|_F^2 - \|\check{d}_r\|_F^2 = 0, & \text{rank}(B^{R_1}) \text{ нечётно,} \end{cases} \quad \text{и решения таковы } x = Wy,$$

где

$$y_\gamma^\sigma \begin{cases} (\beta_\gamma^{R_1})^\dagger d_\gamma^{R_1}, & \gamma = 1, 2, \dots, r, \\ (\alpha_\gamma^{R_1})^\dagger b_\gamma^{R_1}, & \gamma = r+1, \dots, n, \end{cases} \Rightarrow y_\gamma \begin{cases} \beta_\gamma^\dagger d_\gamma, & \gamma = 1, 2, \dots, r, \\ \alpha_\gamma^\dagger b_\gamma, & \gamma = r+1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.40)$$

$$y = [y_1; y_2; \dots; y_n], r = \begin{cases} \frac{r_1+1}{2}, & \text{если } r_1 \text{ нечетно,} \\ \frac{r_1}{2}, & \text{если } r_1 \text{ четно} \end{cases}, r_1 = \text{rank}(B^{R_1}), \text{ т.е. } r - \text{это}$$

количество ненулевых элементов в наборе $[\beta_1, \dots, \beta_q]$.

Теорема 4.12 Учитывая задачу разделения кватернионных наименьших квадратов с ограниченным равенством (4.36), можно утверждать, что (4.36) имеет

$$\text{решения только тогда, когда} \begin{cases} \sum_{f=r+1}^p \|d_f\|_F^2 = 0 & \text{rank}(B^{R_1}) \text{ чётно,} \\ \sum_{f=r+1}^p \|d_f\|_F^2 - \|\check{d}_r\|_F^2 = 0, & \text{rank}(B^{R_1}) \text{ нечётно,} \end{cases}$$

и решения таковы $x = Wy$, где

$$y_\gamma = \begin{cases} \beta_\gamma^\dagger d_\gamma, & \gamma = 1, 2, \dots, r, \\ \alpha_\gamma^\dagger b_\gamma, & \gamma = r+1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.41)$$

$y = [y_1; y_2; \dots; y_n]$, r – количество ненулевых элементов в наборе $[\beta_1, \dots, \beta_q]$,

α_c, β_c – диагональные элементы из Σ_A, Σ_B . W, Σ_A, Σ_B являются матрицами

GSVD матричного карандаша (A, B) .

Пример 4.3 Даны четыре разделенные кватернионные матрицы $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $B \in \mathbf{H}_s^{p \times n}$, $b \in \mathbf{H}_s^{m \times 1}$, $d \in \mathbf{H}_s^{p \times 1}$, где

$$A \begin{bmatrix} 3 | 3i | 4j | 3k | 4 | 4i | 3j | 2k | 2 | 2i | 3j | 3k \\ 2 | 4i | j | 2k | 1 | 2i | 5j | 3k | 2 | i | 4j | 2k \\ 4 | 4i | j | 4k | 3 | 4i | 2j | 4k | 1 | 3i | 5k \\ -1 | -i | 3j - k | 1 | j - 2k | 1 - i | 3j - 2k \end{bmatrix}, b \begin{bmatrix} 1.5981 | 32.4378i | 2.7763j | 36.2611k \\ -27.8347 | 52.3711i - 6.4933j | 37.0320k \\ 25.8398 | 123.0153i | 45.4483j | 104.1063k \\ 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$B \begin{bmatrix} 3 | i | 3j | k | -1 | 3i | j - 3k | 2 | 4i | 4j - 2k \\ 1 | 5j | k | i | j - 5k | 1 | i | 6j - 4k \\ 2 - i - 2j | -1 + 2i + 2k | 1 + i - 2j + 2k \end{bmatrix}, d \begin{bmatrix} 15.7017 | 50.3164i | 17.9318j | 79.7128k \\ -13.5266 | 14.4377i - 9.0409j | 4.3537k \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Вычислить GSVD матричного карандаша (A, B) и решения LSESQ-задачи (4.36).

(1) С помощью (4.3) мы получаем следующее:

$$A^{R_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 7 & 5 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 6 & 6 & 5 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & -4 & -2 \\ 8 & 8 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 & -4 & 0 & -2 \end{array} \right], \quad b^{R_1} = \left[\begin{array}{c|c} 4.3744 & 3.8234 \\ \hline -34.3280 & -15.3391 \\ 71.2881 & -18.9090 \\ 0 & 0 \\ \hline 68.6989 & -1.1782 \\ 89.4031 & -21.3415 \\ 227.1217 & -19.6085 \\ 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$B^{R_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 6 & 0 & -6 & -6 \\ 6 & 1 & 7 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & -3 & -4 & -1 & -5 \\ -1 & 4 & 3 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right], \quad d^{R_1} = \left[\begin{array}{c|c} 33.6335 & 29.3964 \\ \hline -22.5675 & -10.0840 \\ 0 & 0 \\ \hline 130.0291 & -2.2301 \\ 18.7915 & -4.4857 \\ 0 & 0 \end{array} \right].$$

(2) С помощью алгоритма 4.3 легко получить следующее:

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} 0.2981 - 0.1691j & 0 & 0 \\ 0 & 0.9071 - 0.0715j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_B = \begin{bmatrix} 0.9379 + 0.0537j & 0 & 0 \\ 0 & 0.3775 + 0.1718j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.2127 - 0.2897i - 0.3440j + 0.1041k & 0.0236 + 0.0233i + 0.0328j - 0.0043k & -0.0624 - 0.1408i + 0.7383j - 0.4130k \\ -0.4508 - 0.4710i - 0.0229j + 0.0461k & -0.3080 + 0.2314i + 0.2250j + 0.3356k & -0.1711 - 0.3178i - 0.3005j + 0.1999k \\ 0.2708 + 0.2700i - 0.3418j + 0.2256k & -0.6085 + 0.5273i - 0.1187j - 0.1541k & 0 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} -1.1478 - 1.0688i - 6.3895j + 4.2326k & -0.9165 - 2.4062i + 1.0472j - 0.4802k & 4.3933 - 8.0464i + 1.4678j + 5.4446k \\ -1.6901 + 0.5979i + 4.9970j + 5.9399k & 1.2987 - 3.0753i - 1.5735j + 1.5858k & 3.1064 - 7.8783i + 3.5467j + 5.2167k \\ -2.8379 - 0.4709i - 1.3925j + 10.1726k & 0.3822 - 5.4814i - 0.4903j + 1.1058k & 2.0342 - 5.0763i + 1.1326j + 5.3348k \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.3483 - 0.2178i - 0.0180j - 0.0842k & -0.0192 + 0.2021i - 0.3092j - 0.2070k & 0.3320 - 0.1284i + 0.0710j + 0.0796k & -0.4134 - 0.4030i \\ 0.4879 + 0.0735i + 0.0752j + 0.2174k & -0.2072 - 0.0851i + 0.2897j - 0.6415k & 0.3454 + 0.1487i + 0.0109j + 0.1283k & 0 \\ 0.1277 - 0.1931i - 0.0317j - 0.2312k & 0.0734 - 0.0509i - 0.2846j - 0.1591k & 0.5706 - 0.3211i - 0.1230j - 0.0233k & 0.4134 + 0.4030i \\ 0.4760 - 0.4109i - 0.0497j + 0.1469k & 0.0542 - 0.1512i - 0.0246j + 0.3661k & 0.0386 - 0.1926i + 0.1940j - 0.1029k & 0.4134 + 0.4030i \end{bmatrix},$$

т.е., $U^H A W = \Sigma_A$, $V^H B W = \Sigma_B$ являются GSVDSQ из (A, B) .

(3) Из теоремы 4.12 мы получаем:

$$y_1 = (0.9379 + 0.0537j)^\dagger \times (15.7017 + 50.3164i + 17.9318j + 79.7128k) \\ = 15.6973 + 58.7088i + 18.2195j + 88.3528k,$$

$$y_2 = (0.3775 + 0.1718j)^\dagger \times (-13.5266 + 14.4377i - 9.0409j + 4.3537k) \\ = -31.4447 + 54.8567i - 9.6369j + 36.4999k,$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= (1)^\dagger \times (25.8398 + 123.0153i + 45.4483j + 104.1063k) \\
&= 25.8398 + 123.0153i + 45.4483j + 104.1063k,
\end{aligned}$$

и

$$x \quad W \begin{bmatrix} 15.6973 + 58.7088i + 18.2195j + 88.3528k \\ -31.4447 + 54.8567i - 9.6369j + 36.4999k \\ 25.8398 + 123.0153i + 45.4483j + 104.1063k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.2560 + 2.1410i + 2.1560k \\ 2.4020 + 1.3630i + 3.2230j \\ 5.6580 + 3.5050i + 3.2230j + 2.1560k \end{bmatrix}$$

является решением задачи LSESQ (4.39).

Пример 4.4 Рассмотрим решение задачи (4.36) с минимальной нормой. Пусть $A = A_1 + A_2i + A_3j + A_4k \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $B = B_1 + B_2i + B_3j + B_4k \in \mathbf{H}_s^{p \times n}$, $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k \in \mathbf{H}_s^{n \times 1}$.

$$k = 1, 2, 3, 4, 5; \quad m = k \times 100; \quad p = k \times 80; \quad n = k \times 60;$$

$$A_1 = \text{rand}(m, n); \quad A_2 = \text{rand}(m, n); \quad A_3 = \text{rand}(n, n); \quad A_4 = \text{rand}(m, n);$$

$$B_1 = \text{rand}(p, n); \quad B_2 = \text{rand}(p, n); \quad B_3 = \text{rand}(p, n); \quad B_4 = \text{rand}(p, n);$$

$$x_1 = \text{rand}(n, 1); \quad x_2 = \text{rand}(n, 1); \quad x_3 = \text{rand}(n, 1); \quad x_4 = \text{rand}(n, 1),$$

где $\text{rand}()$ - функция случайной матрицы в Matlab, и $\text{rand}(m, n)$ обозначает генерацию случайной $m \times n$ вещественной матрицы с элементами матрицы в диапазоне от 0 до 1. $b \in \mathbf{H}_s^{m \times 1}$, $d \in \mathbf{H}_s^{p \times 1}$ можно получить из уравнений $b = Ax$, $d = Bx$. Рассчитайте время работы процессора и абсолютные погрешности предложенных методов в этом разделе.

m	p	n	CPU время	$\ x - x_{LSQ}\ _F$
100	80	60	0.0322	5.0755×10^{-13}
200	160	120	0.1234	9.5968×10^{-13}
300	240	180	0.2477	1.6736×10^{-12}
400	320	240	0.4920	2.5616×10^{-12}
500	400	300	0.8926	3.5619×10^{-12}

Таблица 4.1: Время выполнения и ошибка расчета.

Таблица 4.1 показывает хорошую производительность предложенного в этом разделе алгоритма для задачи LSESQ как с точки зрения времени выполнения, так и точности вычислений.

4.4 Выводы

В этой главе, используя i -сопряженную и вещественную матрицу представления разделенной кватернионной матрицы, изучаются и получаются следующие основные результаты:

(1) Для задачи 1 в этой главе вводится и изучается обобщенная обратная задача разделенной кватернионной матрицы и дается алгебраический метод вычисления обобщенной обратной задачи разделенной кватернионной матрицы. В данной главе подводятся к итогу обобщенная обратная задача разделенного кватерниона из работ [148, 153] на матричный случай.

(2) Для задач 2 и 3 в этом разделе впервые исследуется проблема SVDSQ и GSVDSQ разделенных кватернионных матриц и устанавливается теорема SVDSQ и GSVDSQ. В отличие от SVD над комплексным полем и кватернионным кольцом SVD разделенных кватернионных матриц не является единственной по форме, а ее сингулярные значения неположительны и имеют вид $a + bh$, $a, b \in \mathbf{R}$, $h = (\cos w)j + (\sin w)k$, $0 \leq w \leq 2\pi$.

(3) Приведены два новых алгебраических метода разделения кватернионных задач наименьших квадратов, основанных на SVDSQ и GSVDSQ.

Дальнейшие исследования декомпозиции по сингулярным значениям разделенных кватернионных матриц и её применение в схемах цветного водяного знака

Поскольку технология цветных изображений стала более широко использоваться в Интернете, исследование схем цветных водяных знаков стало одной из актуальных тем в последние годы. Их можно разделить на три следующих основных направления:

- (1) Схемы цветных водяных знаков, основанные на матричных декомпозициях. Данные схемы основаны на скремблировании Арнольда и SVD, Li и др. в своем исследовании они предложили подход по нанесению двухцветных водяных знаков с очень низкой вычислительной сложностью [107] подход встраивает водяной знак путем изменения трех наименьших сингулярных значений блочной матрицы, что в определенной степени снижает точность изображения с водяными знаками, а процесс извлечения водяного знака также более восприимчив к атакующим помехам. Liu и др. выполнил двумерное преобразование и SVD для каждого цветного блока изображения в сочетании с обобщенной моделью нейронной сети для обобщения, чтобы добиться встраивания и извлечения водяного знака. Полученная в результате схема водяных знаков устойчива к фильтрации и сжатию в формате JPEG [108]. Аналогично схеме водяных знаков в статье [107], подход к созданию водяных знаков на цветном изображении, основанный на быстром алгоритме сохранения структуры SVDQ, предложен в статье [99], но представление алгебраической структуры кватернионов значительно улучшает невидимость метода водяных знаков по сравнению с [107].
- (2) Схемы цветных водяных знаков, основанные на вейвлет-преобразовании. В

статье [109] использовалась адаптивная стратегия выбора цвета для разделения выбранных цветов на непересекающиеся квадратные блоки размером 4×4 и комбинировались DCT и DWT для встраивания и извлечения водяного знака. Однако схема водяных знаков, по-видимому, не является устойчивой к атакам типа гауссовского шума. В работе [110] преобразование Адамара и 8-битный двоичный код водяного знака используются для встраивания информации о водяном знаке в соответствующую матрицу коэффициентов Адамара. Кроме того, водяной знак извлекается путем сравнения только размера пар коэффициентов. Эта схема создания водяных знаков имеет определенные преимущества с точки зрения надежности, работы в режиме реального времени и безопасности, но также обладает недостатком бинаризации водяных знаков - недостаточной емкостью. Основываясь на преобразовании и DCT, Saritas и др. предложил новый слепой, надежный подход к нанесению водяных знаков для гибридных цветных изображений. Основное отличие этого подхода заключается в том, что встраивание и извлечение водяных знаков больше выполняется не в пространстве RGB, а в пространстве YCbCr [111].

(3) Схемы цветных водяных знаков, основанные на бинаризации водяных знаков и матричной декомпозиции. Используя SVD с бинаризацией водяных знаков, Su и др. предложил надежную схему нанесения двухцветных водяных знаков в работе [112]. Chen и др. распространили свою схему на область кватернионов. Преимущество этой схемы заключается в том, что U содержит три сильные ассоциации, которые могут одновременно встраивать троичную информацию о водяных знаках [113]. Кроме того, они предложили надежную схему нанесения водяных знаков вслепую для защиты авторских прав на цветные изображения, основанную на кватернионном QR-декомпозиции [114]. Предлагаемая схема нанесения водяных знаков не только снижает вычислительную сложность с использованием методов сохранения алгебраической структуры. Кроме того, также можно избежать аномальной чувствительности к атакам из-

за иерархической обработки, изменив метод нормализованной корреляции (NC) для определения трех пар сильных коэффициентов корреляции.

В этой главе исследуется новый метод SVDSQ. Подобно модели кватернионного цветного изображения, разработанная модель разделенного кватернионного цветного изображения не только поддерживает сильную корреляцию между RGB-частями цветного изображения, но также обладает определенными временными преимуществами и меньшими погрешностями реконструкции по сравнению с кватернионным SVD и реальным SVD. Кроме того, предлагается схема цветного водяного знака, основанная на SVDSQ. Схема работает удовлетворительно с точки зрения невидимости, надежности и способности создавать водяные знаки.

5.1 Новый алгоритм SVDSQ для цветных изображений

Задача алгебраической структуры матрицы с разделенным кватернионом может быть изоморфна следующей задаче с вещественной матрицей $2m \times 2n$, что является преимуществом модели с разделенным кватернионом для цветных изображений. Учитывая $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, его вещественная матрица представления A^{R_2} записывается в следующем виде [136, 150]:

$$A^{R_2} = \begin{bmatrix} A_1 + A_4 & A_2 + A_3 \\ -A_2 + A_3 & A_1 - A_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}. \quad (5.1)$$

Дана произвольная матрица $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}$, $B_{ts} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $t, s = 1, 2$.

Постройте следующую разделенную кватернионную матрицу

$$A = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} + \frac{B_{12} - B_{21}}{2}i + \frac{B_{12} + B_{21}}{2}j + \frac{B_{11} - B_{22}}{2}k, \quad (5.2)$$

тогда по (5.3), $A^{R_2} = B$. Поэтому вещественная матрица представления A^{R_2} устанавливает изоморфизм между $\mathbf{H}_s^{m \times n}$ и $\mathbf{R}^{2m \times 2n}$. Учитывая $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $m \geq n$, согласно теории SVD вещественной матрицы [142] существует унитарная матрица $\mathbb{V} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ и вещественная матрица $\mathbb{U} \in \mathbf{R}^{2m \times 2n}$, $\mathbb{U}^H \mathbb{U} = I_{2n}$ такая, что

$$\mathbb{U}^H A^{R_2} \mathbb{V} = \mathbb{D}, \quad (5.3)$$

где $\mathbb{U} = [u_1, \dots, u_{2n}]$, $u_g \in \mathbf{R}^{2m \times 1}$, $\mathbb{D} = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n})$, $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_{2n} \geq 0$, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n}$ являются сингулярными значениями A^{R_2} , $\mathbb{V} = [v_1, \dots, v_{2n}]$, $v_h \in \mathbf{R}^{2n \times 1}$, $g, h = 1, 2, \dots, 2n$. Для того, чтобы восстановить сингулярные значения и векторы A из A^{R_2} , приведены следующие шаги:

Шаг 1. Вычислите SVD вещественной матрицы A^{R_2} ;

Шаг 2. Объедините сингулярные значения A^{R_2} , используя следующее

$$\sigma_t = \frac{\tau_{2t-1} + \tau_{2t}}{2} + \frac{\tau_{2t-1} - \tau_{2t}}{2} \mathbf{k}, \quad (5.4)$$

где $t = 1, 2, \dots, r$, $r = \begin{cases} \frac{p+1}{2}, & \text{если } p \text{ нечетно,} \\ \frac{p}{2}, & \text{если } p \text{ четно} \end{cases}$, и p – это число ненулевых сингулярных значений A^{R_2} . Более того, при формировании сингулярных значений и $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_p > 0$ легко получить $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \dots \geq |\sigma_r| \geq 0$;

Шаг 3. Объедините правые (левые) сингулярные векторы A^{R_2} , используя следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} \mu_s &= \frac{\hat{u}_{2s-1} + \hat{u}_{2s}}{2} + \frac{\check{u}_{2s} - \hat{u}_{2s-1}}{2} \mathbf{i} + \frac{\hat{u}_{2s-1} + \check{u}_{2s}}{2} \mathbf{j} + \frac{\check{u}_{2s-1} - \hat{u}_{2s}}{2} \mathbf{k}, \\ \nu_s &= \frac{\check{v}_{2s-1} + \hat{v}_{2s}}{2} + \frac{\check{v}_{2s} - \hat{v}_{2s-1}}{2} \mathbf{i} + \frac{\hat{v}_{2s-1} + \check{v}_{2s}}{2} \mathbf{j} + \frac{\check{v}_{2s-1} - \hat{v}_{2s}}{2} \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\check{u}_l, \hat{u}_l \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, $\check{v}_l, \hat{v}_l \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ определяются как $\begin{bmatrix} \check{u}_l \\ \hat{u}_l \end{bmatrix} = u_l$, $\begin{bmatrix} \check{v}_l \\ \hat{v}_l \end{bmatrix} = v_l$, $l = 1, 2, \dots, 2n$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Поэтому при объединении (5.4) и (5.5) существует диагональная разделенная кватернионная матрица $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ и две унитарные разделенные кватернионные матрицы $U = [\mu_1, \dots, \mu_n] \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $V = [\nu_1, \dots, \nu_n] \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ такис, что

$$\mathbb{U}^H A^R \mathbb{V} = \mathbb{D} \Leftrightarrow U^H A V = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

где U^{R_2}, V^{R_2} – это матрицы перестановок столбцов \mathbb{U} и \mathbb{V} , соответственно. Из приведенных утверждений легко получить следующую теорему.

Теорема 5.1 Пусть $A \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $m \geq n$. Тогда существуют две матрицы $U \in \mathbf{H}_s^{m \times n}$, $V \in \mathbf{H}_s^{n \times n}$ и $U^H U = I_n$, $V^H V = I_n$, такое, что

$$U^H A V = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

где $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$. $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ являются ненулевыми сингулярными значениями A и имеют новую форму $\sigma = a + bk$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Замечание 5.2 Стоит отметить, что SVDSQ не уникален [154] двумя основными способами:

- (1) Существование классов эквивалентности разделенных кватернионов приводит к неединственности SVDSQ. Предположим, что $\sigma = a + bk$. Тогда существует унитарный разделенный кватернион p , удовлетворяющий условию $\sigma \sim \check{\sigma}$, i.e. $\sigma = p \check{\sigma} p^H$ [137, 155]. Более того, $A = \sum_{t=1}^r u_t p_t (p_t^H \sigma_t p_t) (v_t p_t)^H = \sum_{t=1}^r \check{u}_t \check{\sigma}_t \check{v}_t^H$.
- (2) Разнообразие форм построения единственного числа приводит к неединственности SVDSQ. В таблице 5.1 $\tau_l, \tau_{n+l}, \tau_{2l-1}, \tau_{2l}$ являются сингулярными значениями A^{R_2} и $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_{2n}$. $N(0)$ обозначает число нулей в τ_1, \dots, τ_{2n} . Очевидно, что $\frac{\tau_l + \tau_{n-l}}{2} + \frac{\tau_l - \tau_{n+l}}{2}j$ and $\frac{\tau_{2l-1} + \tau_{2l}}{2} + \frac{\tau_{2l-1} - \tau_{2l}}{2}k$ не обязательно являются

ся одним и тем же классом эквивалентности. Декомпозиция по сингулярным значениям в разделе 4 имеет больше сингулярных значений нулевого делителя.

Форма	Конструктивные формы	Модуль	Числа делителей нуля
1	$\sigma_t = \frac{\tau_t + \tau_{n+t}}{2} + \frac{\tau_t - \tau_{n+t}}{2}j$	$ \sigma_t ^2 = \tau_t \tau_{n+t} $	$\begin{cases} N(0), & \text{если } N(0) \leq n; \\ 2n - N(0), & \text{если } N(0) > n; \end{cases}$
2	$\sigma_t = \frac{\tau_{2t-1} + \tau_{2t}}{2} + \frac{\tau_{2t-1} - \tau_{2t}}{2}k$	$ \sigma_t ^2 = \tau_{2t-1} \tau_{2t} $	0 или 1

Таблица 5.1: Сингулярные значения разделенных кватернионных матриц.

В приведенных ниже экспериментах мы используем только сконструированные формы (4.16) и (5.5). Производительность восстановления SVDSQ для цветных изображений выглядит следующим образом:

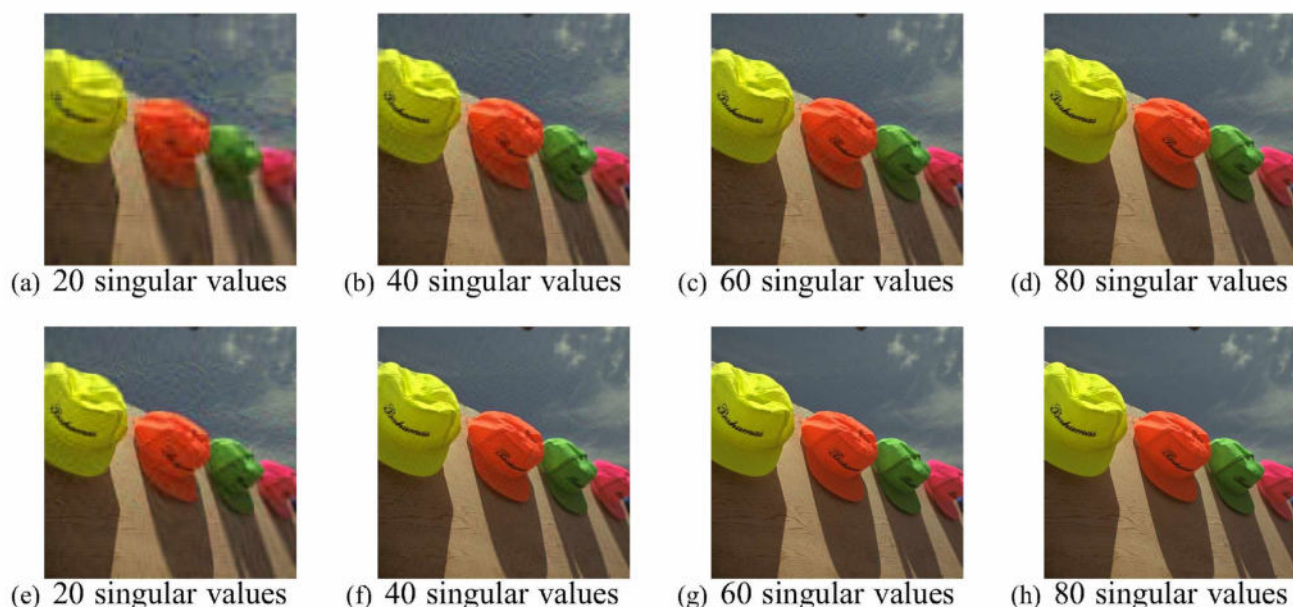


Рисунок 5.1: Результаты реконструкции SVDSQ: (a)-(d) - результаты работы алгоритма из раздела 4; (e)-(f) - результаты работы алгоритма из данного раздела.

Модель цветного изображения кватерниона хорошо известна, поскольку схема цветного изображения, основанная на четырехмерной алгебре, может сохранять внутреннюю связь трех цветовых каналов. Модель цветного изображения с разделенным кватернионом была предложена нами впервые, и ее производительность, основанная на алгоритме SVD, также особенно выдающаяся.

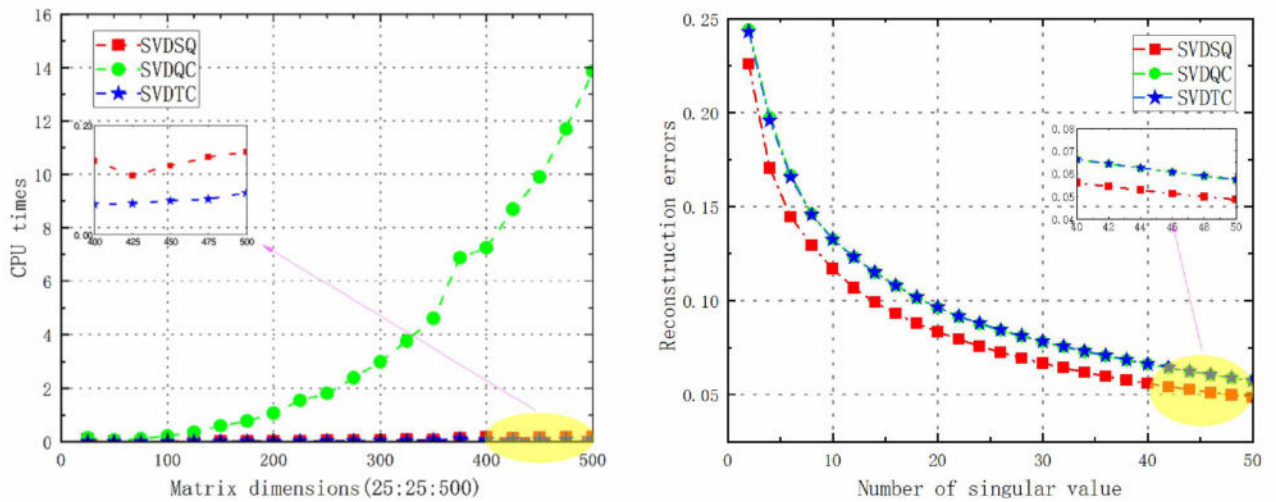


Рисунок 5.2: Сравнение SVDSQ, SVDQC и SVDTC.

На первом рисунке рис.5.2 показано время процессора для SVD в 25, 50, \dots , 500, упорядоченных случайным образом смоделированных цветных изображений ($R = 255 \times \text{rand}(m, n)$, $G = 255 \times \text{rand}(m, n)$, $B = 255 \times \text{rand}(m, n)$) в рамках трех моделей (кватернион, разделенный кватернион, три цветовых канала (SVDTC)). Кватернион SVD (SVDQC) выбирает самый быстрый алгоритм сохранения сложной структуры [99, 100], который намного быстрее, чем набор инструментов кватернионов [118]. На втором рисунке рис.5.2 показаны ошибки реконструкции $\frac{\|A - U_s \Sigma_s V_s^H\|_F}{\|A\|_F}$, сгенерированные при восстановлении классического 512×512 цветного изображения «Lenna» с использованием 3 алгоритмов SVD и небольшого числа сингулярных значений. Ясно, что алгоритм SVD имеет меньшую ошибку восстановления при малом числе сингулярных значений. Когда для анализа ошибок реконструкции цветного изображения выбраны все сингулярные значения, три алгоритма дают лучшие результаты реконструкции.

5.2 Встраивание и извлечение изображений с водяными знаками на основе SVDSQ

В SVD для цветных изображений, левый и правый сингулярные векторы содержат некоторую информацию об объекте изображения, а соответствующие

сингулярные значения являются весами (энергетическими значениями) каждой информации об объекте. При условии, что информация об объекте не будет уничтожена, изображение водяного знака может быть скрыто в матрице сингулярных значений. С этой целью приведена следующая схема нанесения водяных знаков, основанная на SVDSQ.

Предварительная обработка водяных знаков. Шифрование водяных знаков - это типичный метод предварительной обработки, используемый для обеспечения безопасности извлечения цветных водяных знаков. В данной работе используется популярный двумерный алгоритм скремблирования В.И.Арнольда [156].

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \pmod N, \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \pmod N, \quad (5.8)$$

где a, b, c и d - любые целые положительные числа, а $ad - bc = \pm 1$. $(x, y), (x_1, y_1)$ и N обозначают исходную точку пикселя, новую точку пикселя после обработки и размер изображения соответственно. Это скремблирование является периодическим и возвращает к исходному изображению после ограниченного числа скремблирования, как показано на рис.5.3.

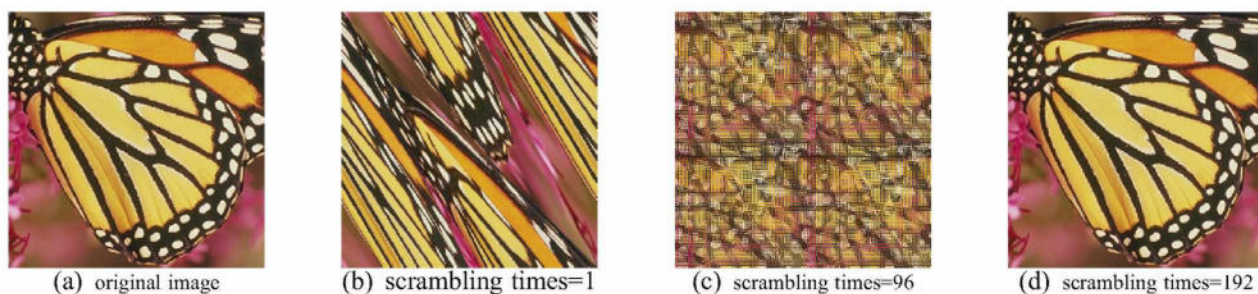


Рисунок 5.3: Изображение «Butterfly» : 256×256 .

Встраивание водяного знака. Дано исходное цветное изображение $A = Ri + Gj + Bk \in \mathbf{H}_s^{m_1 \times n_1}$ и изображение водяного знака $W = R_W i + G_W j + B_W k \in \mathbf{H}_s^{m_2 \times n_2}$. Нужно скрыть изображение водяного знака W в исходном изображе-

нии A . Если соотношение размеров между основным изображением и водяным знаком не является целым числом, размер водяного знака может быть соответствующим образом скорректирован в соответствии с требованиями алгоритма.

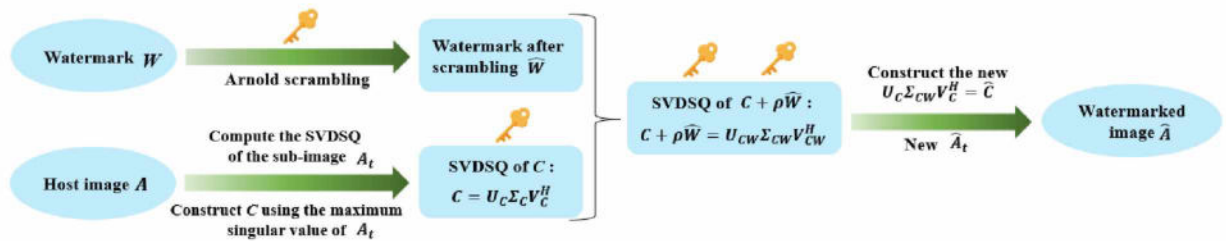


Рисунок 5.4: Блок-схема встраивания водяного знака.

Шаг 1. Выполним предварительную обработку скремблирования (scrambling times= k) на водяном знаке W , чтобы получить \hat{W} ;

Шаг 2. A делится на неперекрывающиеся блоки A_t размером $d \times d$ пикселей, где $t = 1, 2, \dots, m_2, d = \frac{m_1}{m_2}$;

Шаг 3. Вычисляем SVDSQ из A_t по очереди: $A_t = U_t \Sigma_t V_t^H$, где $\Sigma_t = \text{diag}(\sigma_1^{(t)}, \sigma_2^{(t)}, \dots, \sigma_d^{(t)})$ и $|\sigma_1^{(t)}| \geq |\sigma_2^{(t)}| \geq \dots \geq |\sigma_d^{(t)}|$. Сохраните наибольшее сингулярное значение A_t последовательно в новой $m_2 \times n_2$ матрице C ;

Шаг 4. Вычисляем SVDSQ из C : $C = U_C \Sigma_C V_C^H$. Учитывая коэффициент интенсивности наложения водяных знаков ρ , выполните SVDSQ на сумму Σ_C и \hat{W} , умноженную на ρ , т.е., $\Sigma_C + \rho \hat{W} = U_{CW} \Sigma_{CW} V_{CW}^H$;

Шаг 5. Вычисляем новую матрицу $U_C \Sigma_{CW} V_C^H = \hat{C}$ и затем получите \hat{A}_t из \hat{C} .

Извлечение водяного знака. Дано цветное изображение с добавленным водяным знаком $\hat{A} = \hat{R}i + \hat{G}j + \hat{B}k \in \mathbf{H}_s^{m_1 \times n_1}$, ключом извлечения водяного знака являются матрицы U_{CW}, V_{CW}, Σ_C , и время скремблирования= k . Вычислить водяной знак W , скрытый в цветном изображении с водяным знаком \hat{A} .

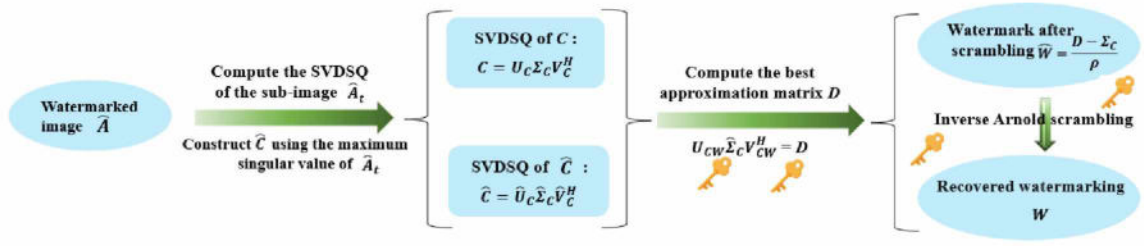


Рисунок 5.5: Блок-схема извлечения водяного знака.

- Шаг 1. Изображение с водяными знаками \hat{A} разделено на неперекрывающиеся блоки \hat{A}_t размером $d \times d$ пикселей, где $t = 1, 2, \dots, m_2, d = \frac{m_1}{m_2}$;
- Шаг 2. Вычисляем SVDSQ из \hat{A}_t по очереди: $\hat{A}_t = \hat{U}_t \hat{\Sigma}_t \hat{V}_t^H$, где $\hat{\Sigma}_t = \text{diag}(\hat{\sigma}_1^{(t)}, \hat{\sigma}_2^{(t)}, \dots, \hat{\sigma}_d^{(t)})$ и $|\hat{\sigma}_1^{(t)}| \geq |\hat{\sigma}_2^{(t)}| \geq \dots \geq |\hat{\sigma}_d^{(t)}|$. Сохраните наибольшее сингулярное значение \hat{A}_t последовательно в новой $m_2 \times n_2$ матрице \check{C} ;
- Шаг 3. Вычисляем SVDSQ из \check{C} : $\check{C} = \check{U}_C \check{\Sigma}_C \check{V}_C^H$;
- Шаг 4. Вычисляем матрицу наилучшего приближения D между $\check{\Sigma}_C, U_{CW}$ и V_{CW} , т.е., $U_{CW} \check{\Sigma}_C V_{CW}^H = D$;
- Шаг 5. Извлечение водяного знака. Установить $\hat{W} = \frac{D - \Sigma_C}{\rho}$. Выполните обратное скремблирование Арнольда на \hat{W} , чтобы получить водяной знак W .

5.3 Численный экспериментальный анализ

Для того, чтобы сравнить визуальную достоверность нескольких алгоритмов водяных знаков, приведены метрики анализа их эффективности. Например, пиковое отношение «сигнал/шум» (PSNR) и нормированная корреляция (NC) между исходным и обработанным изображением. Их формулы определяются следующим образом:

$$\text{PSNR} = 10 \lg \frac{3n^2 \times 255^2}{\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^n \sum_{z=1}^3 (A(x, y, z) - \hat{A}(x, y, z))^2},$$

$$NC = \frac{\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n \sum_{k=1}^3 A(x, y, k) \times \hat{A}(x, y, k)}{\sqrt{\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n \sum_{k=1}^3 A(x, y, k)^2} \sqrt{\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n \sum_{k=1}^3 \hat{A}(x, y, k)^2}},$$

где A – исходное изображение, \hat{A} – обработанное изображение, $A(:, :, 1) = R$, $A(:, :, 2) = G$, $A(:, :, 3) = B$.

Пример 4.1 Проведено несколько численных экспериментов для проверки эффективности предложенной нами схемы нанесения водяных знаков. Вот 4 основных изображения Рис.5.6(a)-(d) и 5 цветных изображений водяных знаков на Рис.5.7(a)-(e), использованные для экспериментов. Все вычисления выполнены на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-7700 CPU @ 3.60GHz/16GB с использованием MATLAB R2018b.



Рисунок 5.6: 4 оригинальных изображения хоста.

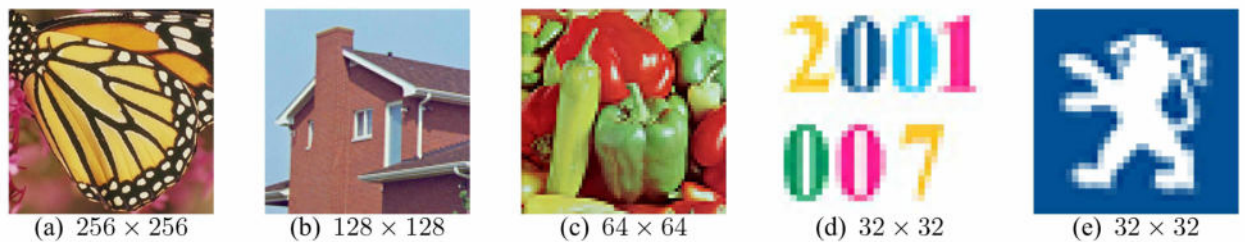


Рисунок 5.7: 5 цветных водяных знаков.

I. Проверка невидимости схемы водяных знаков

Для оценки невидимости водяного знака выполняется всесторонняя проверка силы водяного знака ρ на интервале $[0.02, 0.4]$, как показано на рис.5.9. Изображение хоста, встроенное в водяной знак, и его значение PSNR показаны на рис.5.8, когда сила водяного знака $\rho = 0.25$. Из рис.5.8-5.9 видно, что

предложенный алгоритм обладает хорошей маскировкой водяных знаков. Не подвергаясь атаке, исходный водяной знак может быть почти полностью восстановлен.



Рисунок 5.8: Изображения с водяными знаками: (a)→«Baboon»; (c)→«Airplane»; (d)→«Lenna»; (e)→«Saiboat».

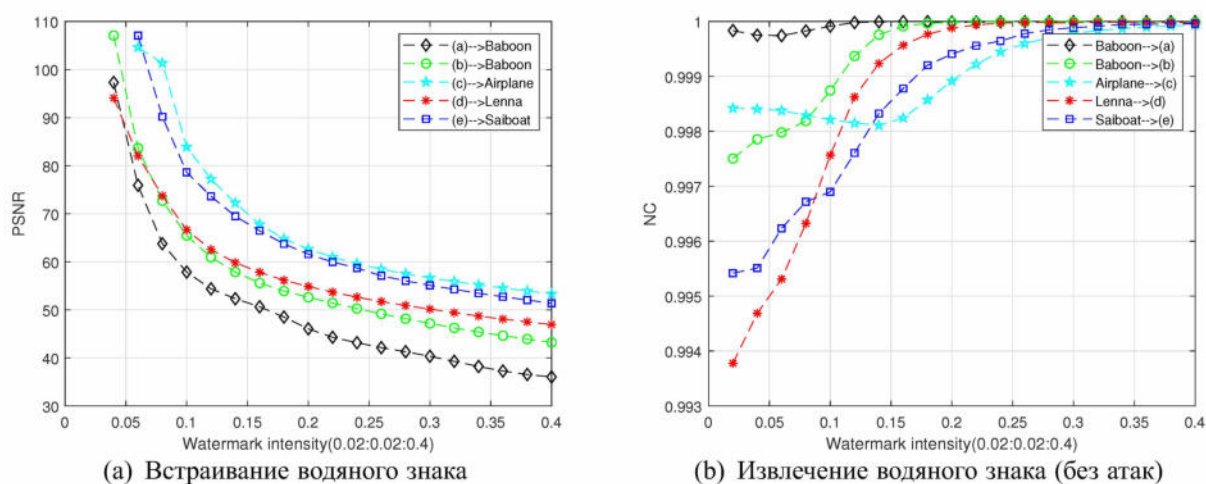


Рисунок 5.9: PSNR изображений с водяными знаками и NC извлеченных водяных знаков.

На рис.5.9 (a) → «Baboon» указано встраивание водяного знака (a) в изображение хоста «Baboon». «Baboon» → (a) указывает на извлечение водяного знака (a) из изображения с водяными знаками. Очевидно, что значение PSNR основного изображения и значение NC водяного знака отрицательно коррелируют по мере увеличения силы водяного знака. Наша схема обладает высокой невидимостью в пределах заданного интервала силы водяного знака, а встроенный водяной знак оказывает меньшее влияние на исходное изображение. Кроме

того, для разных изображений хоста и водяных знаков получаются разные результаты.

II. Проверка устойчивости схемы водяного знака

Применение различных атак к изображению с водяным знаком показывает устойчивость схемы прежде всего в четкости извлекаемого водяного знака. В табл.5.2 представлены несколько популярных атак, использованных в эксперименте, включая шумовое искажение (гауссовский шум, шум соли и перца, спекл-шум), коррекцию яркости, размытие, фильтрацию (гауссовская низкочастотная фильтрация, гауссовская гладкая фильтрация) и т.д.

Атака	Описание	Атака	Описание
A1	No attack	A2	Gaussian noise corruption (0.01)
A3	Salt & Peppers noise corruption (0.05)	A4	Speckle noise corruption (0.05)
A5	Brighten [0,1] \rightarrow [0.3,1]	A6	Blurring ([5,5], 0.5)
A7	Gaussian low pass filtering (250)	A8	Gaussian smooth filtering (150)

Таблица 5.2: Различные атаки, используемые в экспериментах.

(1) Сравнение производительности с другими схемами водяного знака SVD.

В работах [107] и [99] предложены схемы нанесения водяных знаков, основанные на реальном матричном блоке [R;G;B] SVD и кватернионном SVD, соответственно. Это похоже на предложенную в этом разделе схему водяных знаков SVDSQ, но различия заключаются в следующем:

- Алгебраическая структура SVD различна. Различно требуемое время работы алгоритма и способность сохранять информацию о цветном изображении.
- В отличие от работ [107] и [99] запятая не нужна мы решили при встраивании водяного знака использовать сингулярные значения матрицы максимальных сингулярных значений. Вместо этого RGB-данные хранятся путем замены трех наименьших единичных значений каждой блочной подматрицы. С точки зрения данных это означает, что чем больше степень изменения информации, тем большее влияние оказывается на принимающее изображение, и соответствующая стойкость может быть несколько хуже.





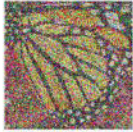
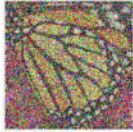

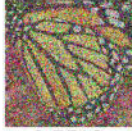


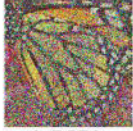

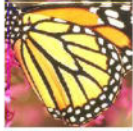










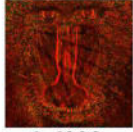
Атака $k=0$	Наша схема $\rho=0.15$	Схема [99] $\rho=0.15$	Схема [107] $\rho=0.15$	Атака $k=0$	Наша схема $\rho=0.15$	Схема [99] $\rho=0.15$	Схема [107] $\rho=0.15$
PSNR	51.2313	33.0745	33.0772	PSNR	51.2313	33.0745	33.0772
A1				A2			
NC	1.0000	0.9992	0.9998	NC	0.9984	0.7638	0.7655
A3				A4			
NC	0.9947	0.7719	0.7735	NC	0.9968	0.7570	0.7632
A5				A6			
NC	0.9935	0.9288	0.9111	NC	0.9995	0.9487	0.9640
A7				A8			
NC	0.9992	0.8006	0.8578	NC	0.9971	0.6114	0.6993

Таблица 5.3: Водяные знаки и NCs, извлеченные при атаках в таблице 5.2.

В таблице 5.3 мы выбираем изображение хоста «Baboon» размером 1024×1024 и водяной знак размером 256×256 (а) для тестирования надежности трех схем водяных знаков, при этом сила водяного знака установлена равной 0.15. Сила водяного знака выбирается исходя из достижения максимального значения NC без атаки. Значения PSNR изображений с водяными знаками на данный момент также приведены вместе в таблице 5.3. Очевидно, что все схемы нанесения водяных знаков, предложенные в этой статье, обладают хорошей устойчивостью к атакам, перечисленным в таблице 5.2, при этом все значения NC остаются выше 0.99. Кроме того, мы не можем полностью извлечь водяной знак, регулируя интенсивность водяного знака, используя схему в статье [99, 107], что может быть связано с соответствием между водяным знаком и основным изображением.

В таблице 5.4 мы выбираем 512×512 изображение хоста «Lenna» и 64×64 водяной знак (с) для тестирования надежности трех схем водяных знаков, при






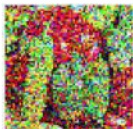


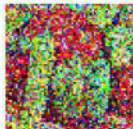

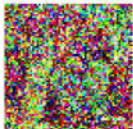
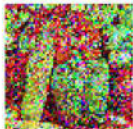












Атака $k=0$	Наша схема $\rho=0.22$	Схема [99] $\rho=0.15$	Схема [107] $\rho=0.28$	Атака $k=0$	Наша схема $\rho=0.22$	Схема [99] $\rho=0.15$	Схема [107] $\rho=0.28$
PSNR	53.2236	44.0113	38.0134	PSNR	53.2236	44.0113	38.0134
A1				A2			
NC	1.0000	0.9963	1.0000	NC	0.9974	0.7596	0.8670
A3				A4			
NC	0.9945	0.7320	0.8331	NC	0.9965	0.7476	0.8487
A5				A6			
NC	0.9896	0.9405	0.9477	NC	0.9994	0.9918	0.9936
A7				A8			
NC	0.9997	0.9934	0.9958	NC	0.9991	0.9733	0.9728

Таблица 5.4: Водяные знаки и NCs, извлеченные при атаках в таблице 5.2.

этом сила водяных знаков установлена равной 0.22, 0.15 и 0.28 соответственно. Аналогично таблице 5.3 запятая не нужна мы получаем лучшие результаты при 8-кратной разнице между размером изображения хоста и водяного знака, главным образом потому, что чем больше разница в размерах, тем меньше воздействие на хост и тем надежнее схема нанесения водяных знаков.

Невидимость и надежность схемы водяного знака - две противоречивые метрики. На рис.5.10 в качестве основного изображения выбрано изображение «Lenna» в качестве водяного знака - изображение (с) на рис.5.7. На 9 изображениях показаны значения PSNR для изображения с водяным знаком и значения NC для извлеченного водяного знака для значений силы водяного знака от 0.025 до 0.28. В качестве атак использовались все схемы атак, приведенные в таблице 5.2. Очевидно, что предложенный в данном разделе алгоритм имеет хорошие экспериментальные результаты как с точки зрения невидимости, так и с точки зрения робастности.

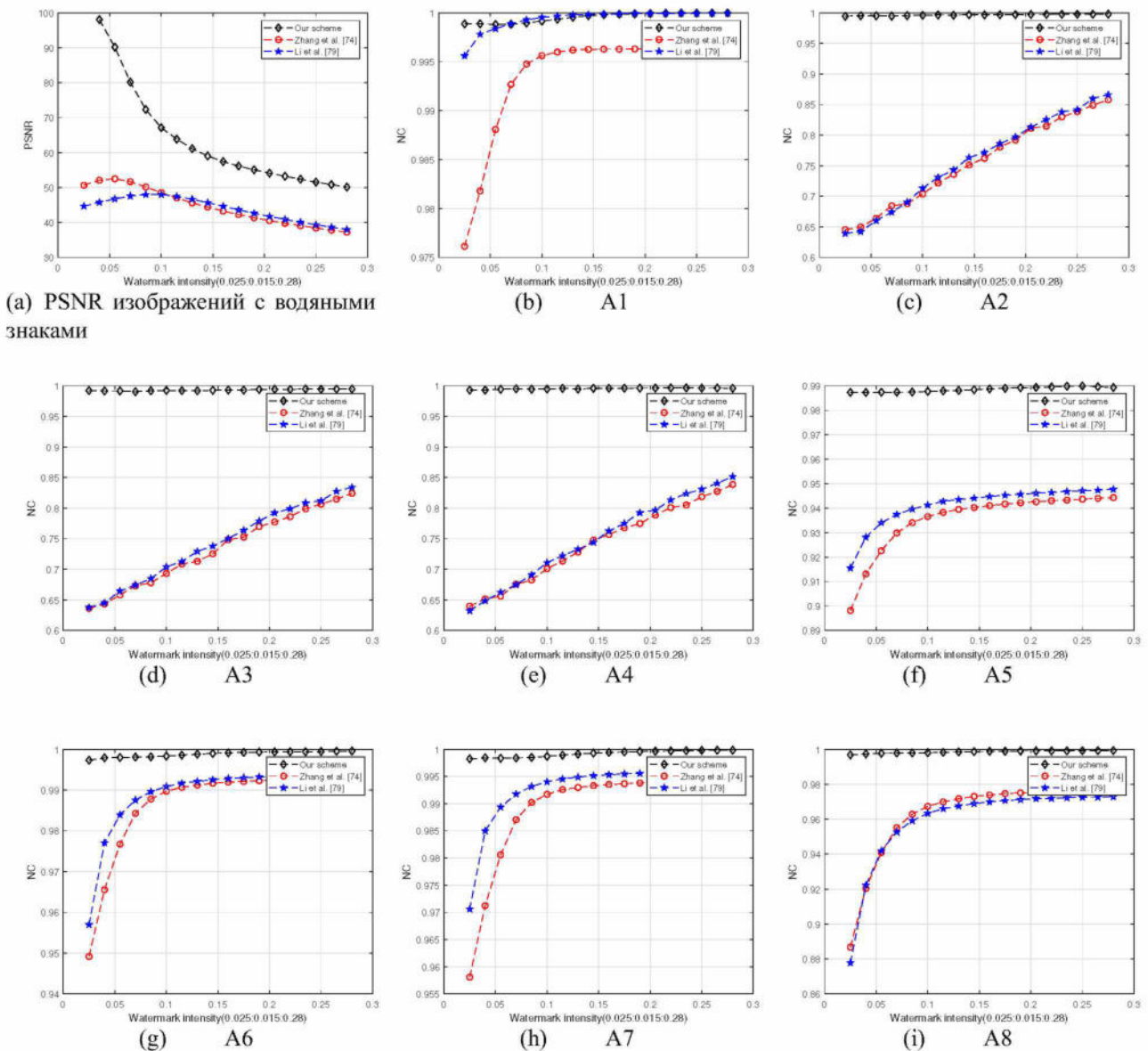


Рисунок 5.10: NCs с различной прочностью встраивания на основе схем SVD

(2) Сравнение производительности с бинаризованными схемами водяного знака.

Было проведено много хороших исследований по схемам водяных знаков для бинаризации [109–111]. Эти схемы часто работают путем двоичного преобразования водяного знака и последующего встраивания его в локальную подматрицу основного изображения. Однако, такие схемы имеют свои ограничения по сравнению с традиционными схемами нанесения водяных знаков:

- Двоичное преобразование данных обязательно приводит к увеличению раз-

мерности информации и, следовательно, требует очень большой разницы в размерах между водяным знаком и основным изображением. В обычном тесте для водяного знака размером 32, умноженного на 32, требуется изображение хоста размером 512, умноженное на 512. Увеличение размера водяного знака должно потребовать увеличения размера основного изображения, что увеличивает объем вычислений.

- Правило встраивания таких схем водяных знаков обычно заключается во встраивании двоичных данных водяного знака путем сравнения размера локальной информации основного изображения. Он более чувствителен к атакам, основанным на шуме, поскольку добавление шума изменяет размер локальной информации. С другой стороны, при изменении яркости атаки типа фильтрации, как правило, дают лучшие результаты извлечения.

Атака	Наша схема	Схема [114]	Схема [112]	Атака	Наша схема	Схема [114]	Схема [112]
$k=1$	$\rho=0.25$	$T=0.055$	$T=0.15$	$k=1$	$\rho=0.25$	$T=0.055$	$T=0.15$
PSNR	52.1588	33.2747	27.9971	PSNR	52.1588	33.2747	27.9971
A1				A2			
NC	1.0000	1.0000	1.0000	NC	0.9951	0.9136	0.9876
A3				A4			
NC	0.9911	0.9890	0.9863	NC	0.9918	0.9096	0.9914
A5				A6			
NC	0.9939	0.9948	0.9601	NC	0.9995	0.9978	1.0000
A7				A8			
NC	0.9998	0.9989	1.0000	NC	0.9995	0.9926	0.9995

Таблица 5.5: Водяные знаки и NCs, извлеченные при атаках в таблице 5.2.

В таблице 5.5 мы выбрали изображение хоста «Lenna» размером 512×512 и водяной знак 32×32 (d) для тестирования надежности трех схем водяных

знаков, при этом сила водяных знаков установлена равной 0.25, 0.055 и 0.15 соответственно. Сила водяного знака выбирается исходя из достижения максимального значения NC без атаки. Значения PSNR изображений с водяными знаками на данный момент также приведены вместе в таблице 5.5. Очевидно, что наша схема водяных знаков обладает большей устойчивостью к атакам с шумом и лучшим извлечением для отфильтрованных атак. Стоит отметить, что изображение с водяным знаком на этом этапе имеет более высокое значение PSNR, т.е. встроенный водяной знак имеет минимальные помехи для основного изображения. Аналогично таблице 5.5 запятая не нужна мы выбрали основное изображение «Saiboat» 512×512 и водяной знак (e) 32×32 для тестирования надежности трех схем водяных знаков в таблице 5.6. Значение NC=1.0000 при отсутствии атаки достигается путем выбора силы водяного знака, отличной от указанной в таблице 5.5.











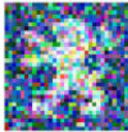













Атака $k=1$	Наша схема $\rho=0.35$	Схема [114] $T=0.09$	Схема [112] $T=0.15$	Атака $k=1$	Наша схема $\rho=0.35$	Схема [114] $T=0.09$	Схема [112] $T=0.15$
PSNR	53.0868	28.9029	26.6624	PSNR	53.0868	28.9029	26.6624
A1				A2			
NC	1.0000	1.0000	1.0000	NC	0.9965	0.8847	0.9696
A3				A4			
NC	0.9944	0.9796	0.9625	NC	0.9949	0.8814	0.9746
A5				A6			
NC	0.9918	0.9568	0.9021	NC	0.9994	0.9925	0.9998
A7				A8			
NC	0.9996	0.9947	1.0000	NC	0.9992	0.9478	0.9869

Таблица 5.6: Водяные знаки и NCs, извлеченные при атаках в таблице 5.2.

Чтобы максимально точно смоделировать тесты на надежность трех схем

нанесения водяных знаков в одной и той же среде мы решили протестировать атаки с изображениями, имеющими водяные знаки, достигающими указанных значений PSNR 30, 35, 40 и 45 соответственно. В этом случае взаимодействие встроенного водяного знака с основным изображением несущественно.

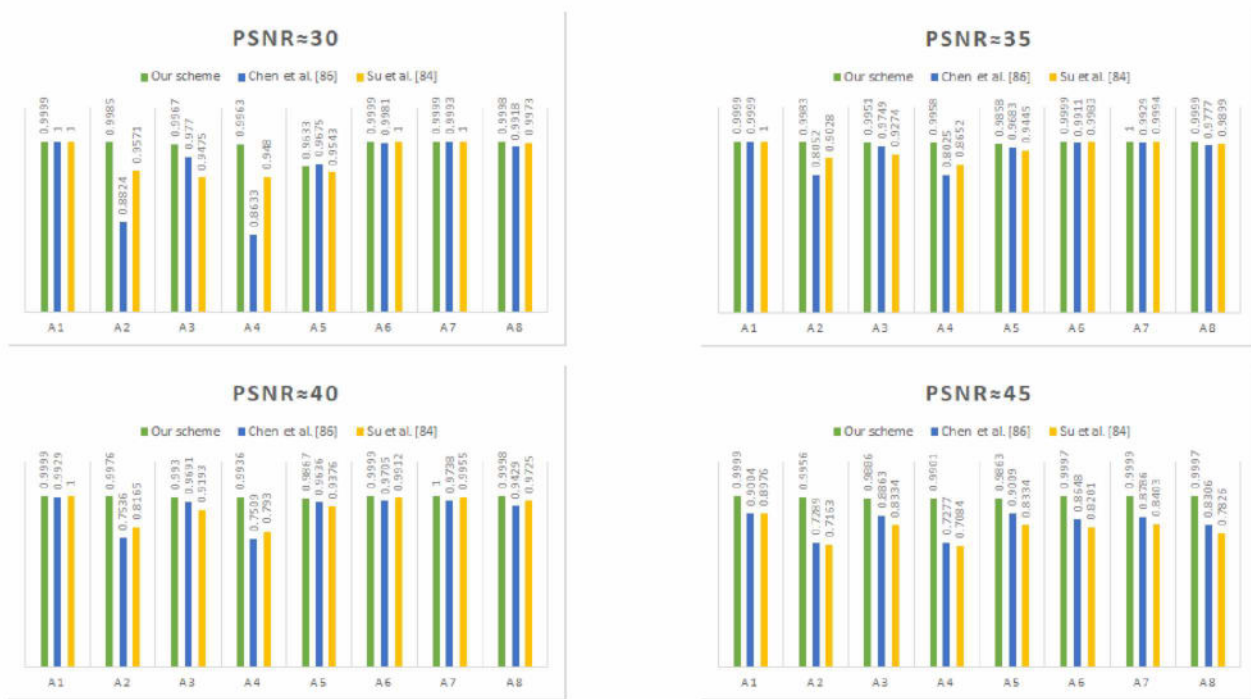


Рисунок 5.11: Тестовые атаки при аналогичном значении PSNR.

На рис.5.11 выбирается тот же водяной знак и изображение хоста, что и в таблице 5.6. Схема водяных знаков, описанная в этой статье, обладает более высокой надежностью по сравнению с двумя другими схемами водяных знаков при сохранении $PSNR \approx 45$.

5.4 Выводы

В этой главе исследуется теория SVDSQ, основанная на реальном представлении разделенных кватернионных матриц. Кроме того, предлагается новая схема нанесения водяных знаков, основанная на SVDSQ.

Преимущества модели цветного изображения с разделенным кватернионом: три сильно связанные пары коэффициентов кватерниона компенсируют потерю корреляции между различными цветовыми каналами. Предлагаемая нами

модель цветного изображения с разделенным кватернионом наследует это преимущество кватернионов, имеет простую структурную форму для SVD и короткое время вычисления. Такое же количество сингулярных значений также приводит к более высокой точности восстановления изображения.

Преимущества схемы водяных знаков, основанной на SVDSQ: экспериментальные результаты показывают, что схема работает удовлетворительно с точки зрения невидимости, надежности и способности создавать водяные знаки. При извлечении внедренного водяного знака в соответствии с тестами атаки, приведенными в тексте, предлагаемый подход к нанесению водяных знаков является более адаптируемым, чем другие схемы нанесения водяных знаков.

Заключение

Диссертация посвящена построению и развитию теории и алгоритмов декомпозиции матриц в четырехмерных алгебрах. Чтобы проверить предложенную теорию декомпозиции матриц, некоторые случайные матрицы сравниваются с точки зрения ошибок дскомпозиции и восстановления. Алгоритмы матричной декомпозиций применяются к некоторым задачам обработки сигналов и цветных изображений, а также к механическим задачам, также предлагаются решения некоторых практических задач. Основные научные результаты работы представлены ниже:

- Предложен вещественный сохраняющий структуру алгоритм для низкоранговой декомпозиции чисто мнимых кватернионных матриц. На основе этого алгоритма декомпозиции устанавливается схема сжатия цветного изображения, и основные преимущества этой схемы сжатия заключаются в том, что по сравнению со схемой сжатия цветного изображения кватерниона SVD операция сохраняет чисто мнимое свойство значения. По сравнению с традиционной схемой трехканальной матричной декомпозиции эта операция поддерживает спектральные отношения между красным, зеленым и синим каналами. В той же экспериментальной среде и с той же степенью сжатия он имеет лучшие эффекты сжатия и хранения. Кроме того, была разработана схема шумоподавления 3D-сигнала. Избыточные реальные части не генерируются в процессе шумоподавления, и эффект шумоподавления лучше.
- Предложены два комплексных сохраняющих структуру алгоритма для полноранговых декомпозиций кватернионных матриц с использованием методов исключения Гаусса и ортогонализации Грама-Шмидта. Кроме того, предложены формы декомпозиции по полному рангу для обобщенных обратных кватернионных матриц. На основе этого алгоритма декомпозиции создана схема классификации разреженного представления цветных изображений

лиц.

- Рассмотрены структурные особенности алгебры разделенных кватернионов, включая некоммутативность разделенных кватернионных произведений, существование делителей нуля, нильпотентных элементов и нетривиальных идемпотентов, невозможность точного определения ортогональности векторов разделенных кватернионов и ряд других трудностей. С помощью трех изоморфных вещественных или комплексных представлений построены алгебраическая теория и алгоритм обобщенной декомпозиции по собственным значениям разделенных кватернионов. Кроме того, на этой основе создан метод двумерного линейного дискриминантного анализа в алгебре разделенных кватернионов и новая схема цветового распознавания. Эксперименты показали высокую точность распознавания.
- Впервые построены теория и алгоритм обобщенной инверсии разделенной кватернионной матрицы декомпозиции по сингулярным значениям и обобщенной декомпозиции по сингулярным значениям. Кроме того, на основе этих двух декомпозиций даны два новых алгебраических метода для задачи наименьших квадратов и задачи наименьших квадратов с ограничениями на равенство.
- Представлен новый алгоритм декомпозиции по сингулярным значениям для разделенных кватернионных матриц. Кроме того, схема цветных водяных знаков создается на основе декомпозиции по сингулярным значениям матриц разделенных кватернионов, что имеет существенные преимущества, заключающиеся в том, что схема работает удовлетворительно с точки зрения невидимости, надежности и способности восстановления водяных знаков, когда встроенный водяной знак извлекается на основе теста атаки, приведенного в работе. Предлагаемый метод водяных знаков более адаптируем, чем другие схемы водяных знаков.

Литература

1. Hamilton William Rowan. On a new species of imaginary quantities, connected with the theory of quaternions // *Proceedings of the Royal Irish Academy (1836-1869)*. — 1840. — Т. 2. — С. 424–434.
2. Adler Stephen L. Quaternionic quantum field theory // *Communications in Mathematical Physics*. — 1986. — Т. 104. — С. 611–656.
3. Adler Stephen L. Scattering and decay theory for quaternionic quantum mechanics, and the structure of induced T nonconservation // *Physical Review D*. — 1988. — Т. 37, № 12. — С. 3654.
4. Adler Stephen L, Finkelstein David R. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. — 1996.
5. Adler Stephen L, Millard Andrew C. Coherent states in quaternionic quantum mechanics // *Journal of Mathematical Physics*. — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 2117–2126.
6. Shirokov DS. Classification of elements of Clifford algebras according to quaternionic types // *Dokl. Math*. — Т. 80. — 2009. — С. 610–612.
7. Shirokov DS. Development of the method of quaternion typification of Clifford algebra elements // *Advances in Applied Clifford Algebras*. — 2012. — Т. 22. — С. 483–497.
8. Shirokov DS. Quaternion typification of Clifford algebra elements // *Advances in Applied Clifford Algebras*. — 2012. — Vol. 22. — P. 243–256.
9. Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А. Кватернионы в релятивистской физике. — Наука и техника, 1989.

10. De Leo Stefano, Scolarici Giuseppe. Right eigenvalue equation in quaternionic quantum mechanics // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 2000. — Т. 33, № 15. — С. 2971.
11. Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*. — 2004. — Т. 1, № 1-1. — С. 111–127.
12. Микаэлян М.А. Квантовая механика частицы со спином на языке алгебры кватернионов // *Инженерная физика*. — 2013. — № 4. — С. 3–14.
13. Голдобин Н.Н., Голдобина Л.А. Преемственность в развитии научных знаний: практическое применение кватернионов при решении инженерно-технических задач // *Технико-технологические проблемы сервиса*. — 2013. — № 2 (24). — С. 59–62.
14. Лунсва Е.А. Применение теории кватернионов и октонионов в физике // *Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования*. — 2016. — № 4. — С. 109–110.
15. Ефремов А.П. О физических моделях в квантовой механике // *Метафизика*. — 2017. — № 1. — С. 84–91.
16. Giardino Sergio. Quaternionic quantum mechanics in real Hilbert space // *Journal of Geometry and Physics*. — 2020. — Т. 158. — С. 103956.
17. Терехов С.В. Нужно ли использовать кватернионы в физике? // *Физика и техника высоких давлений*. — 2022. — Т. 32, № 1. — С. 62–77.
18. Giardino Sergio. Spin and angular momentum in quaternionic quantum mechanics // *Europhysics Letters*. — 2023. — Т. 142, № 1. — С. 12001.

19. Cokle James. On Systems of Algebra involving more than one Imaginary and on equations of the fifth degree // *Philosophical Magazine*, (series 3). — 1849. — T. 35. — С. 434–437.
20. Guo A., Salamo G.J. и др. Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials // *Physical Review Letters*. — 2009. — T. 103, № 9. — С. 093902.
21. Zhao K.F., Schaden M., Wu Z. Enhanced magnetic resonance signal of spin-polarized Rb atoms near surfaces of coated cells // *Physical Review A*. — 2010. — T. 81, № 4. — С. 042903.
22. Moiseyev Nimrod. *Non-Hermitian quantum mechanics*. — Cambridge University Press, 2011.
23. Bender Carl M., Boettcher Stefan. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry // *Physical Review Letters*. — 1998. — T. 80, № 24. — С. 5243.
24. Xavier Jr Ademir L., de Aguiar Marcus A.M. Complex trajectories in the quartic oscillator and its semiclassical coherent-state propagator // *annals of physics*. — 1996. — T. 252, № 2. — С. 458–478.
25. Bender Carl M., Boettcher Stefan, Meisinger Peter N. PT-symmetric quantum mechanics // *Journal of Mathematical Physics*. — 1999. — T. 40, № 5. — С. 2201–2229.
26. Kaushal R.S., Korsch H.J. Some remarks on complex Hamiltonian systems // *Physics Letters A*. — 2000. — T. 276, № 1-4. — С. 47–51.
27. Bender Carl M., Brody Dorje C. и др. Faster than Hermitian quantum mechanics // *Physical Review Letters*. — 2007. — T. 98, № 4. — С. 040403.

28. Nesterov Alexander I. и др. Non-Hermitian quantum systems and time-optimal quantum evolution // SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2009. — Т. 5. — С. 069.
29. Brody Dorje C., Graefe Eva-Maria. On complexified mechanics and coquaternions // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2011. — Т. 44, № 7. — С. 072001.
30. Finkelstein David, Jauch Josef M. и др. Foundations of quaternion quantum mechanics // Journal of mathematical physics. — 1962. — Т. 3, № 2. — С. 207–220.
31. Brody Dorje C., Graefe Eva-Maria. Coquaternionic quantum dynamics for two-level systems // ArXiv Preprint ArXiv:1105.4038. — 2011.
32. Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда // Издательская группа URSS, Москва. — 2023.
33. Марчук Н.Г. Теория алгебр Клиффорда и спиноров // Красанд (URSS), Москва. — 2021.
34. Марчук Н.Г., Широков Д.С. Введение в теорию алгебр Клиффорда // М.: Фазис. — 2012.
35. Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда // Ижевск: НИЦ РХД. — 2009.
36. Aslan Selanattin, Yayli Yusuf. Split quaternions and canal surfaces in Minkowski 3-space // International Journal of Geometry. — 2016. — Т. 5, № 2.
37. Dagli S. The jet structure and mechanical systems on Minkowski 4-Space // Pamukkale University, Denizli, Turkey. — 2012.

38. Sardanashvily Gennadi A. Hamiltonian time-dependent mechanics // *Journal of Mathematical Physics*. — 1998. — T. 39, № 5. — C. 2714–2729.
39. Sardanashvily G., Zakharov O. On application of the Hamilton formalism in fibred manifolds to field theory // *Differential Geometry and Its Applications*. — 1993. — T. 3, № 3. — C. 245–263.
40. Gantmacher Felix R., Krein Mark G. Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems: revised edition. — American Mathematical Society, 2002.
41. Chugunova Marina, Pelinovsky Dmitry. Count of eigenvalues in the generalized eigenvalue problem // *Journal of Mathematical Physics*. — 2010. — T. 51, № 5.
42. Bogatyřev Andrei Borisovich. Pictorial Representation for Antisymmetric Eigenfunctions of PS-3 Integral Equations // *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*. — 2010. — T. 13, № 2. — C. 105–143.
43. Eberly David. Quaternion algebra and calculus // *Magic Software Inc.* — 2002. — T. 26. — C. 1–8.
44. Voight John. Quaternion algebras. — Springer Nature, 2021.
45. Shirokov DS. A classification of Lie algebras of pseudo-unitary groups in the techniques of Clifford algebras // *Advances in applied Clifford algebras*. — 2010. — Vol. 20. — P. 411–425.
46. Marchuk NG, Shirokov DS. Unitary spaces on Clifford algebras // *Advances in Applied Clifford Algebras*. — 2008. — Vol. 18. — P. 237–254.
47. Shirokov DS. Contractions on ranks and quaternion types in Clifford algebras // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. — 2015. — T. 19, № 1. — C. 117–135.

48. Vince John, Vincc. Quaternions for computer graphics. — Springer, 2011.
49. Bayro-Corrochano Eduardo. A survey on quaternion algebra and geometric algebra applications in engineering and computer science 1995–2020 // IEEE Access. — 2021. — T. 9. — C. 104326–104355.
50. Kazantsev Ivan G., Schmidt Søren, Poulsen Henning Friis. A discrete spherical x-ray transform of orientation distribution functions using bounding cubes // Inverse Problems. — 2009. — T. 25, № 10. — C. 105009.
51. High Resolution Orientation Distribution Function / Søren Schmidt, Nicolai Fog Gade-Nielsen и др. // Materials Science Forum. — Т. 702. — 2012. — С. 536–539.
52. Meister Ljudmila. Quaternion optimization problems in engineering // Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering. — 2001. — С. 387–412.
53. Gogberashvili M. Split quaternion analyticity and (2+1)-electrodynamics // Recent Advances in Mathematical Physics. — 2021. — С. 7.
54. Gogberashvili M. (2+1)-Maxwell equations in split quaternions // Physics. — 2022. — Т. 4, № 1. — С. 329–363.
55. Özdemir Zehra. A kinematic model of the Rytov's law in the optical fiber via split quaternions: application to electromagnetic theory // The European Physical Journal Plus. — 2022. — Т. 137, № 6. — С. 651.
56. Huang Tsung-Ming, Hsieh Han-En и др. Eigendecomposition of the discrete double-curl operator with application to fast eigensolver for three-dimensional photonic crystals // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2013. — Т. 34, № 2. — С. 369–391.

57. Chern Ruey Lin, Hsich Han En и др. Singular value decompositions for single-curl operators in three-dimensional Maxwell's equations for complex media // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. — 2015. — Т. 36, № 1. — С. 203–224.
58. Wang Gang, Jiang Tongsong и др. An efficient method for Maxwell's equations with a discrete double-curl operator in split quaternionic electromagnetics // *The European Physical Journal Plus*. — 2023. — Т. 138, № 4. — С. 341.
59. Le Bihan Nicolas, Mars Jérôme. Singular value decomposition of quaternion matrices: a new tool for vector-sensor signal processing // *Signal Processing*. — 2004. — Т. 84, № 7. — С. 1177–1199.
60. Weiss Anthony J, Friedlander Benjamin. Performance analysis of diversely polarized antenna arrays // *IEEE Transactions on signal processing*. — 1991. — Т. 39, № 7. — С. 1589–1603.
61. Nchorai Aryc, Paldi Eytan. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization // *IEEE transactions on signal processing*. — 1994. — Т. 42, № 2. — С. 376–398.
62. Li Linshan и др. Root-MUSIC-based direction-finding and polarization estimation using diversely polarized possibly colocated antennas // *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*. — 2004. — Т. 3. — С. 129–132.
63. Gong Xiaofeng, Liu Zhiwen, Xu Yougen. Quad-quaternion MUSIC for DOA estimation using electromagnetic vector sensors // *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. — 2009. — Т. 2008. — С. 1–14.
64. Rawat AS, Negi OPS. Quaternion gravi-electromagnetism // *International Journal of Theoretical Physics*. — 2012. — Т. 51. — С. 738–745.

65. Zhang Xirui, Liu Wei и др. Quaternion-valued robust adaptive beamformer for electromagnetic vector-sensor arrays with worst-case constraint // *Signal Processing*. — 2014. — Т. 104. — С. 274–283.
66. Stanton Aaron, Sacchi Mauricio. Multicomponent seismic data reconstruction using the quaternion Fourier transform and POCS // *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*. — Society of Exploration Geophysicists, 2011. — С. 1267–1272.
67. Menanno Giovanni M, Mazzotti Alfredo. Deconvolution of multicomponent seismic data by means of quaternions: Theory and preliminary results // *Geophysical Prospecting*. — 2012. — Т. 60, № 2. — С. 217–238.
68. Bahia Brcno, Sacchi Mauricio D. Quaternionic rank-reduction methods for vector-field seismic data processing // *Digital Signal Processing*. — 2019. — Т. 87. — С. 178–189.
69. Yi Cancan, Lv Yong и др. Quaternion singular spectrum analysis using convex optimization and its application to fault diagnosis of rolling bearing // *Measurement*. — 2017. — Т. 103. — С. 321–332.
70. Contreras-Hernandez Jose L, Almanza-Ojeda Dora Luz и др. Quaternion signal analysis algorithm for induction motor fault detection // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. — 2019. — Т. 66, № 11. — С. 8843–8850.
71. Ma Yanli, Cheng Junsheng и др. Symplectic quaternion singular mode decomposition with application in gear fault diagnosis // *Mechanism and Machine Theory*. — 2021. — Т. 160. — С. 104266.
72. Ma Yanli, Cheng Junsheng и др. A novel Lanczos quaternion singular spectrum analysis method and its application to bevel gear fault diagnosis with multi-

- channel signals // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2022. — Т. 168. — С. 108679.
73. Zhang Kun, Deng Yunjie и др. Quaternion empirical wavelet transform and its applications in rolling bearing fault diagnosis // *Measurement*. — 2022. — Т. 195. — С. 111179.
74. Wang Guibao, Wang Xinkuan и др. Research on ambiguity resolution algorithm by quaternion based on acoustic vector sensor // *Journal of Sensors*. — 2020. — Т. 2020. — С. 1–8.
75. Pop M-I, Cretu N. Intrinsic transfer matrix method and split quaternion formalism for multilayer media // *Wave Motion*. — 2016. — Т. 65. — С. 105–111.
76. Took Clive Cheong, Mandic Danilo P. Augmented second-order statistics of quaternion random signals // *Signal Processing*. — 2011. — Т. 91, № 2. — С. 214–224.
77. Alexiadis Dimitrios S, Daras Petros. Quaternionic signal processing techniques for automatic evaluation of dance performances from MoCap data // *IEEE Transactions on Multimedia*. — 2014. — Т. 16, № 5. — С. 1391–1406.
78. Mengüç Engin Cemal. Design of quaternion-valued second-order Volterra adaptive filters for nonlinear 3-D and 4-D signals // *Signal Processing*. — 2020. — Т. 174. — С. 107619.
79. Zou Cuiming, Kou Kit Ian и др. Quaternion block sparse representation for signal recovery and classification // *Signal Processing*. — 2021. — Т. 179. — С. 107849.
80. Chen Junren, Ng Michael K. Phase retrieval of quaternion signal via Wirtinger flow // *IEEE Transactions on Signal Processing*. — 2023.

81. Bogatyřev Andrei Borisovich. Projective view at optimization problem for multiband filter // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2021. — T. 149, № 7. — С. 3021–3035.
82. Bogatyřev A.B., Grigor'ev O.A. Conformal mapping of rectangular heptagons II // Computational Methods and Function Theory. — 2018. — Т. 18. — С. 221–238.
83. Sangwine Stephen John. Fourier transforms of colour images using quaternion or hypercomplex, numbers // Electronics Letters. — 1996. — Т. 32, № 21. — С. 1979–1980.
84. Pcnenko Alexey, Mukatova Zhadyra. Inverse modeling of diffusion-reaction processes with image-type measurement data // 2018 11th International Multiconference Bioinformatics of Genome Regulation and Structure\Systems Biology (BGRS\SB) / IEEE. — 2018. — С. 39–43.
85. Pcnenko AV, Mukatova ZS, Blem AA. Numerical solution of the inverse source problems for the advection-diffusion-reaction models with image-type measurement data // AIP Conference Proceedings / AIP Publishing. — Т. 2027. — 2018.
86. Penenko Alexey. Convergence analysis of the adjoint ensemble method in inverse source problems for advection-diffusion-reaction models with image-type measurements // Inverse Probl. Imaging. — 2020. — Т. 14, № 5. — С. 757–782.
87. Пененко АВ, Гочаков АВ. Анализ параллельного ускорения алгоритма идентификации источников на основе ансамблей решений сопряженных уравнений // Марчуковские научные чтения. — 2020. — № 2020. — С. 111–111.

88. Pcnenko Alexcy, Gochakov Alexander. Parallel speedup analysis of an adjoint ensemble-based source identification algorithm // *Journal of Physics: Conference Series* / IOP Publishing. — T. 1715. — 2021. — C. 012072.
89. Chung Kuo-Liang, Shen Chao-Hui, Chang Lung-Chun. A novel SVD-and VQ-based image hiding scheme // *Pattern Recognition Letters*. — 2001. — T. 22, № 9. — C. 1051–1058.
90. Dhawan Sachin. A review of image compression and comparison of its algorithms // *International Journal of Electronics & Communication Technology*. — 2011. — T. 2, № 1. — C. 22–26.
91. Kou Weidong. *Digital image compression: algorithms and standards*. — Springer Science & Business Media, 2013. — T. 333.
92. ZainEldin Hanaa, Elhosseini Mostafa A, Ali Hesham A. Image compression algorithms in wireless multimedia sensor networks: A survey // *Ain Shams engineering journal*. — 2015. — T. 6, № 2. — C. 481–490.
93. Liu Ruizhen, Tan Tieniu. An SVD-based watermarking scheme for protecting rightful ownership // *IEEE transactions on multimedia*. — 2002. — T. 4, № 1. — C. 121–128.
94. Chung Kuo-Liang, Yang Wei-Ning и др. On SVD-based watermarking algorithm // *Applied Mathematics and Computation*. — 2007. — T. 188, № 1. — C. 54–57.
95. Maćkiewicz Andrzej, Ratajczak Waldemar. Principal components analysis (PCA) // *Computers & Geosciences*. — 1993. — T. 19, № 3. — C. 303–342.
96. Kurita Takio. *Principal component analysis (PCA)* // *Computer Vision: A Reference Guide*. — 2019. — C. 1–4.

97. Li Ying, Wei Musheng и др. A fast structure-preserving method for computing the singular value decomposition of quaternion matrices // *Applied Mathematics and Computation*. — 2014. — Т. 235. — С. 157–167.
98. Wei Musheng, Ying Li и др. *Quaternion matrix computations*. — Nova Science Publishers, 2018.
99. Zhang Mingcui, Ding Wenxv и др. Color image watermarking based on a fast structure-preserving algorithm of quaternion singular value decomposition // *Signal Processing*. — 2023. — Т. 208. — С. 108971.
100. Zhang Dong, Jiang Tongsong и др. A complex structure-preserving algorithm for computing the singular value decomposition of a quaternion matrix and its applications // *Numerical Algorithms*. — 2023. — С. 1–17.
101. Ahumada Jr Albert J, Peterson Heidi A. Luminance-model-based DCT quantization for color image compression // *Human vision, visual processing, and digital display III / SPIE*. — Т. 1666. — 1992. — С. 365–374.
102. Wu Peng, Xie Kai и др. A new preprocessing algorithm used in color image compression // *Advances in Future Computer and Control Systems: Volume 1 / Springer*. — 2012. — С. 465–471.
103. Li Ying, Wei Musheng и др. Comparison of two SVD-based color image compression schemes // *PloS One*. — 2017. — Т. 12, № 3. — С. c0172746.
104. Le Bihan Nicolas, Sangwine Stephen J. Quaternion principal component analysis of color images // *Proceedings 2003 International Conference on Image Processing (Cat. No. 03CH37429) / IEEE*. — Т. 1. — 2003. — С. I-809.
105. Xu Xingpeng, Guo Zhenhua. Multispectral palmprint recognition using quaternion principal component analysis // *2010 International Workshop on*

- Emerging Techniques and Challenges for Hand-Based Biometrics / IEEE. — 2010. — С. 1–5.
106. Zeng Rui, Wu Jiasong и др. Color image classification via quaternion principal component analysis network // *Neurocomputing*. — 2016. — Т. 216. — С. 416–428.
107. Li Ying, Wei Musheng и др. A new double color image watermarking algorithm based on the SVD and Arnold scrambling // *Journal of Applied Mathematics*. — 2016. — Т. 2016.
108. Liu Xilin, Wu Yongfei и др. Color image watermarking based on singular value decomposition and generalized regression neural network // *Multimedia Tools and Applications*. — 2022. — Т. 81, № 22. — С. 32073–32091.
109. Mohammed Abdulhakeem O, Hussein Haval I и др. A blind and robust color image watermarking scheme based on DCT and DWT domains // *Multimedia Tools and Applications*. — 2023. — С. 1–27.
110. Chen Siyu, Su Qingtang и др. An improved blind watermarking method facing dual color images based on Hadamard transform // *Soft Computing*. — 2023. — С. 1–22.
111. Saritas Omer Faruk, Ozturk Serkan. A blind CT and DCT based robust color image watermarking method // *Multimedia Tools and Applications*. — 2023. — Т. 82, № 10. — С. 15475–15491.
112. Su Qingtang, Niu Yugang и др. A blind dual color images watermarking based on singular value decomposition // *Applied Mathematics and Computation*. — 2013. — Т. 219, № 16. — С. 8455–8466.
113. Chen Yong, Jia Zhigang и др. Robust dual-color watermarking based on

- quaternion singular value decomposition // *IEEE Access*. — 2020. — Т. 8. — С. 30628–30642.
114. Chen Yong, Jia Zhigang и др. A new structure-preserving quaternion QR decomposition method for color image blind watermarking // *Signal Processing*. — 2021. — Т. 185. — С. 108088.
115. Berry Michael W, Brownc Murray и др. Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization // *Computational Statistics & Data Analysis*. — 2007. — Т. 52, № 1. — С. 155–173.
116. Singh Satish Kumar, Kumar Shishir. A framework to design novel SVD based color image compression // *2009 Third UKSim European Symposium on Computer Modeling and Simulation / IEEE*. — 2009. — С. 235–240.
117. Celebi M Emre. Improving the performance of k-means for color quantization // *Image and Vision Computing*. — 2011. — Т. 29, № 4. — С. 260–271.
118. Sangwine SJ, Bihan NL. Quaternion toolbox for matlab // <http://qtfm.sourceforge.net/>. — 2013.
119. Pei Soo-Chang, Chang Ja-Han, Ding Jian-Jiun. Quaternion matrix singular value decomposition and its applications for color image processing // *Proceedings 2003 International Conference on Image Processing (Cat. No. 03CH37429) / IEEE*. — Т. 1. — 2003. — С. I-805.
120. Capizzi P, De Luca L, Vitale M. Polarization analysis on three-component seismic data // *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*. — 2003. — Т. 44, № 3-4. — С. 329–335.
121. Zhao Xuezhi, Ye Bangyan. Similarity of signal processing effect between Hankel matrix-based SVD and wavelet transform and its mechanism analysis //

- Mechanical Systems and Signal Processing. — 2009. — T. 23, № 4. — С. 1062–1075.
122. Zhao Ming, Jia Xiaodong. A novel strategy for signal denoising using reweighted SVD and its applications to weak fault feature enhancement of rotating machinery // Mechanical Systems and Signal Processing. — 2017. — Т. 94. — С. 129–147.
123. Xu Dongpo, Mandic Danilo P. The theory of quaternion matrix derivatives // IEEE Transactions on Signal Processing. — 2015. — Т. 63, № 6. — С. 1543–1556.
124. Flamant Julien, Miron Sebastian, Brie David. Quaternion non-negative matrix factorization: Definition, uniqueness, and algorithm // IEEE Transactions on Signal Processing. — 2020. — Т. 68. — С. 1870–1883.
125. Lu Yuwu, Cui Jinrong, Fang Xiaozhao. Enhancing sparsity via full rank decomposition for robust face recognition // Neural Computing and Applications. — 2014. — Т. 25. — С. 1043–1052.
126. Jiang Meiyong, Jiang Beiyan и др. Internal model control for structured rank deficient system based on full rank decomposition // Cluster Computing. — 2017. — Т. 20. — С. 13–24.
127. Sheng Xingping, Chen Guoliang. Full-rank representation of generalized inverse $AT,S(2)$ and its application // Computers & Mathematics with Applications. — 2007. — Т. 54, № 11-12. — С. 1422–1430.
128. Stanimirović Predrag S, Cvetković-Ilić Dragana S и др. Full-rank representations of $\{2,4\},\{2,3\}$ -inverses and successive matrix squaring algorithm // Applied Mathematics and Computation. — 2011. — Т. 217, № 22. — С. 9358–9367.

129. Stanimirović Predrag S, Pappas Dimitrios и др. Full-rank representations of outer inverses based on the QR decomposition // *Applied Mathematics and Computation*. — 2012. — Т. 218, № 20. — С. 10321–10333.
130. Stanimirović Predrag S, Pappas Dimitrios и др. Symbolic computation of $AT, S(2)$ -inverses using QDR factorization // *Linear Algebra and Its Applications*. — 2012. — Т. 437, № 6. — С. 1317–1331.
131. Aldhafeeri Nahier, Pappas Dimitrios и др. Representations of generalized inverses via full-rank QDR decomposition // *Numerical Algorithms*. — 2021. — Т. 86. — С. 1327–1337.
132. Voight John. Quaternion algebras. — Springer Nature, 2021.
133. Wang Gang, Zhang Dong и др. A complex structure-preserving algorithm for the full rank decomposition of quaternion matrices and its applications // *Numerical Algorithms*. — 2022. — Т. 91, № 4. — С. 1461–1481.
134. Libor Spacck's Facial Images Databases // <https://cmp.fcll.cvut.cz/spacclib/faces/>.
135. FEI Face Database // <https://fei.edu.br/cet/facedatabase.html>.
136. Jiang Tongsong, Jiang Ziwu, Zhang Zhaozhong. Algebraic techniques for diagonalization of a split quaternion matrix in split quaternionic mechanics // *Journal of Mathematical Physics*. — 2015. — Т. 56, № 8.
137. Jiang Tongsong, Jiang Ziwu, Zhang Zhaozhong. Algebraic techniques for eigenvalues and eigenvectors of a split quaternion matrix in split quaternionic mechanics // *Computer Physics Communications*. — 2018. — Т. 229. — С. 1–7.
138. Guo Zhenwei, Jiang Tongsong и др. A novel algebraic approach for the Schrödinger equation in split quaternionic mechanics // *Applied Mathematics Letters*. — 2023. — Т. 137. — С. 108485.

139. Ali Istkhar. A note on quaternion matrices and split quaternion matrix pencils // *Journal of Applied Mathematics and Computing*. — 2018. — T. 58. — C. 323–334.
140. Erdoğdu Melek, Özdemir Mustafa. On eigenvalues of split quaternion matrices // *Advances in Applied Clifford Algebras*. — 2013. — T. 23. — C. 615–623.
141. Alpay Daniel, Luna-Elizarrarás María E и др. Gleason's problem, rational functions and spaces of left-regular functions: the split-quaternion setting // *Israel Journal of Mathematics*. — 2018. — T. 226. — C. 319–349.
142. Golub Gene H, Van Loan Charles F. *Matrix computations*. — JHU Press, 2013.
143. Jennings Alan, McKcown John J. *Matrix computation* // (No Title). — 1992.
144. Liu Xin, Zhang Yang. Least squares solutions to split quaternion matrix equation $\Lambda X A = B$ // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2020. — T. 43, № 5. — C. 2189–2201.
145. Ling Si-Tao, Li Yi-Ding и др. Joint diagonalization for a pair of Hermitian quaternion matrices and applications to color face recognition // *Signal Processing*. — 2022. — T. 198. — C. 108560.
146. Kang Qiong, Peng Lingling. An extended PCA and LDA for color face recognition // *2012 International Conference on Information Security and Intelligent Control / IEEE*. — 2012. — C. 345–348.
147. Li Ming, Yuan Baozong. 2D-LDA: A statistical linear discriminant analysis for image matrix // *Pattern Recognition Letters*. — 2005. — T. 26, № 5. — C. 527–532.

148. Ab-lamowicz Rafał. The Moore–Penrose inverse and singular value decomposition of split quaternions // *Advances in Applied Clifford Algebras*. — 2020. — T. 30. — C. 1–20.
149. Zhang Zhaozhong, Jiang Ziwu, Jiang Tongsong. Algebraic methods for least squares problem in split quaternionic mechanics // *Applied Mathematics and Computation*. — 2015. — T. 269. — C. 618–625.
150. Jiang Tongsong, Zhang Zhaozhong, Jiang Ziwu. Algebraic techniques for Schrödinger equations in split quaternionic mechanics // *Computers & Mathematics with Applications*. — 2018. — T. 75, № 7. — C. 2217–2222.
151. Wang Gang, Jiang Tongsong и др. A complex structure-preserving algorithm for split quaternion matrix LDU decomposition in split quaternion mechanics // *Calcolo*. — 2021. — T. 58. — C. 1–15.
152. Alagöz Yasemin, Oral Khürsat Hakan, Yüce Salim. Split quaternion matrices // *Miskolc Mathematical Notes*. — 2012. — T. 13, № 2. — C. 223–232.
153. Cao Wensheng, Chang Zhenhu. The Moore–Penrose inverses of split quaternions // *Linear and Multilinear Algebra*. — 2022. — T. 70, № 9. — C. 1631–1647.
154. Wang Gang, Jiang Tongsong и др. On singular value decomposition for split quaternion matrices and applications in split quaternionic mechanics // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2024. — T. 436. — C. 115447.
155. Wang Gang, Jiang Tongsong и др. An efficient method for the split quaternion equality constrained least squares problem in split quaternionic mechanics // *Computational and Applied Mathematics*. — 2023. — T. 42, № 6. — C. 258.
156. Arnold Vladimir Igorevich, Avez André. Ergodic problems of classical mechanics. — 1968.

Публикации автора

- [A1] **G. Wang**, T. Jiang, V. I. Vasil'ev, Z. Guo *On singular value decomposition for split quaternion matrices and applications in split quaternionic mechanics* // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2024, 436: 1-12.
- [A2] **G. Wang** *A real structure-preserving algorithm for the low-rank decomposition of pure imaginary quaternion matrices and its applications in signal processing* // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, 2023, 11(4): 117-129.
- [A3] **G. Wang**, T. Jiang, D. Zhang, V. I. Vasil'ev *An efficient method for the split quaternion equality constrained least squares problem in split quaternionic mechanics* // Computational and Applied Mathematics, 2023, 42(258): 1-13.
- [A4] **G. Wang**, T. Jiang, V. I. Vasil'ev, Z. Guo *An efficient method for Maxwell's equations with a discrete double-curl operator in split quaternionic electromagnetics* // The European Physical Journal Plus, 2023, 341(138): 1-6.
- [A5] **G. Wang**, D. Zhang, V. I. Vasil'ev, T. Jiang *A complex structure-preserving algorithm for the full rank decomposition of quaternion matrices and its applications* // Numerical Algorithms, 2022, 91(4): 1461-1481.
- [A6] **G. Wang**, T. Jiang, Z. Guo, D. Zhang *A complex structure-preserving algorithm for split quaternion matrix LDU decomposition in split quaternion mechanics* // Calcolo, 2021, 58(34): 1-15.
- [A7] **G. Wang**, D. Zhang, Z. Guo, T. Jiang *Cramer's rule over quaternions and split quaternions: A unified algebraic approach in quaternionic and split quaternionic mechanics* // Journal of Algebra and Its Applications, 2021, 20(5): 2150080.
- [A8] T. Jiang, **G. Wang**, Z. Guo, D. Zhang *Algebraic algorithms for a class of Schrödinger equations in split quaternionic mechanics* // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2024, 1-11.
- [A9] D. Zhang, T. Jiang, **G. Wang**, V.I. Vasil'ev *On singular value decomposition and generalized inverse of a commutative quaternion matrix and applications* // Applied Mathematics and Computation, 2024, 460: 128291.
- [A10] D. Zhang, T. Jiang, C. Jiang, **G. Wang** *A complex structure-preserving*

algorithm for computing the singular value decomposition of a quaternion matrix and its applications // Numerical Algorithms, 2024, 95(1): 267-283.

[A11] D. Zhang, T. Jiang, **G. Wang**, V. I. Vasil'ev *Two novel numerical methods for the diagonalisation of a reduced biquaternion matrix in the reduced biquaternionic algebra* // Linear and Multilinear Algebra, 2024, 72(1): 139-152.

[A12] Z. Guo, T. Jiang, **G. Wang**, V.I. Vasil'ev *Algebraic algorithms for eigenproblems of a reduced biquaternion matrix and applications* // Applied Mathematics and Computation, 2024, 463: 128358.

[A13] T. Jiang, D. Zhang, Z. Guo, **G. Wang**, V.I. Vasil'ev *Algebraic techniques for canonical forms and applications in split quaternionic mechanics* // Journal of Mathematics, 2023, 2023: 4599585.

[A14] D. Zhang, T. Jiang, **G. Wang**, V. I. Vasil'ev *An efficient method for the total least squares problem in reduced biquaternionic electromagnetics* // The European Physical Journal Plus. 2023, 138(9): 826.

[A15] D. Zhang, **G. Wang**, V. I. Vasil'ev, T. Jiang *Algebraic methods for equality constrained least squares problems in commutative quaternionic theory* // Mathematical Methods in the Applied Science. 2023, 46(2):1699–1708.

[A16] Z. Guo, T. Jiang, V. I. Vasil'ev, **G. Wang** *A novel algebraic approach for the Schrodinger equation in split quaternionic mechanics* // Applied Mathematics Letters, 2023, 137: 108485.

[A17] Z. Guo, T. Jiang, V.I. Vasil'ev, **G. Wang** *Complex structure-preserving method for Schrödinger equations in quaternionic quantum mechanics* // Numerical Algorithms, 2023: 1-17.

[A18] Z. Guo, T. Jiang, C. Jiang, **G. Wang** *Algebraic techniques for eigenvalues and eigenvectors of a nectarine matrix in nectarine algebra* // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2023, 46(4): 4751-4762.

[A19] **Ван Г.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Схема цветного водяного знака на основе разложения по сингулярному значению разделенных кватернионных матриц», 2024.