Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова»

На правах рукописи

Калачикова Уйгулаана Семеновна

Многомасштабные вычислительные технологии для моделирования волновых процессов в неоднородных средах

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
PhD, профессор
Ялчин Эфендиев

Якутск 2022

Содержание

Введение **5**

1 Численное решение волновых уравнений в неоднородных средах **20**

1.1 Численное моделирование упругих волн разрывным методом Галеркина в неоднородных средах 21

1.1.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке . . . 21

1.1.2 Условие на трещине 22

1.1.3 Поглощающее граничное условие 25

1.1.4 Численные результаты 26

1.2 Численное усреднение распространения волн в трещиноватых средах 30

1.2.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке . . . 31

1.2.2 Аналитические эффективные свойства среды 32

1.2.3 Численный расчет эффективных свойств 33

1.2.4 Численные результаты 35

1.3 Многомасштабный метод конечных элементов для задачи рассеяния в неоднородной области 38

1.3.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке . . . 39

1.3.2 Аппроксимация на грубой сетке с использованием ММКЭ 44

1.3.3 Численные результаты 46

1.4 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для распространения упругих волн в частотной области 49

1.4.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке . . . 50

1.4.2 Многомасштабные методы на грубой сетке 52

1.4.3 Численные результаты 57

1.5 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задачи рассеяния в неоднородной области 63
1.5.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке . . . 64
1.5.2 Многомасштабная аппроксимация с использованием ОММКЭ 64
1.5.3 Численные результаты 71
1.6 Выводы 76

2 Граничный многомасштабный метод для задач в перфорированных средах 81

2.1 Обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов для задачи рассеяния в перфорированной области . . . 82
2.1.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке . . . 84
2.1.2 Многомасштабная аппроксимация на грубой сетке 85
2.1.3 Численные результаты 92
2.2 Обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина для уравнения конвекции-диффузии в перфорированных средах . 98
2.2.1 Постановка задачи и конечно-элементная аппроксимация 99
2.2.2 Многомасштабная аппроксимация на грубой сетке 103
2.2.3 Численные результаты 113
2.3 Выводы 130

3 Комплекс программ для исследования многомасштабных методов для волновых задач 132

3.1 Вычислительная библиотека для моделирования волновых процессов с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина 132
3.1.1 Методология 133
3.1.2 Техническое и программное решение 134

3.2 Вычислительная библиотека для моделирования уравнения Гельмгольца в средах с неоднородными включениями с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов . . . 139
3.2.1 Методология . . . 139
3.2.2 Техническое и программное решение . . . 140
3.3 Выводы . . . 144

Заключение **146**

Литература **147**

Приложение 1 **165**

Приложение 2 **166**

Введение

Волновые процессы описываются дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа, описывающим колебательные процессы в сплошных средах: акустика в газах и жидкостях, упругие волны в твердых телах, электромагнитные волны. Различные формы волнового уравнения широко используются в геофизике [1, 2]. Также волновые процессы используются в других областях теоретической физики, например при описании гравитационных волн. В математической физике волновое уравнение относится к уравнениям гиперболического типа [3, 4], а уравнение Гельмгольца – к уравнениям эллиптического типа, которое представляет собой не зависящую от времени форму волнового уравнения. Уравнение Гельмгольца представляет собой распространение акустических и электромагнитных волн – двух явлений, имеющих большое значение для решения многих инженерных задач.

Особенностью вычисления волновых полей в геофизике является необходимость моделировать распространение волн в неограниченном пространстве или полупространстве со свободной дневной поверхностью [5]. Естественно, что на практике приходится искусственно ограничивать расчетную область путем задания специальных неотражающих граничных условий на ее границах. Это приводит к тому, что матрицы СЛАУ, аппроксимирующих дифференциальную задачу, оказываются несимметричными. Еще одной особенностью является очень большая размерность задач, что сильно ограничивает эффективность прямых методов решения СЛАУ, так как требования к объему оперативной памяти и количество вычислений для них быстро растут. Даже при реализации на современных высокопроизводительных вычислительных системах, существующие на данный момент прямые методы пока еще слишком затратны как по времени, так и по вычислительным ресурсам. Несмотря на существенный прогресс, достигнутый в развитии прямых методов за последние годы, указанная

проблема еще далека от разрешения. Отметим, что вычисления становятся еще сложнее при переходе к более реалистичным математическим моделям, описывающим процесс распространения волн в среде, например, для уравнений динамической теории упругости, особенно с введением анизотропии и поглощения [6, 7].

При рассмотрении многомерных волновых уравнений в неоднородных средах необходимо использовать различные численные методы [8, 9]. Из-за колебательного характера волновых явлений численные аппроксимации волновых уравнений являются вычислительно сложными. Аппроксимация волновых задач с допустимой точностью требует использования очень мелкой пространственной дискретизации [10]. Для стандартных численных методов [11–13], таких как метод конечных разностей, метод конечных объемов и метод конечных элементов низкого порядка, необходимо сеточно разрешать длину волны посредством десяти ячеек расчетной сетки [14]. В частности, при моделировании задач с высокими частотами требования, налагаемые на расчетные сетки, приводят к задачам с очень большой размерностью, т.е. с высокой вычислительной сложностью.

Классический метод конечных элементов позволяет использовать неструктурированные сетки и проводить расчет в сложных геометрических областях. Данная особенность делает метод чрезвычайно мощным инструментом в различных областях физики и техники при решении различных прикладных задач. Основная трудность классического метода Галеркина, при использовании его для решения волновых уравнений, заключается в том, что аппроксимация уравнения по времени обычно происходит с использованием явных разностных аппроксимаций, что приводит к необходимости обращения матрицы масс. Известно, что в классическом методе Галеркина, матрица масс не обладает блочной структурой, что приводит к плотной обратной матрице. Данная особенность метода существенно усложняет процесс эффективного численного реше-

ния. Предпочтительным для аппроксимации методом для волновых уравнений является разрывный метод Галеркина [15–18]. Данный метод позволяет построить блочно-диагональную матрицу масс, которая может быть легко обращена и позволяет построить эффективную вычислительную реализацию. Моделирование распространения волн в упругой среде с использованием разрывного метода Галеркина были исследованы в работах [19–22]. Классически при решении волновых уравнений используются методы с использованием аппроксимационных полиномов высокого порядка [23]. Использование полиномов высокого порядка позволяет использовать более грубые сетки. Разрывный метод Галеркина позволяет также использовать полиномы высокого порядка при аппроксимации задачи, при этом блочность матрицы масс не нарушается.

Другой особенностью рассматриваемых задач является наличие неоднородностей в вычислительной области [19, 24]. При этом коэффициенты уравнения могут быть неоднородными, но также в моделируемой среде могут содержаться разномасштабные трещины, перфорации и включения , которые приводят к разрыву решений при их аппроксимации с использованием модели линейного скольжения (МЛС) [25]. МЛС используется для моделирования влияния трещины на распределение сейсмического поля, где компоненты напряжения пропорциональны смещению [26, 27]. МЛС требует построения мелкой сетки, которая разрешает все интерфейсные условия трещин на уровне сетки, что приводит к очень большой системе уравнений. Данное условие на трещине (интерфейсное условие) естественным образом аппроксимируется с использованием разрывного метода Галеркина и учитывается при построении вариационной постановки задачи. Наличие неоднородностей и трещин в грунте существенно сказывается на волновых процессах и их необходимо учитывать при построении математической модели. Также, в качестве неоднородностей можно рассматривать задачи в областях с перфорациями и включениями, которые имеют многомасштабный характер. Методы решения этих задач требуют вы-

сокого разрешения вычислительной сетки. В частности, дискретизация должна учитывать границы перфораций. Это приводит к мелкомасштабным задачам с большим количеством степеней свободы, решение которых может быть очень затратным. Когда перфорированные области имеют некоторое разделение масштабов, существует множество работ, которые включают работы по усреднению и асимптотическому расширению в периодических перфорированных областях [28, 29].

Существуют много методов понижения порядка, которые решаются на грубой сетке, например, численное усреднение. Численное усреднение является незаменимым математическим инструментом в обеспечении понимания многомасштабной природы задач пористой среды, описывая параметры грубого масштаба как функции мелкомасштабных изменений. В методе численного усреднения эффективные свойства среды изменяются в грубом масштабе, подходящем для эффективных вычислений, при сохранении определенных крупномасштабных свойств среды мелкомасштабного решения [30]. Даже если некоторые идеи по усреднению восходят к более ранним временам, ранние разработки 1970-х годов имеют фундаментальное значение. Это очень хорошо представлено в тексте 1978 г. Бенсуссаном, Лионсом и Папаниколау [31], который разрабатывает систематическую основу для асимптотического анализа. Влиятельными современными достижениями являются многомасштабный анализ Келлера [32], методы усреднения Бабушки [33], Бахвалова и Панасенко [34] и анализ Мюрата и Тартара [35]. Недостатками данного метода являются то, что в них отсутствуют систематические стратегии обогащения, позволяющие решать проблемы с более сложными структурами.

Одним из первых многомасштабных методов считается метод конечных суперэлементов (МКСЭ), который был предложен в 1976 году Л.Г. Страховской и Р.П. Федоренко в [36, 37] и использовался для решения сложных задач диффузии, теории упругости, кинетики ядерных реакторов и т.д. Метод основан

на разбиении всей области моделирования на специальные конечные носители – суперэлементы. Основное отличие МСКЭ от МКЭ состоит в том, что базисные функции строятся как решение исходного уравнения со специальными краевыми условиями. Базисные функции учитывают мелкомасштабные неоднородности внутри ячейки, которые играют важную роль в рассчитываемых процессах. В работах [38, 39] эффективность МКСЭ подтверждена примерами решения разнообразных физических задач.

Многомасштабные методы получили наибольшее распространение в 1997 году после выхода статьи [40], где был предложен многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ). Идея ММКЭ состоит в том, чтобы учесть информацию на мелкой сетке с помощью базисных функций, построенных в элементах, размеры которых намного больше, чем размеры элементов мелкой сетки [41–43]. Это достигается путем определения базисных функций конечных элементов однородного эллиптического уравнения. Построение базисных функций полностью отделено от элемента к элементу; таким образом, этот метод является совершенно параллельным и, естественно, адаптирован для компьютеров с массовым параллелизмом. По той же причине этот метод имеет возможность обрабатывать чрезвычайно большие степени свободы для сильно неоднородных сред, которые трудно реализовать обычными методами конечных элементов или конечно-разностными методами.

В рассмотренных выше многомасштабных методах для учета влияния неоднородностей строится только одна базисная функция для каждой локальной грубой области. Однако для более сложных многомасштабных задач каждая локальная грубая область содержит неоднородные включения с высокой проницаемостью, и для представления локального пространства решений требуется несколько многомасштабных базисных функций. Поэтому позже был разработан обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ), который обеспечивает основу, позволяющую систематически обогащать

многомасштабные пространства и учитывать мелкомасштабную информацию о неоднородностях для построения этих пространств [44–49]. Основная идея построения многомасштабных базисных функций состоит в том, чтобы спроектировать соответствующие вспомогательные (снэпшот-моментальные снимки) пространства и определить соответствующую локальную спектральную задачу для выбора доминантных режимов во вспомогательном пространстве. Эти многомасштабные базисные функции могут улавливать влияние трещин и других неоднородностей на грубой сетке и существенно уменьшать количество неизвестных в расчетах. В [50] было предложено несколько общих стратегий для построения локальных спектральных процедур. Мы рассматриваем сейсмические волны в трещиноватой среде и строим многомасштабные базисные функции для моделирования на грубой сетке в двумерной формулировке на основе следующих работ [24, 51–55]. Построение многомасштабных базисных функций для волновых уравнений сложнее в отличие от уравнения диффузии. Это связано с более сложным физическим процессом, в котором присутствуют колебательные эффекты. Чтобы применить ОММКЭ для задач рассеяния в перфорированных областях, нужен новый способ построения вспомогательного (снэпшот) пространства и локальной спектральной задачи. С этой целью представляем обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов (ОГММКЭ) для решения распространения волн в перфорированной области, который был мотивирован работами [56, 57]. Генерируем локальное вспомогательное пространство, используя гармонические расширения правильно подобранного большого набора граничных условий для каждой грубой границы. Для выбора доминантных мод используются локальные спектральные задачи. Подобный алгоритм применяем для численного моделирования уравнения конвекции-диффузии в перфорированнных средах. Исследуется несколько типов построения многомасштабных пространств на основе выбора краевых условий на границах локальных областей.

Существует множество вычислительных пакетов для численного моделирования волновых задач и задач конвекции-диффузии, одним из которых является вычислительная платформа FEniCS [58]. FEniCS – это платформа для автоматизированных решений дифференциальных уравнений с частными производными на основе метода конечных элементов. FEniCS был создан в 2003 году и разработан в сотрудничестве между исследователями из ряда университетов и исследовательских институтов по всему миру. Пользователь должен указать в программе вариационную форму конечных элементов с соответствующей геометрией и информацией о сетке. Программное обеспечение FEniCS выполняет расчеты и сборку матрицы жесткости элементов для получения глобальной матрицы жесткости. Еще одним преимуществом FEniCS является относительная легкость расширения двумерного анализа до трехмерного анализа. FEniCS состоит из программных компонентов, которые вместе образуют программное обеспечение: DOLFIN, FFC, FIAT, UFL, и другие. DOLFIN – это высокопроизводительный вычислительный сервер на C++ для FEniCS. DOLFIN реализует структуры данных, такие как сетки, функциональные пространства и функции, алгоритмы с интенсивными вычислениями, такие как сборка конечных элементов и уточнение сетки, а также интерфейсы с решателями линейной алгебры и структурами данных, такими как PETSc. DOLFIN также реализует среду решения проблем FEniCS как на C++, так и на Python. FFC – это механизм генерации кода FEniCS (компилятор форм), отвечающий за генерацию эффективного кода C++ из высокоуровневых математических абстракций. FIAT – это конечный элемент системы FEniCS, отвечающий за создание базисных функций конечных элементов, UFL реализует абстрактный математический язык, с помощью которого пользователи могут выражать вариационные задачи. Для построения геометрической области используется программа gmsh [59]. Gmsh является генератором сеток конечных элементов, разработанный Кристофом Геузеном и Жаном-Франсуа Ремаклем. Выпущенная под Стандартной общественной ли-

цензией GNU, Gmsh является свободным программным обеспечением. Его цель разработки – предоставить быстрый, легкий и удобный инструмент для построения сеток с параметрическим вводом и расширенными возможностями визуализации. Gmsh построен на четырех модулях: геометрии, сетке, решателе и постобработке. Спецификация любого ввода в эти модули выполняется либо в интерактивном режиме с использованием графического пользовательского интерфейса, в текстовых файлах ASCII с использованием собственного языка скриптов Gmsh (.geo файлы), либо с использованием интерфейса прикладного программирования (API) C++, C, Python или Julia. Визуализация полученных результатов происходит с использованием программы Paraview [60]. ParaView – это многоплатформенное приложение для анализа и визуализации данных с открытым исходным кодом. В этой программе пользователи могут быстро создавать визуализации для анализа своих данных с использованием качественных и количественных методов. Исследование данных может выполняться в интерактивном режиме в 3D или программно с использованием возможностей пакетной обработки ParaView. ParaView был разработан для анализа чрезвычайно больших наборов данных с использованием вычислительных ресурсов с распределенной памятью. Его можно запускать на суперкомпьютерах для анализа наборов данных в петафлопсе, а также на портативных компьютерах для небольших данных.

Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов и вычислительная реализация методов понижения порядка для волнового уравнения в неоднородной области. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи исследования:

- Разработка алгоритма метода усреднения для решения задачи Гельмгольца в неоднородной области;
- Разработка многомасштабного метода конечных элементов (ММКЭ) для решения задачи Гельмгольца в неоднородной области;

- Разработка обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (ОММКЭ) с разрывными и непрерывными базисными функциями для распространения упругих волн;
- Разработка обобщенного граничного многомасштабного метода конечных элементов (ОГММКЭ) для задачи рассеяния в перфорированной области.
- Разработка обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (ОММКЭ) для уравнения конвекции-диффузии в перфорированной области.

Научная новизна и практическая значимость. Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

- С помощью численного метода усреднения получено решение задачи Гельмгольца в неоднородной области;
- Проведено моделирование задачи Гельмгольца в неоднородной области многомасштабным методом конечных элементов;
- Реализован алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов разрывного метода Галеркина и непрерывного метода Галеркина для решения задачи распространения упругих волн в трещиноватых средах;
- Разработан обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов для задачи рассеяния в перфорированной области.
- Представлен обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина с разными типами построения базисных функций для уравнения конвекции-диффузии в перфорированной области.

Проведённые численные расчёты имеют практическое значение в моделировании волновых процессов в неоднородных средах.

Методология и методы исследования. В данной работе для решения задач Гельмгольца применялись следующие методы: метод конечных элементов, разрывный метод Галеркина, модель линейного скольжения, метод численного

усреднения, многомасштабный метод конечных элементов, обобщённый многомасштабный метод конечных элементов и обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов.

Положения выносимые на защиту:

- Численное усреднение волнового уравнения в неоднородных средах;
- Многомасштабный метод конечных элементов для задачи Гельмгольца в неоднородных средах;
- Обобщённый многомасштабный метод конечных элементов непрерывным и разрывным методом Галеркина для распространения волн в трещиноватых средах;
- Алгоритм обобщенного граничного многомасштабного метода конечных элементов для задачи рассеяния в перфорированных средах.
- Обобщённый многомасштабный метод разрывного Галеркина для задачи конвекции-диффузии в перфорированной области.

Обоснованность и достоверность результатов подтверждена вычислительными экспериментами численной реализации математической моделей волновых процессов, решении модельных задач волновых процессов, сравнении полученных результатов с эталонным решением и публикациями в рецензируемых журналах из списка ВАК, Web of Science, Scopus, а также свидетельствами о регистрации ПО.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", зал конференции научной библиотеки СВФУ, Учебно-лабораторный корпус (УЛК), 30.07.2017 - 04.08.2017;
- The Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, г. Албена, Болгария, 20.06.2018 - 25.06.2018;
- The Tenth Jubilee Conference of the Euro-American Consortium for

Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, г. Лозенец, Болгария, 11.06.2018 - 18.06.2018;

- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 08.08.2018 - 10.08.2018;
- II Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", 2018 ИВМ РАН, ул. Губкина, д. 8, 9 этаж, г. Москва, 15.08.2018 - 17.08.2018;
- IV Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования ул. Губкина, 8, г. Москва, 19.05.2019 - 21.05.2019;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 24.05.2019 - 25.05.2019;
- III Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", Дальневосточный федеральный университет, Остров Русский, Владивосток, 07.10.2019 - 11.10.2019;
- Применение цифровых технологий в промышленности, бизнесе и здравоохранении Республика Саха, СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, 58, г. Якутск, 23.12.2019 - 25.12.2019;
- IV Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Сочи, 5 корпус Екатеринский квартал, 08.09.2020 - 13.09.2020;
- Online international conference «Multiscale and high-performance computing for multiphysical problems», СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, Россия, 7 декабря 2020.
- Международная конференция «Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные», СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск,

Россия, 18-25 июля 2021.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 11 научных работ - в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК (ВАК, Scopus, Web of Science) [61–69], в т.ч. 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [70, 71].

Личный вклад автора. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [61–64, 66, 67, 69] им разработан и реализован вычислительный алгоритм, проведены расчеты и проведён анализ результатов вычислительных экспериментов; в работах [65, 68] диссертант участвовал в разработке математической модели и участвовал в численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертационной работы составляет 166 страницы, содержит 57 иллюстраций и 10 таблиц. Список литературы содержит 121 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантом РНФ 17-71-20055, грантом РФФИ 17-01-00689, грантом 17-01-00732, грантом РФФИ 19-31-90117.

В **первой главе** рассматривается численное моделирование задачи распределения волн в неоднородных средах. В *первом разделе* рассматривается распределение упругих волн в неоднородной среде, где математическая модель описывается гиперболическим уравнением второго порядка для перемещений. Для аппроксимации по времени используется явная дискретизация. Аппроксимация уравнений по пространственным переменным проводится с использованием разрывного метода Галеркина. Данный метод аппроксимации позволяет получить блочно-диагональную матрицу масс и, следовательно, ее легко обратить при построении эффективной вычислительной реализации. Результаты

численного решения для двумерной задачи представлены для трех модельных задач с неоднородными свойствами грунтов и также с учетом наличия трещин. Во *втором разделе* исследовано численное усреднение для задачи распространения волн в трещиноватых средах. Математическая модель описывается уравнением Гельмгольца для распространения упругих волн. Чтобы избежать нежелательных отражений, вызванных расчетной областью, в качестве граничных условий используются поглощающие граничные условия первого порядка. Аппроксимация мелкой сетки строится с помощью метода конечных элементов. Для получения эффективных свойств среды рассматриваются аналитический подход и метод численного усреднения. В *третьем разделе* представлен алгоритм многомасштабного метода конечных элементов (ММКЭ) для задачи рассеяния в неоднородных средах. Этот алгоритм построен на основе теории усреднения для задач в периодических средах. В предлагаемом методе для приближения на грубой сетке решается локальная задача для построения многомасштабных базисных функций. Представлены два подхода к построению локальных базисных функций на основе двух типов локальных задач с использованием эллиптической части оператора и оператора Гельмгольца. В *четвертом разделе* исследуется обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ) для распространения упругих волн. Рассматриваем два типа построения обобщенных многомасштабных базисных функций: с непрерывными многомасштабными базисными функциями и с разрывными многомасштабными базисными функциями для каждой локальной области. Главными различиями между двумя методами построения базисных функций являются определение локальных областей и многомасштабных пространств. Представляем численные результаты, которые демонстрируют эффективность обоих методов. Представленные методы дают хорошее приближение решения и уменьшают размерность системы при увеличении числа многомасштабных базисных функций. В *пятом разделе* рассматривается задача рассеяния в неод-

нородной области с применением метода ОММКЭ. Строится многомасштабное пространство, с использованием решения локальных спектральных задач на вспомогательном пространстве в каждой локальной области. Представлены и исследованы два типа многомасштабных базисных функций в зависимости от оператора. Представлены численные результаты для задачи Гельмгольца в неоднородной области с неоднородными свойствами на препятствиях. Предлагаемый метод исследуется для различных волновых чисел и количества многомасштабных базисных функций.

Во **второй главе** представлены многомасштабные методы для задач в перфорированных средах. В *первом разделе* предлагается новый метод построения многомасштабных базисных функций для задачи рассеяния в перфорированной области. Математическая модель описывается уравнением Гельмгольца для гармонической рассеянной волны с граничным условием поглощения. Аппроксимация на мелкой сетке строится методом конечных элементов на неструктурированной мелкой сетке. Для приближения на грубой сетке предложен вычислительный алгоритм, в котором подробно описывается и раскрывается каждый этап построения базисной функции. В отличие от классического метода ОММКЭ, в предлагаемом нами методе ОГММКЭ строим вспомогательные пространства для каждого грубого края локальной области, также строим дополнительные базисные функции. Сравниваются относительные погрешности между решением на мелкой сетке и представленным приближением на грубой сетке с различным количеством многомасштабных базисных функций для различных волновых чисел. Во *втором разделе* представлено и вычислительно реализован многомасштабная аппроксимация уравнения конвекции-диффузии в перфорированных средах с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина. Рассмотрено нестационарное уравнение для концентрации, учитывающее диффузионное и конвективное течение в перфорированной области с реактивными граничными условиями на перфорациях.

Приближение на мелкой сетке строится с использованием разрывного метода Галеркина с внутренним штрафом (РМГВШ). Для приближения на грубой сетке предлагаются три типа построения многомасштабных базисных функций, основанных на разделении границ. Численные результаты получены путем исследования нескольких тестовых задач с различными параметрами.

В **третьей главе** описывается комплекс программ для построения многомасштабных пространств для задач распространения волн в неоднородных средах. Программы являются вычислительными библиотеками, написаннными на языке Си и C++. Глава разделена на два основных раздела. *Первый раздел* посвящен вычислительной библиотеке для моделирования волновых процессов с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина. Во *втором разделе* реализована вычислительная библиотека для моделирования уравнения Гельмгольца в средах с неоднородными включениями с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов.

Автор выражает искреннюю благодарность, доктору физико-математических наук, профессору Ялчину Эфендиеву за научное руководство и доценту Васильевой Марии Васильевне за научное наставничество и оказание всесторонней поддержки. Автор выражает благодарность своим коллегам по научно-исследовательской кафедре «Вычислительные технологии» СВФУ и сотрудникам международной научно-исследовательской лаборатории «Многомасштабное математическое моделирование и компьютерные вычисления» за полезные советы и помощь в редактировании работы.

Глава 1

Численное решение волновых уравнений в неоднородных средах

Понимание сложных процессов в неоднородных трещиноватых средах необходимо во многих реальных приложениях, например, при разведке и разработке углеводородных коллекторов. Трещиноватые среды характеризуются сложным распределением трещин и наличием трещин разного масштаба [26, 27]. Более того, трещины характеризуются как тонкие и длинные включения. Численные методы решения задач в трещиноватых средах активно развиваются в последние годы. В [72] авторами разработаны конечно-разностные схемы для моделирования распространения волн в трещиноватой среде. Среда с трещинами возникает, когда границы раздела трещин совпадают с границами конечно-разностной сетки. Для задач течения в трещиноватой среде многомасштабный метод конечных объемов на неструктурированных сетках для дискретной модели трещин представлен в работе [73]. Использование неструктурированных сеток требует довольно сложных генераторов сеток и значительно увеличивает время работы, а также его использование нежелательно при большом количестве трещин. В [74] автор предложил подход под названием Химерный сеточный подход (Chimera Grid Approach). Этот метод позволяет избежать использования криволинейных или неструктурированных сеток, заменяя их набором произвольно повернутых прямоугольных сеток. В работе [75] авторами предложен подход к моделированию распространения сейсмических волн в среде, содержащей субвертикальные трещиноватые неоднородности, с использованием сеточно-характеристического метода на структурных сетках без построения дополнительных сеток. Для моделирования распространения волн в трещиноватых средах широко используется Разрывный метод Галер-

кина (РМГ). Основной недостаток метода РМГ – чрезмерное использование памяти из-за большого количества степеней свободы. Чтобы избежать этого, в [76] авторы предлагают Обогащенный метод Галеркина для численного решения задачи распространения упругих волн. Обогащенный метод Галеркина сформулирован путем обогащения соответствующего непрерывного метода конечных элементов Галеркина кусочно-постоянными функциями.

1.1 Численное моделирование упругих волн разрывным методом Галеркина в неоднородных средах

В данном разделе, рассмотрим постановку задачи распространения волн в неоднородной среде. Математическая моделью для перемещений служит начально-краевая задача для гиперболического волнового уравнения второго порядка. Далее, представим аппроксимацию математической модели с использованием разрывного метода Галеркина. Данный метод позволяет получить блочно-диагональную матрицу масс и, следовательно, ее легко обратить при построении эффективной вычислительной реализации. Численные результаты преставлены для трех модельных задач с неоднородными свойствами грунтов и также с учетом наличия трещин.

1.1.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассмотрим волновое уравнение, описывающее распределение упругих волн в расчетной области Ω:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = f, \quad t \in [0,T], \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

где $f = f(x,t)$ – заданный источник, ρ – плотность среды, $u = u(x,t)$ – перемещение в момент времени t.

Уравнение (1.1) дополняется соотношением между тензором напряжений σ

и тензором деформаций ε

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \tag{1.2}$$

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{div} uE \tag{1.3}$$

где E – единичный тензор, λ и μ являются параметрами Ламе.

Подставляя соотношения (1.2) и (1.3) в (1.1) получим следующее гиперболическое уравнение

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + f. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) дополним однородными граничными условиями Неймана

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = a, \quad t \in [0,T], \quad x \in \overline{\Omega}$$

и следующими начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in \Omega.$$

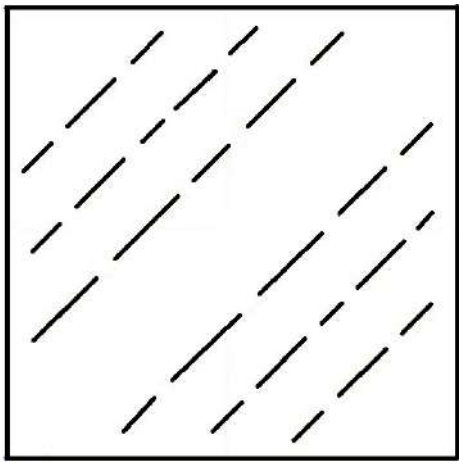


Рис. 1.1: Неоднородная область с трещинами.

1.1.2 Условие на трещине

Указанная выше задача рассматривается в трещиноватой среде Ω (см. Рис 1.1). Для численного моделирования уравнения упругих волн в трещиноватой

среде, мы применяем линейную модель скольжения. В частности, предполагаем, что толщина трещины пренебрежимо мала. Следуя данной модели для задания трещин, мы имеем линейную зависимость между напряжениями и величиной разрыва в поле перемещения следующим образом

$$[u] = Z\tau, \tag{1.5}$$

где $[u]$ – скачок поля перемещения на трещине, $\tau = \sigma \cdot n$, и Z – матрица свойства трещины.

Трещина характеризуется двумя параметрами и в частном случае может быть дианональной

$$Z = \begin{bmatrix} z_t & 0 & 0 \\ 0 & z_t & 0 \\ 0 & 0 & z_n \end{bmatrix}$$

где z_n и z_t – нормальные и тангенциальные компоненты матрицы свойств, соответственно.

Для аппроксимации задачи по пространственным переменным, мы используем разрывный метод Галеркина. Пусть E – ребро (грань) между элементами K_1 и K_2, тогда среднее и скачок вектора u на ребре E зададим следующей формулой

$$\{u\} = \frac{u\,|_{K_1} + u\,|_{K_2}}{2}, \quad [u[= u\,|_{K_1} - u\,|_{K_2}.$$

Пусть $\mathscr{T}^h$ триангуляция расчетной области Ω и Γ_h есть множество всех внутренних граней между элементами $\mathscr{T}^h$. Пусть $\Gamma_c \subset \Gamma_h$ – подмножество всех граней, где поле перемещения является непрерывной функцией и $\Gamma_f \subset \Gamma_h$ – подмножество граней, представляющих трещины.

Вариационная формулировка волнового уравнения с использованием разрывного метода Галеркина (РМГВШ) в трещиноватой среде определяется сле-

дующим образом: найти $u \in V_h$ такую что

$$\sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}v dx+\sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K(\sigma(u),\varepsilon(v))dx-\sum_{E\in\Gamma_c}\int_E\{\tau(u)\}[v]\,ds$$
$$-\sum_{E\in\Gamma_c}\int_E\{\tau(v)\}[u]\,ds+\sum_{E\in\Gamma_c}\int_E(\lambda+2\mu)[u][v]\,ds$$
$$+\sum_{E\in\Gamma_f}\int_E Z^{-1}[u][v]\,ds=\sum_{K\in\mathscr{T}^\langle}\int_K fv dx,\quad \forall v\in V_h,$$

где γ_f есть параметр штрафа и $\tau(u)=\sigma(u)n$.

Для аппроксимации по времени, мы используем явную разностную схему

$$\sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K \rho\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\Delta t^2}v dx+\sum_{K\in\mathscr{T}^h}\int_K(\sigma(u^n),\varepsilon(v))dx-\sum_{E\in\Gamma_c}\int_E\{\tau(u^n)\}[v]\,ds$$
$$-\sum_{E\in\Gamma_c}\int_E\{\tau(v)\}[u^n]\,ds+\gamma_f\sum_{E\in\Gamma_c}\int_E(\lambda+2\mu)[u^n][v]\,ds$$
$$+\sum_{E\in\Gamma_f}\int_E Z^{-1}[u^n][v]\,ds=\sum_{K\in\mathscr{T}^\langle}\int_K fv dx,$$

где t – шаг по времени. Поскольку построенная схема является условно устойчивой [19], следовательно шаг по времени необходимо ограничивать.

Полученную дискретную задачу запишем в матричной форме

$$M_h\frac{u^{n+1}-2u^n+u^{n-1}}{\Delta t^2}+K_h u^n=F_h, \tag{1.6}$$

где M_h – матрица масс и K_h – матрица жесткости.

Таким образом, на каждом временном слое, мы решаем следующую линейную систему уравнений

$$M_h u^{n+1}=(2M_h-\Delta t^2 K_h)u^n-M_h u^{n-1}+\Delta t^2 F_h, \tag{1.7}$$

для решения которой необходимо инвертировать матрицу масс. Поскольку матрица масс M_h является блочно-диагональной для разрывного метода Галеркина, мы можем обратить матрицу по блокам и получить эффективный вычислительный алгоритм решения поставленной задачи.

1.1.3 Поглощающее граничное условие

При рассмотрении волновых процессов в ограниченной области, необходимо задать поглощающие граничные условия на искусственных границах, чтобы избежать неестественных отражений волн [20, 58, 77]. При проведении расчетов, мы будем использовать поглощающее граничное условие первого порядка

$$u_t = -L\sigma n, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{1.8}$$

где

$$L = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2\mu+\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\mu} \end{bmatrix}.$$

Граничное условие (1.40) запишем следующим образом

$$-\sigma n = L^{-1} u_t, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \tag{1.9}$$

где

$$L^{-1} = \sqrt{p} \begin{bmatrix} \sqrt{2\mu+\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu}. \end{bmatrix}$$

Данное поглощающее условие будем налагать в вариационной постановке задачи

$$\sum_{K\in\mathscr{T}^h} \int_K \rho \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} v dx + \sum_{E\in\Gamma_b} \int_E L^{-1} \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} v ds$$
$$+ \sum_{K\in\mathscr{T}^h} \int_K (\sigma(u^n), \varepsilon(v)) dx - \sum_{E\in\Gamma_c} \int_E \{\tau(u^n)\} [v] ds - \sum_{E\in\Gamma_c} \int_E \{\tau(v)\} [u^n] ds$$
$$+ \gamma_f \sum_{E\in\Gamma_c} \int_E (\lambda + 2\mu) [u^n] [v] ds + \sum_{E\in\Gamma_f} \int_E Z^{-1} [u^n] [v] ds = \sum_{K\in\mathscr{T}(} \int_K f v dx,$$

где Γ_b есть подмножеством граней на границе.

Таким образом, при задании однородных граничных условий Неймана, мы имеем следующую матричную форму задачи

$$M_h u^{n+1} + (\Delta t^2 K_h - 2M_h) u^n + M_h u^{n-1} = \Delta t^2 F_h, \tag{1.10}$$

а при использовании поглощающих граничных условий имеем

$$(M_h + \frac{\Delta t}{2} M_{\partial\Omega,h})u^{n+1} + (\Delta t^2 K_h - 2M_h)u^n + (M_h - \frac{\Delta t}{2} M_{\partial\Omega,h})u^{n-1} = \Delta t^2 F_h \quad (1.11)$$

где $M_{\partial\Omega,h} = \int_{\partial\Omega} L^{-1} uvds$.

1.1.4 Численные результаты

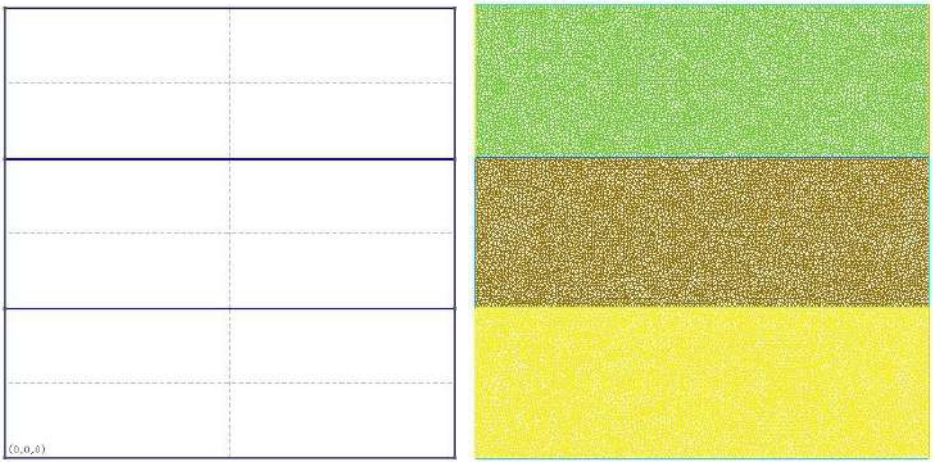


Рис. 1.2: Расчетная область и треугольная расчетная сетка для задачи со слоями. *Задача 2*.

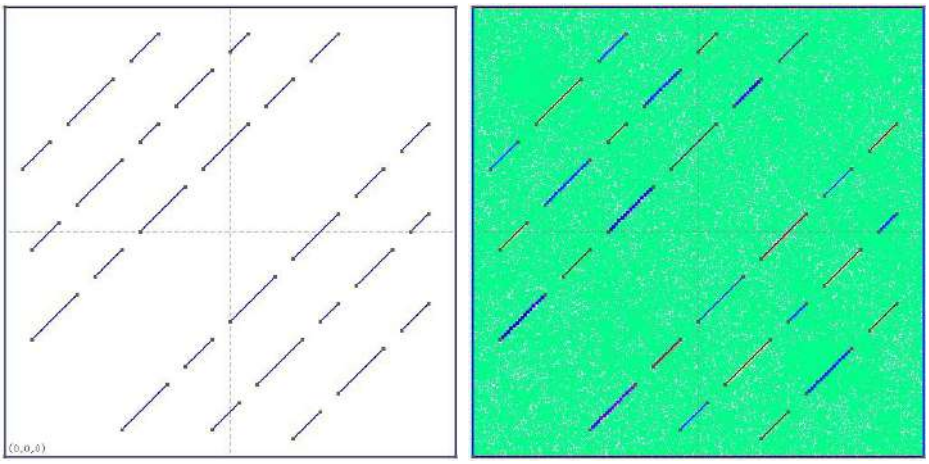


Рис. 1.3: Расчетная область и треугольная расчетная сетка для задачи с трещинами. *Задача 3*.

Приведем результаты численного решения распределения волн в упругой неоднородной среде. Рассмотрим четыре случая:

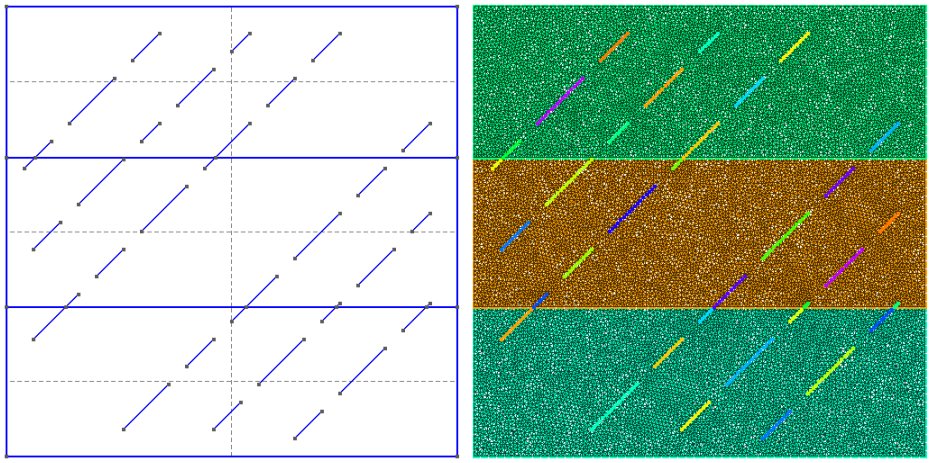


Рис. 1.4: Расчетная область и треугольная расчетная сетка для задачи с трещинами и неоднородными свойствами. *Задача 4*.

- *Задача 1*. Однородные коэффициенты.
- *Задача 2*. Слоистые свойства грунта (Рис. 1.2).
- *Задача 3*. Система трещин в однородном грунте (Рис. 1.3).
- *Задача 4*. Слоистый неоднородный грунт с учетом наличии системы трещин (Рис. 1.4).

Распространение упругих волн рассмотрим в области $\Omega = 500 \times 500$ метров. Для численного решения, мы строим расчетную сетку с шагом по сетке $h = 4.5$ метров, для *Задачи 1*, которая содержит 30016 ячеек и 15007 узлов, для *Задачи 2* – 33812 ячеек и 17131 узлов, для *Задачи 3* – 28702 ячеек и 14576 узлов и для *Задачи 4* – 31092 ячеек и 15635 узлов. Для построения двумерной геометрической модели и генерации сетки воспользуемся программой Gmsh [59]. Для последующей визуализации результатов, значения записываеи в формате vtk, которые можно визуализировать с использованием программы Paraview [60].

Далее правая часть уравнения дается в виде

$$f(x,t) = G(x)P(\theta)R(t),$$

где $P(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ – угол источника ($\theta = 0$), $R(t) = (1 - 2a^2)\exp^{-a^2}$ – волновой импульс Рикера с $a = \pi f_0(t - \frac{1}{f_0})$, $f_0 = 40$Гц, пространственная функция $G(x)$ определяется как точечный источник, $G(x) = \delta(x - x_0)$, где

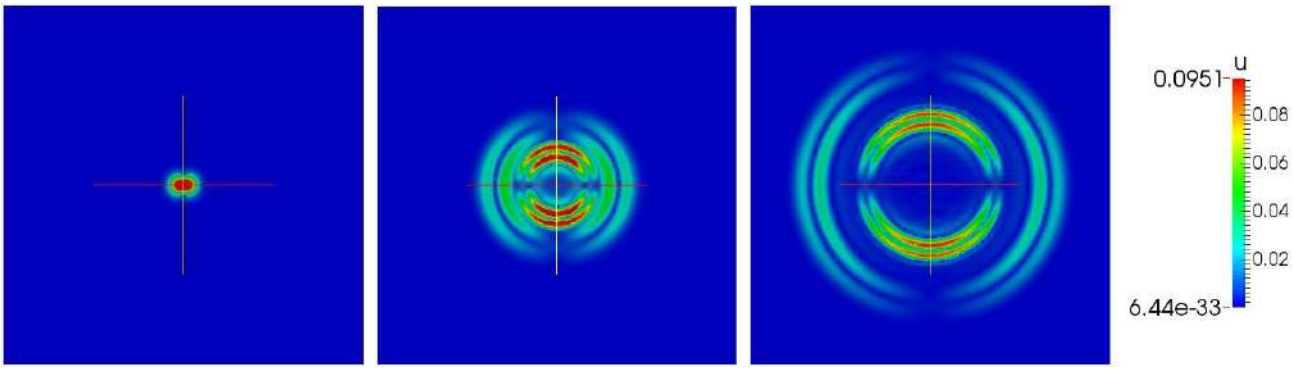


Рис. 1.5: Распределение перемещений для задачи с однородными коэффицентами при $t = 0.15, t = 0.45, t = 0.7$. *Задача 1*.

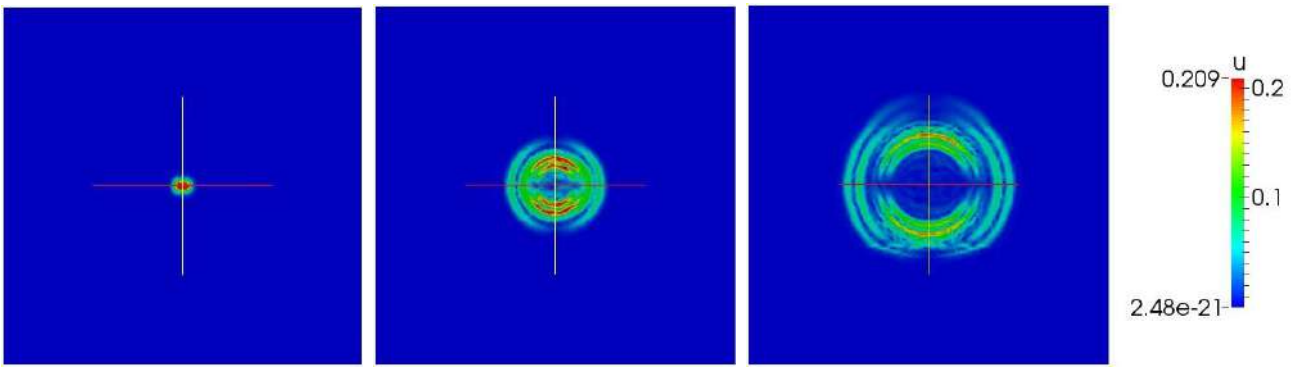


Рис. 1.6: Распределение перемещений для задачи с неоднородностью в виде слоев при $t = 0.15, t = 0.45, t = 0.7$. *Задача 2*.

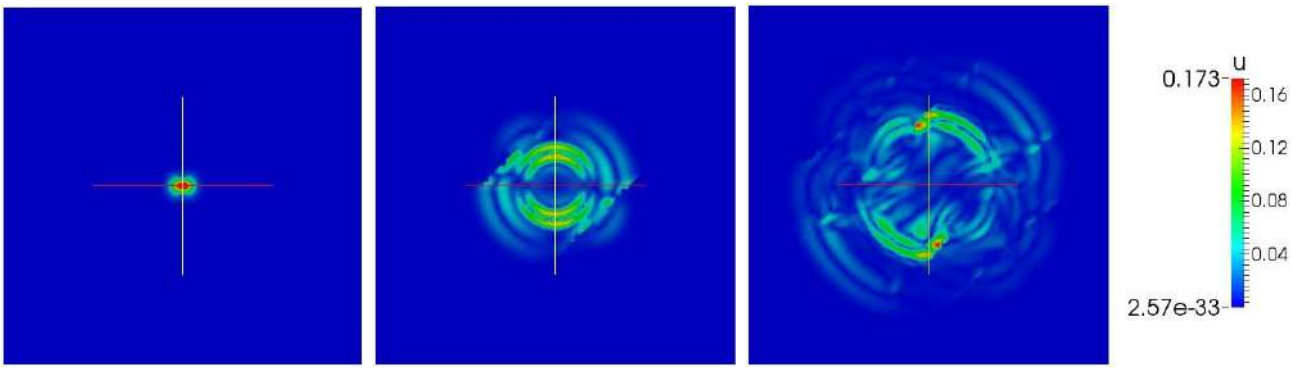


Рис. 1.7: Распределение перемещений для задачи с неоднородностью в виде трещин при $t = 0.15, t = 0.45, t = 0.7$. *Задача 3*.

$x_0 = (250, 250)$ – центр расчетной области.

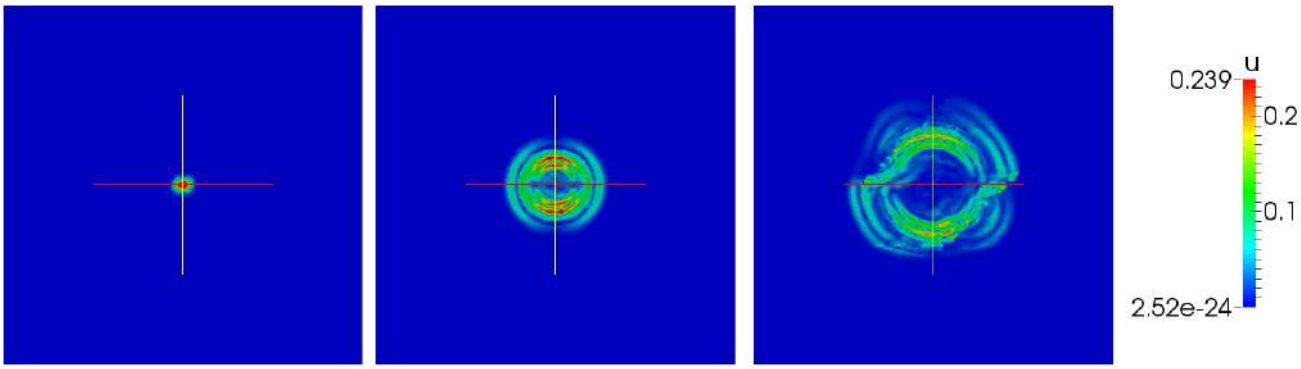


Рис. 1.8: Распределение перемещений для задачи с неоднородностью в виде трещин и слоев при $t = 0.15, t = 0.45, t = 0.7$. *Задача 4.*

Параметры Ламе находятся по следующим формулам

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где $E = 10 \cdot 10^9$ – модуль Юнга, $\nu = 0.3$ коэффициент Пуассона. В вычислительной области, задаем $\alpha = 4128.4$ м/с и $\beta = 1215.3$ м/с, где $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ – скорость p-волны, и $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорость s-волны, ρ – плотность равная 2600 кг/м^2. Для податливости трещин используем $z_n = 10 \cdot 10^{-9}$ м/Па и $z_t = 30 \cdot 10^{-9}$ м/Па. Начальные условия равны нулю и мы вычисляем решение в момент времени $T_{max} = 0.7$ сек. с числом временных шагов $T_{count} = 2900$. Величина шага по времени сильно влияет на решение, поэтому расчет производится с минимальным шагом по времени $\tau = T_{max}/T_{count} = 0.7/2900 \approx 0.00024$.

На рис. 1.5 – 1.8 представлено распределение поля перемещений на различные моменты времени $t = 0.15; 0.45$ и 0.7. По полученным результатам можно заметить, что в однородной среде волна распространяется равномерно (Рис. 1.5). В случае, когда рассматриваемая область состоит из трех различных подобластей (рис.1.6), с разными физическими свойствами, т.е $E_1 = 10^{10}$ Па (верхний слой), $E_2 = 5 \cdot 10^9$ Па (средний слой), $E_3 = 10^9$ Па (нижний слой), видно, что волна в верхнем слое проходит через эту область, а в нижнем затухает, так как $E_1 > E_2 > E_3$.

Как видно из рис. 1.7, трещины сильно влияют на распространение вол-

ны, так как они отражают волны. В рис. 1.8 волны отражаются от трещин, а также в верхнем слое волна проходит через эту область, а в нижнем слое затухает, так как рассматриваемая область состоит из трех различных подобластей с разными физическими свойствами.

1.2 Численное усреднение распространения волн в трещиноватых средах

Для построения математической модели задачи распространения волн используются многомасштабные методы или методы усреднения. Теории усреднения или эффективных сред заменяют неоднородную породу эквивалентной однородной породой, где соответствующие свойства рассчитываются в режимах статической деформации. Обзор и сравнение существующих эффективных теорий среды для трещиноватых пластов представлены в [78]. Авторы рассматривают трехмерную формулировку и используют прямое моделирование методом конечных элементов для расчета эффективных свойств трещиноватой среды. Прямые вычислительные исследования обеспечивают независимую проверку теоретических предсказаний и могут использоваться для изучения реалистичных моделей трещин, которые нарушают традиционные допущения, когда трещины имеют заведомо неправильную форму и могут образовывать взаимосвязанные сети. С другой стороны, этот подход требует больших вычислительных ресурсов для сложных распределений трещин. Кроме того, погрешности методов усреднения зависят от грубой сетки. Большинство вычислительных алгоритмов усреднения основаны на решении задачи на элементарной ячейке, которая касается определения локальных полей в среднем образце неоднородного материала при периодических граничных условиях.

В этом разделе был рассмотрен метод усреднения для решения задачи Гельмгольца, описывающей распространение упругих волн в трещиноватых

средах в частотной области. Решаются локальные задачи для расчета эффективных упругих свойств, которые используются для аппроксимации грубой сетки. В локальных задачах используются симметричный разрывный метод Галеркина с внутренним штрафом (РМГВШ) с МЛС для представления трещин. Результаты численного решения двумерной задачи представлены для модельных задач.

1.2.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассмотрим уравнение Гельмгольца для распространения упругих волн в расчетной области Ω [79, 80]

$$-\operatorname{div}\sigma - \omega^2 \rho u = f, \quad x \in \Omega, \tag{1.12}$$

где ω – частота, ρ – плотность, f – функция источника и $u = Re(u) + iIm(u)$. Для зависимости напряжения от деформации имеем

$$\sigma(u) = C : \varepsilon(u),$$

где C – коэффициенты тензора упругости

$$C = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{1222} \\ C_{1112} & C_{1222} & C_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}.$$

В расчетах энергия волн должна поглощаться на искусственных границах, чтобы избежать ошибочных отражений, вызванных конечной расчетной областью [77]. Используем граничное условие поглощения первого порядка

$$i\rho\omega A u = -\sigma(u) n, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.13}$$

Для численного решения мы используем метод конечных элементов. Слабая формулировка уравнения Гельмгольца для классического непрерывного метода Галеркина дается формулой

$$\int_\Omega (\sigma(u), \varepsilon(v)) dx - \int_\Omega \rho\omega^2 u v dx = \int_\Omega f v dx, \tag{1.14}$$

где $u = \sum_j u_j \phi_j$, ϕ_j являются линейными базисными функциями для мелкомасштабного приближения.

1.2.2 Аналитические эффективные свойства среды

Эффективный тензор податливости трещиноватой породы может быть записан как сумма тензора податливости фоновой среды и каждого набора трещин [81]. Тензор жесткости получается путем обращения тензора податливости.

Для соотношений напряжение-деформация для фоновой среды имеем $\sigma = C : \varepsilon$ и $\varepsilon = S : \sigma$, где C и S – коэффициенты тензора упругости и податливости фоновой породы без трещин.

Для трещиноватой среды матрицу податливости можно записать как

$$\varepsilon_{ij} = S^*_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad S^* = S + \sum_{i=1}^{N_f} S^{f,i}, \tag{1.15}$$

где N_f – количество наборов трещин, и также отметим, что возможными эффектами любых пересечений трещин можно пренебречь [82]. Здесь $S^{f,i}$ – тензор податливости трещин i-го набора трещин, S – тензор податливости вмещающей среды без трещин, а S^* – матрица податливости эквивалентной среды.

В длинноволновом пределе, т.е. когда приложенное напряжение предполагается постоянным в представительном объеме, мы имеем следующую матрицу податливости трещин

$$S^{f,i} = \begin{bmatrix} S^{f,i}_{11} & S^{f,i}_{12} & S^{f,i}_{13} \\ S^{f,i}_{12} & S^{f,i}_{22} & S^{f,i}_{23} \\ S^{f,i}_{13} & S^{f,i}_{23} & S^{f,i}_{33} \end{bmatrix}, \tag{1.16}$$

где

$$S^{f,i}_{11} = \frac{3z^i_1 + z^i_2}{8} + \frac{z^i_1}{2}\cos 2\beta^i + \frac{z^i_1 - z^i_2}{8}\cos 4\beta^i, \quad S^{f,i}_{12} = \frac{z^i_1 - z^i_2}{8}(1 - \cos 4\beta^i),$$

$$S^{f,i}_{22} = \frac{3z^i_1 + z^i_2}{8} - \frac{z^i_1}{2}\cos 2\beta^i + \frac{z^i_1 - z^i_2}{8}\cos 4\beta^i,$$

$$S_{13}^{f,i} = \frac{z_1^i}{2}\sin 2\beta^i + \frac{z_1^i - z_2^i}{4}\sin 4\beta^i, \quad S_{33}^{f,i} = \frac{z_1^i + z_2^i}{2} - \frac{z_1^i - z_2^i}{2}\cos 4\beta^i,$$

$$S_{23}^{f,i} = \frac{z_1^i}{2}\sin 2\beta^i - \frac{z_1^i - z_2^i}{4}\sin 4\beta^i,$$

где i-я совокупность трещин составляет угол β^i относительно оси x_2 [81].

Тогда для матрицы упругости эквивалентной среды имеем

$$C^* = (S + \sum_i S^{f,i})^{-1} = (C^{-1} + \sum_i S^{f,i})^{-1}. \tag{1.17}$$

После расчета эффективных свойств среды решаем уравнение Гельмгольца с эффективной матрицей упругости C^*. Этот метод широко используется для расчета свойств анизотропной эффективной среды и аналогичен среднему гармоническому коэффициенту. Другой способ расчета эффективных свойств – использование методов усреднения путем решения локальной задачи.

1.2.3 Численный расчет эффективных свойств

Основная идея численного усреднения состоит в том, чтобы определить эффективные коэффициенты в грубой ячейке $C^\star$. Трещины фиксируются в тензоре эффективной упругости и рассчитываются путем решения локальной задачи в представительном объеме

$$-\operatorname{div}\sigma(u) = 0, \quad x \in K \tag{1.18}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u^{(rs)} = \Lambda^{(rs)}x \quad \text{on } \partial K, \tag{1.19}$$

где

$$\Lambda_{ij}^{(rs)} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}\right), \quad r,s = 1,2. \tag{1.20}$$

Трещины моделируются граничным условием, при котором смещения имеют разрывный характер по трещине, но напряжение является непрерывным.

Эти условия (линейная модель скольжения, МЛС [25]) могут описывать сложные взаимодействия между сейсмическими волнами и трещинами.

Мы предполагаем, что трещины имеют исчезающую ширину, и, следуя модели линейного скольжения, мы имеем линейную связь между вектором тяги и величиной разрыва в поле смещения следующим образом:

$$[u] = Z\sigma \cdot n, \tag{1.21}$$

где $[u]$ – скачок поля перемещения на трещине, $\sigma \cdot n$ – вектор сил на поверхности трещины, Z – матрица свойства трещины.

Матрица податливости диагональна и положительно определена, и в двумерном случае она задается следующим образом:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix},$$

где $z_1 = k_1^{-1}$ и $z_2 = k_2^{-1}$ нормальное и касательное соответствие [2, 25, 83].

Мы используем метод РМГВШ для аппроксимации локальной задачи и имеем следующую вариационную формулировку: найти $u^{(rs)} \in V_h(K)$ такое, что

$$a_{DG}(u^{(rs)}, v) = 0, \quad v \in V_h(K), \tag{1.22}$$

и

$$\begin{aligned} a_{DG}(u,v) = &\int_K (\sigma(u), \varepsilon(v))dx - \int_{\Gamma_0} \{\sigma(u)n\}[v]ds - \int_{\Gamma_0} \{\sigma(v)n\}[u]ds \\ &+ \frac{\gamma_f}{h} \int_{\Gamma_0} \{\lambda + 2\mu\}[u][v]ds + \sum_i \int_{\gamma_i} Z^{-1}[u][v]ds, \end{aligned} \tag{1.23}$$

где $\{\cdot\}$ и $[\cdot]$ являются средним значением и скачком вектор-функции u и задаются выражением

$$\{u\} = \frac{u|_{K^+} + u|_{K^-}}{2}, \quad [u] = u|_{K^+} - u|_{K^-}.$$

Компоненты эффективных модулей упругости $C^\star$ определяются усреднением локальных деформаций

$$C^\star_{rspq} = \frac{1}{|K|} \int_K C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(rs)} \varepsilon_{kl}^{(pq)} \, dx, \tag{1.24}$$

где $r,s,p,q = 1,2$ и $\varepsilon^{(rs)} = \varepsilon(u^{(rs)})$ – поле деформации.

Существует несколько подходов к численным методам усреднения, основанных на двухмасштабном асимптотическом анализе с решением локальных задач в представительном объеме K с периодическим граничным условием, кинематическим или статическим однородным граничным условием (KUBC или SUBC) или смешанным граничным условием [19, 84–88]. Этот классический метод усреднения следует стандартному алгоритму для расчета эффективных свойств материала и не способен уловить поведение вне низкочастотного режима [89, 90].

1.2.4 Численные результаты

В этом разделе мы сравниваем эффективные тензоры упругости для аналитической формулы (1.17) и для численного усреднения с использованием решения локальной задачи в репрезентативном объеме (1.24). Мы рассматриваем три разных случая с разной ориентацией трещин (см. Рис. 1.9, $\beta = \pi/2 + \alpha$) с аналогичной правой частью f. Для численного моделирования, мы задаем $E = 20.0 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho = 2300$ кг/м^3 и $f_0 = 15$. Для податливости трещины мы устанавливаем $z_j^{-1} = k_j, \quad j = 1,2$ с $k_1 = 9C_{11}$, $k_2 = k_1(1.0 - \eta/2)$, где $\eta = 0.11$. Задаем источник $f(x) = G(x)P(\theta)$, где $P(\theta) = (cos\theta, sin\theta)$ – полярный угол вектора силы источника с $\theta = 0$ и пространственная функция $G(x)$ определяется как точечный источник, $G(x) = \delta(x - x_0)$ с $x_0 = (250, 250)$ обозначен центром вычислительной области. Этот случай связан с газонасыщенным трещиноватым пористым песчаником [81].

Таким образом, мы имеем следующую матрицу упругости для фоновой среды без трещин и тензор податливости трещин

$$C = \begin{bmatrix} 26.98 & 11.52 & 0 \\ 11.52 & 26.98 & 0 \\ 0 & 0 & 7.683 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \quad \text{и} \quad Z = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0 \\ 0 & 0.0043 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}.$$

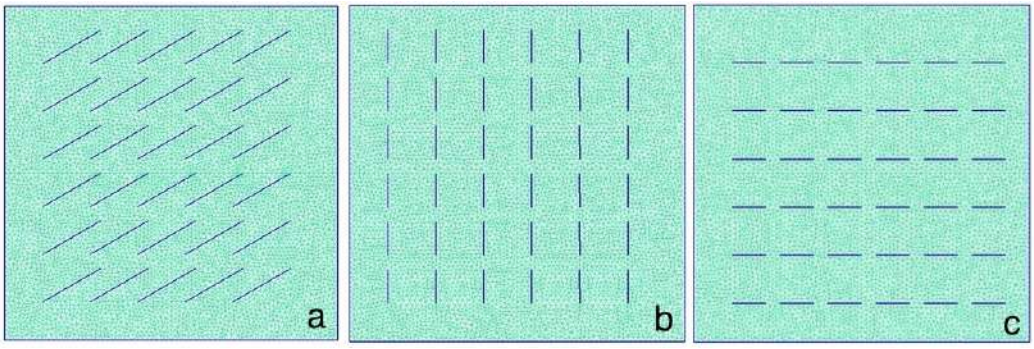


Рис. 1.9: Представительный объём. Случай a ($\alpha = 30^0$), b ($\alpha = 90^0$) и c ($\alpha = 0^0$).

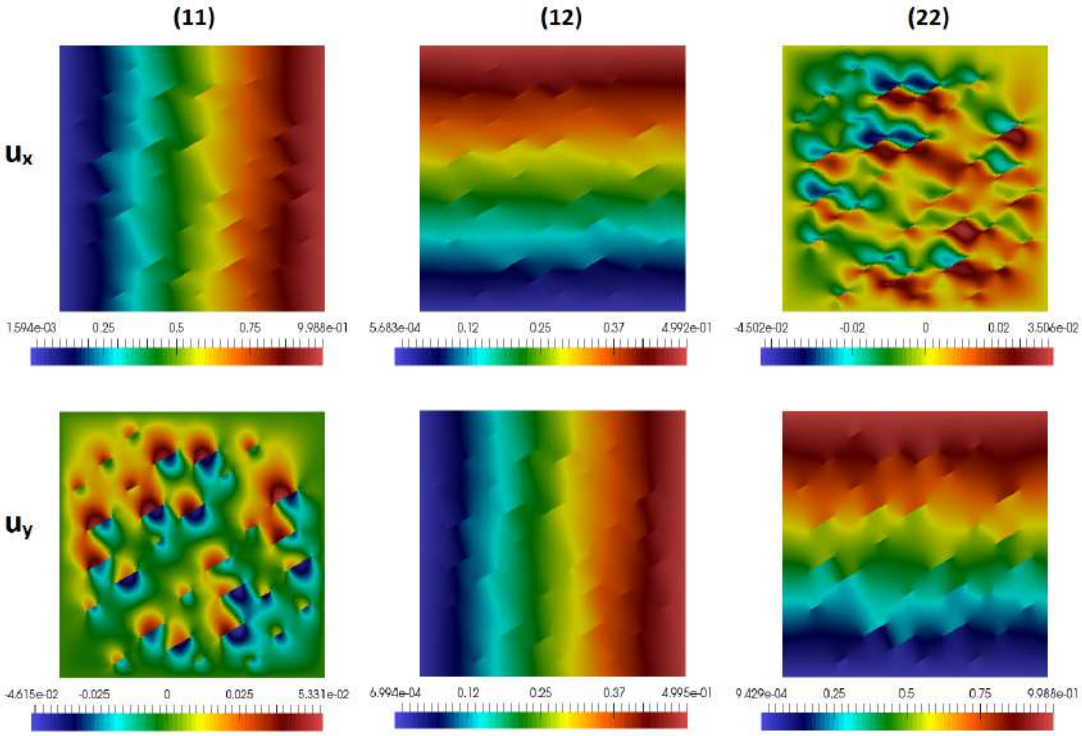


Рис. 1.10: Решение локальной задачи в представительном объёме (*Случай a*).

В качестве примера сначала рассмотрим набор вертикальных и горизонтальных трещин. Для этих случаев (*Случай b, c*) по (1.16) имеем

$$S^{f,i} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad S^{f,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}, \tag{1.25}$$

для вертикальной и горизонтальной трещин соответственно. Обратите внимание, что при расчете и построении области мы используем шесть рядов трещин,

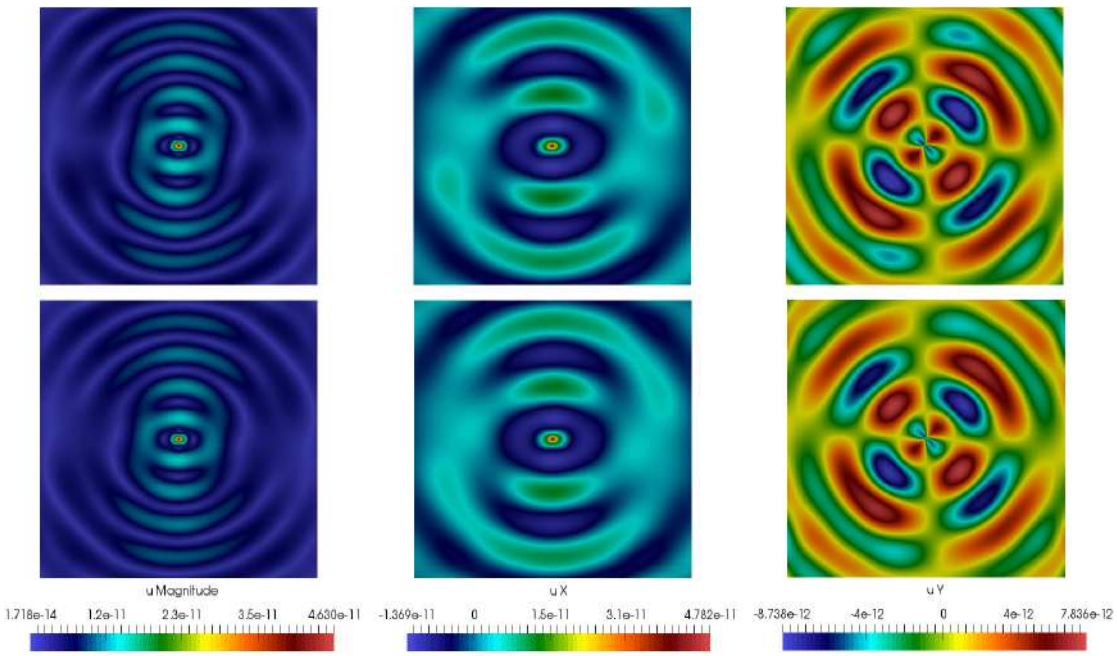


Рис. 1.11: Численные решения для области с $\omega = 2\pi f_0$ и $f_0 = 15$. Величина перемещения u_m. *Случай a*. Сверху: численное усреднение для $\alpha = 30^0$. Снизу: аналитическая формула для $\alpha = 30^0$.

$N_f = 6$.

Случай с $\alpha = 90^0$ (*Случай b* вдоль напрвления x_2):

$$C_h^* = \begin{bmatrix} 21.49 & 9.21 & -0.001 \\ 9.21 & 25.90 & -0.002 \\ -0.001 & -0.002 & 7.12 \end{bmatrix} \cdot 10^9,$$

$$C_a^* = \begin{bmatrix} 16.13 & 6.91 & 0 \\ 6.91 & 24.91 & 0 \\ 0 & 0 & 6.39 \end{bmatrix} \cdot 10^9, \; S^{f,i} = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0043 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}.$$

Случай с $\alpha = 0^0$ (*Случай c* вдоль направления x_1):

$$C_h^* = \begin{bmatrix} 25.87 & 9.14 & 0.0003 \\ 9.14 & 21.33 & 0.0007 \\ 0.0003 & 0.0007 & 7.14 \end{bmatrix} \cdot 10^9,$$

$$C_a^* = \begin{bmatrix} 24.91 & 6.91 & 0 \\ 6.91 & 16.13 & 0 \\ 0 & 0 & 6.39 \end{bmatrix} \cdot 10^9, \; S^{f,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0041 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0043 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}.$$

Далее мы рассмотрим Случай с $\alpha = 30^0$ (*Случай a*). У нас есть

$$C_h^* = \begin{bmatrix} 23.13 & 7.67 & 1.73 \\ 7.67 & 19.26 & 1.55 \\ 1.73 & 1.55 & 6.87 \end{bmatrix} \cdot 10^9,$$

$$C_a^* = \begin{bmatrix} 22.41 & 7.22 & 2.07 \\ 7.22 & 18.02 & 1.72 \\ 2.07 & 1.72 & 6.70 \end{bmatrix} \cdot 10^9, \; S^{f,i} = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0 & -0.0018 \\ 0 & 0.0031 & -0.0017 \\ -0.0018 & -0.0017 & 0.0041 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9},$$

где C_h^* – эффективные коэффициенты численного усреднения, C_a^* – эффективные коэффициенты аналитической формулы.

На рис. 1.10 мы вычисляем решение локальной задачи в представительном объеме. На рис. 1.11 мы представляем действительную часть величины решения для упругой трещиноватой среды с анизотропной матрицей упругости для $\alpha = 30^0$ (*Случай a*) с использованием различных методов расчета свойств эффективной среды. Мы можем видеть, как анизотропная эффективная матрица жесткости изменяет форму волнового фронта. Мы получаем аналогичное поведение для численного усреднения и для аналитической формулы. Обе матрицы эффективной жесткости симметричны.

1.3 Многомасштабный метод конечных элементов для задачи рассеяния в неоднородной области

В данном разделе мы рассматриваем рассеяние волны временной гармоники в неоднородных средах. Эта задача возникает во многих реальных приложениях, например, в инженерном проектировании, где распространение волн через

композитные материалы используется для понимания конкретного поведения микроструктуры и создания материалов с особыми свойствами [91]. Для задач в периодических средах математическая модель на макроуровне построена на основе теории усреднения [91–94]. Для распространения волн в непериодических средах разработаны макромасштабные модели на основе численного усреднения или с использованием многомасштабных методов [19, 51, 56, 57, 64, 95]. В этом разделе представлен многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ) для решения задач распространения волн в неоднородных средах. Для построения приближения на грубой сетке мы решаем локальные задачи по построению многомасштабных базисных функций. Тестируются два подхода к построению локальных базисных функций на основе двух типов локальных задач с использованием эллиптической части оператора и с использованием оператора Гельмгольца. Мы представляем численные результаты для двумерной модельной задачи и исследуем эффективность предложенного метода для различных волновых чисел.

1.3.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассмотрим гармоническую задачу рассеяния в неоднородной области в Ω

$$\Omega = \Omega_0 \cup D, \quad D = \bigcup_{j=1}^{M} D_j,$$

где D_j – препятствия, M – число препятствий (см. рис. 1.12). Предположим, что вне рассеивающих препятствий D_j параметры материала являются однородными изотропными с коэффициентом преломления, равным единице.

Приведены свойства материала для D_j и однородной среды Ω_0

$$A(x) = I\big(1-\chi_D\big) + \sum_{j=1}^{M} A_j(x)\chi_{D_j} \quad \text{и} \quad n(x) = 1\big(1-\chi_D\big) + \sum_{j=1}^{M} n_j(x)\chi_{D_j},$$

где I представляет собой единичную матрицу 2 на 2 и χ является характеристической функцией ($\chi_D = \cup_{j=1}^{M}\chi_{D_j}$, $\chi_{D_j}(x)$ равен единице, если $x \in D_j$ и ноль в

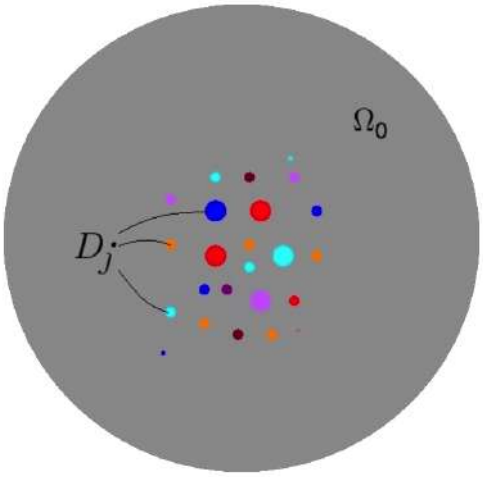


Рис. 1.12: Неоднородная область $\Omega = \Omega_0 \cup D$, $D = \bigcup\limits_{j=1}^{M} D_j$.

противном случае). Мы предположим, что $A_j(x) \in C^2\left(D_j, C^{2\times 2}\right)$ является симметричной матрицей, которая удовлетворяет

$$\inf_{j=1,\cdots,M} \overline{\xi} \cdot \mathrm{Re}\left(A_j(x)\right)\xi \geq a_{\min}|\xi|^2 > 0 \quad \text{и} \quad \overline{\xi} \cdot \mathrm{Im}\left(A_j(x)\right)\xi \leq 0 \tag{1.26}$$

почти для каждого $x \in D$ и каждого $\xi \in C^2$. Соответствующий показатель преломления для неоднородных областей D определяемый $n_j(x) \in C(D_j)$ таков, что

$$\inf_{j=1,\cdots,M} \mathrm{Re}\left(n_j(x)\right) \geq n_{\min} > 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\left(n_j(x)\right) \geq 0, \tag{1.27}$$

почти для каждого $x \in D_j$.

Задачу рассеяния для неоднородной области можно сформулировать так: при заданном падающей волне

$$u^i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}, \quad \text{где} \quad |d| = 1$$

найти суммарную волну $u = u^s + u^i \in H^1_{loc}(R^2)$ такую что

$$\nabla \cdot (A(x)\nabla u) + k^2 n(x) u = 0, \tag{1.28}$$

где предположим, что рассеянное поле удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда на бесконечности. Здесь волновое число k постоянно и считается положительным. Поскольку падающее поле является решением уравнения

Гельмгольца, мы можем записать (1.28) через рассеянное поле: найти рассеянное поле $u^s \in H^1_{loc}(R^2)$ такое, что

$$\nabla \cdot (A(x)\nabla u^s) + k^2 n(x) u^s = f(x), \tag{1.29}$$

$$\int_{\partial B_r} \left|\partial_r u^s - \mathrm{i}k u^s\right|^2 ds = o(1) \quad \text{as} \quad r \to \infty. \tag{1.30}$$

где B_r — круг с центром в начале координат и радиусом $r = |x|$. Здесь уравнение (1.30) известно как условие излучения Зоммерфельда, а ненулевая правая часть в (1.29) определяется выражением

$$f(x) = \nabla\big(I - A(x)\big)\nabla u^i + k^2\big(1 - n(x)\big)u^i,$$

который поддерживается в множестве D. Известно, что (1.29) и (1.30) корректно поставлена при предположениях (1.26) и (1.27) о коэффициентах (см., например, [96]).

Далее формулируется соответствующая краевая задача в усеченной области $\Omega \subset R^2$. Будем считать, что $\overline{D} \subset \Omega$ — ограниченная липшициева область с границей $\partial\Omega$, где ν — внешний единичный вектор нормали к границе. Чтобы не вычислять отображение Дирихле в Неймана на $\partial\Omega$, заметим, что из (1.30) следует, что $\partial_r u^s - \mathrm{i}k u^s = o(r^{-1/2})$ как $r \to \infty$.

Таким образом, мы определяем приближенное решение (1.31) как: найти (приближенное) рассеянное поле $u_s \in H^1(\Omega)$ такое, что

$$\nabla \cdot (A(x)\nabla u_s) + k^2 n(x) u_s = f(x) \quad x \in \Omega. \tag{1.31a}$$

$$\partial_\nu u_s - \mathrm{i}k u_s = 0 \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.31b}$$

Здесь в (1.31b) мы помещаем поглощающее граничное условие на $\partial\Omega$, чтобы аппроксимировать условие излучения Зоммерфельда в (1.30).

Для аппроксимации (1.31) мы используем метод конечных элементов. Имеем следующую вариационную формулировку для (1.31)

$$a(u_s, v) - \mathrm{i}b(u_s, v) - k^2 m(u_s, v) = F(v) \quad \forall\ v \in H^1(\Omega), \tag{1.32}$$

где ограниченные полубилинейные формы на $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\longmapsto C$ задаются формулами

$$a(u,v)=\int_\Omega A(x)\nabla u\cdot\nabla v\,dx,\quad m(u,v)=\int_\Omega n(x)uv\,dx,\quad b(u,v)=k\int_{\partial\Omega}uv\,ds$$

и ограниченный сопряженный линейный функционал на $H^1(\Omega)\longmapsto C$ задается выражением

$$F(v)=\int_\Omega fv\,dx.$$

Теперь покажем, что (1.44) является корректным. Для этого заметьте, что с помощью (1.26) и (1.27) мы можем заключить, что

$$\Big|\mathrm{Re}\big\{a(v,v)-\mathrm{i}b(v,v)\big\}\Big|\geq a_{\min}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\quad\text{и}\quad\Big|\mathrm{Im}\big\{a(v,v)-\mathrm{i}b(v,v)\big\}\Big|\geq k\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Это дает оценку

$$\Big|a(v,v)-\mathrm{i}b(v,v)\ \Big|\geq\frac{\min\{k,a_{\min}\}}{2}\Big\{\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big\}$$

для всех $v\in H^1(\Omega)$. Обратите внимание, что можно показать, что отображение

$$\varphi\longmapsto||\nabla\varphi||^2_{L^2(\Omega)}+||\varphi||^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

эквивалентно стандартному $H^1(\Omega)$, применяя стандартный аргумент противоречия типа Пуанкаре. Таким образом, мы имеем, что полубилинейная форма $a(\cdot,\cdot)-\mathrm{i}b(\cdot,\cdot)$ является коэрцитивной на $H^1(\Omega)$. Обращаясь к компактному вложению $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$, мы можем заключить, что полубилинейная форма $m(\cdot,\cdot)$ компактна. Отсюда следует, что (1.44) является компактным возмущением обратимого оператора, из которого следует, что (1.44) удовлетворяет альтернативе Фредгольма.

Теорема 1. *Для любой заданной падающей волны u^i с $|d|=1$ существует единственное решение $u_s\in H^1(\Omega)$ задачи* (1.31) *и, что эквивалентно,* (1.44) *такой, что $\|u_s\|_{H^1(\Omega)}\leq C\|u^i\|_{2(\Omega)}$ где константа $C>0$ не зависит от рассеянного и падающего полей.*

Доказательство. Обратим внимание, что мы уже показали, что $a(\cdot,\cdot) - \mathrm{i}b(\cdot,\cdot) - k^2 m(\cdot,\cdot)$ является компактным возмущением обратимого оператора, откуда следует, что заразность влечет разрешимость. Теперь докажем, что (1.44) имеет единственное решение. С этой целью предположим, что $w \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет

$$a(w,v) - \mathrm{i}b(w,v) - k^2 m(w,v) = 0 \quad \forall\ v \in H^1(\Omega).$$

Полагая $v = w$ и взяв мнимую часть вышеприведенного равенства, получаем, что

$$0 = -\mathrm{Im}\{a(w,w) - \mathrm{i}b(w,w) - k^2 m(w,w)\} \geq k\|w\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

где мы использовали (1.26) и (1.27). Мы можем заключить, что $w = 0$ на $\partial\Omega$, а интегрирование по частям означает, что w удовлетворяет (1.31a) с $f = 0$. Теперь (1.31b) дает, что w имеет нулевые данные Коши на $\partial\Omega$, а единственность следует из принципа единственности продолжения. Это доказывает, что существование и единственность решения для любого F является двойственным пространством к $H^1(\Omega)$. Мы можем сделать вывод, что полубилинейная форма $a(\cdot,\cdot) - \mathrm{i}b(\cdot,\cdot) - k^2 m(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию inf-sup. Таким образом, мы имеем, что существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что решение u_s для (1.44) удовлетворяет

$$\alpha\|u_s\|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}=1} \left|a(u_s,v) - \mathrm{i}b(u_s,v) - k^2 m(u_s,v)\right| = \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}=1} |F(v)|,$$

а априорная оценка дается тем, что легко показать, что $|F(v)| \leq C\|u^i\|_{C^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$ для всех $v \in H^1(\Omega)$. Теорема доказана. □

Пусть $\mathscr{T}_h$ — неструктурированная мелкая сетка, разрешающая мелкомасштабные неоднородности (препятствия) на уровне сетки (см. рис. 1.20). Обратите внимание, что как следствие приведенного выше результата мы имеем, что для любого стандартного конечного элемента $V_h \subset H^1(\Omega)$ (где h =размер

сетки) вариационная задача: найти $u_s^h \in V_h$ такой, что

$$a\big(u_s^h, v\big) - \mathrm{i}b\big(u_s^h, v\big) - k^2 m\big(u_s^h, v\big) = F(v) \quad \forall\ v \in V_h \tag{1.33}$$

корректна, так как полубилинеарная форма $a(\cdot,\cdot) - \mathrm{i}b(\cdot,\cdot) - k^2 m(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию inf-sup. Таким образом, для любого V_h, удовлетворяющего условию

$$\inf_{w_h \in V_h} \|w - w_h\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad h \to 0^+ \quad \forall\ w \in H^1(\Omega),$$

то мы можем сделать вывод, что

$$\|u_s - u_s^h\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad h \to 0^+,$$

где u_s – решение (1.44), а u_s^h – решение (1.33), поскольку условие inf-sup и свойство аппроксимации V_h влекут за собой сходимость.

Полагая V_h стандартным кусочно-линейным пространством конечных элементов, получаем, что

$$u_s^h = \sum_j U_j \phi_j,$$

где ϕ_j – стандартные линейные базисные функции.

Мы можем написать (1.33) в матричной форме

$$\big(K_h - \mathrm{i}B_h - k^2 M_h\big) U_h = F_h, \tag{1.34}$$

где $[M_h]_{i,j} = m\big(\phi_i, \phi_j\big)$ матрица масс, $[B_h]_{i,j} = b\big(\phi_i, \phi_j\big)$ is матрица граничных масс и $[K_h]_{i,j} = a\big(\phi_i, \phi_j\big)$ is матрица жесткости для $i, j = 1, \cdots, \dim(V_h)$. Здесь вектор вынуждающего воздействия $[F_h]_j = F(\phi_j)$ и вектор решения $[U_h]_j = U_j$.

1.3.2 Аппроксимация на грубой сетке с использованием ММКЭ

Для приближения на грубой сетке мы используем многомасштабный метод конечных элементов со следующим вычислительным алгоритмом:

- построение многомасштабных базисных функций в локальной области ω_i и
- построение и решение системы грубых сеток на многомасштабном пространстве.

Определим грубую сетку $\mathscr{T}_H$ в области Ω, $\mathscr{T}_H = \cup_{i=1}^{N_c} \omega_i$ с размерами ячеек $H \gg h > 0$, где ω_i получается объединением всех грубых ячеек K вокруг одной вершины грубой сетки (локальной области), N_c – количество ячеек. Пусть V_H – конечномерное функциональное пространство, состоящее из функций, гладких на каждой локальной области, связанной с ячейкой грубой сетки. Мы строим локальное многомасштабное пространство $V_H^{\omega_i}$ путем решения локальных задач. Глобальное многомасштабное пространство V_H определяется как линейная оболочка всех $V_H^{\omega_i}$, $\omega_i \in \mathscr{T}_H$.

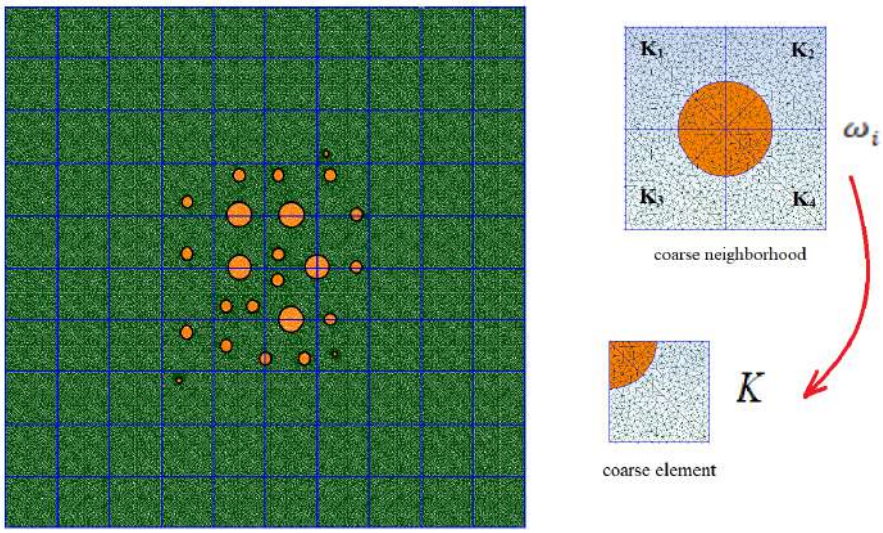


Рис. 1.13: Грубая сетка, локальная область ω_i и грубая ячейка K.

Для аппроксимации на грубой сетке мы используем непрерывный метод Галеркина (CG) и имеем следующую вариационную формулировку: найти $u_H \in V_H$:

$$a(u_H, v) - k^2 m(u_H, v) - ib(u_H, v) = l(v), \quad v \in V_H. \tag{1.35}$$

Для построения многомасштабных базисных функций в локальных областях мы рассматриваем следующие локальные задачи в $K_j \in \omega_i$

- Случай 1 с эллиптическим оператором

$$\nabla \cdot (A(x)\nabla \phi_i) = 0, \quad x \in K_j, \quad \forall K_j \in \omega_i \tag{1.36}$$

  с линейным граничным условием на ∂K_j.

- Случай 2 с полным оператором

$$\nabla \cdot (A(x)\nabla \phi_i) + k^2 n(x)\phi_i = 0, \quad x \in K_j, \quad \forall K_j \in \omega_i \tag{1.37}$$

  с линейным граничным условием на ∂K_j.

Тогда многомасштабное пространство V_H определяется следующим образом

$$V_H = \operatorname{span}\{\phi_i\}.$$

Для построения системы грубой сетки мы используем проекционный подход и определяем оператор проекции

$$R = (\phi_1, ..., \phi_{N_c})^T,$$

поэтому проекцию Галеркина (1.35) можно записать в следующей матричной форме

$$(K_H - k^2 M_H - iB_H)U_H = F_H, \tag{1.38}$$

где

$$K_H = RK_hR^T, \quad M_H = RM_hR^T, \quad B_H = RB_hR^T, \quad F_H = RF_h$$

и представление на мелкой сетке многомасштабного решения дается $U_{ms} = R^T U_H$.

1.3.3 Численные результаты

Мы представляем численные результаты для решения на мелкой сетке и решения на грубой сетке с использованием многомасштабного метода конечных элементов. Расчетная область с неоднородными препятствиями представлена на рис. 1.14 и имеет размерность $\Omega = [-2,2] \times [-2,2]$. Для расчетной сетки мы

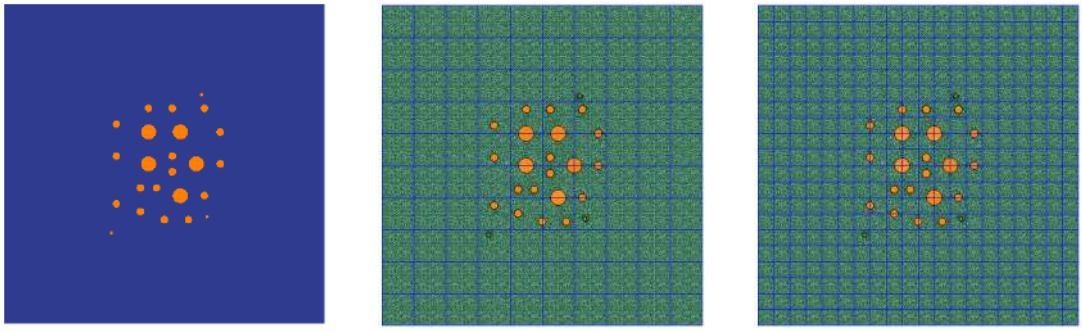


Рис. 1.14: Неоднородная область с мелкой сеткой, содержащая 100802 вершины и 200482 треугольных элемента. Грубая сетка со 121 вершиной и 100 треугольными элементами (в центре). Грубая сетка с 441 вершиной и 400 элементами треугольника (справа).

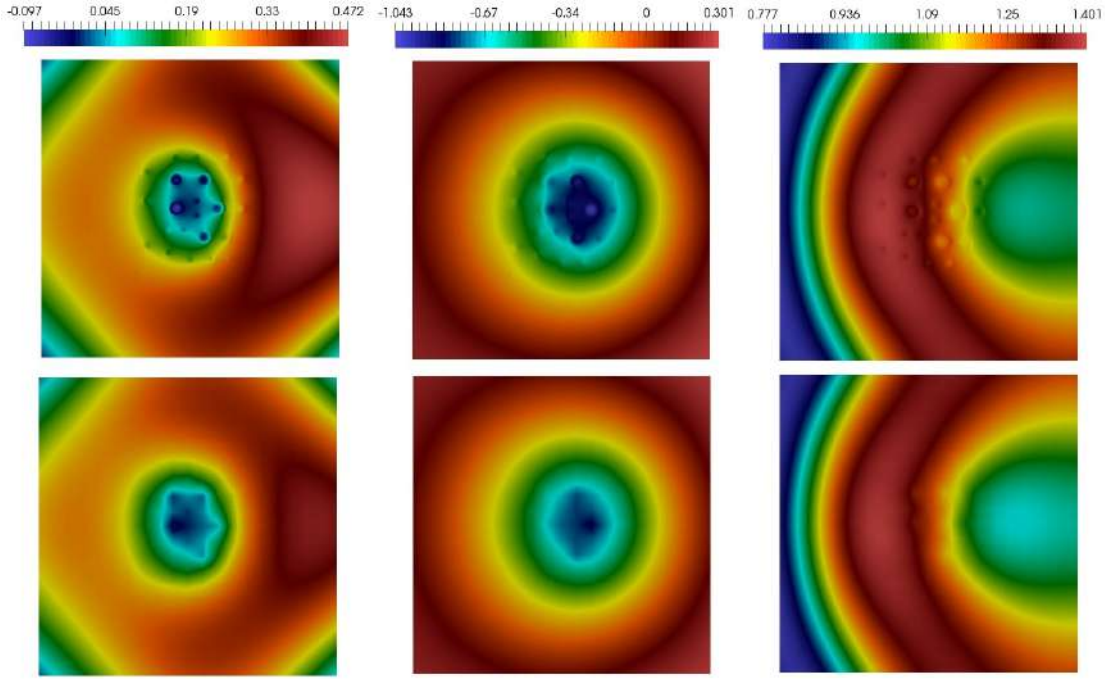


Рис. 1.15: Решения на мелкой сетке (сверху) и на грубой сетке (снизу) для неоднородной области с $k = 1.0$. Re(u), Im(u), Abs(u) (слева направо).

рассматриваем мелкую сетку, а грубые сетки размером 10×10 и 20×20. Мелкая сетка содержит 100802 вершины и 200482 треугольных элемента, структурированная грубая сетка 10×10 со 121 вершиной, 100 треугольными элементами и 20×20 сетка 441 вершиной, 400 треугольных элементов. Положим $k = 0.1, 1, 2$ и $d = (1, 0)$. Для фоновой среды мы устанавливаем $\alpha = 1$ и $n = 1$, а для круглых

включений $\alpha = 10$ и $n = 0.2$.

k	$\|\|e_{u_s^{Re}}\|\|_{L_2}$	$\|\|e_{u_s^{Im}}\|\|_{L_2}$	$\|\|e_{u_s^{Abs}}\|\|_{L_2}$
10×10			
0.1	8.085	4.594	0.015
1	10.767	10.209	2.963
2	40.894	41.064	17.316
20×20			
0.1	6.124	4.437	0.012
1	6.331	6.058	1.707
2	26.305	27.304	10.756

k	$\|\|e_{u_s^{Re}}\|\|_{L_2}$	$\|\|e_{u_s^{Im}}\|\|_{L_2}$	$\|\|e_{u_s^{Abs}}\|\|_{L_2}$
10×10			
0.1	8.075	4.591	0.015
1	6.486	6.427	1.686
2	28.912	28.928	11.681
20×20			
0.1	6.117	4.436	0.012
1	4.216	4.320	1.090
2	18.796	19.536	7.448

Таблица 1.1: Относительные погрешности L_2 в %. Грубая сетка со 121 (10×10) и 441 локальными областями (20×20). Случай 1 (слева) и Случай 2 (справа).

На рис. 1.15 мы представляем решение на мелкой и грубой сетке для реальной, мнимой части и модуля с волновым числом $k = 1$. Мы получили решение с хорошей точностью для модели пониженного порядка с использованием ММКЭ. В Таблице 1.4 мы показываем погрешности многомасштабные решателя для Случая 1 и Случая 2 для грубых сеток с 121 и 441 локальными областями. Мы наблюдаем уменьшение погрешности для грубой сетки размером 20×20. Кроме того, у нас есть большие погрешности для более высоких значений волнового числа k. Сравнивая полученные погрешности из Случая 1 и Случая 2, мы видим, что случай с полным оператором дает меньшие погрешности. Результаты показывают, что представленный метод дает хорошее приближение решения и уменьшает размер системы для задач рассеяния с малыми волновыми числами.

1.4 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для распространения упругих волн в частотной области

В данном разделе построим два типа многомасштабных пространств для решения уравнения Гельмгольца для трещиноватых сред. Численная реализация основана на методе глобальной проекции для построения приближения на грубой сетке. Локальные спектральные задачи, которые использовались для выбора доминирующих режимов, не зависят от частоты. Представленный метод имеет много общего с классическими методами усреднения, поэтому применимость ограничена низкими частотами. Мы представляем численные результаты и рассматриваем несколько тестовых случаев с различными конфигурациями трещин. Численное моделирование показывает, что метод точен для сложных случаев и может значительно уменьшить размер системы.

Обычные численные методы, такие как методы конечных разностей и конечных элементов, приводят к необходимости чрезвычайно плотной пространственной дискретизации и требуют чрезвычайно большие вычислительные ресурсы. Поэтому мы используем обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина, который строит внутренние и граничные базисные функции для сбора мелкомасштабной информации о неоднородности среды для моделирования волнового поля в грубом масштабе [24, 97]. Мы рассматриваем два типа многомасштабных базисных функций: (1) ОММКЭ с непрерывными многомасштабными базисными функциями и (2) ОММКЭ с разрывными многомасштабными базисными функциями.

1.4.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассмотрим задачу в трещиноватой среде. Пусть $\Omega \subset R^d$ – ограниченная расчетная область, а $\gamma \subset R^{d-1}$ – граница раздела трещин, $d = 2$. Распространение упругой волны описывается уравнением Гельмгольца (1.1) в расчетной области Ω.

Поскольку задача рассматривается в трещиноватых средах, для численного моделирования уравнения упругой волны применяется модель линейного скольжения (МЛС) на границе трещин γ [25, 83]. В частности предполагаем, что толщина трещины пренебрежимо мала. Следуя данной модели для задания трещин, мы имеем линейную зависимость между напряжениями и величиной разрыва в поле перемещения следующим образом

$$[u] = Z\sigma n, \quad x \in \gamma, \tag{1.39}$$

где $[u]$ – скачок поля перемещения на трещине, σn – вектор сил на поверхности трещины γ, Z – матрица свойства трещины. В двумерном изотропном случае матрица свойств диагональна и положительно определена

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}.$$

где z_1 и z_2 – нормальные и тангенциальные компоненты матрицы свойств. В численном моделировании мы будем использовать скалярную податливость трещин, при этом $z = z_1 = z_2$ и $Z = \mathscr{I} z$, где $\mathscr{I}$ – это единичная матрица [25, 83].

В расчетах мы используем поглощающие граничные условия первого порядка, поскольку энергия волн должна поглощаться искусственными границами, чтобы избежать неестественных отражений, вызванных конечной расчетной областью [77]

$$i\rho\omega Au = -\sigma n, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.40}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_p & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ – внешняя нормаль к границе, а $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости продольных и поперечных волн (S- и P-волны). Это условие поглощения наложим в вариационной постановке задачи.

Для аппроксимации на мелкой сетке используем Разрывный метод конечных элементов Галеркина с внутренним штрафом (РМГВШ). Метод РМГВШ позволяет моделировать разрывы в поле перемещения для моделирования трещин с помощью модели линейного скольжения [20, 98, 99]. Мы строим мелкую сетку для области трещин Ω, которая разрешает границу трещин γ на уровне сетки.

Пусть $\mathscr{T}_h$ – триангуляция расчетной области Ω, а h – размер мелкой сетки. Мы определяем Γ_h как набор всех внутренних ребер между элементами $\mathscr{T}_h$, $\Gamma_c \subset \Gamma_h$ как подмножество всех ребер, где поле смещения непрерывно и $\Gamma_\gamma \subset \Gamma_h$ – это подмножество ребер, которые представляют трещины, Γ_b – это подмножество ребер на границе, а $\Gamma_h = \Gamma_c \cup \Gamma_\gamma \cup \Gamma_b$. Пусть $e \in \Gamma_h$ будет ребром между элементами ι_1 и ι_2, тогда среднее значение $\{\cdot\}$ и скачок $[\cdot]$ вектора функции u на e задаются формулами

$$\{u\} = \left(u\,|_{\iota_1} + u\,|_{\iota_2}\right)/2, \quad [u] = u\,|_{\iota_1} - u\,|_{\iota_2}.$$

Вариационная формулировка уравнения упругой волны с использованием разрывного метода Галеркина с внутренним штрафом в трещинных средах определяется следующим образом: найти $u \in V$ такое, что

$$\begin{aligned} &\sum_{\iota \in \mathscr{T}_h} \int_\iota (\sigma(u), \varepsilon(\overline{v}))\, dx - \sum_{\iota \in \mathscr{T}_h} \int_\iota \rho\, \omega^2 u \overline{v}\, dx + i \sum_{e \in \Gamma_b} \int_e \rho\, \omega A u \overline{v}\, ds \\ &- \sum_{e \in \Gamma_c} \int_e \{\tau(u)\} [\overline{v}]\, ds - \sum_{e \in \Gamma_c} \int_e \{\tau(\overline{v})\} [u]\, ds \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_c} \frac{\zeta}{h_\iota} \int_e \{\lambda + 2\mu\} [u] [\overline{v}]\, ds + \sum_{e \in \Gamma_f} \int_e Z^{-1} [u] [\overline{v}]\, ds = \sum_{\iota \in \mathscr{T}_h} \int_\iota f \overline{v}\, dx, \end{aligned} \tag{1.41}$$

где ζ – параметр штрафа, $\tau(u) = \sigma n$ – вектор силы, V – подходящее конечномерное функциональное пространство. Здесь u – комплексная функция, а $u = \sum_j u_j \phi_j$, ϕ_j – линейные базисные функции для приближения на мелкой сетке.

По определению следующих билинейных и линейных форм

$$m(u,v) = \sum_{\iota \in \mathscr{T}_h} \int_\iota \rho\, u \bar{v}\, dx, \quad b(u,v) = \sum_{e \in \Gamma_b} \int_e \rho\, A u \bar{v}\, ds, \quad l(v) = \sum_{\iota \in \mathscr{T}_h} \int_\iota f \bar{v}\, dx, \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned} a_{DG}(u,v) = &\sum_{\iota \in \mathscr{T}_h} \int_\iota (\sigma(u), \varepsilon(\bar{v}))\, dx + \sum_{e \in \Gamma_f} \int_e Z^{-1} [u] [\bar{v}]\, ds - \sum_{e \in \Gamma_c} \int_e \{\tau(u)\} [\bar{v}]\, ds \\ &- \sum_{e \in \Gamma_c} \int_e \{\tau(\bar{v})\} [u]\, ds + \sum_{e \in \Gamma_c} \frac{\zeta}{h_\iota} \int_e \{\lambda + 2\mu\} [u] [\bar{v}]\, ds, \end{aligned} \tag{1.43}$$

получим следующую формулировку

$$a_{DG}(u,v) - \omega^2 m(u,v) + i\,\omega\, b(u,v) = l(v). \tag{1.44}$$

Мы можем записать комплексную задачу в матричной форме

$$(K_h - \omega^2 M_h + i\omega B_h) U = F_h, \tag{1.45}$$

где K_h – матрица жесткости, M_h – матрица масс, а B_h – граничная матрица масс.

1.4.2 Многомасштабные методы на грубой сетке

В этом разделе мы описываем построение многомасштабных базисных функций и приближение грубой сетки [24, 45, 53, 97, 100, 101]. Для построения приближения на грубой сетке воспользуемся методом проекции и определим проекционную матрицу R. Мы рассматриваем два типа многомасштабных базисных функций: (1) *ОММКЭ* с непрерывными многомасштабными базисными функциями и (2) *ОММКЭ* с разрывными многомасштабными базисными функциями в грубых ячейках. С алгоритмической точки зрения, различия между двумя рассматриваемыми методами сосредоточены на определении локальных

областей и построении многомасштабных базисных функций. После построения мы собираем многомасштабные базисные функции в матрицу проекций R. Поэтому мы определим построение двух матриц проекций R_{CG} и R_{DG}.

Основные этапы многомасштабного метода одинаковы для обоих подходов. В многомасштабном вычислительном алгоритме у нас есть следующие шаги:

1. построение грубой сетки и локальных областей;
2. построение многомасштабных базисных функций, путем решения локальной задачи собственных значений в каждой локальной области;
3. построение матрицы проекции R (от мелкой сетки к грубой сетке) с использованием вычисленных многомасштабных базисных функций;
4. построение системы мелких сеток и проекции на грубую сетку с помощью матрицы R;
5. решение модели, приведенного порядка и реконструкция решения на мелкой сетке.

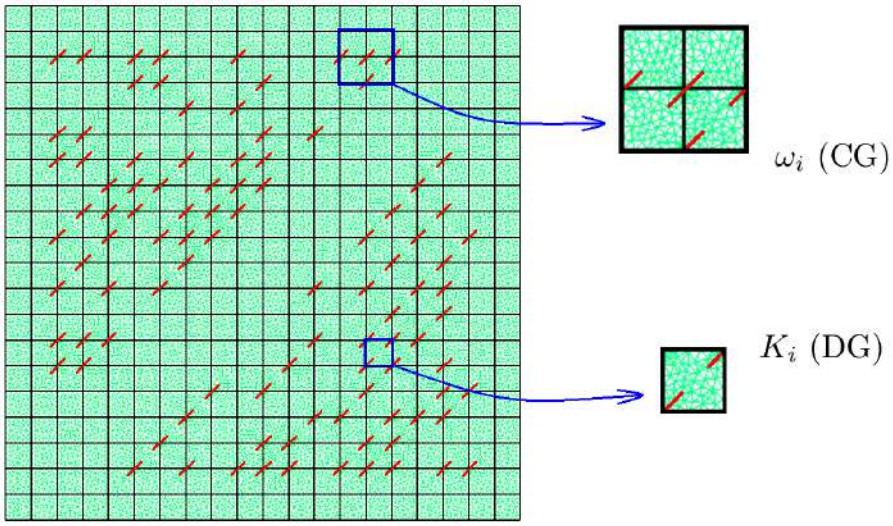


Рис. 1.16: Иллюстрация грубой сетки и локальных областей для методов *ОММКЭ* с разрывными и непрерывными многомасштабными базисными функциями.

Начнем с определения грубой сетки. Пусть $\mathscr{T}_H$ – это разбиение области грубой сетки Ω, $\mathscr{T}_H = \cup_{i=1}^{N_c} K_i$ с размерами ячеек $H \gg h > 0$, где K_i – грубая ячейка,

а N_c – количество грубых ячеек. Отметим, что грани грубой сетки совпадают с гранями мелкой сеткой. В данной работе мы используем структурированную грубую сетку с четырехугольными грубыми ячейками. В общем, форма грубой сетки может быть сложной (неструктурированная грубая сетка) и может быть построена, например, с использованием традиционного разбиения сетки.

Далее мы определяем локальные области. У нас есть:

- для *ОММКЭ* с непрерывными базисами, локальная область ω_i определяется как грубая окрестность, которая содержит четыре ячейки четырехугольника грубой сетки вокруг узла грубой сетки, где $i = 1,..,N_v$ и N_v – количество узлов грубой сетки.
- для *ОММКЭ* с разрывными базисами, локальная область – это ячейка грубой сетки K_i, где $i = 1,..,N_c$ и N_c – количество ячеек грубой сетки.

После этого мы решаем локальные собственные задачи в каждой локальной области, чтобы построить многомасштабные базисные функции, и используя их, мы определяем матрицы проекции R_{CG} и R_{DG}.

Наконец, многомасштабная дискретная система пониженного порядка может быть рассчитана путем проецирования мелкомасштабных матриц на грубую сетку с помощью глобальной матрицы проекций $R = R_{CG}$ или $R = R_{DG}$

$$(K_H - \omega^2 M_H + i\omega B_H)U_H = F_H, \tag{1.46}$$

$$M_H = RM_hR^T, \quad K_H = RK_hR^T, \quad B_H = RB_hR^T, \quad F_H = RF_h, \tag{1.47}$$

где U_H – комплексное решение в многомасштабном пространстве, M_H и K_H – матрицы масс и жесткости грубой сетки, а B_H – граничная матрица масс грубой сетки. После расчета решения на грубой сетке U_H, мы можем восстановить мелкомасштабное решение с помощью $U_{ms} = R^T U_H$.

Далее мы рассмотрим построение многомасштабных базисных функций на основе двух подходов: непрерывного метода Галеркина и разрывного метода Галеркина.

Многомасштабные непрерывные базисные функции

В данном подходе локальная область ω_i получается путем объединения всех грубых ячеек вокруг одной вершины грубой сетки. Чтобы построить многомасштабные базисные функции, мы начнем с решения следующей локальной задачи собственных значений в ω_i: найти $\phi_j^{\omega_i} \in V_h(\omega_i)$ такие что

$$a_{CG}(\phi^{\omega_i}, v) = \eta\, s(\phi^{\omega_i}, v), \quad \forall v \in V_h(\omega_i), \tag{1.48}$$

где

$$s(\phi^{\omega_i}, v) = \int_{\omega_i} \rho\, \phi^{\omega_i} v\, ds.$$

Для определения многомасштабных базисных функций мы выбираем первые M собственных векторов $\phi_1^{\omega_i}$, $\phi_2^{\omega_i}$, ..., $\phi_M^{\omega_i}$ соответствует первым M наименьшим собственным значениям $\eta_1 \leq \eta_2 \leq ... \leq \eta_M$. Чтобы построить непрерывное многомасштабное пространство, мы умножаем собственные векторы на разбиение функций единицы χ_i в локальной области ω_i и определяем матрицы локальной проекции $R_{CG,i}$ $(i = 1, ..., N_v)$ следующим образом

$$R_{CG,i} = \left[\psi_1^{\omega_i}, \psi_2^{\omega_i}, ..., \psi_M^{\omega_i}\right]^T, \tag{1.49}$$

где $\psi_j^{\omega_i} = \chi_i \phi_j^{omega_i}$ $(j = 1, ..., M)$, а χ_i – кусочно-билинейная функция формы на грубой сетке, равная 1 в грубой вершине x_i, и равна 0 во всех остальных грубых вершинах.

Матрица глобальной проекции определяется следующим образом

$$R_{CG} = (R_{CG,1}, R_{CG,2}, ..., R_{CG,N_v}). \tag{1.50}$$

Многомасштабные разрывные базисные функции

В отличие от непрерывного метода Галеркина, разрывный метод Галеркина рассматривает локальную область как грубые ячейки K_i. Для данного подхода

строятся два локальных многомасштабных пространства (граничное и внутреннее) путем решения локальных задач на собственные значения в каждой ячейке грубой сетки $K_i \in \mathscr{T}_H$. Граничная и внутренняя базисные функции определены в локальной области K_i с точностью до разрешения сетки, $\phi_j^{K_i,\alpha} \in V_h(K_i)$, $j = 1,..M_\alpha$, $\alpha = b,o$ (индексы b и o относятся к граничному и внутреннему базису, соответственно). Многомасштабные базисные функции различаются определением локальной спектральной задачи.

Чтобы построить граничные многомасштабные базисные функции, мы решаем следующую спектральную задачу в K_i:

$$a_{DG}(\phi^{K_i,b}, v) = \eta^b s^b(\phi^{K_i,b}, v), \quad \forall v \in V_h(K_i), \tag{1.51}$$

где

$$s^b(\phi^{K_i,b}, v) = \int_{\partial K_i} \rho\, \phi^{K_i,b}\, v\, ds.$$

Для построения граничной многомасштабной базисной функции, мы выбираем первые собственные векторы M_b $\phi_1^{K_i,b}$, $\phi_2^{K_i,b}$, ..., $\phi_{M_b}^{K_i,b}$, соответствующие первым M_b наименьшим собственным значениям $\eta_1^b \leq \eta_2^b \leq ... \leq \eta_{M_b}^b$, и определить следующую матрицу локальной проекции

$$R_{DG,i}^b = \left[\phi_1^{K_i,b}, \phi_2^{K_i,b}, ..., \phi_{M_b}^{K_i,b}\right]^T. \tag{1.52}$$

Внутренние многомасштабные базисные функции определены для захвата внутренних собственных мод для K_i и использования следующей спектральной задачи для определения важных режимов

$$a_{DG}(\phi_j^{K_i,o}, v) = \eta_j^o s^{in}(\phi_j^{K_i,o}), \tag{1.53}$$

где

$$s^{in}(u, v) = \int_{K_i} \rho\, u v\, ds.$$

с однородными граничными условиями Дирихле.

Выбираем первые собственные векторы M_o $\phi_1^{K_i,o}, \phi_2^{K_i,o}, ..., \phi_{M_o}^{K_i,o}$, соответствующие первому M_o наименьшие собственные значения $\eta_1^o \leq \eta_2^o \leq ... \leq \eta_{M_o}^o$. Определим следующую локальную матрицу

$$R_{DG,i}^o = \left[\phi_1^{K_i,o}, \phi_2^{K_i,o}, ..., \phi_{M_o}^{K_i,o}\right]^T. \tag{1.54}$$

Матрица глобальной проекции определяется следующим образом

$$R_{DG} = (R_{DG,1}^b, R_{DG,1}^o, R_{DG,2}^b, R_{DG,2}^o, ..., R_{DG,N_v}^b, R_{DG,N_v}^o). \tag{1.55}$$

Полный анализ устойчивости и сходимости ОММКЭ представлен в [53, 100]. Мы ожидаем аналогичного поведения представленных алгоритмов. Погрешность обоих многомасштабных методов зависит от размера грубой сетки (H) и количества многомасштабных базисных функций ($\Lambda = 1/\lambda_{M+1}$) (см. Теоремы 1 и 3 в [53]).

1.4.3 Численные результаты

В этом разделе представлены численные результаты для приближения на грубой сетке с использованием многомасштабных базисных функций. Мы рассматриваем непрерывный метод Галеркина (CG) и разрывный метод Галеркина (DG) в ОММКЭ. Базисные функции многомасштабного пространства строятся в соответствии с процедурой, описанной выше.

Для численного моделирования мы используем следующие параметры. Расчетная область представлена на рисунке 1.17 и имеет размеры $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ при $L_x = L_y = 500$ м. На рисунке 1.17 мы показываем мелкую сетку (зеленый цвет) и грубую сетку (синий цвет) для двух тестовых геометрий с разной длиной трещин:

- *Геометрия 1*: мелкая сетка содержит 16077 вершин и 31752 треугольных элемента.
- *Геометрия 2*: мелкая сетка содержит 16509 вершин и 32616 треугольных элементов.

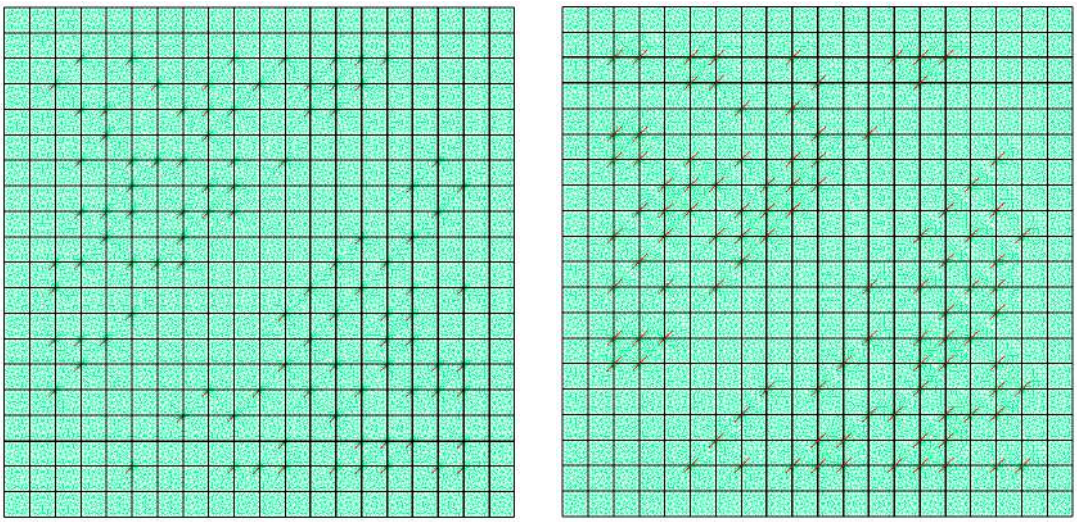


Рис. 1.17: Расчетные сетки для геометрии 1 и 2 со 100 прямыми трещинами. Красным цветом обозначены трещины. Структурированная грубая сетка (черный цвет) с 400 квадратными ячейками. Неструктурированная мелкая сетка (зеленого цвета) с треугольными элементами, соответствующими трещинам.

Обратим внимание, что мелкие сетки – это неструктурированные сетки, которые разрешают трещины. Грубая сетка однородна и содержит 441 вершину и 400 прямоугольных элементов.

Мы задаем источник $f(x) = G(x)P(\theta)$, где $P(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ – полярный угол исходного вектора силы с $\theta = 0$ и пространственная функция $G(x)$ определяется как точечный источник, $G(x) = \delta(x - x_0)$ с $x_0 = (250, 250)$, обозначенным как центр вычислительной области. Мы берем параметры штрафа $\zeta = 4$ и запускаем моделирование для $\omega = 2\pi f_0$ с $f_0 = 5, 10, 15$. Для численного моделирования задаются следующие параметры: $\mu = 28.571 \cdot 10^9$ Па, $\lambda = 23.077 \cdot 10^9$ Па и $\rho = 2300$ кг/м^3. Для матрицы свойств трещин Z в (1.39) мы используем $z_1 = z_2 = 10^7$ м/Па.

Для сравнения результатов вычисляем следующие относительные погрешности в %

$$e_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_\Omega (u^{ms} - u, u^{ms} - u)\, dx}{\int_\Omega (u, u)\, dx}} \cdot 100\%,$$

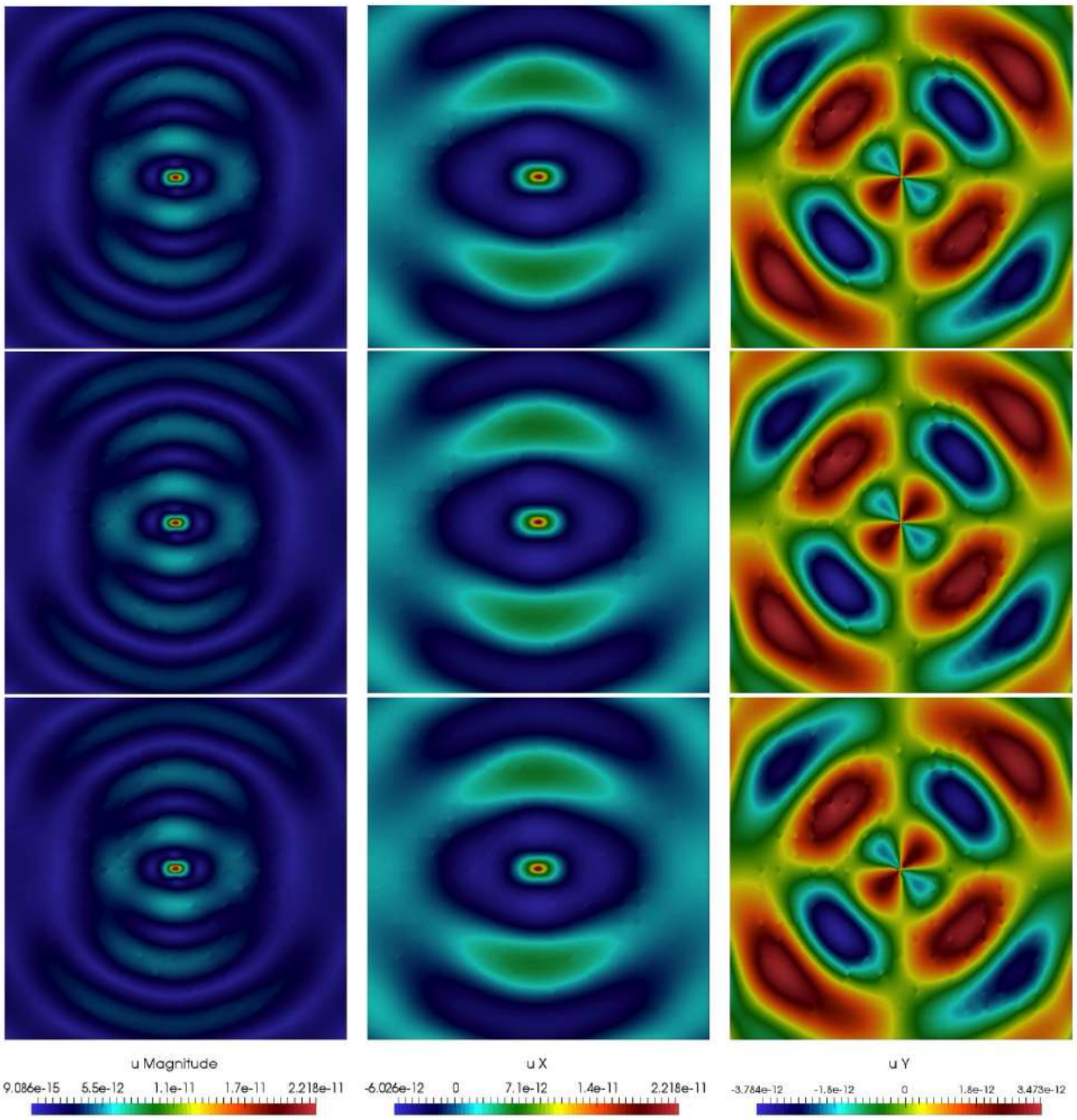


Рис. 1.18: Численное решение для Геометрии 1. Магнитудное значение, X и Y компоненты перемещения (слева на право). Верхнее: эталонное (мелко-сеточное) решение. Нижнее: многомасштабное решение с использованием разрывных базисных функций

$$e_{H_1} = \sqrt{\frac{\int_\Omega (\sigma(u^{ms} - u), \varepsilon(u^{ms} - u))\, dx}{\int_\Omega (\sigma(u), \varepsilon(u))\, dx}} \cdot 100\%,$$

где u^{ms} и u – многомасштабные решения и эталонные решения (решение на мелкой сетке).

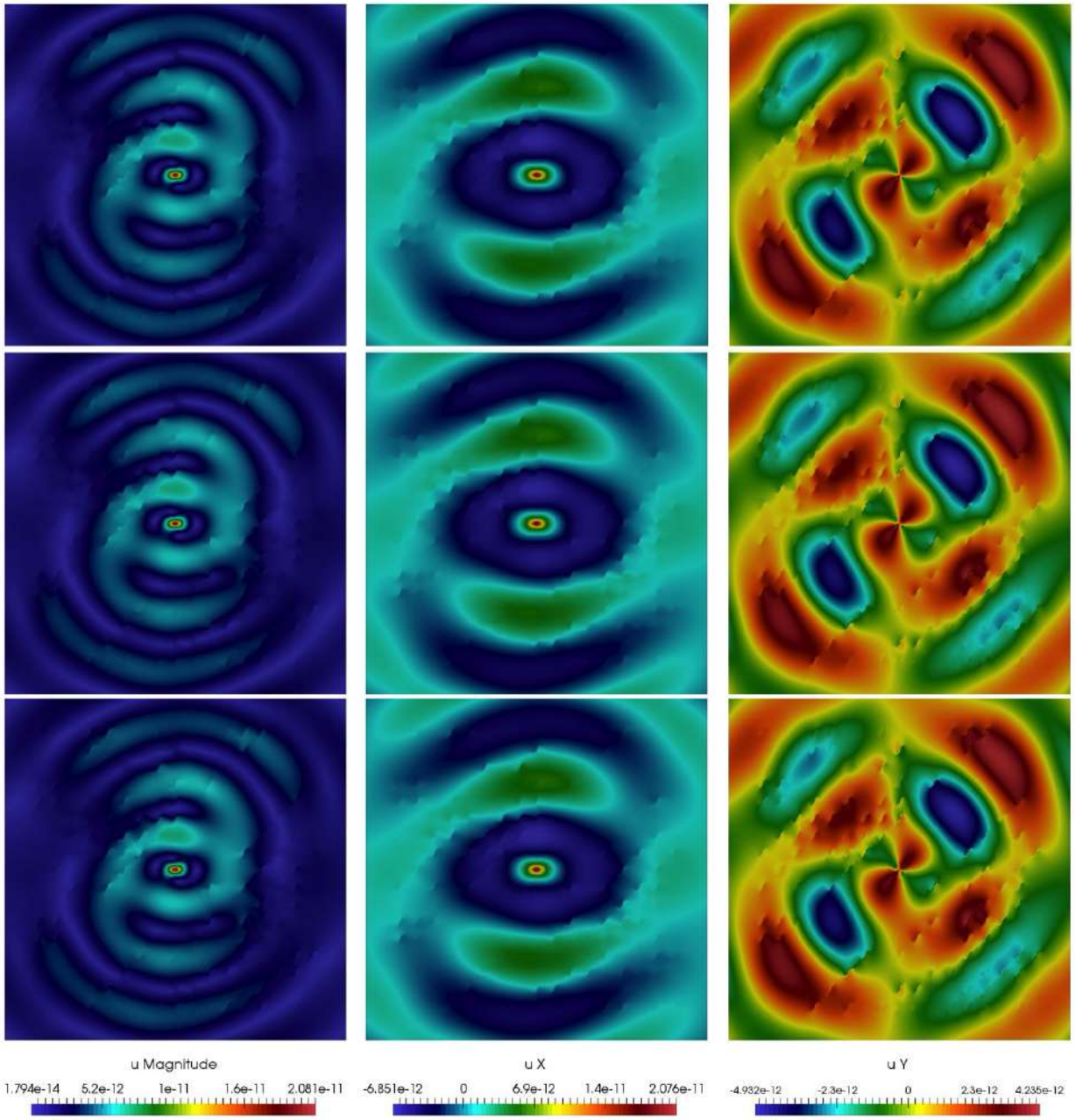


Рис. 1.19: Численное решение для Геометрии 2. Магнитудное значение, X и Y компоненты перемещения (слева на право). Верхнее: эталонное (мелко-сеточное) решение. Нижнее: многомасштабное решение с использованием разрывных базисных функций

На рисунках 1.18 и 1.19 мы представляем действительные части $Re(u)$ решения для Геометрии 1 и 2 с $f_0 = 15$, где многомасштабный решатель построен с использованием метода ОММКЭ с разрывными базисными функциями. Эталонное решение (с мелкой сеткой) показано вверху, а многомасштабное реше-

Geometry 1				Geometry 2			
M	DOF_c	e_{L_2} (%)	e_{H_1} (%)	M	DOF_c	e_{L_2} (%)	e_{H_1} (%)
$f_0 = 5$				$f_0 = 5$			
5	2205	5.683	44.617	5	2205	22.032	49.143
10	4410	3.750	37.737	10	4410	3.174	37.845
15	6615	2.570	34.923	15	6615	2.944	35.137
20	8820	1.921	32.049	20	8820	3.540	32.216
25	11025	1.591	30.422	25	11025	3.559	30.903
50	22050	1.187	25.187	50	22050	2.676	25.583
$f_0 = 10$				$f_0 = 10$			
5	2205	8.717	41.269	5	2205	25.635	47.053
10	4410	5.383	34.477	10	4410	3.9745	35.073
15	6615	3.495	31.825	15	6615	3.7782	32.420
20	8820	2.567	29.241	20	8820	3.8773	29.772
25	11025	2.184	27.861	25	11025	3.6346	28.403
50	22050	1.343	23.025	50	22050	2.4719	23.345
$f_0 = 15$				$f_0 = 15$			
5	2205	19.997	42.195	5	2205	49.906	57.898
10	4410	8.927	32.913	10	4410	8.128	33.930
15	6615	5.217	30.303	15	6615	6.779	31.575
20	8820	2.970	27.818	20	8820	6.506	29.065
25	11025	2.669	26.493	25	11025	6.577	27.819
50	22050	1.924	21.754	50	22050	4.945	22.936

Таблица 1.2: Относительные погрешности для непрерывных базисных функций с различным количеством многомасштабных базисных функций M. Слева: Геометрия 1. Справа: Геометрия 2.

ние – внизу. Из рисунков видно, что длина трещин влияет на решение. Если взять трещину большей длины, то волны отражаются сильнее. Система мелкой сетки, которая использовалась для расчета эталонного решения, имеет размер $DOF_f = 190512$ для Геометрии 1 и $DOF_f = 195696$ для Геометрии 2. Многомасштабные расчеты выполняются для $M = 25$, а размер грубой сеточной системы составляет $DOF_c = 20000$ (10 % от DOF_f). Отметим, что степени свободы определяются количеством базисных функций и количеством локальных об-

Geometry 1				Geometry 2			
M	DOF_c	e_{L_2} (%)	e_{H_1} (%)	M	DOF_c	e_{L_2} (%)	e_{H_1} (%)
$f_0 = 5$				$f_0 = 5$			
5	4000	86.368	99.956	5	4000	86.412	99.969
10	8000	64.157	78.074	10	8000	70.890	81.704
15	12000	34.960	53.810	15	12000	35.100	54.556
20	16000	13.730	41.178	20	16000	21.538	44.009
25	20000	7.556	33.535	25	20000	10.007	34.752
50	40000	2.236	16.672	50	40000	3.516	17.245
$f_0 = 10$				$f_0 = 10$			
5	4000	98.804	99.992	5	4000	99.136	100.004
10	8000	77.995	80.921	10	8000	87.598	86.050
15	12000	28.137	49.248	15	12000	31.581	50.711
20	16000	12.443	37.775	20	16000	19.672	40.105
25	20000	7.534	30.598	25	20000	9.890	31.458
50	40000	2.069	15.541	50	40000	3.295	16.074
$f_0 = 15$				$f_0 = 15$			
5	4000	99.264	99.986	5	4000	99.446	99.994
10	8000	92.430	86.462	10	8000	98.481	90.507
15	12000	42.383	52.390	15	12000	45.749	54.527
20	16000	20.054	38.037	20	16000	26.519	41.610
25	20000	11.739	30.303	25	20000	13.800	32.069
50	40000	3.4803	15.492	50	40000	6.327	17.354

Таблица 1.3: Относительные погрешности для разрывных базисных функций с разным количеством многомасштабных базисных функций $M = M_o = M_b$. Слева: Геометрия 1. Справа: Геометрия 2.

ластей в ОММКЭ с разрывными и непрерывными базисными функциями. У нас есть $DOF_c = N_v \cdot M$ для ОММКЭ с непрерывными базисными функциями и $DOF_c = N_c \cdot (M_o + M_b)$ для ОММКЭ с непрерывными базисными функциями, где N_v – количество вершин грубой сетки, а N_c – количество ячеек грубой сетки.

Относительные ошибки показаны в Таблице 1.4 и Таблице 1.5 для двух подходов, предложенных выше, и для двух геометрий (рис. 1.17). DOF_c – это количество неизвестных в многомасштабном решателе, M – количество мно-

гомасштабных базисных функций для ОММКЭ с непрерывными базисными функциями, а M_o и M_b – количество многомасштабных внутренних и граничных базисных функций для ОММКЭ с разрывными базисными функциями, соответственно. Заметим, что большее количество многомасштабных базисных функций может уменьшить погрешности.

1.5 Обобщенный многомасштабный метод конечных элементов для задачи рассеяния в неоднородной области

В данной подглаве рассматривается задача рассеяния в неоднородной области. Математическая модель описывается уравнением Гельмгольца, связанным с распространением волн с поглощающими граничными условиями. Для решения задачи методом конечных элементов строится неструктурированная мелкая сетка, разрешающая перфорацию на сеточном уровне. Такие аппроксимации приводят к большой системе уравнений. Чтобы уменьшить размер дискретной системы, мы используем многомасштабную аппроксимацию на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Мы строим многомасштабное пространство, используя решение локальных спектральных задач на вспомогательном (снэпшот) пространстве в каждой локальной области. Представлены и исследованы два типа многомасштабных базисных функций. Представлены численные результаты для задачи Гельмгольца в неоднородной области с неоднородными свойствами на препятствиях. Предлагаемый метод исследуется для различных волновых чисел и разного количества многомасштабных базисных функций.

1.5.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассмотрим гармоническую задачу рассеяния (1.31) в неоднородной области в Ω. Для аппроксимации используется метод конечных элементов и имеем следующую вариационную формулировку (1.33). Мелкая сетка, разрешающая мелкомасштабные неоднородности проиллюстрирована на рис. 1.20.

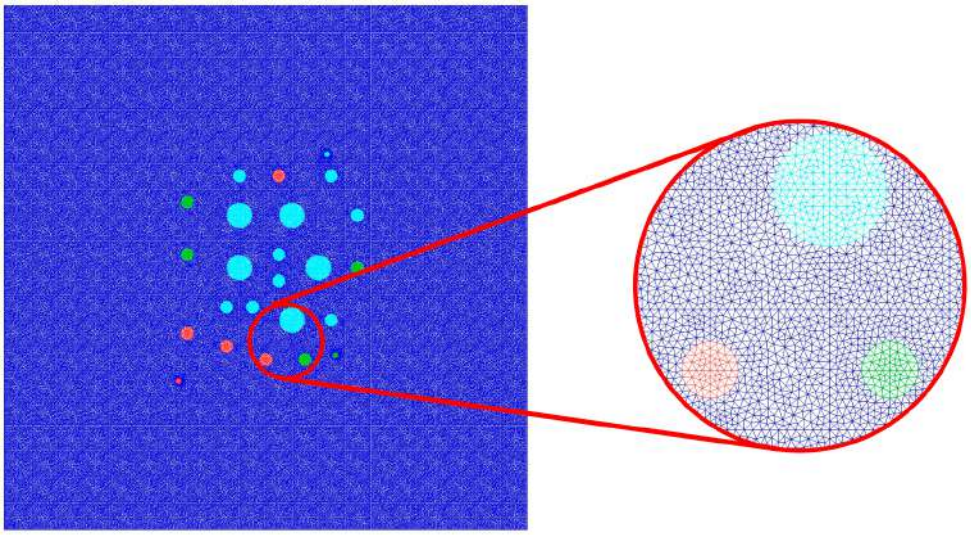


Рис. 1.20: Иллюстрация мелкой сетки $\mathscr{T}_h$ для неоднородной области Ω.

Мы можем написать (1.33) в матричной форме

$$\left(K_h - \mathrm{i}B_h - k^2 M_h\right) U_h = F_h, \tag{1.56}$$

где $[M_h]_{i,j} = m\left(\phi_i, \phi_j\right)$ – матрица масс, $[B_h]_{i,j} = b\left(\phi_i, \phi_j\right)$ – матрица граничных масс и $[K_h]_{i,j} = a\left(\phi_i, \phi_j\right)$ – матрица жесткости для $i, j = 1, \cdots, \dim(V_h)$. Здесь вектор вынуждающего воздействия $[F_h]_j = F(\phi_j)$ и вектор решения $[U_h]_j = U_j$.

1.5.2 Многомасштабная аппроксимация с использованием ОММКЭ

Для грубой аппроксимации мы используем обобщенный многомасштабный метод конечных элементов. В ОММКЭ мы имеем следующий вычислительный алгоритм:

- построение многомасштабных базисных функций путем решения локальной задачи на собственные значения в локальной области ω_p и
- построение и решение грубосеточной аппроксимации на многомасштабном пространстве.

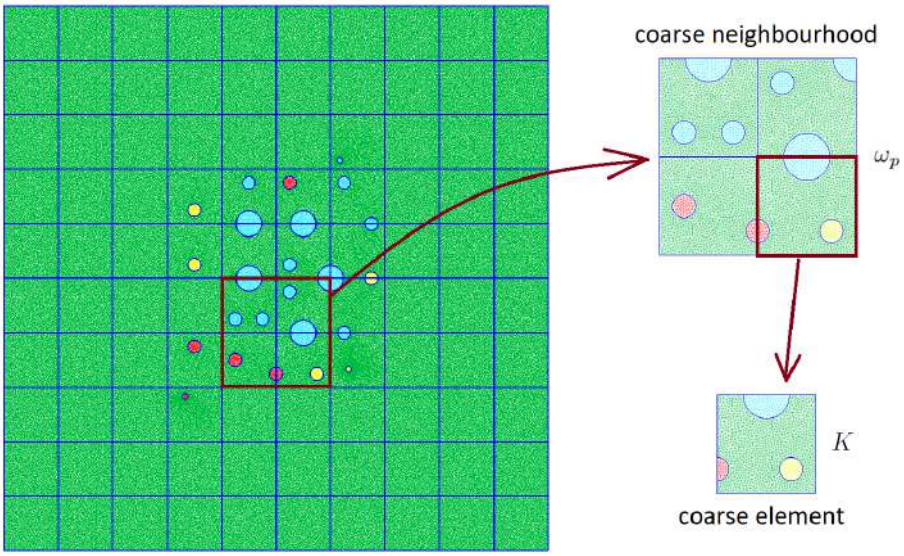


Рис. 1.21: Иллюстрация грубой сетки и локальной области ω_p.

Определим грубую сетку $\mathscr{T}_H$ в области Ω с размерами ячеек $H \gg h > 0$

$$\mathscr{T}_H = \cup_{p=1}^{N_c} K_p,$$

где K_p – локальная область, N_c – количество грубых ячеек (см. рисунок 1.21). Отметим, что мелкомасштабная триангуляция $\mathscr{T}_h$ соответствует краям с грубой сеткой. Пусть V_H – конечномерное функциональное пространство, состоящее из функций, гладких в каждой локальной области, связанной с вершинами грубой сетки. Мы строим локальное многомасштабное пространство V_H путем решения локальных задач на собственные значения в каждой локальной области ω_p, $p = 1, \ldots, N_v$, N_v – число грубых вершин. Кроме того, собственные функции, соответствующие доминирующим собственным значениям, используются в качестве многомасштабных базисных функций.

Тогда многомасштабное пространство V_H определяется как линейная оболочка всех $V_H^{\omega_p}$, $\omega_p \in \mathscr{T}_H$ и будет использоваться как пространство аппрокси-

мации непрерывного метода Галеркина, который можно сформулировать так: найти $u_H \in V_H$:

$$a(u_H, v) - ib(u_H, v) - k^2 m(u_H, v) = F(v), \quad v \in V_H.$$

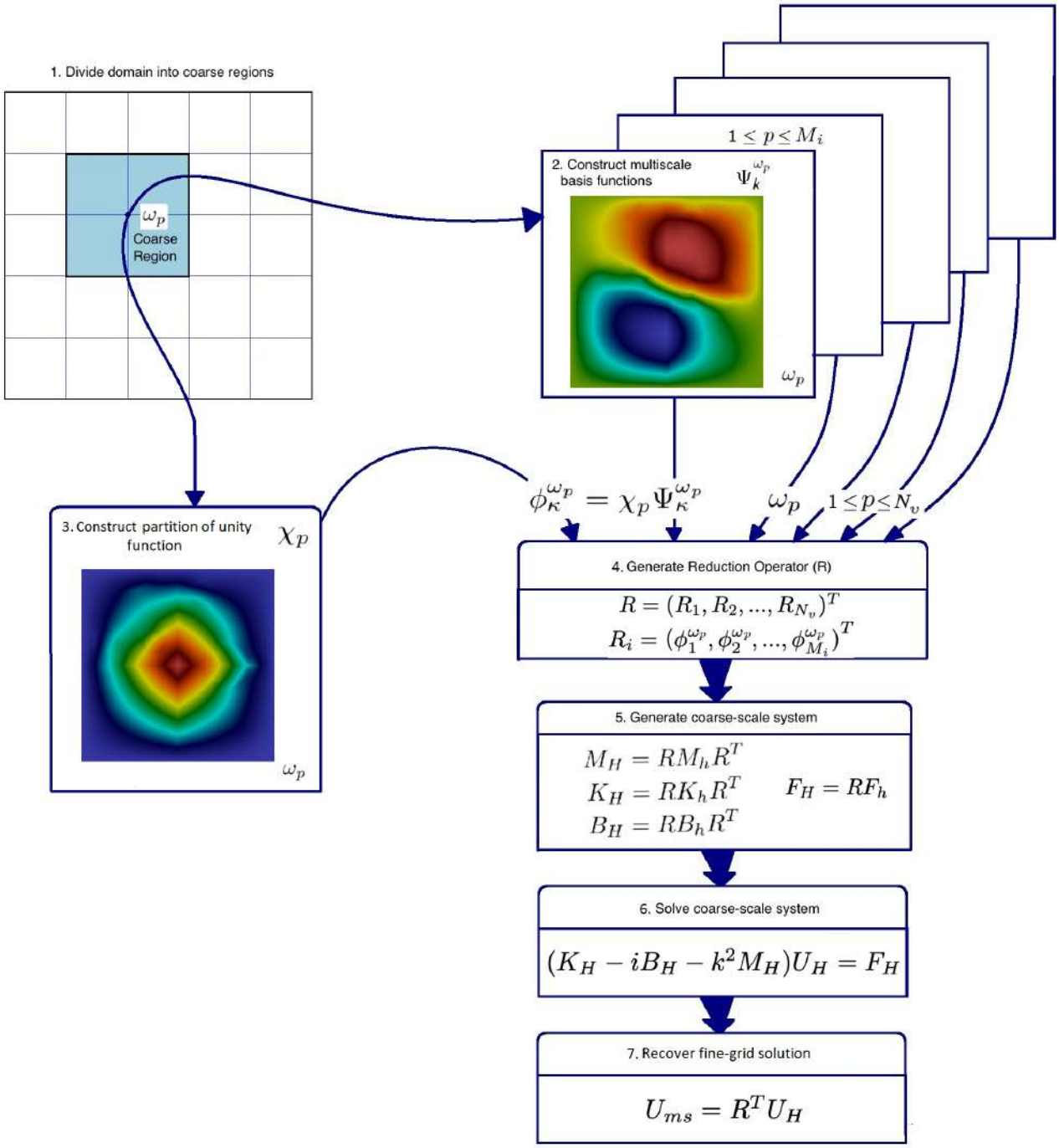


Рис. 1.22: Иллюстрация алгоритма ОММКЭ.

Далее подробно определим алгоритм ОММКЭ. Ориентируемся на двумерную формулировку и используем структурированную грубую сетку с квадрат-

ными грубыми ячейками. Поэтому локальная область ω_p определяется как объединение ячеек грубой сетки вокруг вершины грубой сетки. В многомасштабном методе у нас есть следующие шаги (см. рисунок 1.22 для иллюстрации):

1. Генерация мелкой сетки, соответствующей краям грубой сетки, и извлечение подсетки для локальной области ω_p.
2. Решение локальных задач в каждой локальной области ω_p с различными граничными условиями и уменьшение размерности путем решения локальной спектральной задачи на вспомогательном пространстве ($\Psi_\kappa^{\omega_p}$).
3. Генерация локальных многомасштабных базисных функций путем умножения доминирующих собственных значений $\Psi_\kappa^{\omega_p}$ из предыдущего шага ($p = 1,...,M_i$) на многомасштабное разбиение единичной функции χ_p ($\phi_\kappa^{\omega_p} = \chi_p \Psi_\kappa^{\omega_p}$).
4. Построение проекционной матрицы проекций $R = (R_1, R_2, ..., R_{N_v})^T, \quad R_i = (\phi_1^{\omega_p}, \phi_2^{\omega_p}, ..., \phi_{M_i}^{\omega_p})^T$.
5. Генерация матриц грубого масштаба и правой части, $M_H = RM_hR^T, \quad K_H = RK_hR^T, \quad B_H = RB_hR^T, \quad F_H = RF_h$ с использованием проекционной матрицы, мелкомасштабных матриц и правой части из (1.56).
6. Решение грубой системы, $(K_H - iB_H - k^2 M_H)U_H = F_H$.
7. Реконструкция мелкомасштабного решения, $U_{ms} = R^T U_H$.

Мы начнем с определения вспомогательного пространства в ω_p и подробно рассмотрим построение многомасштабных базисных функций. Мы представляем построение двух типов многомасштабных базисных функций. Первый тип базисных функций основан на эллиптической части оператора задачи ($\mathscr{L}u = \nabla A(x)\nabla u$) для построения вспомогательного пространства и многомасштабной функции разбиения единицы. Второй тип основан на полном операторе ($\mathscr{L}u = \nabla A(x)\nabla u + k^2 n(x)u$). Отметим, что спектральная задача, используемая для определения доминирующих мод, одинакова для обоих типов.

Вспомогательное (снэпшот) пространство. Создание локального вспомогательного пространства $V^{\omega_p,\text{snap}}$, мы находим $\psi_l^{\omega_p} \in V_h(\omega_p)$ путем решения следующей локальной задачи в локальной области ω_p

- *Тип 1*

$$\begin{aligned} \nabla A(x)\nabla\psi_l^{\omega_p} &= 0, \\ \psi_l^{\omega_p} &= \delta_l. \end{aligned} \tag{1.57}$$

- *Тип 2*

$$\begin{aligned} \nabla A(x)\nabla\psi_l^{\omega_p} + k^2 n(x)\psi_l^{\omega_p} &= 0, \\ \psi_l^{\omega_p} &= \delta_l. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Здесь δ_l — дельта-функция, равная 1 на одной граничной вершине мелкой сетки и 0 в противном случае ($l = 1,...,J_i$, где J_i — общее количество вершин на границе). Определенные выше функции $\psi_l^{\omega_p}$ являются гармоническими расширениями. Линейный диапазон гармонических расширений представляет собой локальное вспомогательное (снэпшот) пространство.

$$V^{\omega_p,\text{snap}} = \text{span}\{\psi_1^{\omega_p},...,\psi_{J_i}^{\omega_p}\}. \tag{1.59}$$

Многомасштабное пространство. Мы выбираем несколько важных мод из $V^{\omega_p,\text{snap}}$, чтобы сформировать локальное многомасштабное пространство $V_H(\omega_p)$. Важные моды получаются из следующей локальной спектральной задачи, определенной в локальном вспомогательном пространстве.

$$A^{\omega_p,\text{snap}}\Psi^{\omega_p,\text{snap}} = \lambda\ S^{\omega_p,\text{snap}}\Psi^{\omega_p,\text{snap}}, \tag{1.60}$$

где

$$A^{\omega_p,\text{snap}} = R^{\omega_p,\text{snap}}A^{\omega_p}(R^{\omega_p,\text{snap}})^T, \quad S^{\omega_p,\text{snap}} = R^{\omega_p,\text{snap}}S^{\omega_p}(R^{\omega_p,\text{snap}})^T,$$

$$A^{\omega_p} = [a_{mn}] = a(\phi_m,\phi_n) = \int_{\omega_p} A(x)\nabla\phi_m\cdot\nabla\phi_n dx,$$

$$S^{\omega_p} = [s_{mn}] = s(\phi_m,\phi_n) = \int_{\omega_p} A(x)\phi_m\phi_n dx,$$

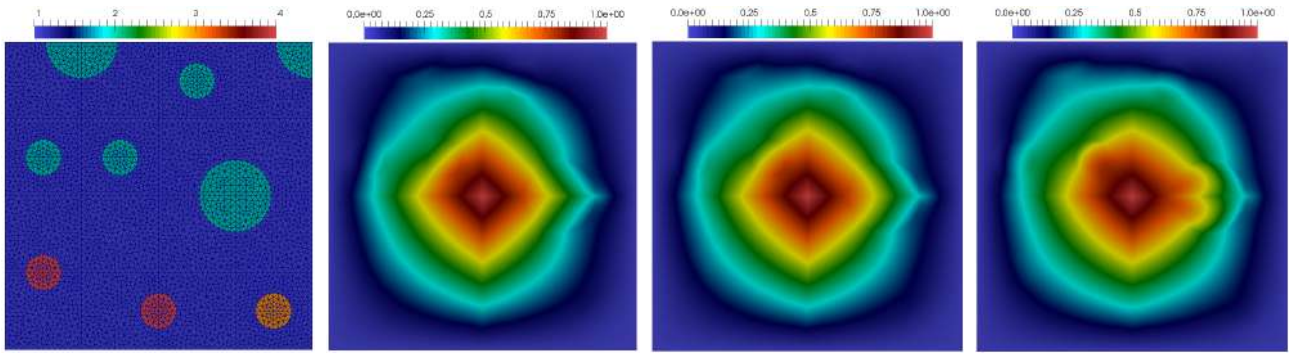


Рис. 1.23: Иллюстрация локальной области и функции разбиения единицы. Первая: локальная область $\omega_p, p = 49$. Вторая: *Тип 1* многомасштабная функция разбиения единицы. Третья: *Тип 2* многомасштабная функция разбиения единицы для $k = 1$. Четвертая: *Тип 1* многомасштабная функция разбиения единицы для $k = 2$.

а матрица проекции во вспомогательном пространстве определяется следующим образом

$$R^{\omega_p,\text{snap}} = (\psi_1^{\omega_p}, ..., \psi_{J_i}^{\omega_p})^T.$$

Для построения пространства пониженного порядка $V_H(\omega_p)$ выберем первые M_i собственные вектора $\Psi_1^{\omega_p,\text{snap}}, \Psi_2^{\omega_p,\text{snap}}, ..., \Psi_{M_i}^{\omega_p,\text{snap}}$ соответствующие первым M_i наименьшим собственным значениям $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_{M_i}$, и определим пространство $V_H(\omega_p)$ при

$$V_H(\omega_p) = \text{span}\{\phi_1^{\omega_p}, ..., \phi_{M_i}^{\omega_p}\}. \tag{1.61}$$

где $\phi_\kappa^{\omega_p} = \chi_p \Psi_\kappa^{\omega_p}$ и $\Psi_\kappa^{\omega_p} = (R^{\omega_p,\text{snap}})^T \Psi_\kappa^{\omega_p,\text{snap}}$, $k = 1, ..., M_i$ (см. Рисунок 1.24). Здесь χ_p — многомасштабная функция разбиения единиц.

Многомасштабная функция разбиения единиц. Для построения функции разбиения единиц решим следующую локальную задачу в $\forall K_j \in \omega_p$ (см. Рис. 1.23):

- *Тип 1*

$$\begin{aligned} \nabla A(x) \nabla \chi_p &= 0, \\ \chi_p &= g_p. \end{aligned} \tag{1.62}$$

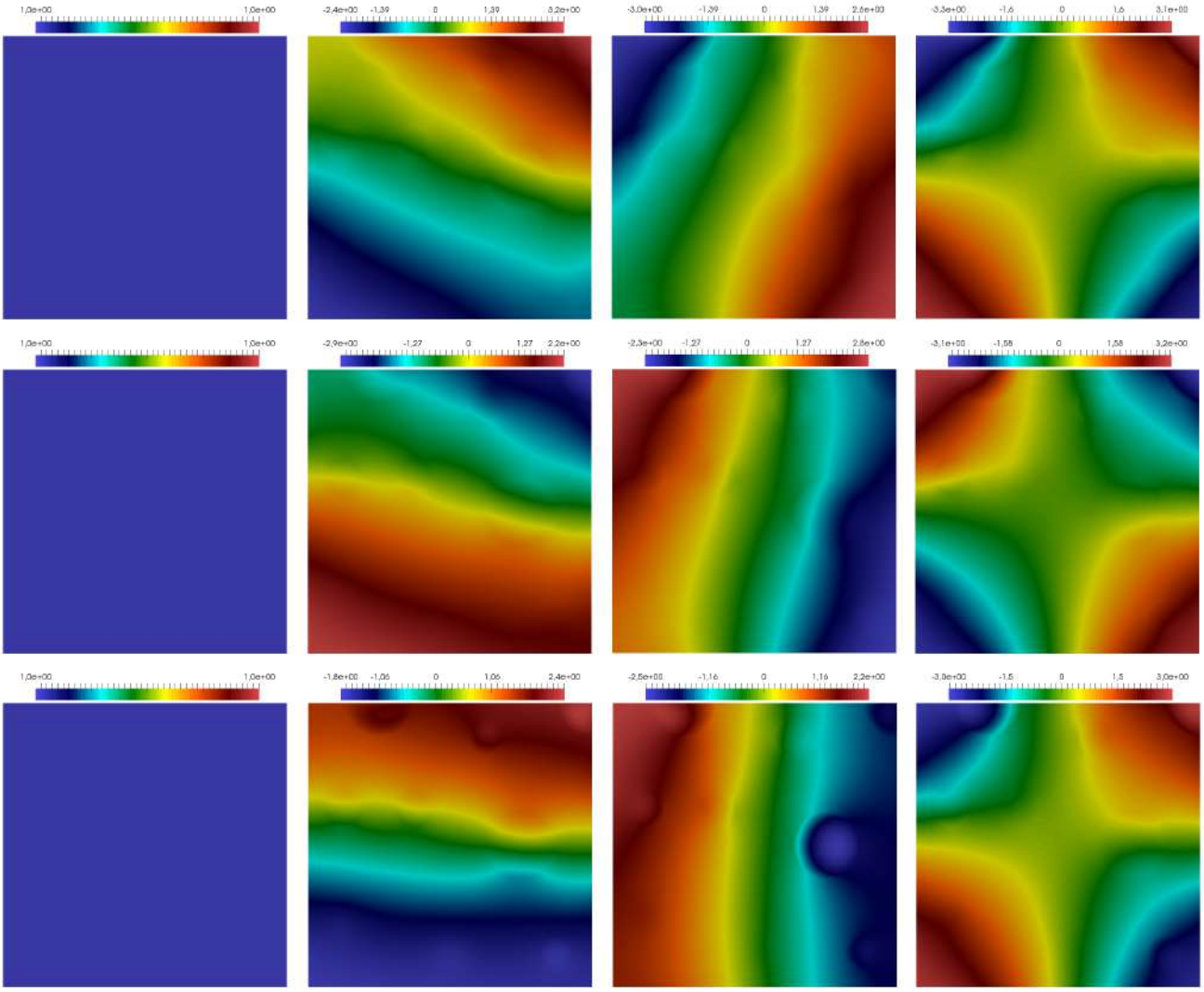


Рис. 1.24: Иллюстрация собственных векторов соответствует первым четырем наименьшим собственным значениям в локальной области $\omega_p, p = 49$. Первая: *Тип 1* спектральная задача. Вторая: *Тип 2* спектральная задача с $k = 1$. Третья: *Тип 1* спектральная задача с $k = 2$.

- *Тип 2*

$$\begin{aligned} \nabla A(x)\nabla\chi_p + k^2 n(x)\chi_p &= 0, \\ \chi_p &= g_p. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Здесь g_p — линейные базисные функции, определенные на грубой сетке.

Метод глобальной проекции для определения грубой системы. Система грубого масштаба может быть рассчитана путем проецирования матриц мелкого масштаба на грубую сетку с глобальной матрицей проекции, собранной из

рассчитанных многомасштабных базисных функций.

$$R = (R_1, R_2, ..., R_{N_v})^T, \quad R_p = (\phi_1^{\omega_p}, \phi_2^{\omega_p}, ..., \phi_{M_i}^{\omega_p})^T \tag{1.64}$$

где R_p — матрица локальной проекции в локальной области ω_p, а N_v — количество вершин грубой сетки.

В численной реализации мы сначала собираем глобальные матрицы M_h, K_h, B_h и вектор F_h в (1.56). Затем, используя глобальную проекционную матрицу R, мы определяем систему грубого масштаба

$$(K_H - iB_H - k^2 M_H)U_H = F_H, \tag{1.65}$$

где $M_H = RM_hR^T$ – массовая матрица грубого масштаба, $K_H = RK_hR^T$ – грубомасштабная матрица жесткости, $B_H = RB_hR^T$ – грубомасштабная матрица граничных масс и $F_H = RF_h$ – является грубой правой частью. После вычисления решения на грубой сетке U_H мы можем восстановить мелкомасштабное решение по формуле $U_{ms} = R^T U_H$.

1.5.3 Численные результаты

Представляем результаты для мелкомасштабных решений и решений на грубой сетке с использованием построенного многомасштабного метода. Для численного исследования мы используем решение с мелкой сеткой в качестве эталонного решения для расчета ошибок.

Рассматривается задача (1.31) в области $\Omega = [-2,2] \times [-2,2]$ с несколькими неоднородными препятствиями (см. рисунок 2.4). Мы устанавливаем $k = 1.0$ и $d = (1,0)$. Для области без препятствий, мы устанавливаем $\alpha = 1$ и $n = 1$ в Ω_0. Имеем три типа включения окружностей с разными значениями коэффициентов

- $\alpha = 3$, $n = 0.8$ (первый тип),
- $\alpha = 5$, $n = 0.4$ (второй тип),
- $\alpha = 10$, $n = 0.2$ (третий тип).

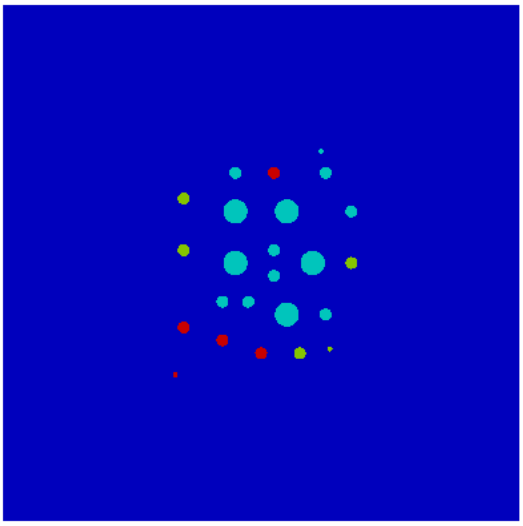


Рис. 1.25: Вычислительная область с препятствиями $\Omega = \Omega_0 \cup D$. Ω_0 — область без препятствий (синий цвет). D — препятствия (голубой цвет — первого типа, зеленый — второго типа и красный — третьего типа).

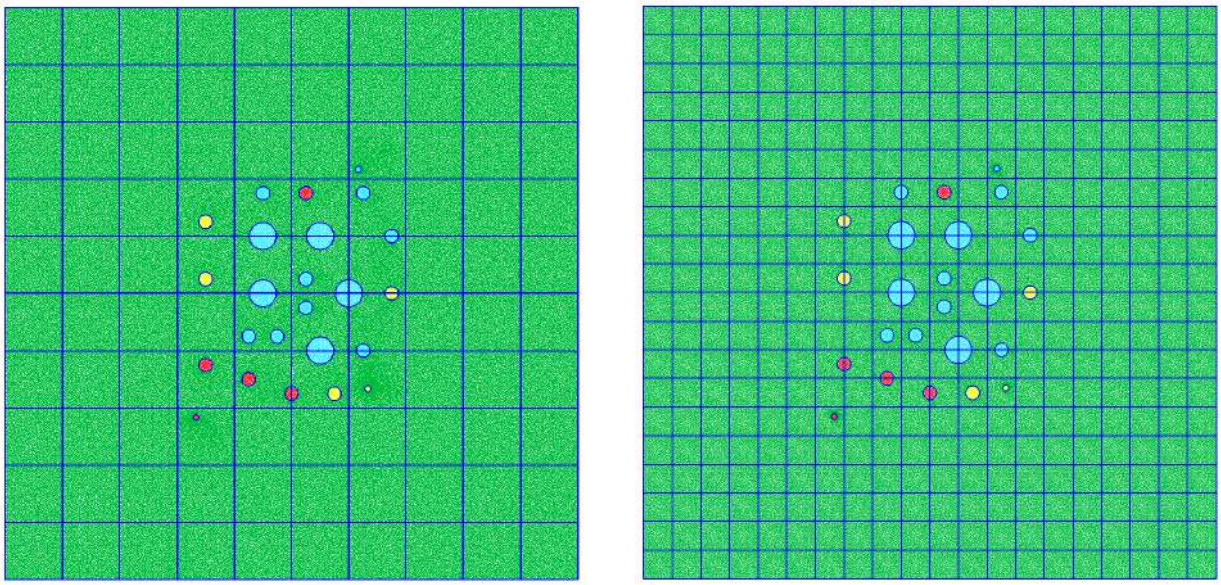


Рис. 1.26: Грубые и мелкие сетки. Мелкая сетка с 100802 вершинами и 200482 треугольными элементами (зеленый цвет для области без препятствий и разноцветный для препятствий). Слева: грубая сетка 10×10 со 121 вершиной и 100 квадратичными элементами (синий цвет). Справа: грубая сетка 20×20, 441 вершина и 400 квадратичных элементов (синий цвет).

Для исследования предложенного многомасштабного метода рассмотрим две структурированные грубые сетки

1) 10×10 грубая сетка со 121 вершиной и 100 квадратичными элементами,

2) 20×20 грубая сетка с 441 вершиной и 400 квадратичными элементами.

Соответствующая неструктурированная мелкая сетка с 100802 вершинами и 200482 треугольными элементами. Грубая и мелкая сетка представлены на рисунке 1.26. Следует отметить, что мелкие сетки соответствуют включениям и краям грубой сетки.

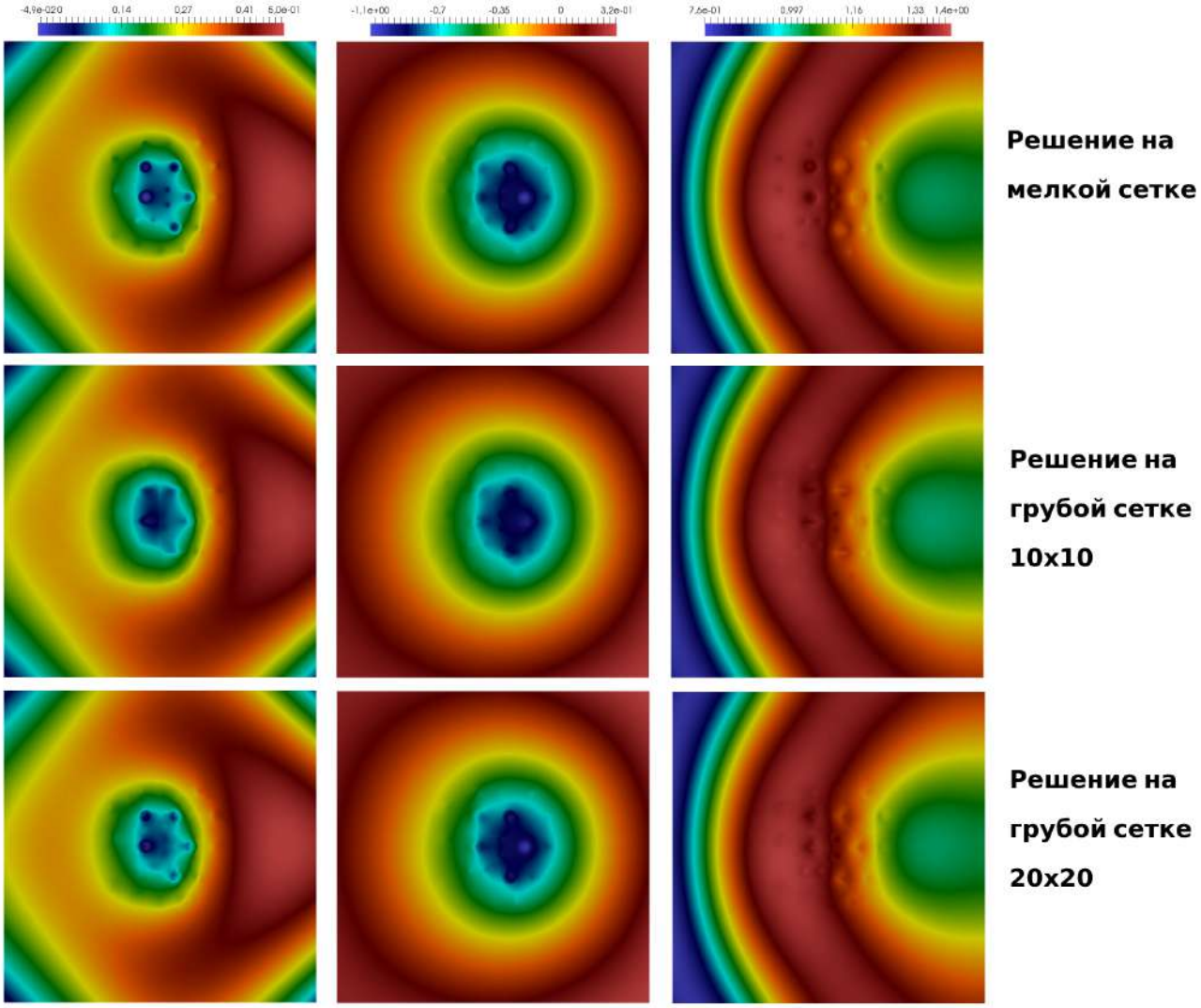


Рис. 1.27: Эталонные и многомасштабные решения для $k = 1$, Re(u), Im(u) и Abs(u)(слева направо). *Тип 2* многомасштабные базисные функции с $M = 6$. Первый ряд: мелкомасштабный, $DOF_f = 100802$. Второй ряд: многомасштабные решения на грубой сетке 10×10, $DOF_c = 726$. Третий ряд: многомасштабные решения на грубой сетке 20×20, $DOF_c = 2646$.

Чтобы сравнить результаты, мы вычисляем относительные ошибки в норме L^2 между многомасштабным решением и мелкомасштабным решением

$$e(u) = \frac{||u - u_f||_{L_2}}{||u||_{L_2}} \cdot 100\%, \quad ||u||_{L_2} = \sqrt{\int_\Omega u^2 \, dx},$$

где $e_{Re} = e(Re(u))$, $e_{Im} = e(Im(u))$, $e_{Abs} = e(Abs(u))$, u является многомасштабным решением с использованием ОММКЭ, а u_f является эталонным (мелкомасштабным) решением.

На рисунке 1.27 показано распределение перемещений для неоднородной среды с $k = 1$. Первая строка представляет эталонное решение на мелкой сетке, вторая и третья строки представляют решение на грубой сетке 10×10 и 20×20 с 6 многомасштабными базисными функциями *Tuna 2*. Первый столбец представляет действительную часть решения Re(u), второй столбец – мнимая часть Im(u) и третий – абсолютное значение решения Abs(u). Здесь DOF_c обозначает количество неизвестных на грубой сетке, а $DOF_c = N_v^c \cdot M$, где M обозначает количество базисных функций в каждой локальной области, а N_v^c — количество вершин грубой сетки, DOF_f — количество неизвестных на мелкой сетке, а $DOF_f = N_v^f$, где N_v^f — количество вершин мелкой сетки. Мы наблюдаем хорошее решение, используя представленный многомасштабный метод с $e_{Abs} = 1,260\%$ на грубой сетке 10×10 и $e_{Abs} = 0,517\%$ на грубой сетке 20×20.

В таблицах 1.4 и 1.5 представлены относительные погрешности L_2 для различных $k = 0.1, 0.5, 1, 2$ на 10×10 и 20×20 грубых сетках, соответственно. Исследовано влияние количества многомасштабных базисных функций *Tuna 1* и *Tuna 2* на точность метода. В левой таблице представлены погрешности многомасштабного решения с использованием многомасштабных базисных функций *Tuna 1*. В правой таблице приведены погрешности для базисных функций *Tuna 2*, учитывающих волновое число k и неоднородность коэффициента $n(x)$. Из результатов расчетов для грубой сетки 10×10, представленных в таблице 1.4, мы наблюдаем хорошую точность с одинаковыми погрешностями для обоих типов многомасштабных базисных функций для малых значений $k = 0,1$ и

$0,5$ на грубой сетке 10×10. Для случаев с $k = 1$ и 2, мы получаем лучшие результаты, используя многомасштабное пространство *Tun 2*, учитывающее k и $n(x)$. Например, мы имеем $4.1, 3.5, 1.1\%$ погрешностей для e_{Re}, e_{Im}, e_{Abs} на грубой сетке 10×10 с 8многомасштабными базисными функциями *Tuna 1* для $k = 1$. Для базисных функций *Tuna 2*, мы получаем лучшие результаты с погрешностями $2.3, 1.9, 0.6\%$ для e_{Re}, e_{Im}, e_{Abs}. Для $k = 2$ на грубой сетке 10×10 мы имеем $17.1, 17.6, 6.5\%$ погрешностей для e_{Re}, e_{Im}, e_{Abs} для *Tuna 1* ($M = 8$) и $7.6, 7.5, 2.5\%$ для многомасштабного пространства*Tuna 2*. Используя 8 многомасштабных базисных функций, мы имеем $DOF_c = 968$ на грубой сетке 10×10 и на мелкой сетке $DOF_f = 100802$.

Численные результаты для грубой сетки 20×20 приведены в таблице 1.5. Мы видим, что представленный многомасштабный метод хорошо работает для $k = 0.1, 0.5$ и 1 для обоих типов многомасштабных базисных функций. Для $k = 2$, мы получаем лучшие результаты для многомасштабных базисных функций *Tuna 2*. Например, для $M = 8$, мы имеем $8.3, 8.5, 3.0\%$ погрешностей для e_{Re}, e_{Im}, e_{Abs} для *Tuna 1* ($M = 8$) и $2.0, 1.5, 0.6\%$ для *Tuna 2* многомасштабных пространств. Используя 8 многомасштабных базисных функций, мы имеем $DOF_c = 3528$ на грубой сетке 20×20 и на мелкой сетке $DOF_f = 100802$. Численное решение с использованием 8 многомасштабных базисных функций на грубой сетке 20×20 дает меньшую погрешность ($e_{Abs} = 2.5\%$) чем на грубой сетке 10×10 с таким же количеством базисных функций ($e_{Abs} = 0.6\%$). Но размер системы больше, $DOF_c = 3528$ на грубой сетке 20×20 и $DOF_c = 968$ на грубой сетке 10×10. Однако мы видим, что на более мелкой грубой сетке меньшее количество базисных функций может дать хорошие результаты. Например, при $M = 2$ у нас хорошие результаты с $9.1, 8.6, 2.4\%$ погрешностями для e_{Re}, e_{Im}, e_{Abs} для многомасштабного базиса *Tuna 2* функции с $DOF_c = 882$.

Мы получаем хорошие результаты со значительным уменьшением размера системы для представленного многомасштабного метода с погрешностью около

1%, используя многомасштабное пространство *Тип 2* и достаточное количество многомасштабных базисных функций на грубой сетке 20×20. Мы наблюдаем, что погрешности уменьшаются по мере увеличения числа многомасштабных базисных функций и/или увеличения размера грубой сетки, как и ожидалось.

1.6 Выводы

В данной главе были рассмотрены задачи распределение волн в неоднородных средах.

В первом разделе рассмотрено численное моделирование упругих волн в неоднородных трещиноватых областях. Для аппроксимации по пространственным переменным был использован разрывный метод Галеркина. Аппроксимация по времени происходит с использованием явной разностной схемы, и приводит к необходимости обращения матрицы масс. Вычислительная реализация использует блочно-диагональную структуру матрицы масс для построения эффективного метода решения на каждом временном слое. Представлены результаты численного моделирования с использованием разработанного метода. В качестве модельных задач, мы рассмотрели задачи с неоднородными свойствами и при наличии трещин. Результаты иллюстрируют, что предложенный метод позволяет эффективно решить поставленную задачу.

Во втором разделе было исследовано численное усреднения для задачи распределение волн в трещиноватых средах. Для аппроксимации пространственных переменных использовался метод Галеркина. Приведены результаты численного моделирования с использованием разработанной методики. В качестве модельных задач рассматривались задачи с неоднородными свойствами и с наличием трещин. Приведенные численные результаты показывают, что предложенный метод является эффективным методом решения поставленной задачи.

В третьем разделе был представлен многомасштабный метод конечных элементов (ММКЭ) для решения задачи распространения волн в неоднородных

средах. Были протестированы два подхода по построению локальных базисных функций на основе двух типов локальных задач: (1) с использованием эллиптической части оператора и (2) с использованием оператора Гельмгольца. Приведены численные результаты численного решения двумерной модельной задачи, показан эффективность предложенного метода для различных волновых чисел.

В четвертой разделе построена модель пониженного порядка с использованием обобщенного многомасштабного непрерывного метода конечных элементов Галеркина и обобщенного многомасштабного разрывного метода конечных элементов Галеркина. Представлены численные результаты для разных вычислительных областей с трещинами, чтобы продемонстрировать эффективность представленных методов. Численные результаты показывают, что представленные многомасштабные методы дают хорошее приближение решения и уменьшают размер системы для обоих методов. Наблюдается хорошая динамика уменьшения L_2 погрешностей для обоих методов при увеличении числа многомасштабных базисных функций.

В пятом разделе была рассмотрена задача рассеяния в неоднородных средах. Для численного решения построили мелкую сетку, которая разрешает неоднородности на уровне сетки. Чтобы уменьшить размер мелкой сетки, был представлен обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ) для аппроксимации на грубой сетке. В ОММКЭ построили многомасштабные базисные функции на основе решения локальных спектральных задач во вспомогательном пространстве. Представляем два подхода к построению локальных базисных функций на основе двух типов локальных задач с использованием эллиптической части оператора и оператора Гельмгольца. Представлено численное исследование модельной задачи с различным волновым числом на двух грубых сетках (10×10 и 20×20). Численные результаты показали, что представленный метод обеспечивает точное решение задачи при

значительном уменьшении размера системы.

M	DOF_c	e_{Re}	e_{Im}	e_{Abs}
$k = 0.1$				
1	121	7.433	3.993	0.0153
2	242	5.665	3.334	0.0119
4	484	3.079	1.896	0.006
6	726	2.589	1.150	0.004
8	968	2.414	1.014	0.004
12	1452	1.377	0.751	0.002
16	1936	1.242	0.616	0.002
$k = 0.5$				
1	121	7.152	3.463	0.341
2	242	5.169	2.845	0.242
4	484	3.128	1.701	0.157
6	726	2.773	1.242	0.146
8	968	2.591	1.114	0.137
12	1452	1.467	0.717	0.079
16	1936	1.327	0.612	0.071
$k = 1$				
1	121	9.885	9.707	2.917
2	242	7.552	7.382	2.236
4	484	4.962	4.372	1.407
6	726	4.466	3.795	1.260
8	968	4.134	3.507	1.164
12	1452	2.287	1.965	0.644
16	1936	2.080	1.778	0.585
$k = 2$				
1	121	40.185	39.993	16.355
2	242	29.123	28.042	10.911
4	484	20.908	21.556	8.150
6	726	18.499	19.141	7.063
8	968	17.133	17.644	6.525
12	1452	11.124	11.454	4.166
16	1936	9.873	10.147	3.670

M	DOF_c	e_{Re}	e_{Im}	e_{Abs}
$k = 0.1$				
1	121	7.433	3.993	0.015
2	242	5.662	3.334	0.011
4	484	3.080	1.900	0.006
6	726	2.587	1.150	0.004
8	968	2.412	1.014	0.004
12	1452	1.376	0.752	0.002
16	1936	1.240	0.616	0.002
$k = 0.5$				
1	121	7.151	3.463	0.341
2	242	5.089	2.832	0.237
4	484	3.106	1.747	0.155
6	726	2.717	1.235	0.143
8	968	2.529	1.103	0.134
12	1452	1.435	0.714	0.077
16	1936	1.293	0.606	0.069
$k = 1$				
1	121	6.074	6.303	1.700
2	242	4.478	4.892	1.315
4	484	3.135	2.998	0.870
6	726	2.599	2.279	0.701
8	968	2.320	1.999	0.619
12	1452	1.767	1.602	0.496
16	1936	1.576	1.411	0.439
$k = 2$				
1	121	28.242	27.848	11.045
2	242	25.430	25.030	9.469
4	484	12.500	12.742	4.373
6	726	9.144	9.187	3.080
8	968	7.606	7.592	2.574
12	1452	6.285	6.251	2.171
16	1936	5.647	5.625	1.971

Таблица 1.4: Относительные погрешности для перемещений с разным числом многомасштабных базисов M . Грубая сетка со 121 локальной областью (10×10). $DOF_f = 100802$. Слева: *Тип 1* многомасштабные базисные функции. Справа: *Тип 2* многомасштабные базисные функции.

M	DOF_c	e_{Re}	e_{Im}	e_{Abs}
$k = 0.1$				
1	441	5.337	3.743	0.011
2	882	3.735	2.300	0.007
4	1764	2.057	0.907	0.004
6	2646	1.111	0.604	0.002
8	3528	0.950	0.511	0.001
12	5292	0.776	0.325	0.001
16	7056	0.710	0.248	0.001
$k = 0.5$				
1	441	4.171	2.723	0.197
2	882	3.297	1.847	0.159
4	1764	2.147	0.917	0.111
6	2646	1.181	0.568	0.061
8	3528	1.016	0.481	0.054
12	5292	0.839	0.343	0.044
16	7056	0.767	0.283	0.041
$k = 1$				
1	441	5.726	5.644	1.654
2	882	5.000	4.730	1.456
4	1764	3.396	2.931	0.957
6	2646	1.818	1.607	0.517
8	3528	1.544	1.361	0.436
12	5292	1.265	1.123	0.356
16	7056	1.138	1.012	0.319
$k = 2$				
1	441	25.194	25.772	9.789
2	882	21.605	22.049	8.074
4	1764	15.005	15.299	5.568
6	2646	8.396	8.591	3.050
8	3528	7.450	7.629	2.712
12	5292	6.330	6.382	2.275
16	7056	5.701	5.712	2.030

M	DOF_c	e_{Re}	e_{Im}	e_{Abs}
$k = 0.1$				
1	441	5.324	3.742	0.011
2	882	3.721	2.299	0.007
4	1764	2.042	0.907	0.004
6	2646	1.104	0.604	0.002
8	3528	0.944	0.510	0.001
12	5292	0.771	0.325	0.001
16	7056	0.705	0.248	0.001
$k = 0.5$				
1	441	3.782	2.527	0.188
2	882	2.861	1.598	0.143
4	1764	1.769	0.644	0.094
6	2646	0.946	0.433	0.051
8	3528	0.817	0.368	0.044
12	5292	0.674	0.239	0.036
16	7056	0.616	0.184	0.033
$k = 1$				
1	441	2.327	2.852	0.727
2	882	1.747	1.984	0.539
4	1764	1.183	0.965	0.307
6	2646	0.640	0.556	0.165
8	3528	0.566	0.471	0.143
12	5292	0.455	0.313	0.110
16	7056	0.412	0.241	0.098
$k = 2$				
1	441	11.990	11.530	3.339
2	882	9.134	8.609	2.482
4	1764	4.654	3.848	1.605
6	2646	2.488	2.021	0.785
8	3528	2.010	1.590	0.664
12	5292	1.367	1.034	0.430
16	7056	1.168	0.834	0.364

Таблица 1.5: Относительные погрешности для перемещений с разным числом многомасштабных базисов M . Грубая сетка с 441 локальными областями (20×20). $DOF_f = 100802$. Слева: *Тип 1* многомасштабные базисные функции. Справа: *Тип 2* многомасштабные базисные функции.

Глава 2

Граничный многомасштабный метод для задач в перфорированных средах

Численное моделирование задач в перфорированных средах широко используется в гражданском строительстве, электротехнике, авиакосмической промышленности и разработке месторождений. Одним из важных приложений является моделирование в масштабе пор, которое используется в физике, химии, геологии и биологии. Задачи в неоднородных перфорированных средах дают решения многомасштабного характера, и их численное приближение требует больших вычислительных затрат. Для решения таких задач широко используются многомасштабные методы и методы усреднения, позволяющие уменьшить размер системы путем построения приближения на грубой сетке [41, 45, 102, 103]. Обобщенные многомасштабные методы конечных элементов (ОММКЭ) для задач в перфорированных неоднородных областях были рассмотрены в работе [19]. Построение многомасштабного приближения на основе разрывного подхода Галеркина было представлено для эллиптических задач и задач теории упругости в работе [104]. Для неоднородных задач в перфорированных областях понижение адаптивной локальной многомасштабной модели в онлайн режиме была рассмотрена в [105]. В [106] авторами представлен метод апскейлинга для задач в перфорированных областях с неоднородными граничными условиями на перфорациях с помощью метода нелокальных множественных континуумов [107, 108]. Подсеточная структура, улучшающая разрывный метод Галеркина для задачи конвекции-диффузии в сильно неоднородных средах, представлена в [109]. Представленный подход основан на основе разрывного метода Галеркина с внутренним штрафом. В [110, 111] авторы представили многомасштабный разрывный метод Галеркина для задач

конвекции-диффузии-реакции.

В этой главе представлено построение приближения грубой сетки на основе непрерывного и разрывного метода Галеркина и построено многомасштабное пространство для решения задач в перфорированных средах. Для аппроксимации на грубой сетке использован обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов, предложенный в работах [56, 57]. В [56] авторы предложили два новых типа краевых многомасштабных методов для решения эллиптического уравнения с высококонтрастными неоднородными коэффициентами: граничный спектральный многомасштабный метод конечных элементов и граничный многомасштабный метод конечных элементов на основе вейвлетов. Первый многомасштабный метод использует доминирующие собственные векторы из локальной задачи собственных значений Стеклова в качестве локальных многомасштабных базисных функций. Второй использует вейвлеты для аппроксимации решения, ограниченного на каждом ребре грубой ячейки, а затем переносит это свойство приближения на оценку внутренней ошибки. В [57] авторы рассматривают граничный многомасштабный метод конечных элементов на основе вейвлетов для решения уравнения Гельмгольца с большим волновым числом.

2.1 Обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов для задачи рассеяния в перфорированной области

В данном разделе рассматривается вычисление гармонической рассеянной волны u_s, возникающей при освещении перфорированной области падающей волной u_{inc}, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца. Перфорированная область будет состоять из нескольких подобластей разного размера. Эта задача возникает при изучении распространения акустической или электромагнитной

волн через композитные материалы с мелкой микроструктурой. Во многих приложениях микроструктура позволяет создавать так называемый композитный материал, обладающий особыми свойствами. Чтобы определить, как эта микроструктура влияет на распространение волн, необходимо иметь возможность быстро и точно вычислить рассеянное поле. Мы предполагаем, что перфорированная область имеет непроницаемую область D, где полное поле $u = u_s + u_{inc}$ удовлетворяет акустическому мягкому граничному условию.

Математическая формулировка рассеяния через перфорированную область, освещенной падающим полем u_{inc}, дается следующим образом: найти рассеянное поле $u_s \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющее

$$\Delta u_s + k^2 u_s = 0 \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus D \quad \text{и} \quad u_s = -u_{inc}, \quad x \in \Gamma_D, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s = \mathscr{O}\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \quad \text{как} \quad r \to \infty, \tag{2.2}$$

где $r = |x|$ и условие излучения (2.2) выполняется равномерно по всем направлениям $\hat{x} = x/|x|$. Используя вариационные методы, можно показать, что задача (2.1)–(2.2) корректна. Для простоты в нашем исследовании мы будем использовать первое приближение условия излучения Зоммерфилда на внешней границе усеченной расчетной области. Пусть

$$D = \bigcup_{i=1}^{N_P} D_i, \quad \text{где} \quad D_i = \big(z_i + r_i B\big),$$

где в качестве B принимается единичный круг с центром в начале координат с радиусами $r_i > 0$, которые считаются малыми параметрами, обозначающими размер подобласти, а точка $z_i \in \mathbb{R}^2$ – центры для каждой подобласти. Здесь $N_P \in \mathbb{N}$ обозначает количество подобластей. Обозначим границу непроницаемой области через

$$\Gamma_D = \bigcup_{i=1}^{N_P} \Gamma_{i,P}, \quad \text{где} \quad \Gamma_{i,P} = \partial\big(z_i + r_i B\big).$$

Цель состоит в том, чтобы разработать вычислительный метод, который является точным и выполнимым с вычислительной точки зрения, чтобы реализовать

для $r_i \ll 1$ и $N_p \gg 1$. При таком предположении использование стандартного метода конечных элементов становится невозможным из-за невероятно больших матриц, с которыми приходится иметь дело, поскольку размер ячейки должен быть очень маленьким, чтобы обеспечить любую точность.

ОММКЭ – это общая многомасштабная процедура, в которой строятся многомасштабные базисные функции для генерации приближения грубой сетки. В [45] было предложено несколько общих стратегий для проектирования локальных спектральных процедур. Чтобы применить ОММКЭ для задач рассеяния в перфорированных областях, нужен новый способ построения вспомогательного пространства и локальной спектральной задачи. С этой целью представлен ОГММКЭ для решения распространения волн в перфорированной области. Основной идеей метода является построение локального вспомогательного пространства, используя гармонические расширения правильно подобранного большого набора граничных условий для каждой грубой грани. Для выбора доминантных режимов используются локальные спектральные задачи.

2.1.1 Постановка задачи и аппроксимация на мелкой сетке

Рассматривается задача рассеяния в перфорированной области. Математическая модель описывается комплексной задачей Гельмгольца в Ω

$$-\Delta u_s - k^2 u_s = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

и со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} u_s &= g, \quad x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u_s}{\partial n} - iku_s &= 0, \quad \in \partial\Omega/\Gamma_D, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где на Γ_D задаются граничные условия Дирихле, а на других границах задается условие излучения Зоммерфилда, n – единичная внешняя нормаль на границе.

Для решения уравнения Гельмгольца с использованием классических методов аппроксимации мы строим неструктурированную мелкую сетку, которая

разрешает мелкомасштабные перфорации на сеточном уровне. Пусть

$$V = \{v \in H_1(\Omega) : v = g, x \in \Gamma_D\}, \quad V_0 = \{v \in H_1(\Omega) : v = 0, x \in \Gamma_D\}.$$

Для метода конечных элементов имеем следующую вариационную формулировку: найти $u \in V = H_1(\Omega)$ такое, что

$$a(u,v) - k^2 m(u,v) + ib(u,v) = 0, \quad v \in V_0, \tag{2.5}$$

где

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx, \quad m(u,v) = \int_\Omega u\overline{v}\, dx, \quad b(u,v) = \int_{\partial\Omega/\Gamma_{1,p}} ku\overline{v}\, ds.$$

и $u = u_s$, $\overline{v}$ – комплексно сопряженный.

Пусть $u = \sum_j U_j \phi_j$, тогда мы можем записать комплексную задачу в матричной форме

$$(K_h - k^2 M_h + iB_h)U = 0, \tag{2.6}$$

где M_h, B_h и K_h – комплексные матрицы

$$(M_h)_{rj} = m(\phi_r, \phi_j), \quad (B_h)_{rj} = b(\phi_r, \phi_j), \quad (K_h)_{rj} = a(\phi_r, \phi_j),$$

и ϕ_j – линейные базисные функции для аппроксимации на мелкой сетке.

2.1.2 Многомасштабная аппроксимация на грубой сетке

В этом разделе предлагается ОГММКЭ, где алгоритм начинается с построения вспомогательного пространства для каждой грубой грани локальной области и после этого решаем локальную спектральную задачу во вспомогательном пространстве для извлечения доминантных режимов. Предлагается следующий вычислительный алгоритм (см. Рис. 2.1):

1. построение мелкой сетки и локальных областей ω_i;
2. решение локальных спектральных задач для каждой грани грубой ячейки во вспомогательном пространстве для построения многомасштабных базисных функций в ω_i;

3. решение локальной задачи для построения дополнительной многомасштабной базисной функции в ω_i и многомасштабного разбиения единичных функций;
4. построение и решение приближения грубой сетки на многомасштабном пространстве.

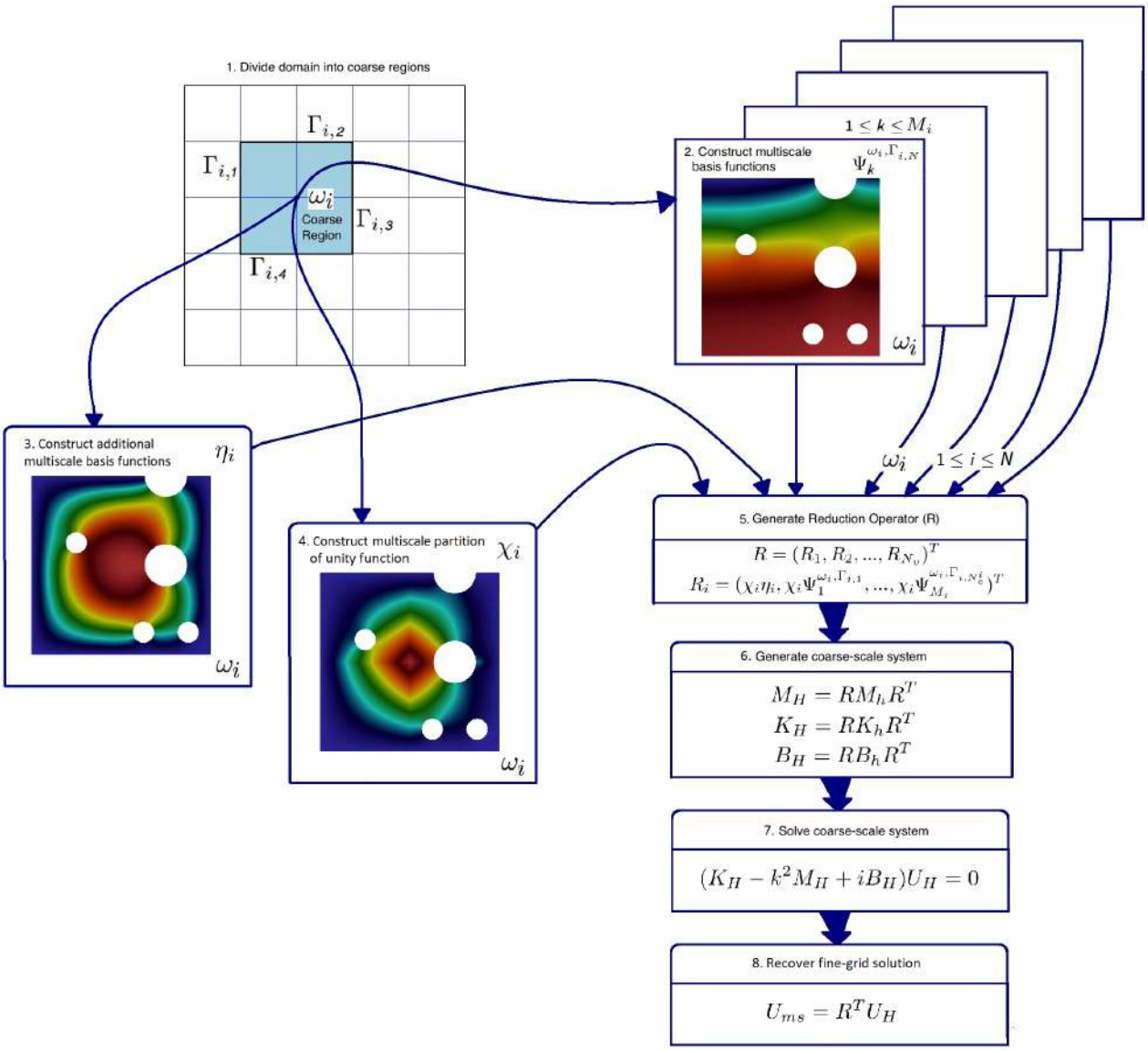


Рис. 2.1: Иллюстрация алгоритма ОГММКЭ.

На шаге 1 вычислительного алгоритма мы начинаем с определения грубой сетки, где каждый блок грубой сетки состоит из связного объединения блоков мелкой сетки. После этого мы описываем построение многомасштабных

базисных функций в локальных областях и, наконец, представляем построение приближения грубой сетки. Пусть $\mathscr{T}_H$ будет грубой сеткой в области Ω и $\mathscr{T}_H = \cup_{i=1}^{N_c} K_i$ с размерами ячеек $H \gg h > 0$, где K_i – грубая ячейка (локальная область), N_c – количество грубых ячеек. Локальная область ω_i получается объединением всех грубых ячеек вокруг одной вершины грубой сетки, $i = 1, \ldots, N_v$ и N_v – количество вершин грубой сетки (см. Рис. 2.2).

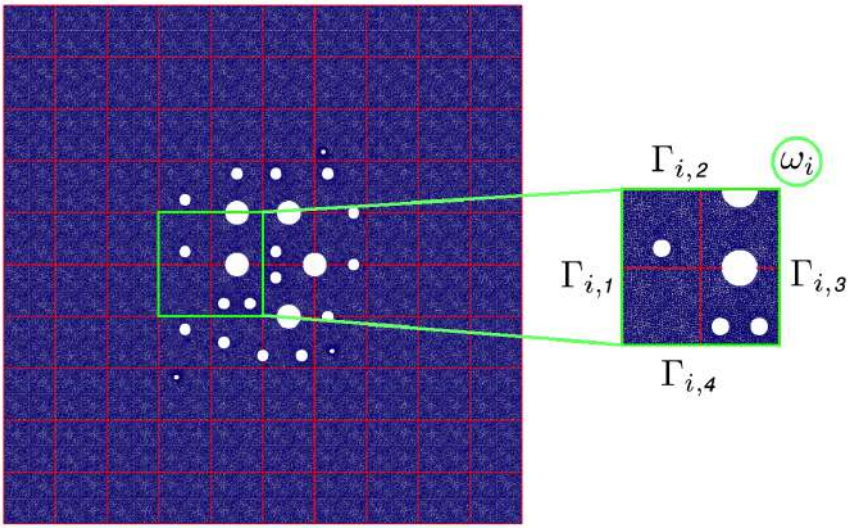


Рис. 2.2: Иллюстрация локальной области ω_i и грубых граней $\Gamma_{i,l}$. Синий цвет – мелкая сетка, красный цвет – грубая сетка.

Пусть V_H – конечномерное пространство, состоящее из функций, гладких в каждой локальной области, связанной с ячейкой грубой сетки. Строим многомасштабные базисные функции в каждой локальной области ω_i, соответствующие каждой грубой грани, путем решения локальных спектральных задач. Многомасштабное пространство V_H затем определяется как линейная оболочка всех локальных многомасштабных базисных функций. После этого мы определяем приближение данной задачи на основе непрерывного метода Галеркина и формулируем вариационную задачу следующим образом: найти $u_H \in V_H$ такую, что

$$a(u_H, v) - k^2 m(u_H, v) + ib(u_H, v) = 0, \quad \forall v \in V_H, \tag{2.7}$$

Далее мы начинаем с построения вспомогательного пространства в ω_i для

каждого грубой грани, а затем выполняем уменьшение размерности путем решения локальной спектральной задачи.

Вспомогательное (снэпшот) пространство. Вспомогательное пространство используется для решения локальных задач для различных вариантов входных данных, например, для решения задач в неоднородных средах с высококонтрастными неоднородностями за пределами одного локальной области, а также в областях с небольшими трещинами или длинными трещинами, проходящими через всю расчетную область . В каждой локальной области ω_i решаем следующую задачу, соответствующую $\Gamma_{i,l} \in \partial\omega_i$

$$a(\phi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}, v) - k^2 m(\phi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}, v) = 0, \quad x \in \omega_i, \tag{2.8}$$

с граничными условиями Дирихле для соответствующей грубой грани $\Gamma_{i,l}$

$$\phi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}} \cdot n = \delta_j, \quad x \in \Gamma_{i,l}$$

и нулевые граничные условия Неймана на других границах

$$\frac{\partial \phi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\omega_i/(\Gamma_{i,l}),$$

где $\partial\omega_i = \Gamma_{i,P} \cup \Gamma_{i,1} \cup \Gamma_{i,2} \cup \Gamma_{i,3} \cup \Gamma_{i,4}$. Здесь δ_j – это дельта-функция, определенная на $\Gamma_{i,l}$, которая имеет значение 1 на узле мелкой сетки v_j и значение 0 на других гранях мелкой сетки, $v_j \in \Gamma_{i,l}$.

Многомасштабное пространство. Шаг 2 – решение локальных спектральных задач во вспомогательном пространстве. Спектральное разложение позволяет нам определять наиболее важные характеристики решения, выбирая те собственные векторы, которые соответствуют наибольшим собственным значениям для построения многомасштабного пространства. Точнее, мы ищем подпространство вспомогательного пространства, чтобы оно могло аппроксимировать любой элемент вспомогательного пространства в соответствующем смысле, определяемом с помощью билинейных форм. Для создания граничного

многомасштабного пространства для $\Gamma_{i,l} \in \partial\omega_i$, решаем следующую локальную спектральную задачу в ω_i

$$a(\psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}, v) - k^2 m(\psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}, v) = \lambda_j s(\psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}, v), \quad v \in V_{\text{snap}}^{i,l}, \tag{2.9}$$

где $\psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}} \in V_{\text{snap}}^{i,l} = \text{span}\{\phi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}\}$ и $s(u,v) = \int_{\Gamma_{i,l}} uv\,ds$. Чтобы решить локальную спектральную задачу во вспомогательном пространстве, мы используем концепцию проекции и определяем матрицу проекции на вспомогательное пространство.

$$R_{\text{snap}}^{i,l} = (\phi_1^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}, \phi_2^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}, ..., \phi_{N_v^{\Gamma_{i,l}}}^{\omega_i,\Gamma_{i,l}})^T,$$

где $N_v^{\Gamma_{i,l}}$ – количество вершин мелкой сетки на гране $\Gamma_{i,l}$. Следовательно, в матричной форме имеем следующую спектральную задачу

$$(K_{\text{snap}}^{i,l} - k^2 M_{\text{snap}}^{i,l})\psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}} = \lambda_j S_{\text{snap}}^{i,l} \psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}$$

с

$$K_{\text{snap}}^{i,l} = R_{\text{snap}}^{i,l} K^{\omega_i} (R_{\text{snap}}^{i,l})^T, \quad M_{\text{snap}}^{i,l} = R_{\text{snap}}^{i,l} K^{\omega_i} (R_{\text{snap}}^{i,l})^T, \quad S_{\text{snap}}^{i,l} = R_{\text{snap}}^{i,l} S (R_{\text{snap}}^{i,l})^T,$$

где $(S)_{rn} = s(\phi_r, \phi_n)$.

Чтобы построить многомасштабное пространство $V_H^{\omega_i}$, мы выбираем первые собственные векторы M_i, соответствующие первым наименьшим собственным значениям $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_{M_i}$ для каждой грани спектральной задачи, и определим пространство $V_H^{\omega_i}$ с помощью

$$V_H^{\omega_i} = \text{span}\left\{\chi_i \eta_i, \chi_i \Psi_1^{\omega_i,\Gamma_{i,1}}, ..., \chi_i \Psi_{M_i}^{\omega_i,\Gamma_{i,1}}, ..., \chi_i \Psi_1^{\omega_i,\Gamma_{i,N_e^i}}, ..., \chi_i \Psi_{M_i}^{\omega_i,\Gamma_{i,N_e^i}}\right\}$$

где N_e^i – количество граней локальной области ω_i. Многомасштабное пространство определяется базисными функциями $\chi_i \Psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}$, где $\Psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}} = (R_{\text{snap}}^{i,l})^T \psi_j^{\omega_i,\Gamma_{i,l}}$ и χ_i – многомасштабное разбиение единичных функций (обычная узловая базисная функция для узла i). Количество базисов может быть разным, точность решения можно повысить за счет увеличения количества базисных функций.

На рис. 2.3 (с третьего по восьмой столбцы) мы представляем первые шесть многомасштабных базисных функций для $k = 1, 4, 8$ в локальной области ω_i.

Многомасштабная функция разбиения единицы. На шаге 3 мы определяем многомасштабную функцию разбиения единицы, что важно для достижения многомасштабного пространства меньшей размерности. Важной частью их конструкции является обеспечение меньшего количества больших собственных значений и, следовательно, небольшого размера грубого пространства. При первоначальном выборе многомасштабных базисных функций, содержащих множество мелкомасштабных функций решения, можно уменьшить размерность результирующего грубого пространства. Решаем следующую локальную задачу в $K_j \in \omega_i$

$$-\Delta\chi_i - k^2\chi_i = 0, \quad x \in K_j, \quad \forall K_j \in \omega_i \tag{2.10}$$

с линейными базисными функциями в качестве граничного условия $\chi_i = \chi_i^0$ на ∂K_j и нулевые граничные условия Неймана на перфорациях $\Gamma_{i,P}$. Результаты построения многомасштабной функции разбиения единицы для $k = 1, 4, 8$ можно увидеть в первом столбце Рис. 2.3.

Дополнительная базисная функция. Для построения дополнительного базиса в области ω_i решаем локальную задачу

$$-\Delta\eta_i - k^2\eta_i = 1, \quad x \in \omega_i, \tag{2.11}$$

с нулевыми граничными условиями Дирихле на $\partial\omega_i/\Gamma$ и нулевыми граничными условиями Неймана на перфорациях $\Gamma_{i,P}$. Результаты построения дополнительной базисной функции для различных $k = 1, 4, 8$ можно увидеть во втором столбце Рисунка 2.3.

Система на грубой сетке. Наконец, на шаге 4, чтобы построить многомасштабную аппроксимацию уравнения Гельмгольца, мы используем концепцию проекции и определяем матрицу проекции из мелкомасштабного пространства

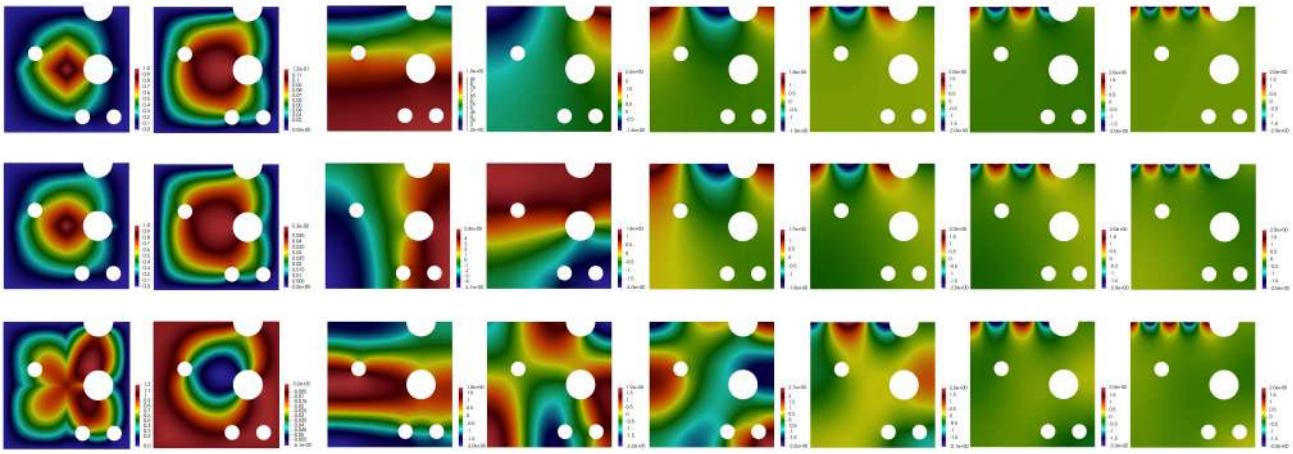


Рис. 2.3: Многомасштабная функция разбиение единицы χ_i, дополнительный базис η_i и первые шесть собственных векторов, соответствующие наименьшим собственным значениям (для $k = 1$: $\lambda_1 = -1.26452$, $\lambda_2 = 4.0182$, $\lambda_3 = 6.90689$, $\lambda_4 = 12.7977$, $\lambda_5 = 19.0833$, $\lambda_6 = 25.5481$; для $k = 4$: $\lambda_1 = -5.107$, $\lambda_2 = -1.35788$, $\lambda_3 = 5.65265$, $\lambda_4 = 12.1396$, $\lambda_5 = 18.6476$, $\lambda_6 = 25.2259$; для $k = 8$: $\lambda_1 = -0.608673$, $\lambda_2 = 1.60066$, $\lambda_3 = 6.51602$, $\lambda_4 = 10.0327$, $\lambda_5 = 17.2994$, $\lambda_6 = 24.2216$) для грани $\Gamma_{i,2}$ для $k = 1, 4, 8$ (сверху вниз).

в многомасштабное пространство

$$R = (R_1, R_2, \ldots, R_{N_v})^T, \quad R_i = (\chi_i \eta_i, \chi_i \Psi_1^{\omega_i, \Gamma_{i,1}}, \ldots, \chi_i \Psi_{M_i}^{\omega_i, \Gamma_{i,1}}, \ldots, \chi_i \Psi_1^{\omega_i, \Gamma_{i,N_e^i}}, \ldots, \chi_i \Psi_{M_i}^{\omega_i, \Gamma_{i,N_e^i}})^T.$$

где R_i – матрица локальной проекции в локальной области ω_i, а N_v – количество вершин грубой сетки.

Затем, используя глобальную матрицу проекций R, определяем систему на грубой сетке

$$(K_H - k^2 M_H + iB_H) U_H = F_H, \tag{2.12}$$

где U_H – комплексное значение, M_H и K_H – матрицы масс и жесткости на грубой сетке, а B_H – граничная матрица масс на грубой сетке и F_H – правая часть.

$$M_H = R M_h R^T, \quad K_H = R K_h R^T, \quad B_H = R B_h R^T \quad F_H = R F_h.$$

После расчета решения на грубой сетке мы восстанавливаем мелкомасштабное решение $U_{ms} = R^T U_H$.

2.1.3 Численные результаты

Мы представляем результаты для решения на мелкой сетке и решения на грубой сетке с использованием многомасштабных базисных функций. Базисные функции оффлайн пространства строятся в соответствии с описанной выше процедурой.

Расчетная область с перфорацией представлена на рис. 2.4 и имеет размер $\Omega = [-2,2] \times [-2,2]$. Для расчетных сеток мы рассматриваем мелкую сетку с 99314 вершинами, 196922 треугольными элементами и структурированную прямоугольную грубую сетку размером 10×10 с 121 вершиной, 100 треугольными элементами. Устанавливаем $k = 1,2,4,6$ и 8. Для изучения представленного метода рассмотрим две тестовые задачи:

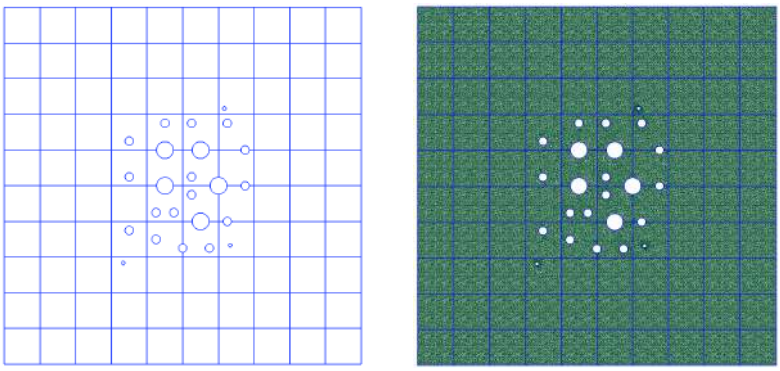


Рис. 2.4: Вычислительная область $\Omega = [-2,2] \times [-2,2]$ с перфорациями и грубая сетка (121 вершин и 100 треугольных элементов) и мелкая сетка (99314 вершин и 196922 треугольных элементов).

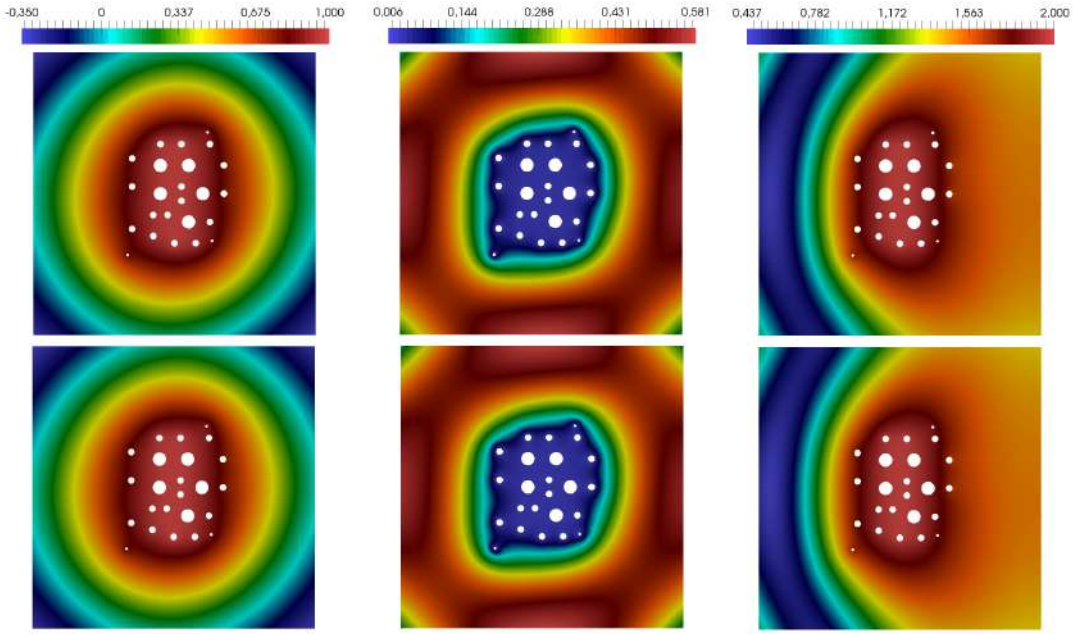


Рис. 2.5: Решение на мелкой сетке (сверху) и на грубой сетке (снизу) с $k = 1$ для действительной части, мнимой части и абсолютного значения (слева направо) для области с перфорацией. *Случай 1*.

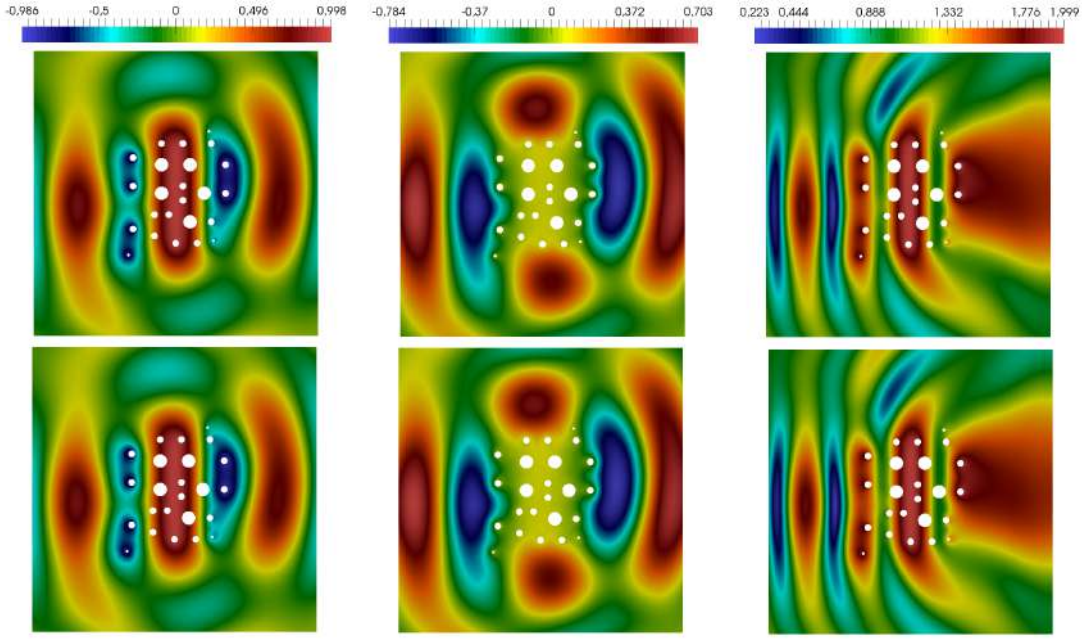


Рис. 2.6: Решение на мелкой сетке (сверху) и на грубой сетке (снизу) с $k = 4$ для действительной части, мнимой части и абсолютного значения (слева направо) для области с перфорацией. *Случай 1*.

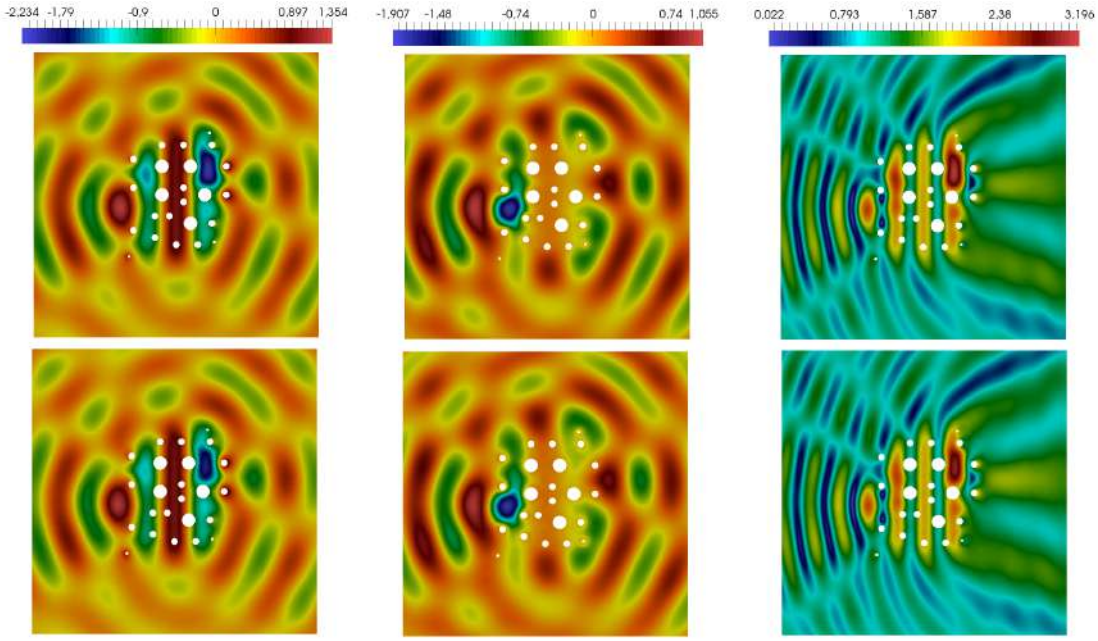


Рис. 2.7: Решение на мелкой сетке (сверху) и на грубой сетке (снизу) с $k = 8$ для действительной части, мнимой части и абсолютного значения (слева направо) для области с перфорацией. *Случай 1*.

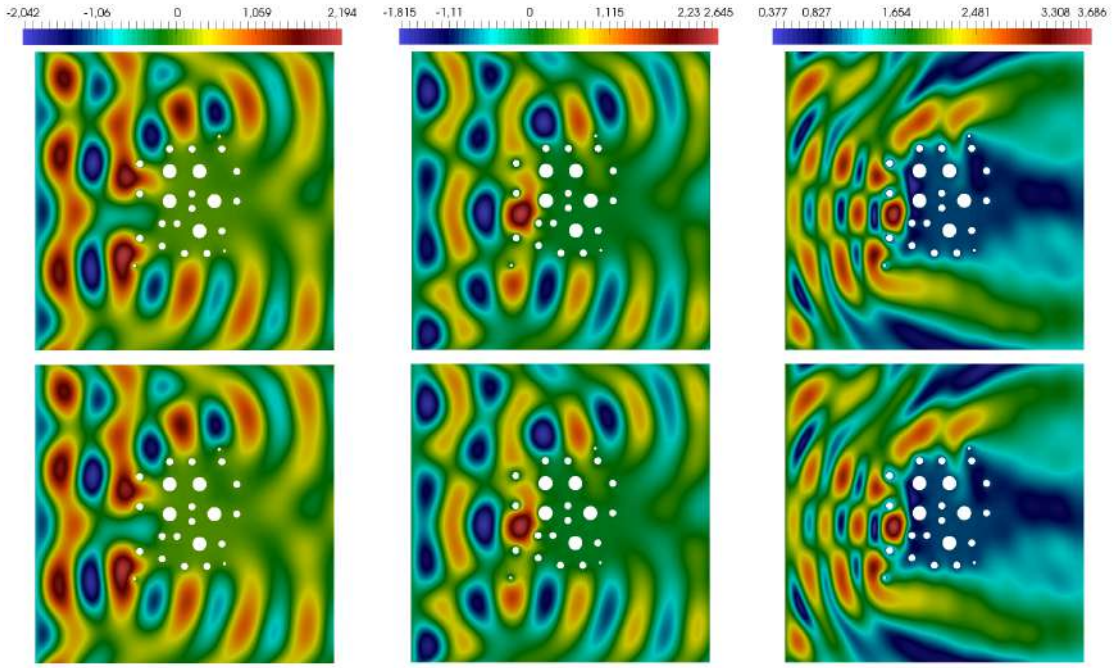


Рис. 2.8: Решение на мелкой сетке (сверху) и на грубой сетке (снизу) с $k = 8$ для действительной части, мнимой части и абсолютного значения (слева направо) для области с перфорацией. *Случай 2*.

Случай 1					Случай 2				
M	DOF_c	$\|\|e_{u_s^{Re}}\|\|_{L_2}$	$\|\|e_{u_s^{Im}}\|\|_{L_2}$	$\|\|e_{u_s^{Abs}}\|\|_{L_2}$	M	DOF_c	$\|\|e_{u_s^{Re}}\|\|_{L_2}$	$\|\|e_{u_s^{Im}}\|\|_{L_2}$	$\|\|e_{u_s^{Abs}}\|\|_{L_2}$
$k=1$					$k=1$				
1	605	4.5201	3.9689	1.3882	1	605	4.6942	8.8352	0.4342
2	1089	2.9058	2.5052	0.8657	2	1089	2.6939	5.1604	0.2426
4	2057	1.4167	1.2141	0.4224	4	2057	1.1604	2.4556	0.1077
6	3025	0.8575	0.7621	0.2592	6	3025	0.6872	1.4115	0.0646
8	3993	0.5375	0.5271	0.1621	8	3993	0.4409	0.8851	0.0423
10	4961	0.3826	0.4156	0.1179	10	4961	0.3402	0.6505	0.0332
$k=2$					$k=2$				
1	605	21.1759	17.7687	5.2638	1	605	12.6232	21.9576	6.36974
2	1089	8.2142	8.4651	2.2244	2	1089	7.4911	13.2637	3.8221
4	2057	2.9518	3.5778	0.8619	4	2057	3.0566	5.5533	1.5562
6	3025	1.6867	2.1203	0.4906	6	3025	1.7789	3.219	0.9057
8	3993	0.9982	1.3505	0.3023	8	3993	1.0148	1.8826	0.5151
10	4961	0.7143	1.0207	0.2274	10	4961	0.7138	1.3332	0.3593
$k=4$					$k=4$				
1	605	26.1896	26.2206	6.9207	1	605	21.2452	24.4633	2.1776
2	1089	11.7332	11.7491	3.3136	2	1089	12.7033	14.6056	1.3001
4	2057	5.3873	5.5224	1.5577	4	2057	5.3216	6.147	0.5511
6	3025	3.3152	3.3813	0.9527	6	3025	3.12	3.5195	0.3212
8	3993	2.3674	2.3746	0.6742	8	3993	1.8618	2.1441	0.1973
10	4961	1.9613	1.9337	0.5487	10	4961	1.3167	1.5497	0.1437
$k=6$					$k=6$				
1	605	50.9849	55.3662	16.7419	1	605	26.3221	25.964	9.6521
2	1089	26.6507	29.1579	8.0375	2	1089	15.4026	15.0854	5.637
4	2057	10.4667	11.3651	3.0396	4	2057	6.7219	6.7224	2.4328
6	3025	5.6004	5.9879	1.6474	6	3025	3.8292	3.5371	1.3012
8	3993	3.7586	4.0515	1.0992	8	3993	2.3717	2.4777	0.8125
10	4961	2.7807	2.9651	0.8134	10	4961	1.7738	2.0936	0.6424
$k=8$					$k=8$				
1	605	98.6624	124.807	31.0206	1	605	52.2469	65.9454	22.0796
2	1089	64.8732	77.7624	20.752	2	1089	37.5658	47.9121	16.0727
4	2057	27.9969	27.5279	8.6183	4	2057	20.1287	24.6172	8.3935
6	3025	17.6464	15.1946	5.4516	6	3025	9.6904	11.665	4.0941
8	3993	12.5986	10.614	3.8379	8	3993	6.5653	5.636	2.236
10	4961	8.6471	8.3081	2.6112	10	4961	7.0258	3.8119	1.8266

Таблица 2.1: Относительные погрешности для перемещения при $k = 1, 2, 4, 6$ и 8 для разного количества многомасштабных базисов. $DOF_f = 99314$.

- *Случай 1*. Задача с граничным условием Дирихле в перфорациях и условием излучения Зоммерфилда на других границах

$$\begin{aligned} u_s = u_{inc}, \quad x \in \Gamma_P, \\ \frac{\partial u_s}{\partial n} - iku_s = 0, \quad \in \partial\Omega/\Gamma_P. \end{aligned} \tag{2.13}$$

- *Случай 2*. Задача с граничным условием Дирихле на левой границе и перфорациях, и условием излучения Зоммерфилда на других границах

$$\begin{aligned} u_s = u_{inc}, \quad x \in \Gamma_L, \\ u_s = 0, \quad x \in \Gamma_p, \\ \frac{\partial u_s}{\partial n} - iku_s = 0, \quad \in \partial\Omega/(\Gamma_L \cup \Gamma_P). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь $u_{inc} = \cos(kx \cdot d)$ данное падающее поле, d – направление падающей волны, а $d = (1,0)$.

На рис. 2.5, 2.6, 2.7 мы представляем решения на мелкой и грубой сетке с граничным условием из *Случая 1* (уравнение (2.13)) для действительной части, мнимой части и абсолютного значения с волновым числом $k = 1,4,8$, соответственно. Мы представляем решения на мелкой и грубой сетке с граничным условием из *Случая 2* (eq. (2.14)) для действительной части, мнимой части и абсолютного значения с волновым числом $k = 8$ на рис. 2.8. Для решения на грубой сетке использованы 10 многомасштабных базисных функций в каждой локальной области. Из рис. 2.5-2.7 видно поведение решения при увеличении волнового числа k. Получено решение с хорошей точностью для модели пониженного порядка с помощью ОГММКЭ.

В таблице 2.1 мы показываем погрешности многомасштабного решения с граничным условием из *Случая 1* (ур. 2.13) для перемещения с $k = 1,2,4,6$ и 8 для разных чисел многомасштабных базисных функций. А также, мы представляем погрешности многомасштабного решения с граничным условием из *Случая 2* (ур. 2.14) для перемещения с $k = 1,2,4,6$ и 8 для разного количества многомасштабных базисные функций в Таблице 2.1. Здесь DOF_f и DOF_c

– размеры систем для мелкой и грубой сетки, то есть количество неизвестных. Наше сравнение показало сходимость решения при увеличении числа базисных функций. А именно, когда $k = 1$ и мы используем 1 базисную функцию, погрешность L_2 для действительной части решения равна $4,52\%$, а при увеличении количества многомасштабных базисных функций до 10 погрешность L_2 значительно снизилась до $0,382\%$. Кроме того, у нас есть большие погрешности для более высоких значений волнового числа k. Например, для задачи рассеяния в перфорированной области с $k = 1$ мы имеем L_2 погрешность равную $0,382\%$ для действительной части решения, а для $k = 8$ L_2 погрешность увеличивается до $8,647\%$. Наши результаты показывают, что представленный метод дает хорошее приближение решения и уменьшает размер системы для задач рассеяния.

2.2 Обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина для уравнения конвекции-диффузии в перфорированных средах

В этой подглаве представлено построение многомасштабного приближения для уравнения конвекции-диффузии в перфорированных средах с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина. Рассматривается нестационарное уравнение для концентрации, учитывающее диффузионный и конвективный поток в перфорированной области с реактивными граничными условиями на перфорациях [112]. Численное решение задач конвективного и диффузионного переноса встречается при моделировании потоков жидкости в пористых средах на микроуровне [113, 114]. Математические модели на микроуровне учитывают сложные структуры геометрии пор и описывают поток жидкости, перенос компонентов и реакцию на границе между твердой и жидкой фазами. Чтобы построить эталонное решение и решить локальные проблемы, мы строим мелкую сетку, которая разрешает перфорацию на уровне сетки и строит аппроксимацию мелкой сетки, используя разрывный метод Галеркина с внутренним штрафом (РМГВШ). Приближение на грубой сетке основано на разрывной формулировке Галеркина. Мы исследуем несколько типов многомасштабных пространств на основе выбора краевых условий на границах локальной области. Мы рассматриваем грубые сетки с прямоугольными локальными областями, и расширение до неструктурированных локальных областей является простым. Для каждой локальной области мы рассматриваем три типа многомасштабных базисных функций, основанных на разделении границ: (1) все границы поверхности объединены в одну группу, (2) границы поверхности делятся на 2 группы в соответствии с x и y направлениями, и (3) каждая граница поверхности обрабатывается отдельно. Третий тип свя-

зан с методом граничных многомасштабных конечных элементов [57]. Многомасштабные базисные функции строятся в каждой локальной области с использованием вспомогательных функций, которые являются решениями задач конвекции-диффузии с различными граничными условиями. Чтобы уменьшить размер вспомогательного пространства, мы решаем локальные спектральные задачи, которые учитывают конвективные и диффузионные потоки. По аналогии с предыдущими работами [106, 115], строим дополнительные базисные функции для учета неоднородных граничных условий на границах перфорации. Проводится численное исследование представленного подхода для нескольких тестовых задач с различным распределением перфорации для разных полей скорости и коэффициентов диффузии. Результаты для различных типов базисных функций представлены, чтобы показать влияние выбора локальных границ при построении базисных функций.

2.2.1 Постановка задачи и конечно-элементная аппроксимация

Пусть Ω – перфорированная вычислительная область (см. Рис. 2.9). Расчетная область содержит круглые, случайно расположенные перфорационные отверстия разного размера. В перфорированной области рассматривается нестационарное уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c - \nabla \cdot (D \nabla c) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.15}$$

где D – коэффициент диффузии, который постоянен, но обычно может быть неоднородным $D(x)$, c – концентрация, u – поле скорости. Дополним уравнение (2.15) следующим начальным условием

$$c = c_0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t = 0.$$

Пусть $\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_w = \partial\Omega$ (см. рисунок 2.4) и n – внешняя нормаль на $\partial\Omega$. На границах входа и выхода потока (Γ_{in} и Γ_{out}) задаются следующие граничные

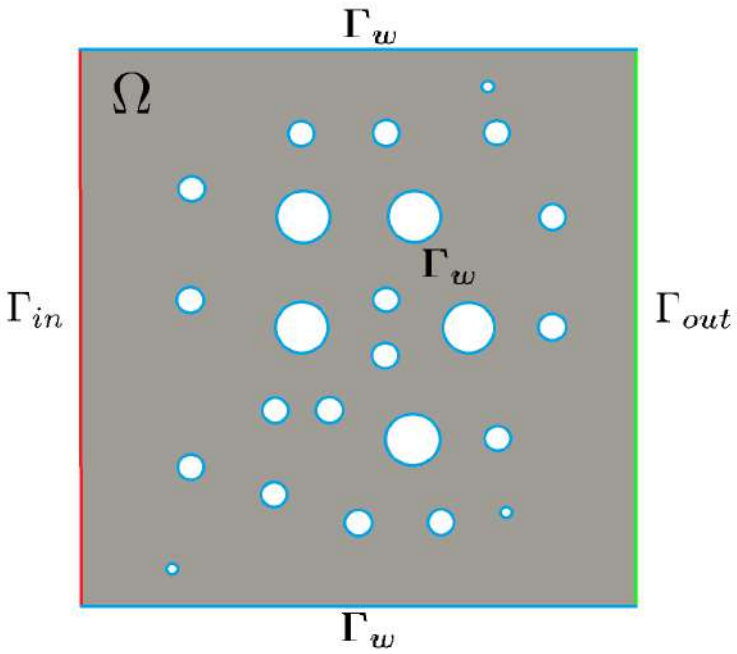


Рис. 2.9: Перфорированная область Ω. Граница входа потока Γ_{in} (красный), граница выхода потока Γ_{out} (зеленый), и граница перфораций Γ_w (синий).

условия

$$c = c_{in}, \quad x \in \Gamma_{in}, \quad -D\nabla c \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_{out}. \tag{2.16}$$

На перфорациях, верхней и нижней границах (Γ_w) применяем реактивные граничные условия

$$-D\nabla c \cdot n = \alpha(c - c_w), \quad x \in \Gamma_w, \tag{2.17}$$

где α – параметр реакции, c_w и c_{in} – заданные концентрации. Обратите внимание, что мы предполагаем, что для поля скорости мы имеем $u \cdot n = 0$ на Γ_w и $u = u_1$ на Γ_{in}.

Поле скорости рассчитывается с помощью закона Дарси и уравнения неразрывности

$$k^{-1}u + \nabla p = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$\nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega$$

с граничными условиями

$$u = u_1, \quad x \in \Gamma_{in}, \quad p = 0, \quad x \in \Gamma_{out}, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma_w,$$

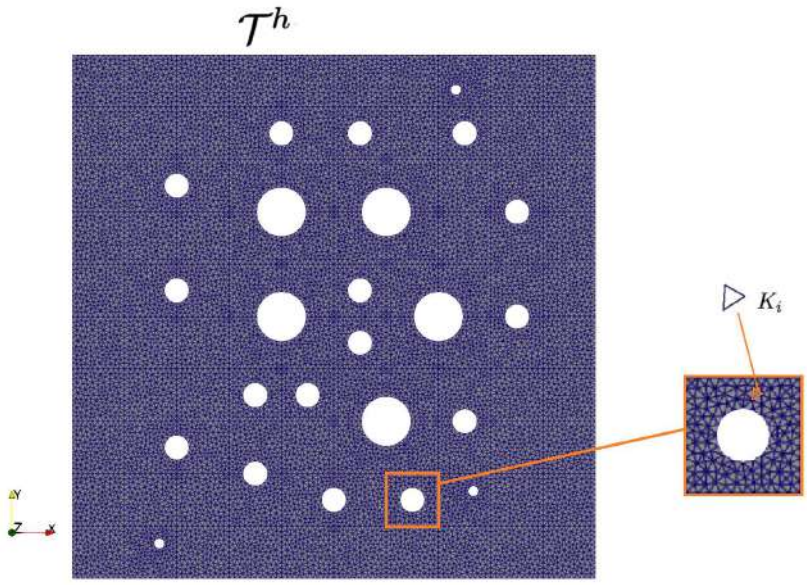


Рис. 2.10: Мелкая сетка $\mathscr{T}^h$.

где u – скорость, p – давление.

Чтобы решить задачу (2.15) с граничными условиями (2.16)-(2.17) в перфорированной области, мы должны построить тонкую сетку, которая разрешает перфорацию на уровне сетки. Пусть $\mathscr{T}^h$ – мелкосеточное разбиение области Ω.

$$\mathscr{T}^h = \bigcup_{i=1}^{N^h_{cell}} K_i,$$

где N^h_{cell} – число ячеек мелкой сетки. Пусть $\mathscr{E}^h$ будет набором граней в $\mathscr{T}^h$ с $\mathscr{E}^h = \mathscr{E}^h_o \cup \mathscr{E}^h_b$, где $\mathscr{E}^h_o$ – набор внутренних граней, $\mathscr{E}^h_b$ – набор внешних граней, и $\mathscr{E}^h_b = \mathscr{E}^h_{b,in} \cup \mathscr{E}^h_{b,w} \cup \mathscr{E}^h_{b,out}$. Мы используем индексацию K и E для обозначения ячейки и грани на мелкой сетке $\mathscr{T}^h$ (см. Рис. 2.10).

Чтобы аппроксимировать задачу, касающуюся пространственных переменных, мы используем разрывный метод Галеркина с внутренним штрафом (РМ-ГВШ) [116–118]. Определим скачок $[c]$ и среднее $\{c\}$ функции c на внутренней грани

$$[c] = c_+ - c_-, \quad \{c\} = \frac{c_+ + c_-}{2},$$

где $c_+ = c|_{K^+}$, $c_- = c|_{K^-}$, K^+ и K^- две ячейки, разделяющие грань E. Отметим, что мы определяем $[c] = c|_E$ и $\{c\} = c|_E$ для $E \in \mathscr{E}^h_b$.

Для аппроксимации по времени используется неявная схема, где $\check{c}_h$ – решения из предыдущего временного слоя, а τ – заданный временной шаг. Пространство на мелкой сетке для концентрации следующее

$$P_h = \{r \in L^2(\Omega) : r|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathscr{T}^h\}.$$

У нас есть следующие вариационные формулировки метода РМГВШ: найти $c_h \in P_h$ такое, что

$$\frac{1}{\tau} m(c_h - \check{c}_h, r) + a_{\mathrm{DG}}(c_h, r) + c_{\mathrm{DG}}(c_h, r) = l(r), \quad \forall r \in P_h, \tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned} a_{DG}(c,r) = &\sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K D\nabla c \cdot \nabla r \, dx + \sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,w}} \int_E \alpha \, c \, r \, ds \\ &- \sum_{E \in \mathscr{E}^h_o \cup \mathscr{E}^h_{b,in}} \int_E \Big(\{D\nabla c \cdot n\}[r] + \{D\nabla r \cdot n\}[c] - \frac{\gamma}{h}\{D\}[c][r] \Big) \, ds, \end{aligned}$$

$$c_{DG}(c,r) = \sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K (u\,c) \cdot \nabla r \, dx + \sum_{E \in \mathscr{E}^h_o \cup \mathscr{E}^h_{b,out}} \int_E (\tilde{u}_+ c_+ - \tilde{u}_- c_-)\,[r] \, ds,$$

$$m(c,r) = \sum_{K \in \mathscr{T}^h} \int_K c \, r \, dx, \quad l(r) = \sum_{E \in \mathscr{E}^h_{b,in}} \int_E \Big(\frac{\gamma}{h} D\, r - \{D\nabla r \cdot n\} \Big) \, c_{in} \, dx + \sum_{E \in \mathscr{E}^h_w} \int_E \alpha \, c_w \, r \, ds,$$

и γ – штрафной параметр и $\tilde{u} = (u \cdot n + |u \cdot n|)/2$.

В матричной форме схема (2.18) имеет следующий вид

$$\frac{1}{\tau} M_h (c_h - \check{c}_h) + (A_h + C_h) c_h = F_h, \tag{2.19}$$

где

$$M_h = m(\phi_i, \phi_j); \quad A_h = a_{DG}(\phi_i, \phi_j); \quad C_h = c_{DG}(\phi_i, \phi_j); \quad F_h = l(\phi_j),$$

$c_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i \phi_i$, где размер системы является $N_h = 3 \cdot N^h_{cell}$ для линейных базисных функций и треугольных ячеек мелкой сетки.

Ниже приведено пространство на мелкой сетке для потока

$$V = \{v \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}, \quad Q = q \in L^2(\Omega).$$

Слабая формулировка закона Дарси: найти $(u,p) \in V \times Q$ такое, что

$$\begin{aligned} d(u,v) + n(p,v) = 0, \quad \forall v \in V \\ n(u,q) = 0, \quad \forall q \in Q \end{aligned} \tag{2.20}$$

где

$$d(u,v) = -\int_\Omega k^{-1} u \cdot v dx, \quad n(u,p) = \int_\Omega p \nabla \cdot u dx = 0.$$

Мы можем записать аппроксимацию закона Дарси в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D & N^T \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

где мы используем пространство Равьяра-Томаса для скорости и кусочно-постоянный элемент для давления в мелкомасштабной системе.

2.2.2 Многомасштабная аппроксимация на грубой сетке

Для дискретизации на грубой сетке уравнения конвекции-диффузии используется Обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина (ОМРМГ) [103, 104]. ОМРМГ основан на обобщенном многомасштабном методе конечных элементов (ОММКЭ) [45, 119]. Сначала описывается построение вспомогательного пространства, а затем даются определения локальных спектральных задач для построения оффлайн многомасштабного пространства. В представленном подходе вычисления проводятся в два этапа: (1) оффлайн этап и (2) онлайн этап. В оффлайн режиме мы выполняем локальное моделирование для построения локальных многомасштабных базисных функций. Это выполняется только один раз, и результирующие базисные функции будут использоваться для формирования уравнений грубого масштаба, которые можно использовать для различных исходных терминов и граничных условий в глобальной области. Таким образом, эти оффлайн вычисления могут обеспечить значительную экономию на этапе онлайн, на котором исходная проблема решается с помощью уравнения грубого масштаба. Для построения приближения на грубой сетке воспользуемся проекционным подходом и определим матрицу проекции R (от

мелкой сетки к грубой). В качестве матрицы расширения (от грубой сетки к мелкой) возьмем $P = R^T$. Ниже мы представим алгоритм многомасштабного метода.

(1) Оффлайн этап:

- Построение грубой сетки и локальных областей;
- Построение вспомогательного (снэпшот) пространства путем решения локальных задач для всех возможных граничных условий в зависимости от типа базисной функции;
- Построение многомасштабных базисных функций путем решения локальной спектральной задачи на вспомогательном пространстве;
- Построение матрицы проекции с использованием вычисленных многомасштабных базисных функций.

(2) Онлайн этап:

- Построение системы на грубой сетке с использованием проекционной матрицы;
- Решение задачи на грубой сетке.

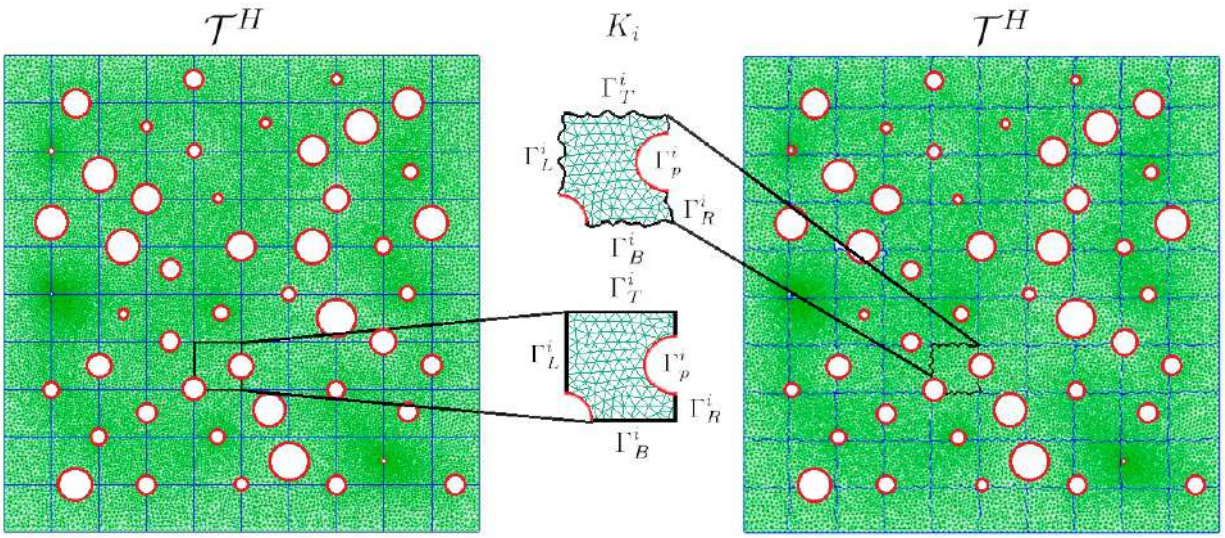


Рис. 2.11: Структурированная и неструктурированная грубая сетка $\mathcal{T}^H$, локальная область K_i. Синий цвет – грубая сетка, зеленый цвет – мелкая сетка и красный цвет – граница перфорации.

Далее мы опишем построение локальной области. Рассмотрим разбиение грубой сетки $\mathscr{T}^H$ области Ω с размером ячейки $H > 0$. Для удобства предполагаем, что область Ω прямоугольная, а разбиение на грубой сетке $\mathscr{T}^H$ состоит из прямоугольников. Таким образом, вычислительная геометрия Ω разделена на подобласти K_i (локальные области)

$$\mathscr{T}^H = \bigcup_{i=1}^{N_{cell}^H} K_i.$$

Элементы T^H называются ячейками грубой сетки, и мы используем N_{cell}^H для обозначения количества ячеек грубой сетки. Локальная область – это получившаяся ячейка грубой сетки K_i. Пусть $\mathscr{E}^H$ будет набором грубых ребер в $\mathscr{T}^H$ с $\mathscr{E}^H = \mathscr{E}_o^H \cup \mathscr{E}_b^H$, где $\mathscr{E}_o^H$ и $\mathscr{E}_b^H$ – грани, лежащие внутри и на границе области, соответсвенно. На рис. 2.11, мы представляем два варианта определения грубых сеток: структурированная и неструктурированная грубые сетки. На левом рисунке мы изображаем структурированное разбиение грубой сетки, которое построено с использованием информации о гранях грубой сетки и согласовано с ними на уровне мелкой сетки. Второй вариант разбиения грубой сетки – неструктурированный, который не соответствует мелкой сетке и приводит к слегка колеблющимся границам. Для удобства мы представляем конструкцию многомасштабных базисных функций для мелкой сетки $\mathscr{T}^h$, которая соответствует граням грубой сетки $\mathscr{E}^H$ (структурированная грубая сетка). Построение многомасштабных базисных функций для неструктурированной грубой сетки аналогично.

Рассмотрим локальную область K_i и ее границу ∂K_i. Мы пишем

$$\Gamma_L^i \cup \Gamma_R^i \cup \Gamma_T^i \cup \Gamma_B^i \cup \Gamma_w^i = \partial K_i$$

где Γ_w^i – перфорация или границы стенки, Γ_L^i, Γ_R^i, Γ_T^i, и Γ_B^i левая, правая, верхняя и нижняя границы K_i. (см. рисунок 2.11) В нашем методе многомасштабные базисные функции поддерживаются в каждой грубой ячейке K_i (локальная

область) [19,103,109,120]. Пусть P_H – многомасштабное пространство для концентрации

$$P_H = \mathrm{span}\{\phi_i\}_{i=1}^{N_c},$$

где ϕ_i – многомасштабные базисные функции, определенные в локальных областях, а $N_c = \dim(P_H)$ – общее количество базисных функций для концентрации.

Для приближения грубой сетки имеем следующую вариационную формулировку: найти $c_H \in P_H$ такое, что

$$\frac{1}{\tau} m(c_H - \check{c}_H, r) + a_{\mathrm{DG}}(c_H, r) + c_{\mathrm{DG}}(c_H, r) = l(r), \quad \forall r \in P_H, \tag{2.22}$$

с

$$a_{DG}(c,r) = \sum_{K \in \mathscr{T}^H} \int_K D\nabla c \cdot \nabla r \, dx + \sum_{E \in \mathscr{E}_{b,w}^H} \int_E \alpha \, c \, r \, ds$$
$$- \sum_{E \in \mathscr{E}_o^H \cup \mathscr{E}_{b,in}^H} \int_E \Big(\{D\nabla c \cdot n\}[r] + \{D\nabla r \cdot n\}[c] - \frac{\gamma_c}{h} \{D\}[c][r] \Big) \, ds,$$

$$c_{DG}(c,r) = \sum_{K \in \mathscr{T}^H} \int_K (u c) \cdot \nabla r \, dx + \sum_{E \in \mathscr{E}_o^H \cup \mathscr{E}_{b,out}^H} \int_E (\tilde{u}_+ c_+ - \tilde{u}_- c_-) \, [r] \, ds,$$

$$m(c,r) = \sum_{K \in \mathscr{T}^H} \int_K c \, r \, dx,$$

$$l(r) = \sum_{E \in \mathscr{E}_{b,in}^H} \int_E \Big(\frac{\gamma_c}{h} D r - \{D\nabla r \cdot n\} \Big) \, c_{in} \, dx + \sum_{E \in \mathscr{E}_w^H} \int_E \alpha \, c_w \, r \, ds,$$

где γ_c – штрафной параметр.

Для построения многомасштабных базисных функций мы рассматриваем несколько типов вспомогательных пространств. Мы генерируем вспомогательное пространство в локальной области K_i, учитывая различные граничные условия на границе стены Γ_w^i и на внешней границе локальной области $\partial K_i \backslash \Gamma_w^i$. Мы определяем несколько типов многомасштабных пространств на основе следующего представления внешней границы локальной области

$$\partial K_i \backslash \Gamma_w^i = \Gamma_T^i \cup \Gamma_B^i \cup \Gamma_L^i \cup \Gamma_R^i.$$

Эта концепция похожа на подходы, которые мы использовали в [56, 108, 109, 121].

Многомасштабные базисные функции для границ локальной области. Здесь представляется и исследуется влияние выбора различных наборов суб-границ Γ_r^i с $r = 1, \ldots, \mathscr{L}$ и $i = 1, 2, 3$, который обозначает тип построения многомасштабного пространства, границы локальной области $\partial K_i \backslash \Gamma_w^i$. Мы определяем различные типы многомасштабных пространств на основе определения границы Γ_r^i:

- *Тип 1 ($i = 1$).* Мы строим одно ($\mathscr{L} = 1$) вспомогательное пространство $P_1^{i,\text{snap}}$ для внешней границы локальной области K_i

$$\Gamma_1^i = \Gamma_T^i \cup \Gamma_B^i \cup \Gamma_L^i \cup \Gamma_R^i.$$

- *Тип 2 ($i = 2$).* Мы строим два ($\mathscr{L} = 2$) вспомогательных пространств $P_1^{i,\text{snap}}$ и $P_2^{i,\text{snap}}$ для

$$\Gamma_1^i = \Gamma_T^i \cup \Gamma_B^i \quad \text{and} \quad \Gamma_2^i = \Gamma_L^i \cup \Gamma_R^i.$$

- *Тип 3 ($i = 3$).* Мы строим четыре ($\mathscr{L} = 4$) вспомогательных пространств $P_r^{i,\text{snap}}$ с $r = 1, 2, 3, 4$, связанные со следующими границами

$$\Gamma_1^i = \Gamma_T^i, \quad \Gamma_2^i = \Gamma_B^i, \quad \Gamma_3^i = \Gamma_L^i \quad \text{и} \quad \Gamma_4^i = \Gamma_R^i.$$

Для построения вспомогательного пространства, относящегося к границе Γ_r^i, решаем следующую локальную задачу

$$u \cdot \nabla c_l^{i,r} - \nabla \cdot (D \nabla c_l^{i,r}) = 0, \quad x \in K_i, \tag{2.23}$$

со следующими граничными условиями на $\partial K_i / \Gamma_w^i$

$$c_l^{i,r} = \delta_i^l, \quad x \in \Gamma_r^i, \quad -D \nabla c_l^i \cdot n = 0, \quad x \in \partial K_i / (\Gamma_r^i \cup \Gamma_w^i) \tag{2.24}$$

и с однородными граничными условиями на Γ_w^i

$$-D \nabla c_l^{i,r} \cdot n = \alpha \, c, \quad x \in \Gamma_w^i. \tag{2.25}$$

Мы решаем локальные задачи (2.23) с граничными условиями (2.24) – (2.25) на мелкой сетке $\mathscr{T}^h(K_i)$ с $l = 1, \cdots, J^{i,r}$, где $J^{i,r}$ – количество граней мелкой сетки на границе Γ_r^i, и δ_i^l – определенная дельта-функция Кронекера, которая равна 1, если $i = l$ и нулю в противном случае.

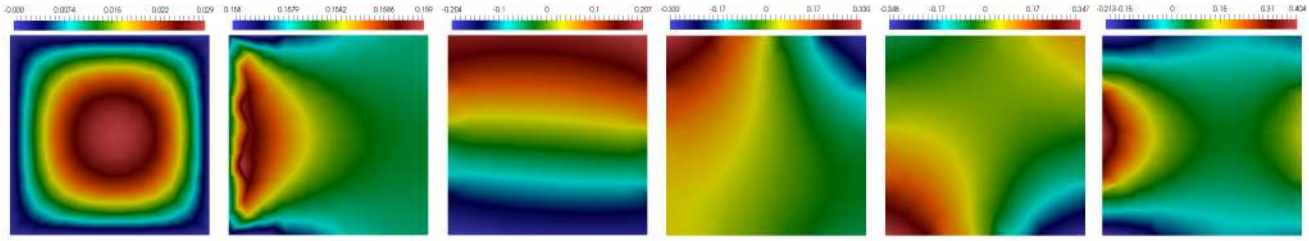


Рис. 2.12: Первые шесть многомасштабных базисных функций Типа 1, соответствующих первым наименьшим собственным значениям для локальной области без перфорации ($\phi_k^{i,1}$, $k = 1, .., 6;\ \ i = 1$).

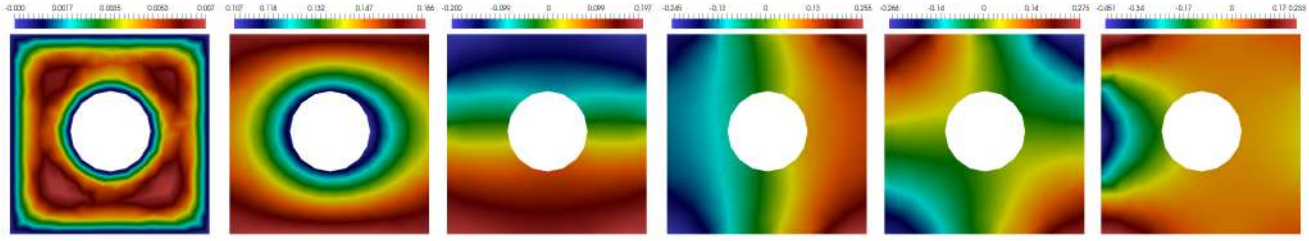


Рис. 2.13: Первые шесть многомасштабных базисных функций Типа 1, соответствующих первым наименьшим собственным значениям для перфорированной локальной области ($\phi_k^{i,1}$, $k = 1, .., 6;\ \ i = 28$).

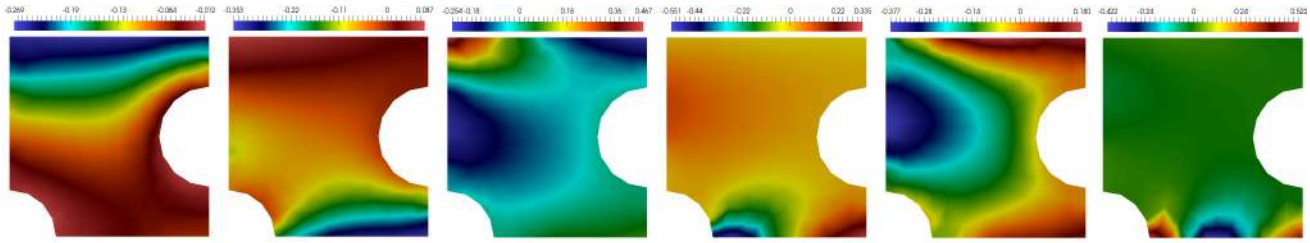


Рис. 2.14: Первые шесть многомасштабных базисных функций Типа 1, соответствующих первым наименьшим собственным значениям для перфорированной локальной области ($\phi_k^{i,1}$, $k = 1, .., 6;\ \ i = 34$).

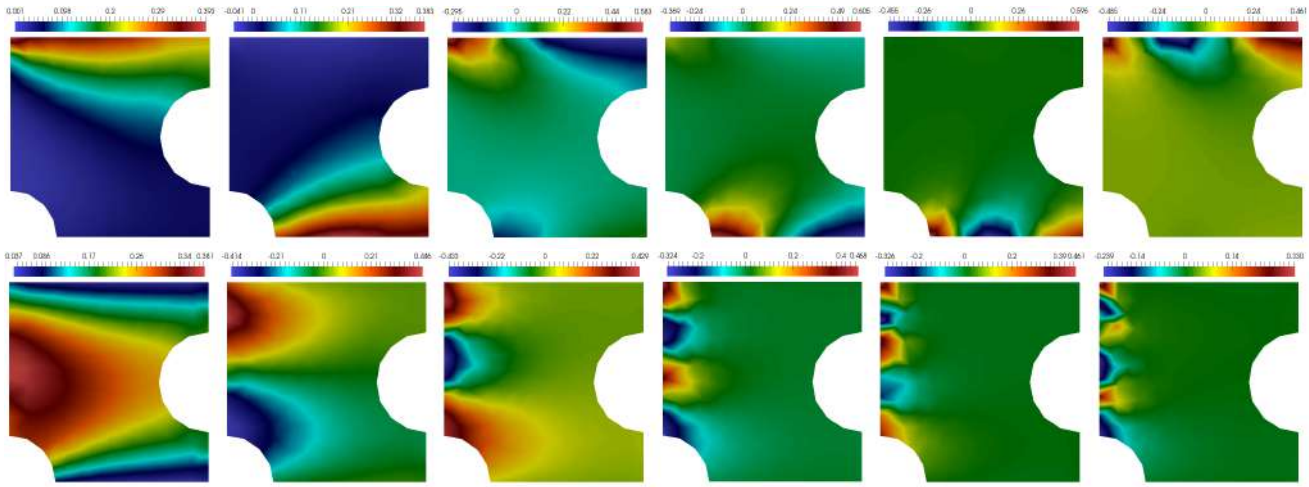


Рис. 2.15: Первые шесть многомасштабных базисных функций Типа 2, соответствующих первым наименьшим собственным значениям для перфорированной локальной области ($\phi_k^{i,r}$, $k = 1,..,6$; $i = 34$). Первая строка: $r = 1$ для $\Gamma_1^i = \Gamma_T^i \cup \Gamma_B^i$ Вторая строка: $r = 2$ для $\Gamma_2^i = \Gamma_L^i \cup \Gamma_R^i$.

Используя локальные решения, мы формируем локальное вспомогательное пространство для локальной подграницы Γ_r^i и определяем матрицу проекции на вспомогательном пространстве

$$P_r^{i,\text{snap}} = \{c_l^{i,r} : 1 \le l \le J^{i,r}\}, \quad R_r^{i,\text{snap}} = \left[c_1^{i,r}, \dots, c_{J^{i,r}}^{i,r}\right]^T.$$

Чтобы уменьшить размер вспомогательного (снэпшот) пространства $P_r^{i,\text{snap}}$ ($r = 1, 2, \dots, \mathscr{L}$), решаем следующую локальную спектральную задачу на вспомогательном пространстве

$$\tilde{A}^{i,r}\tilde{\phi}^{i,r} = \lambda \tilde{S}^{i,r}\tilde{\phi}^{i,r}, \tag{2.26}$$

где

$$\tilde{A}^{i,r} = R_r^{i,\text{snap}} A_h^{K_i} (R_r^{i,\text{snap}})^T, \quad \tilde{S}^{i,r} = R_r^{i,\text{snap}} S_h^{K_i} (R_r^{i,\text{snap}})^T,$$

$A_h^{K_i}$ – матричное представление билинейной формы $a^{K_i}(c,z)$ и $S_h^{K_i}$ – матричное

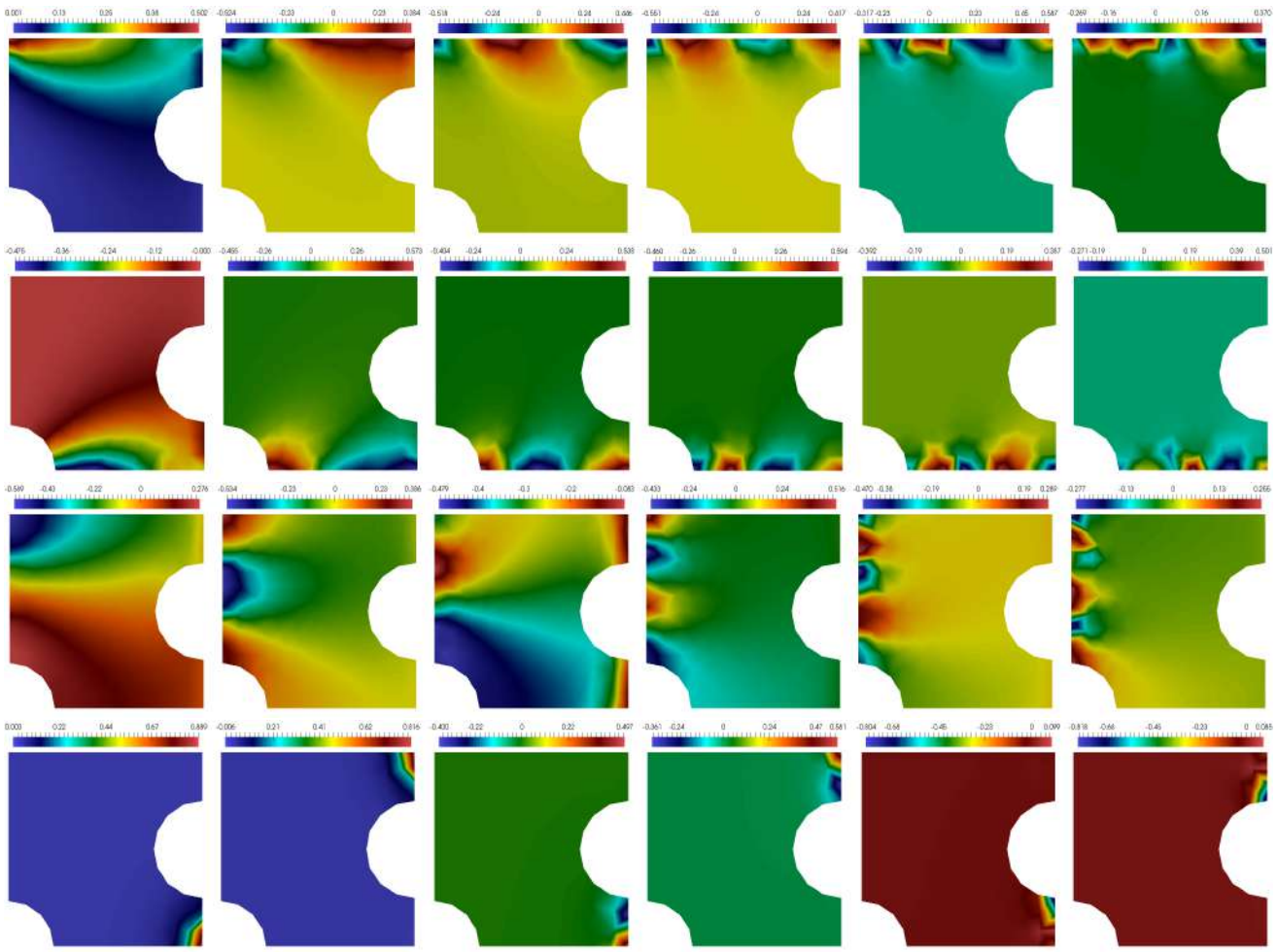


Рис. 2.16: Первые шесть многомасштабных базисных функций Типа 3, соответствующих первым наименьшим собственным значениям для перфорированной локальной области ($\phi_k^{i,r}$, $k = 1,..,6$; $i = 34$). Первая строка: $r = 1$ for $\Gamma_1^i = \Gamma_T^i$. Вторая строка: $r = 2$ for $\Gamma_2^i = \Gamma_B^i$. Третья строка: $r = 3$ for $\Gamma_3^i = \Gamma_L^i$. Четвертая строка: $r = 4$ for $\Gamma_4^i = \Gamma_R^i$.

представление билинейной формы $s^{u,K_i}(c,z)$

$$
\begin{aligned}
a^{K_i}(c,z) = & \sum_{K\in\mathscr{T}^h(K_i)} \int_K (u\cdot\nabla c)\,(u\cdot\nabla v)\,dx + \sum_{K\in\mathscr{T}^h(K_i)} \int_K D\nabla c\cdot\nabla z\,dx \\
& - \sum_{E\in\mathscr{E}_o^h(K_i)} \int_E \Big(\{D\nabla c\cdot n\}[z] + \{D\nabla z\cdot n\}[c] - \frac{\gamma}{h}\{D\}[c][z]\Big)\,ds \qquad (2.27) \\
s^{K_i}(c,z) = & \sum_{E\in\mathscr{E}_b^h(K_i)} \int_E c\,z\,ds.
\end{aligned}
$$

Собственные значения располагаем в порядке возрастания и выбираем пер-

вые собственные векторы, соответствующие первым наименьшим собственным значениям $M^{i,r}$, в качестве базисных функций. На рис. 2.12 изображены первые шесть многомасштабных базисных функций для Типа 1, чтобы показать построение первых шести базисных функций в локальной области без перфорации. На рис. 2.14, 2.15 и 2.16 мы представляем многомасштабные базисные функции типов 1, 2 и 3 соответственно. На рис. 2.17 показаны аналогичные многомасштабные базисные функции Типа 1 для области с другим расположением перфорации, чтобы увидеть влияние на построенные базисные функции.

Наконец, у нас есть следующее многомасштабное пространство

$$P_H^r = \mathrm{span}\{\phi_k^{i,r} : 1 \le i \le N_{cell}^H, 1 \le k \le M^{i,r}\}, \quad r = 1, \dots, \mathscr{L},$$

где $\phi_k^{i,r} = (R_r^{i,\mathrm{snap}})^T \tilde{\phi}_k^{i,r}$.

Многомасштабные базисные функции для границы перфорации. Кроме того, мы создаем вспомогательное (снэпшот) пространство для границы стены, чтобы обрабатывать реактивные граничные условия [106, 115]. Вспомогательное пространство для границы стены строится аналогично путем решения локальной задачи (2.23) с однородными граничными условиями на $\partial K_i / \Gamma_w^i$

$$-D\nabla c_l^i \cdot n = 0, \quad x \in \partial K_i / \Gamma_w^i, \tag{2.28}$$

и следующими граничными условиями на Γ_w^i

$$-D\nabla c_l^{i,r} \cdot n = \alpha(c - \delta_i^l,), \quad x \in \Gamma_w^i. \tag{2.29}$$

Мы решаем локальные задачи на мелкой сетке $\mathscr{T}^h(K_i)$ с $l = 1, \cdots, J^{i,w}$, где $J^{i,w}$ – количество граней мелкой сетки на границе Γ_w^i.

Используя локальные решения, мы формируем вспомогательное пространство для локальных границ стены Γ_r^i и определяем матрицу проекции на вспомогательное пространство

$$P_w^{i,\mathrm{snap}} = \{c_l^{i,r} : 1 \le l \le J^{i,w}\}, \quad R_w^{i,\mathrm{snap}} = \left[c_1^{i,r}, \dots, c_{J^{i,w}}^{i,w}\right]^T.$$

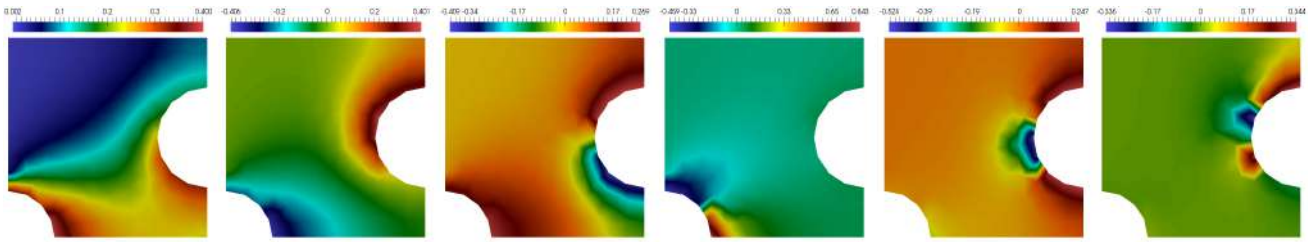


Рис. 2.17: Первые шесть многомасштабных базисных функций для границы стенки, соответствующие первым наименьшим собственным значениям для перфорированной локальной области ($\phi_k^{i,w}$, $k = 1, \ldots, 6$).

Аналогичным образом мы уменьшаем размер вспомогательного пространства $P_w^{i,\text{snap}}$, решаем локальную спектральную задачу (2.26) на вспомогательном пространстве с матрицами (2.27) и расположим собственные значения в порядке возрастания. Мы выбираем первые собственные векторы, соответствующие первым наименьшим собственным значениям $M^{i,w}$, в качестве базисных функций и формируем следующее многомасштабное пространство

$$P_H^w = \text{span}\{\phi_k^{i,w} : 1 \le i \le N_w^H, 1 \le k \le M^{i,w}\},$$

где N_w^H – количество локальных областей с перфорацией. На рис. 2.17 представлены иллюстрации первых шести многомасштабных базисных функций для границы Γ_w^i.

Наконец, определяем следующие три типа многомасштабных пространств:

- *Тип 1:* $P_H = P_H^1 + P_H^w$.
- *Тип 2:* $P_H = P_H^1 + P_H^2 + P_H^w$.
- *Тип 3:* $P_H = P_H^1 + P_H^2 + P_H^3 + P_H^4 + P_H^w$.

В дополнение к представленным многомасштабным базисным функциям добавляем одну внутреннюю базисную функцию [103, 104], которая построена путем решения следующей локальной задачи

$$u \cdot \nabla \psi^i - \nabla(D \nabla \psi^i) = 1, \quad x \in K_i \tag{2.30}$$

с однородными граничными условиями Дирихле, $\psi^i = 0$ на границе локальной

области ∂K_i.

Система на грубой сетке. Чтобы построить систему на грубой сетке, мы строим матрицы проекции, используя вычисленные многомасштабные базисные функции

$$R = \left[\phi_1^{1,1}, \ldots, \phi_{M^{N_{cell}^H,\mathscr{L}}}^{N_{cell}^H,\mathscr{L}}, \phi_1^{1,w}, \ldots, \phi_{M^{N_w^H,w}}^{N_w^H,w}, \psi_1, \ldots, \psi_{N_{cell}^H}\right]^T.$$

Затем мы проецируем систему мелкой сетки на многомасштабное пространство с помощью матрицы проекции R

$$M_H = RM_hR^T, \quad A_H = RA_hR^T, \quad C_H = RC_hR^T, \quad F_H = RF_h$$

и решаем следующие грубые системы

$$\frac{1}{\tau}M_H(c_H - \check{c}_H) + (A_H + C_H)c_H = F_H, \tag{2.31}$$

где $c_{ms} = R^T c_H$ – реконструкция решения на мелкой сетке. Размер системы на грубой сетке составляет $N_H = \sum_{i=1}^{N_{cell}^H}\sum_{r=1}^{\mathscr{L}} M^{i,r} + \sum_{i=1}^{N_w^H} M^{i,w} + N_{cell}^H$, где N_{cell}^H – количество локальных областей, а N_w^H – количество локальных областей с перфорацией.

2.2.3 Численные результаты

В этом пункте представлены численные результаты для предложенного метода, чтобы продемонстрировать эффективность ОМРМГ для решения уравнения конвекции-диффузии.

Рассмотрим перфорированную область $\Omega = [0,1]^2$. Рассмотрим две геометрии: геометрию 1 с 22 перфорациями и геометрию 2 с 44 перфорациями. Расчетные области представлены на рис. 2.18, где грубая сетка показана синим цветом, а мелкая сетка зеленым цветом. Мелкая сетка – это неструктурированная триангуляция, а грубая сетке – это структурированная сетка 10×10 (100 локальных областей). Мелкая сетка содержит 24930 треугольных ячеек для Геометрии 1 и 27656 треугольных ячеек для Геометрии 2. Отметим, что на рис.

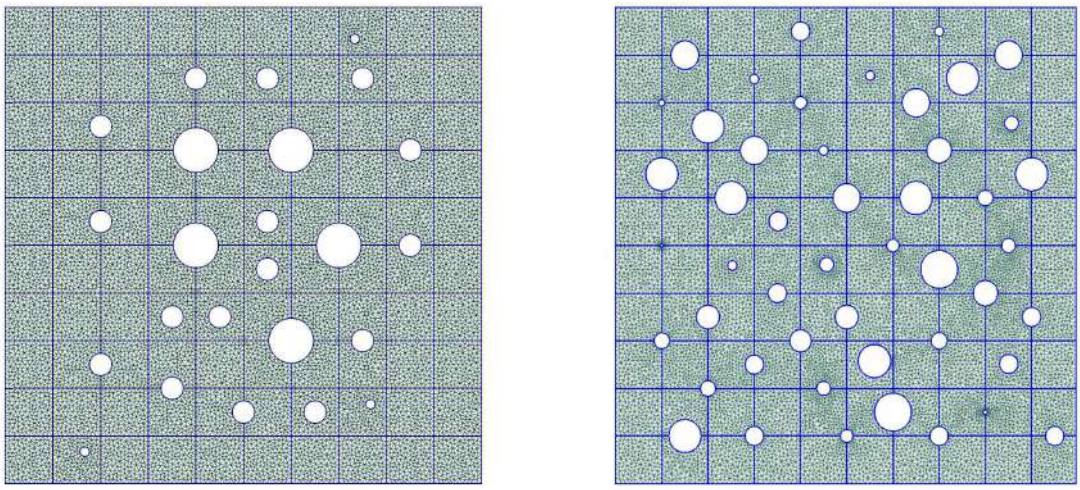


Рис. 2.18: Вычислительные области. Слева: геометрия 1 с 22 перфорациями. Справа: геометрия 2 с 44 перфорациями. Мелкая сетка обозначена зеленым цветом, а грубая – синим.

2.18 элементы мелкой сетки совпадают с гранями грубой сетки. Мы используем Gmsh для построения вычислительной геометрии и неструктурированных мелких сеток [59]. Численная реализация основана на библиотеке FEniCS [58].

Рассмотрим уравнение конвекции-диффузии с $D = 0,01$. Зададим неоднородные граничные условия Робина на Γ_w с $c_w = 1$, $\alpha = 1$. На границе входа Γ_{in} положим $c_{in} = 0$. В качестве начальных условий задаем $c_0 = 1$. Мы проводим моделирование для $t_{max} = 4$ с 80 итерациями по времени. Решим задачу о потоке на мелкой сетке и положим $k = 1$ и $u_1 = 1$. Возьмем параметры штрафа $\gamma = \gamma_c = 20$.

Мы рассматриваем два теста с разными границами входа и выходы потока:

- *Случай 1.* Левая граница – это граница притока Γ_{in}, а правая граница – граница оттока Γ_{out}.
- *Случай 2.* Левая и нижняя границы являются входными границами Γ_{in}, а правая и верхняя границы – выходными границами Γ_{out}.

Чтобы показать эффективность многомасштабных методов, вычисляем от-

носительные погрешности в норме L^2

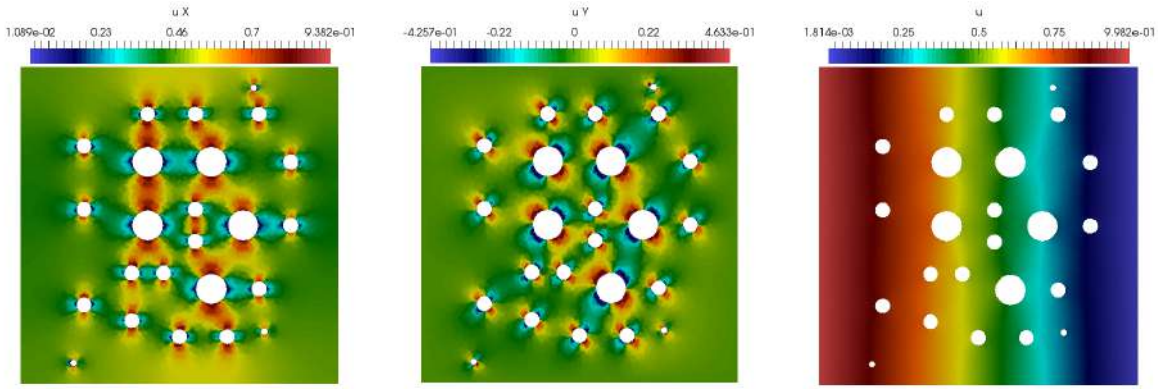
$$e(c) = \sqrt{\frac{\int_\Omega (c_{ms} - c)^2 \, dx}{\int_\Omega c^2 \, dx}} \cdot 100\%,$$

где c_{ms} — многомасштабное решение, а c — эталонное решение (мелкая сетка). Отметим, что в последующих расчетах количество многомасштабных базисных функций равно $M = M^r = M^w$ для всех тестовых случаев и типов многомасштабных базисных функций.

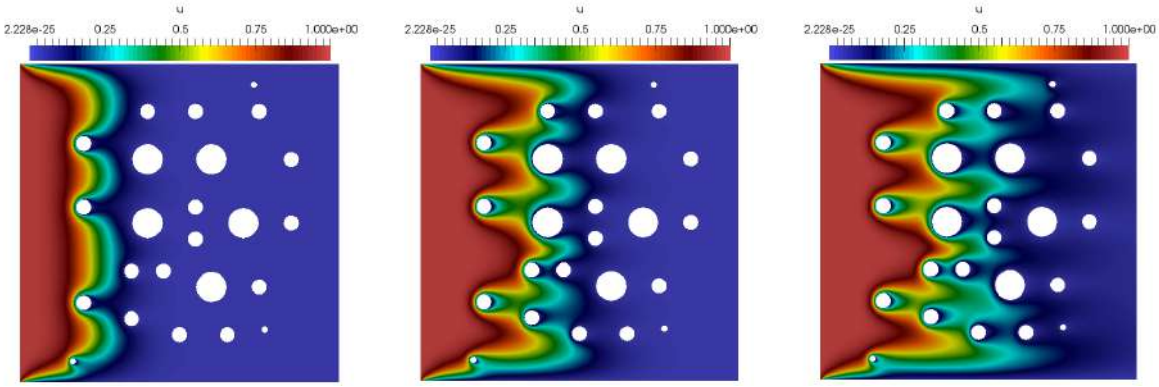
Геометрия 1 с потоками Случаев 1 и 2

В первом тесте мы рассматриваем многомасштабный решатель в Геометрии 1 с 22 перфорациями (левый рис. 2.18). Рассматриваются транспортные задачи с разными границами входа и выхода потока (случай 1 и случай 2). Поле скоростей для случая 1 представлено на рис. 2.19 в первой строке. Соответствующие поля концентрации мелкой сетки (эталонное решение) изображены во второй строке для времени t_m, $m = 20, 40, 80$ — количество итераций по времени (слева направо). Для случая 2 поля скорости и концентрации на мелкой сетке (эталонное решение) изображены на рис. 2.21 в первой и второй строках соответственно.

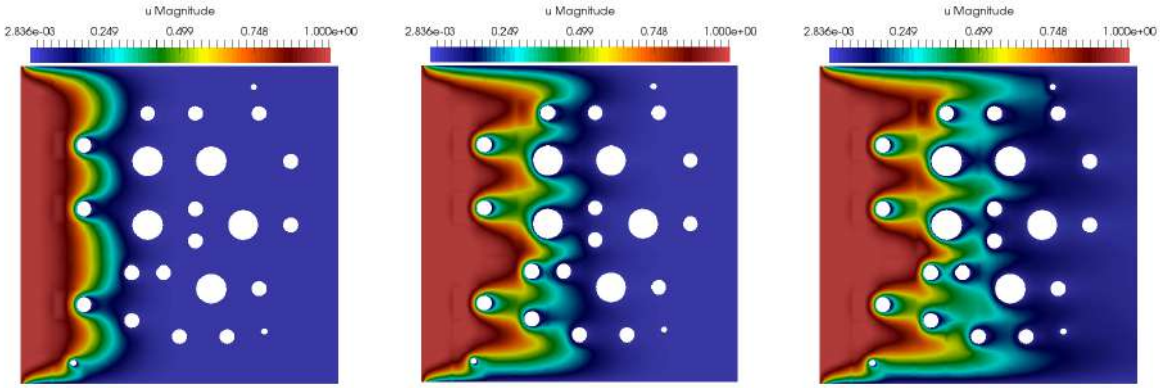
Мы исследуем поведение решения, используя многомасштабный метод для различных типов многомасштабных базисных функций (*Тип 1, 2* и *3*). Решения на грубой сетке для концентрации, соответствующие различным типам построения многомасштабной базисной функции с потоком для случая 1, представлены на рисунках 2.20. На рисунке представлены результаты решения задачи на грубой сетке с размерностью системы $DOF_H = 4308$ для типа 1, $DOF_H = 4268$ для типа 2 и $DOF_H = 3954$ для типа 3. Мы сравнили решение на мелкой сетка с размерностью $DOF_h = 74790$, которая в 17 раз больше, чем любая DOF_H, и дает неплохие ошибки менее 6,5% в конечное время.



(a) Скорость u_x, u_y и давление p.



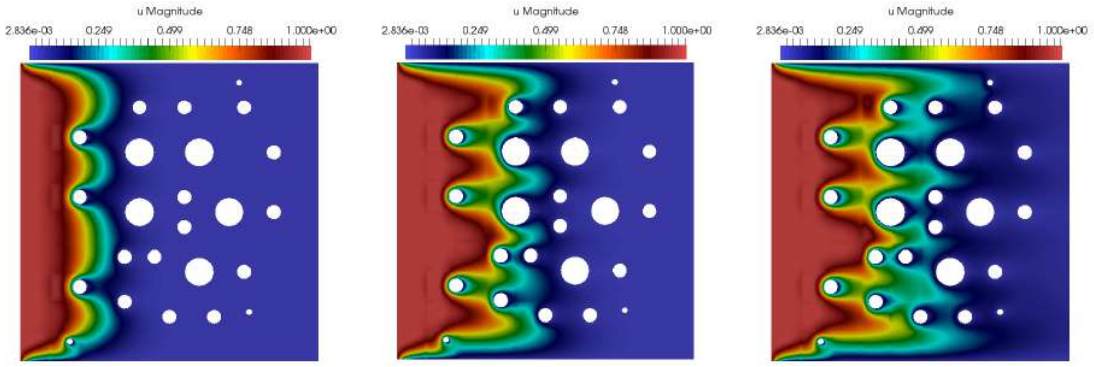
(b) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Решение на мелкой сетке с $DOF_h = 74790$.



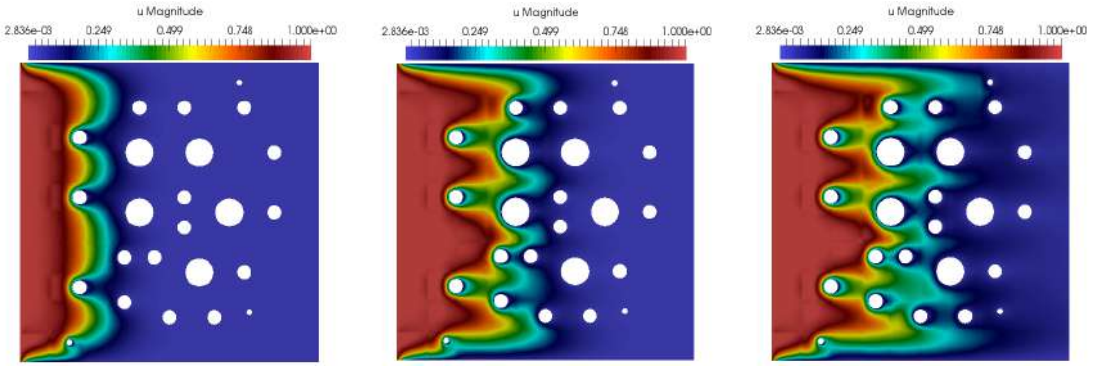
(c) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Многомасштабное решение для многомасштабного пространства Типа 1 с $M = 30$ и $DOF_H = 3540$, $e(c_{20}) = 5.2\%$, $e(c_{40}) = 3.0\%$ и $e(c_{80}) = 2.4\%$.

Рис. 2.19: Решение на мелкой сетке и многомасштабное решение для 1 геометрии с 1 случаем потока.

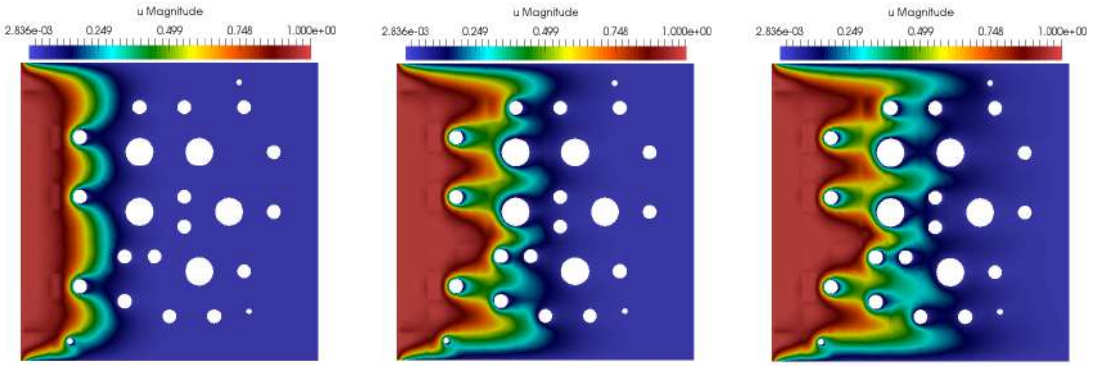
Многомасштабное решение с использованием многомасштабного пространства Типа 1 для случаев 1 и 2 показано на рисунках 2.19 и 2.21 в третьей



(a) Многомасштабные базисные функции Типа 1 с $DOF_H = 4308$, $e(c_{20}) = 2.559\%$, $e(c_{40}) = 2.261\%$ и $e(c_{80}) = 2.418\%$.

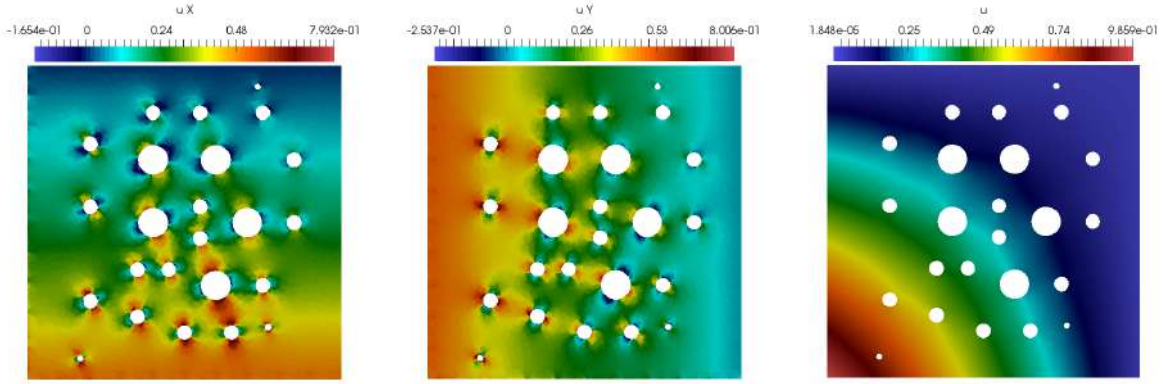


(b) Многомасштабные базисные функции Типа 2 с $DOF_H = 4268$, $e(c_{20}) = 4.343\%$, $e(c_{40}) = 5.756\%$ и $e(c_{80}) = 6.537\%$.

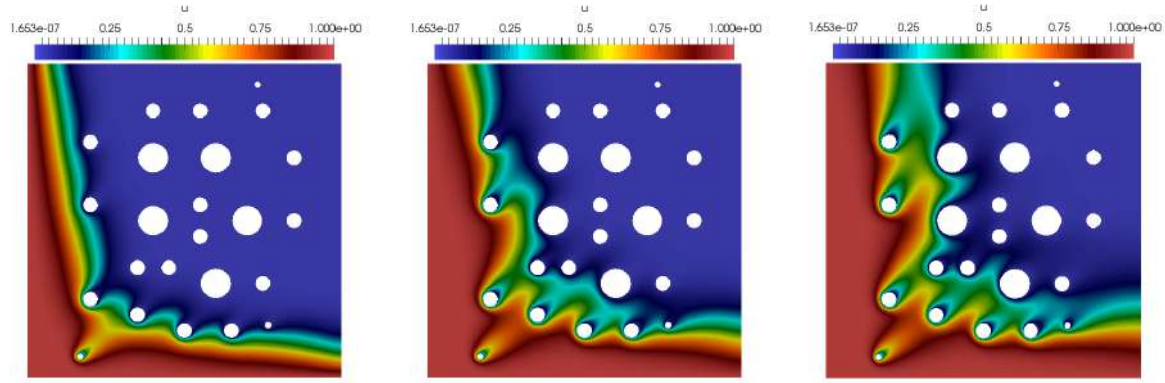


(c) Многомасштабные базисные функции Типа 3 с $DOF_H = 3954$, $e(c_{20}) = 3.491\%$, $e(c_{40}) = 3.708\%$ и $e(c_{80}) = 4.013\%$.

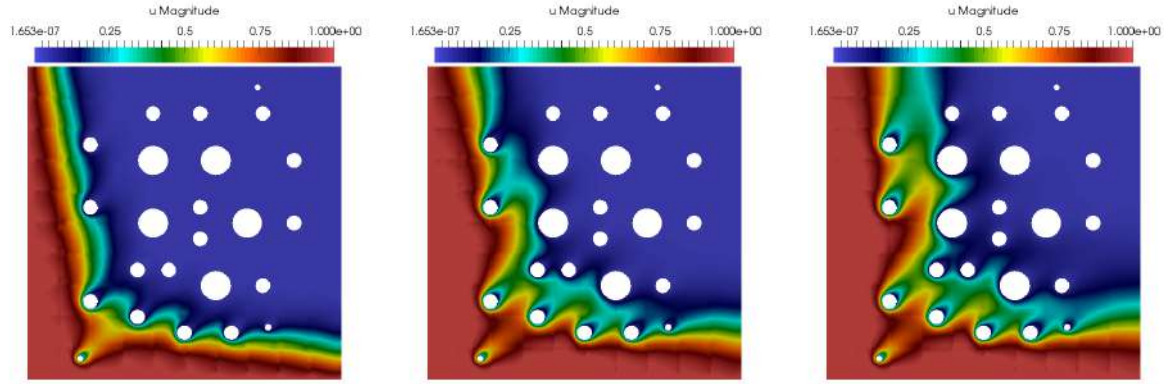
Рис. 2.20: Грубая сетка для концентрации в момент времени t_m, где $m = 20, 40, 80$ с использованием 3-х типов многомасштабных базисных функций со скоростью. Случай 1 с максимально допустимыми многомасштабными базисными функциями (все). Эталонное решение с $DOF_h = 74790$.



(a) Скорость u_x, u_y и давление p.



(b) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Решение на мелкой сетке с $DOF_h = 74790$.



(c) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Многомасштабное решение для многомасштабного пространства Типа 1 с $M = 30$ и $DOF_H = 3540$, $e(c_{20}) = 7.1\%$, $e(c_{40}) = 4.0\%$ и $e(c_{80}) = 3.3\%$.

Рис. 2.21: Решение на мелкой сетке и многомасштабное решение для 1 геометрии с 2 случаем потока.

строке. Аббревиатура DOF (degrees of freedom, степени свободы) означает количество неизвестных в системе. Многомасштабное решение получено с ис-

Случай 1					Случай 2				
$DOF_H(M)$	$e(c_{20})$	$e(c_{40})$	$e(c_{80})$	T_{sol}	$DOF_H(M)$	$e(c_{20})$	$e(c_{40})$	$e(c_{80})$	T_{sol}
Тип 1					Тип 1				
248 (1)	35.011	45.769	49.519	0.081	248 (1)	70.452	51.549	43.409	0.054
544 (3)	66.893	39.253	29.107	0.202	544 (3)	53.301	27.722	16.008	0.141
840 (5)	29.557	18.821	16.219	0.471	840 (5)	54.992	28.251	14.174	0.312
1498 (10)	23.156	11.658	6.466	1.201	1498 (10)	32.907	16.028	8.563	0.882
2033 (15)	22.085	10.101	4.779	2.327	2033 (15)	24.442	11.636	6.878	1.746
2540 (20)	16.803	8.345	3.909	3.029	2540 (20)	16.859	8.432	5.677	3.185
3540 (30)	5.225	3.042	2.429	4.436	3540 (30)	7.118	4.065	3.359	7.322
4308 (all)	2.559	2.261	2.418	8.892	4308 (all)	2.324	1.791	1.805	10.003
Тип 2					Тип 2				
348 (1)	55.609	66.089	68.871	0.113	348 (1)	49.646	58.069	62.259	0.097
844 (3)	32.807	22.112	24.342	0.487	844 (3)	34.845	33.531	38.008	0.392
1340 (5)	20.839	13.596	13.574	1.171	1340 (5)	22.907	24.797	28.911	0.886
2498 (10)	5.767	8.777	9.717	3.531	2498 (10)	8.422	7.133	7.929	3.211
3533 (15)	3.937	4.875	5.902	9.127	3533 (15)	3.906	4.865	5.526	7.659
4268 (all)	4.343	5.756	6.537	12.509	4268 (all)	3.269	3.966	4.474	11.252
Тип 3					Тип 3				
548 (1)	59.568	72.462	75.055	0.186	548 (1)	51.474	60.175	64.157	0.166
1444 (3)	8.302	26.458	33.186	1.014	1444 (3)	17.559	21.521	25.184	1.029
2340 (5)	4.149	6.424	8.079	2.611	2340 (5)	7.574	8.159	9.598	2.779
3954 (all)	3.491	3.708	4.013	9.235	3954 (all)	3.453	4.076	4.645	9.531

Таблица 2.2: Геометрия 1. Относительные погрешности L_2 для концентрации в момент времени t_m, где $m = 20, 40, 80$. Эталонное решение (на мелкой сетке) с $DOF_h = 74790$. Вычислительное время на мелкой сетке $T_{sol} = 31.437$ секунд для Случая 1 и $T_{sol} = 34.167$ секунд для Случая 2 (T_{sol} – время решения в секундах). Слева: Случай 1. Справа: Случай 2.

пользованием многомасштабного пространства с размерностью $DOF_H = 3540$ (с использованием 30 базисных функций на каждую локальную область), а мелкомасштабное эталонное решение получено с использованием аппроксимации мелкой сетки с размерностью $DOF_h = 74790$.

В таблице 2.2 мы представляем относительные погрешности в % для различных типов многомасштабных базисных функций. В первом столбце таб-

лицы указана размерность грубой сетки DOF_H и количество базисных функций M. Следующие три столбца отображают относительные ошибки L_2 для различных моментов времени t_m, $m = 20, 40, 80$, а последний столбец – время вычислений t многомасштабного решателя. Мы наблюдаем, что погрешности уменьшаются, когда мы берем большее количество многомасштабных базисных функций. Многомасштабные базисные функции дают точную аппроксимацию с достаточным количеством базисных функций M для всех трех типов многомасштабного пространства. Для типа 3 многомасштабных базисных функций мы видим, что количество степеней свободы быстро увеличивается из-за специфики построения многомасштабного пространства, где мы берем одинаковое количество базиса для каждого типа границы. Из левой таблицы в 2.2 видно, что многомасштабное пространство *Тип 3* с 5 базисными функциями обеспечивает хорошие погрешности для потока Случая 1 с 4,149 %, 6,424 % и 8,079 % при t_m, где $m = 20, 40$ и 80 соответственно. Для случая 2 (см. правую таблицу в 2.2) мы наблюдаем немного большие погрешности для $M = 5$: 7,574 %, 8,159 % и 9,598 % при t_m с $m = 20, 40$ и 80. Также в таблице 2.2 мы показываем время вычисления многомасштабного решения, чтобы показать преимущество метода в выигрыше времени. Мы видим, что время вычисления многомасштабного решения намного меньше, чем время вычисления эталонного решения. Мы используем максимальное количество базисных функций для обоих случаев потока и можем получить оптимальное решение примерно за 10 секунд, используя многомасштабный решатель, когда время решения на мелкой сетке составляет около 32 секунд. Отметим, что здесь мы рассматриваем только вычислительное время решения задачи на грубой сетке с предварительно рассчитанными базисными функциями, без учета генерации локальных областей, базисных функций и построения системы на грубой сетке. Наибольший вычислительный выигрыш может быть получен для трехмерных задач с большим размером системы с мелкой сеткой. Кроме того, в параллельных вычислениях

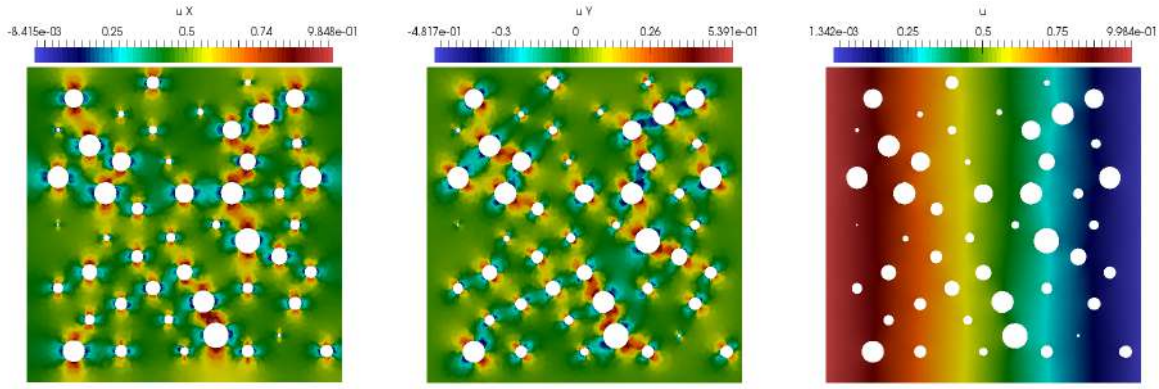
можно использовать многомасштабные базисные функции, поскольку все базисные функции вычисляются независимо друг от друга. Мы видим, что многомасштабные базисные функции типа 1 дают более точную аппроксимацию для обоих случаев с одинаковыми размерами многомасштабного пространства (DOF_H). Например, мы получили $3,9\%$ для типа 1, $9,7\%$ для типа 2 и $8,0\%$ для типа 3 в потоке Case 1 в конечный момент времени с $DOF_H \approx 2500$. Для случая 2 с $DOF_H \approx 2500$ получили $5,6\%$ для типа 1, $7,9\%$ для типа 2 и $9,5\%$ для типа 3 в конечное время.

Геометрия 2 с потоками Случаев 1 и 2

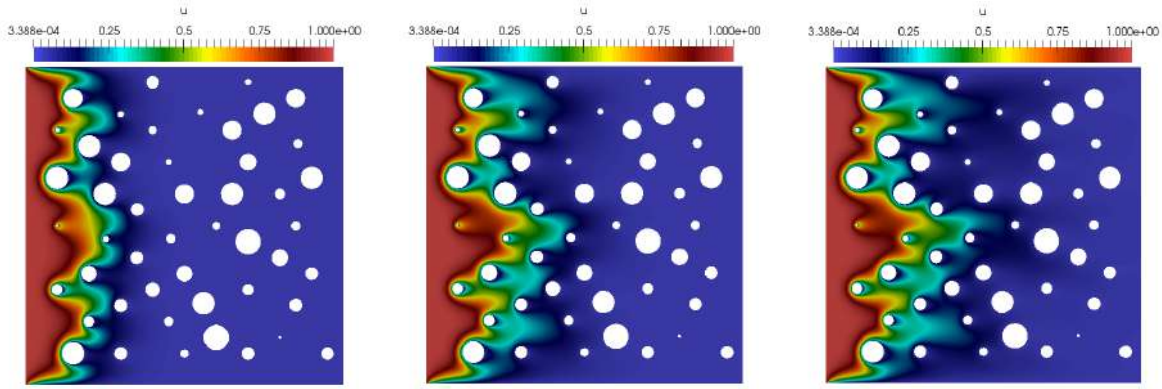
Далее рассмотрим многомасштабный решатель для решения задачи в геометрии 2 с 44 перфорациями с использованием потока 1 и 2. На рис. 2.22 и рис. 2.23 представлены решения на мелкой сетке для полей скорости, давления и концентрации для случаев 1 и 2 соответственно. Концентрации представлены для трех значений t_m, где $m = 20, 40$ и 80.

Многомасштабное решение, соответствующее типу 1 многомасштабной базисной функции с $M = 30$ для геометрии 2, представлено в третьей строке на рис. 2.22 для случая 1 и на рис. 2.23 для случая 2 потока. Многомасштабное решение получено с использованием многомасштабного пространства с размерностью $DOF_H = 3948$ (с использованием 30 базисных функций на каждую локальную область), а мелкомасштабное эталонное решение получено с использованием аппроксимации мелкой сетки с размерностью $DOF_h = 82968$. Как и в предыдущем тесте для Геометрии 1, мы исследуем влияние трех типов многомасштабных базисных функций на погрешности для двух случаев потока.

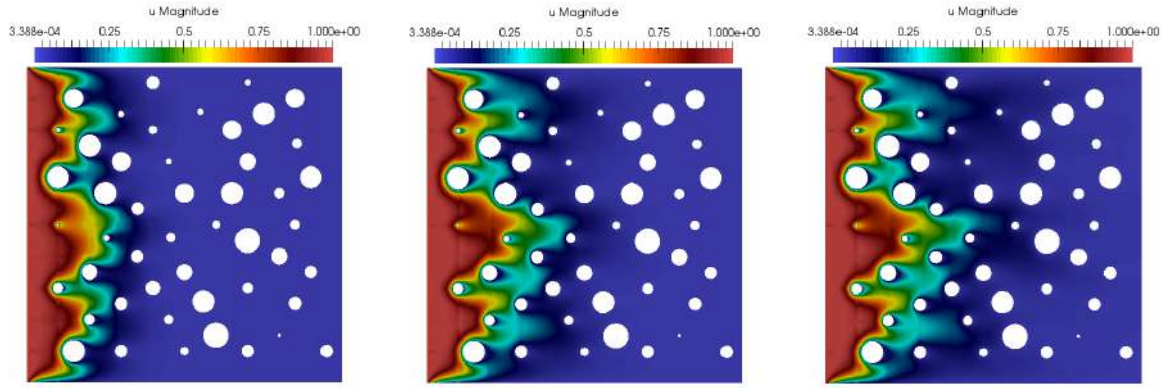
На таблице 2.3 представлены относительные погрешности концентрации L_2 для случаев 1 и 2 с тремя типами многомасштабной базисной функции для трех временных слоев t_m, где $m = 20, 40, 80$. Подобно результатам для Геометрии 1, мы видим, что погрешности уменьшаются, когда берем большее коли-



(a) Скорость u_x, u_y и давление p.



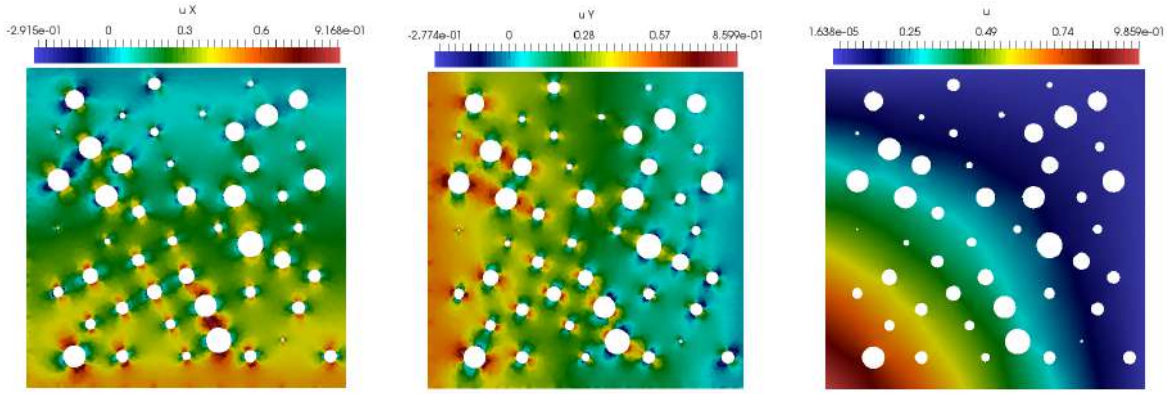
(b) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Решение на мелкой сетке с $DOF_h = 82968$.



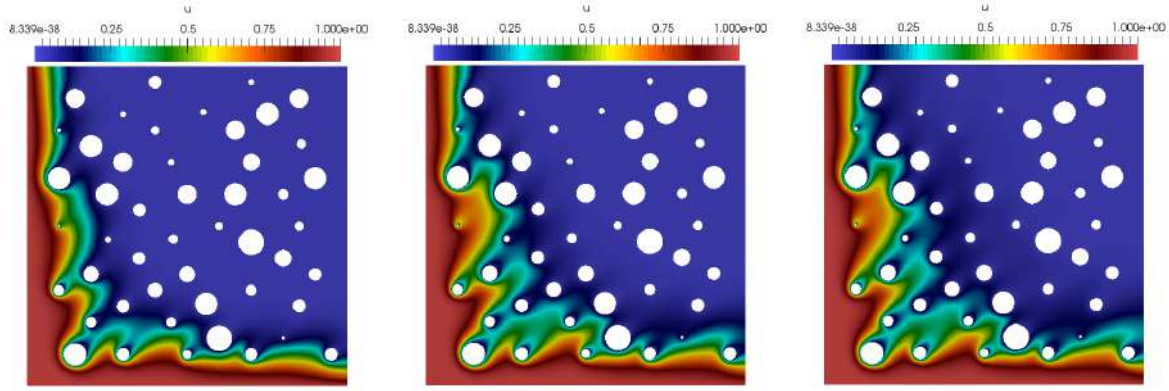
(c) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Многомасштабное решение для многомасштабного пространства Типа 1 с $M = 30$ и $DOF_H = 3948$, $e(c_{20}) = 4.5\%$, $e(c_{40}) = 2.9\%$ и $e(c_{80}) = 2.8\%$.

Рис. 2.22: Решение на мелкой сетке и многомасштабное решение для 2 геометрии с 1 случаем потока.

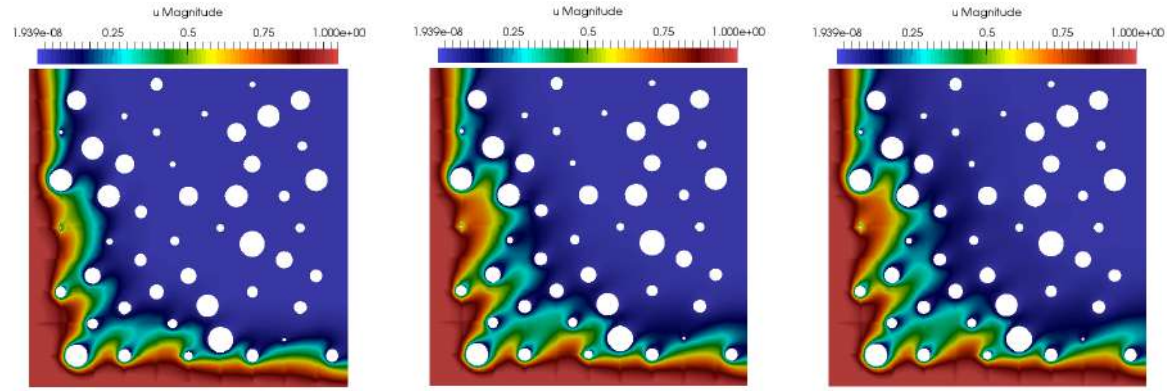
чество многомасштабных базисных функций для Геометрии 2. Мы наблюдаем хорошие результаты при достаточном количестве многомасштабных базисных



(a) Скорость u_x, u_y и давление p.



(b) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Решение на мелкой сетке с $DOF_h = 82968$.



(c) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Многомасштабное решение для многомасштабного пространства Типа 1 с $M = 30$ и $DOF_H = 3948$, $e(c_{20}) = 3.3\%$, $e(c_{40}) = 2.4\%$ и $e(c_{80}) = 2.5\%$.

Рис. 2.23: Решение на мелкой сетке и многомасштабное решение для 2 геометрии с 2 случаем потока.

функций. Например, у нас есть около $4,5$, $2,9$ и $2,8\%$ погрешностей для t_m, где $m = 20, 40, 80$ в случае 1 потока, когда мы берем 30 многомасштабных ба-

Случай 1				Случай 2			
$DOF_H(M)$	$e(c_{20})$	$e(c_{40})$	$e(c_{80})$	$DOF_H(M)$	$e(c_{20})$	$e(c_{40})$	$e(c_{80})$
Тип 1				Тип 1			
287 (1)	41.693	45.561	46.519	287 (1)	44.289	45.364	44.929
655 (3)	41.214	32.024	30.378	655 (3)	28.628	18.679	16.445
998 (5)	22.151	19.045	18.195	998 (5)	33.211	18.239	15.235
1762 (10)	17.324	9.998	8.158	1762 (10)	23.714	12.449	10.789
2397 (15)	15.672	8.593	7.012	2397 (15)	18.737	10.405	9.327
2946 (20)	13.342	6.806	5.685	2946 (20)	11.873	6.776	6.175
3948 (30)	4.561	2.972	2.853	3948 (30)	3.353	2.487	2.526
4556 (all)	2.214	2.684	2.743	4556 (all)	1.861	2.185	2.225
Тип 2				Тип 2			
387 (1)	41.007	46.744	47.931	387 (1)	41.357	44.211	44.971
955 (3)	27.619	24.605	24.54	955 (3)	34.864	30.359	30.715
1498 (5)	18.241	13.709	13.278	1498 (5)	16.759	21.608	22.591
2762 (10)	8.176	7.202	7.323	2762 (10)	6.436	7.612	7.883
3775 (15)	5.762	6.021	6.212	3775 (15)	4.159	5.317	5.435
4357 (all)	5.222	5.732	5.924	4357 (all)	3.981	4.879	4.978
Тип 3				Тип 3			
587 (1)	59.104	65.473	66.321	587 (1)	44.719	49.848	50.863
1537 (3)	20.453	25.445	26.628	1537 (3)	17.44	19.702	20.451
2387 (5)	7.395	9.665	10.265	2387 (5)	7.672	9.411	9.913
3788 (all)	5.854	6.981	7.238	3788 (all)	4.756	6.081	6.391

Таблица 2.3: Геометрия 2. Относительные погрешности L_2 для концентрации при t_m, где $m = 20, 40, 80$. Эталонное решение с $DOF_h = 82968$. Слева: Случай 1. Справа: Случай 2.

зисных функций типа 1 ($M = 30$, $DOF_H = 3948$). Для случая 2 у нас есть $3,3$, $2,4$ и $2,5\%$ погрешностей для t_m, где $m = 20, 40, 80$ с использованием многомасштабного пространства типа 1 ($M = 30$, $DOF_H = 3948$). Для многомасштабного пространства Типа 2 и 3 мы получаем большие погрешности для обоих случаев течения с одинаковыми $DOF_H \approx 3800$. Однако для меньшего числа базисных функций, чем пять $DOF_H \approx 2800$, мы получаем аналогичные результаты для всех трех типов базисных функций.

Геометрия 1 с разными коэффициентами диффузии на неструктурированных и структурированных грубых сетках

Наконец, мы рассматриваем многомасштабный решатель, использующий структурированные и неструктурированные грубые сетки. Мы рассматриваем задачу в геометрии 1 с течением случая 1 и приводим результаты для различных коэффициентов диффузии ($D = 0,01$ и $0,1$).

Неструктурированная грубая сетка разбивается на квадраты неровной формы. Построение мелкой сетки проще для неструктурированной грубой сетки, чем для структурированной, поскольку структурированная грубая сетка требует построения подтверждающей мелкой сетки с ребрами грубой сетки. Исследуем влияние грубой сетки на многомасштабный метод. Мы рассматриваем структурированную и неструктурированную грубую сетки со 100 локальными областями. Неструктурированная сетка с изображением локальных областей представлена на рисунке 2.24. Кроме того, мы исследуем влияние коэффициента диффузии D на погрешности многомасштабного решателя.

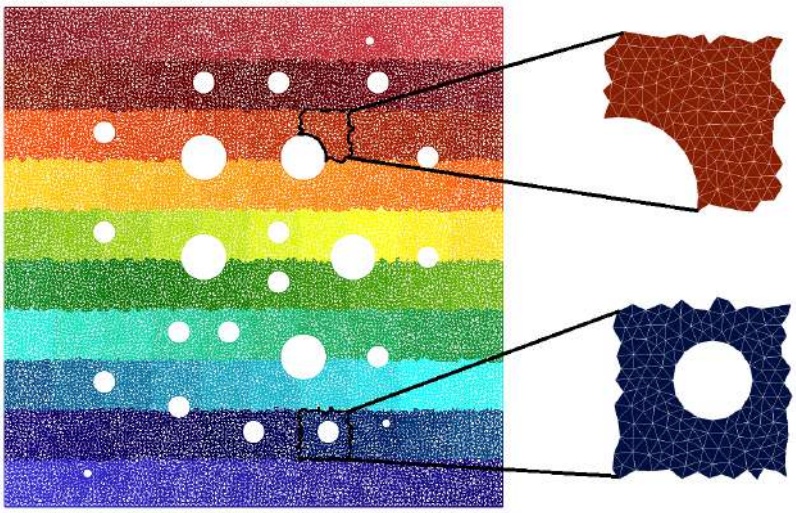


Рис. 2.24: Неструктурированная грубая сетка со 100 локальными областями.

Решение на мелкой сетке и многомасштабное решение с использованием структурированных и неструктурированных грубых сеток с $D = 0,1$ изображе-

Неструктурированная грубая сетка				Структурированная грубая сетка			
$DOF_H(M)$	$e(c_{20})$	$e(c_{40})$	$e(c_{80})$	$DOF_H(M)$	$e(c_{20})$	$e(c_{40})$	$e(c_{80})$
Тип 1				Тип 1			
248 (1)	38.521	48.635	51.805	248 (1)	35.011	45.769	49.519
544 (3)	69.335	41.468	30.659	544 (3)	66.893	39.253	29.107
840 (5)	40.771	21.622	16.873	840 (5)	29.557	18.821	16.219
1498 (10)	36.353	17.107	9.446	1498 (10)	23.156	11.658	6.466
2033 (15)	27.645	13.45	6.905	2033 (15)	22.085	10.101	4.779
2540 (20)	19.348	10.572	5.807	2540 (20)	16.803	8.345	3.909
3540 (30)	9.199	5.575	3.424	3540 (30)	5.225	3.042	2.429
5170 (all)	2.546	2.143	2.281	4308 (all)	2.559	2.261	2.418
Тип 2				Тип 2			
348 (1)	48.466	61.382	64.641	348 (1)	55.609	66.089	68.871
844 (3)	28.201	32.809	37.833	844 (3)	32.807	22.112	24.342
1340 (5)	25.387	26.796	30.912	1340 (5)	20.839	13.596	13.574
2498 (10)	21.062	24.246	25.814	2498 (10)	5.767	8.777	9.717
3533 (15)	13.744	16.723	18.114	3533 (15)	3.937	4.875	5.902
5150 (all)	6.127	8.923	10.351	4268 (all)	4.343	5.756	6.537
Тип 3				Тип 3			
548 (1)	68.081	79.054	81.033	548 (1)	59.568	72.462	75.055
1444 (3)	38.467	56.061	60.316	1444 (3)	8.302	26.458	33.186
2340 (5)	18.429	32.287	37.476	2340 (5)	4.149	6.424	8.079
4641 (all)	5.179	9.954	12.566	3954 (all)	3.491	3.708	4.013

Таблица 2.4: Геометрия 1 с $D = 0.01$. Относительная погрешность L_2 для концентрации на t_m, где $m = 20, 40, 80$. Эталонное решение с $DOF_h = 74790$. Слева: Неструктурированная грубая сетка. Справа: Структурированная грубая сетка.

ны на рис. 2.25 для трех слоев по времени t_m, где $m = 20, 40, 80$. Для эталонного решения на мелкой сетке (первая строка) имеем $DOF_h = 74790$. Многомасштабные решения (вторая и третья строки) рассчитываются с использованием 30 многомасштабных базисных функций типа 1 с $DOF_H = 3540$ ($4,7\%$ от DOF_h). Для структурированной грубой сетки имеем 1.3, 1.1 и 1.1% для t_m, где $t = 20, 40, 80$. Для неструктурированной грубой сетки имеем $0,8$, $0,7$ и $0,7\%$ для t_m, где $t = 20, 40, 80$.

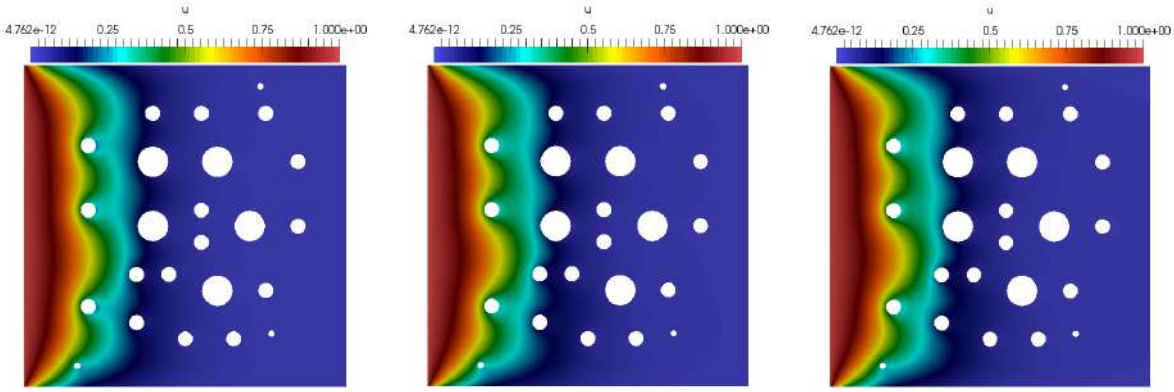
Неструктурированная грубая сетка			
$DOF_H(M)$	$e(c_{20})$	$e(c_{40})$	$e(c_{80})$
Тип 1			
248 (1)	151.314	142.429	141.69
544 (3)	83.588	77.254	76.723
840 (5)	41.326	36.078	35.669
1498 (10)	6.602	5.195	5.086
2033 (15)	3.903	3.332	3.298
2540 (20)	2.345	1.865	1.838
3540 (30)	1.320	1.137	1.132
5170 (all)	0.717	0.683	0.692
Тип 2			
348 (1)	67.046	60.914	60.391
844 (3)	25.243	26.923	27.056
1340 (5)	12.235	14.007	14.176
2498 (10)	3.432	4.469	4.587
3533 (15)	1.786	2.431	2.511
5150 (all)	1.312	1.714	1.765
Тип 3			
548 (1)	18.091	20.449	20.662
1444 (3)	3.495	4.983	5.147
2340 (5)	1.974	2.852	2.960
4641 (all)	1.410	1.882	1.940

Структурированная грубая сетка			
$DOF_H(M)$	$e(c_{20})$	$e(c_{40})$	$e(c_{80})$
Тип 1			
248 (1)	140.03	131.514	130.797
544 (3)	55.952	50.691	50.257
840 (5)	17.837	15.176	14.936
1498 (10)	3.677	3.087	3.039
2033 (15)	1.314	1.243	1.248
2540 (20)	1.037	0.950	0.954
3540 (30)	0.812	0.770	0.779
4308 (all)	0.709	0.696	0.709
Тип 2			
348 (1)	53.341	47.752	47.278
844 (3)	22.395	25.649	25.896
1340 (5)	6.762	7.673	7.776
2498 (10)	1.434	1.754	1.795
3533 (15)	0.992	1.247	1.279
4268 (all)	0.929	1.175	1.207
Тип 3			
548 (1)	14.911	17.101	17.303
1444 (3)	1.771	2.182	2.236
2340 (5)	0.755	0.921	0.943
3954 (all)	0.545	0.669	0.685

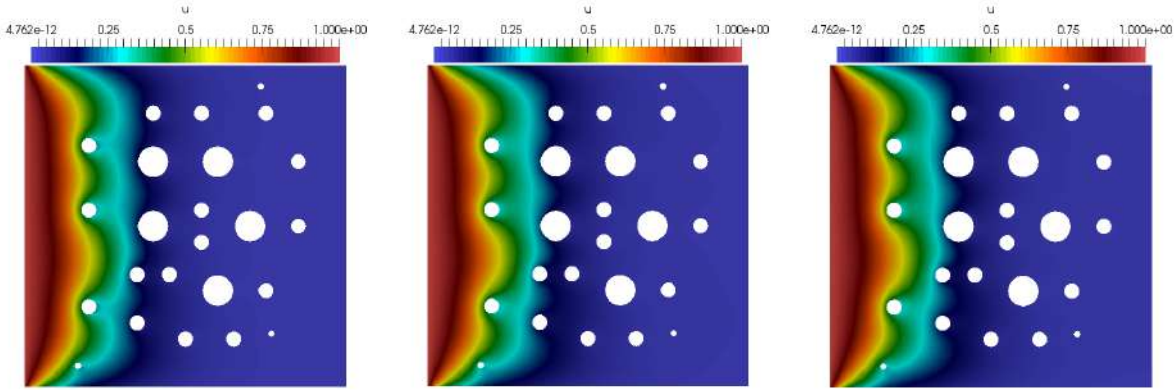
Таблица 2.5: Геометрия 1 с $D = 0.1$. Относительная погрешность L_2 для концентрации на t_m, где $m = 20, 40, 80$. Эталонное решение с $DOF_h = 74790$. Слева: Неструктурированная грубая сетка. Справа: Структурированная грубая сетка.

В таблицах 2.4 и 2.5 представлены относительные погрешности L_2 для различного числа базисных функций M для структурированных и неструктурированных решений на грубой сетке в перфорированных средах с коэффициентом диффузии $D = 0,01$ и $D = 0,1$ соответственно. Заметим, что погрешности меньше при большей диффузии и меньшее количество базисных функций требуется для точной аппроксимации на многомасштабном пространстве при $D = 0,1$. Например, мы можем получить хорошие результаты с 3% погрешности в ко-

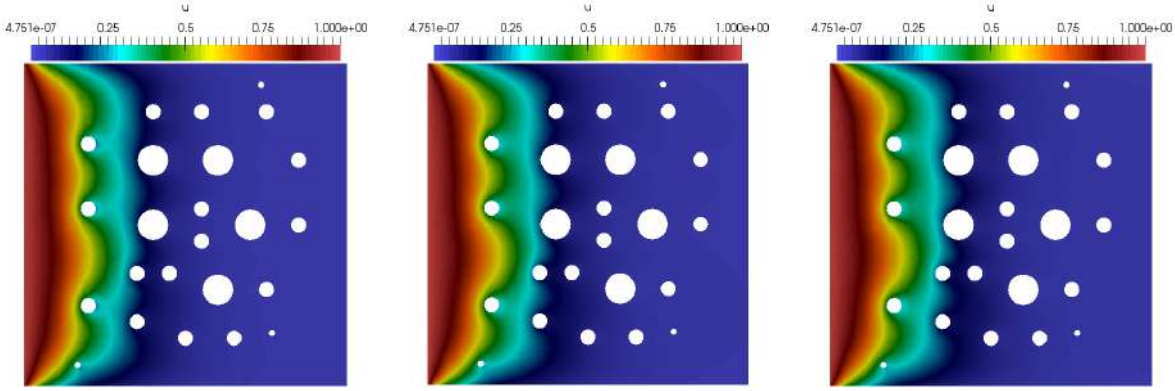
нечное время, используя 10 многомасштабных базисных функций типа 1 на структурированной сетке и 15 многомасштабных базисных функций типа 1 на неструктурированной сетке. Из представленных погрешностей для $D = 0,01$ в таблице 2.4 видно, что решение на неструктурированной сетке дает почти такие же погрешности для многомасштабного пространства Типа 1. Однако мы получаем большие погрешности для типов 2 и 3 на неструктурированной сетке, чем на структурированной. Для тестовой задачи с большим коэффициентом диффузии $D = 0,1$ в таблице 2.5 мы получаем хорошие результаты для структурированных и неструктурированных грубых сеток с практически одинаковыми погрешностями.



(a) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Решение на мелкой сетке с $DOF_h = 74790$.



(b) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Многомасштабное решение для многомасштабного пространства Типа 1 с $M = 30$ и $DOF_H = 3540$, $e(c_{20}) = 0.8\%$, $e(c_{40}) = 0.7\%$ и $e(c_{80}) = 0.7\%$.



(c) Концентрация во временном шаге t_m, $m = 20, 40, 80$. Многомасштабное решение для многомасштабного пространства для Типа 1 с использованием неструктурированной грубой сетки с $M = 30$ и $DOF_H = 3540$, $e(c_{20}) = 1.320\%$, $e(c_{40}) = 1.137\%$ и $e(c_{80}) = 1.132\%$.

Рис. 2.25: Решение на мелкой сетке и многомасштабное решение для 1 геометрии с 1 случаем потока и $D = 0.1$ для структурированной и неструктурированной грубой сетки.

2.3 Выводы

В данной главе были построены граничные многомасштабные методы для задач в перфорированных средах. В первой подглаве был разработан обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов для решения задачи рассеяния в перфорированной области. Математическая модель описывалась уравнением Гельмгольца, связанной с распространением волн с поглощающим граничным условием. Решение на мелкой сеткой было построено с использованием метода конечных элементов на неструктурированной мелкой сетке. Для приближенного решения представленной задачи представлен ОГММКЭ. В ОГММКЭ строится многомасштабное пространство, используя решение локальных спектральных задач во вспомогательном пространстве, связанных с грубыми гранями сетки. Численные результаты для задачи Гельмгольца в перфорированной области были представлены для двух тестовых задач и исследования для различных волновых чисел и чисел граничных многомасштабных базисных функций.

Во втором разделе представлен многомасштабный решатель для уравнения конвекции-диффузии в перфорированных средах с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина (ОМРМГ). Представлено построение многомасштабного пространства с использованием информации о поле скоростей. Вспомогательные пространства строятся локально для внешней границы и границы перфорации. Чтобы уменьшить размер вспомогательного пространства, были решены локальные спектральные задачи, учитывающую поле скоростей. Были исследованы несколько типов построения многомасштабных базисных функций для различных внешних граничных потоков. Эти многомасштабные базисные функции могут эффективно фиксировать более мелкую информацию о задаче конвекции-диффузии и позволяют использовать меньше степеней свободы, чем соответствующее моделирование с ис-

пользованием аппроксимации конечных элементов на мелкой сетке. Представлены несколько примеров для проверки эффективности представленного метода. Сравнивая решение на мелкой сетке и решение на грубой сетке, видим, что ОГММКЭ может точно аппроксимировать решение на мелкой сетке с меньшим количеством степеней свободы.

Глава 3

Комплекс программ для исследования многомасштабных методов для волновых задач

Данная глава посвящена особенностям реализации программного комплекса обобщенного многомасштабного метода конечных элементов для распространения волн в неоднородных средах. Основное назначение комплекса — построение многомасштабных базисов и проведение вычислительных экспериментов. На данный комплекс получено два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [70, 71].

Программы являются вычислительными библиотеками, написанными на языке C++ и Си с примерами решения задачи Гельмгольца в комплексных переменных. Конечно-элементная аппроксимация построена с помощью библиотеки FEniCS с открытым исходным кодом, общей целью которого является автоматизированное решение дифференциальных уравнений. Для построения геометрической области используется генератор сеток конечных элементов Gmsh. Визуализация и анализ полученных результатов происходит с использованием программы Paraview, который может выполняться в интерактивном режиме или программно с использованием возможностей пакетной обработки.

3.1 Вычислительная библиотека для моделирования волновых процессов с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина

Библиотека предназначена для численного решения прикладных задач на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного разрывного

метода Галеркина посредством построения специальных многомасштабных базисных функций. Базисные функции строятся посредством решения локальных спектральных задач в локальных подобластях.

Численное решение уравнения Гельмгольца в комплексных переменных на сегодняшний день является актуальной, необходимой и интересной задачей. Классическим численным методом решения таких задач является использование стандартных конечно-разностных или конечно элементных или конечно объемных аппроксимаций. Однако, для применимости и сходимости таких методов размер ячейки расчетной сетки должен быть достаточно малым для того чтобы сеточно разрешить все трещины, $h < e$. Здесь $e > 0$ соответствует некоторому малому масштабу задачи. А это существенно увеличивает размерность задачи, соответственно и время счета, а также объем используемой памяти. Разрешение его на сеточном уровне ($h \ll e$) является необходимым при использовании стандартных методов аппроксимации. Следовательно если e очень мал, то подобные классические аппроксимации ведут системам уравнений с очень большим количеством неизвестных. Самым простым вариантом, является пренебрежение данного ограничения при аппроксимации задачи, но влияние микромасштабных трещин на макромасштабное решение может быть велико. Именно для таких задач и необходимо разрабатывать и использовать те или иные многомасштабные методы. Многомасштабные методы должны сочетать в себе как простоту и эффективность использования моделей грубой сетки, так и точность аппроксимации на мелкой сетке.

3.1.1 Методология

Разработан обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина для решения уравнения Гельмгольца в комплексных переменных с использованием адаптивного подхода. Разработанный подход разделяется на оффлайн и онлайн этапы. На оффлайн этапе, мы определяем грубую сетку и локальные

подобласти в которых строим многомасштабные базисные функции посредством решения локальных задач. Отметим, что при этом каждый элемент грубой сетки (локальная подобласть) является объединением ячеек мелкой сетки. Для построения локальных многомасштабных базисных функций, в первую очередь, строим два многомасштабных пространства: граничное многомасштабное пространство и внутреннее многомасштабное пространство. Граничное многомасштабное пространство строится посредством решения спектральных локальных задач. Спектральное разложение основывается на проведенном анализе и локальном собственно-ортогональном разложении, что позволяет выбирать в качестве элементов оффлайн пространства наиболее доминирующие моды разложения. Внутреннее многомасштабное пространство определяется для учета внутренних мод разложения. Затем решается спектральная задача с однородными граничными условиями Дирихле для определения важных мод.

На онлайн этапе, мы решаем задачу при заданных входных параметрах с использованием построенного оффлайн пространства.

Проведено исследование, построенных многомасштабных пространств, для решения задачи Гельмгольца в комплексных переменных. Исследование проводилось для различных геометрий с различными размерами трещин.

3.1.2 Техническое и программное решение

Программа состоит из двух модулей:

(1) модуль построения локальных подобластей.

Модуль 1:

- makeomega/makeomega.cpp
- makeomega/task.ufl

Данный модуль работает с построенной расчетной сеткой. На вход подается файл с мелкой расчетной сеткой. Для запуска необходимо запустить файлы task.ufl и makeomega.cpp с соответствующими входными данными.

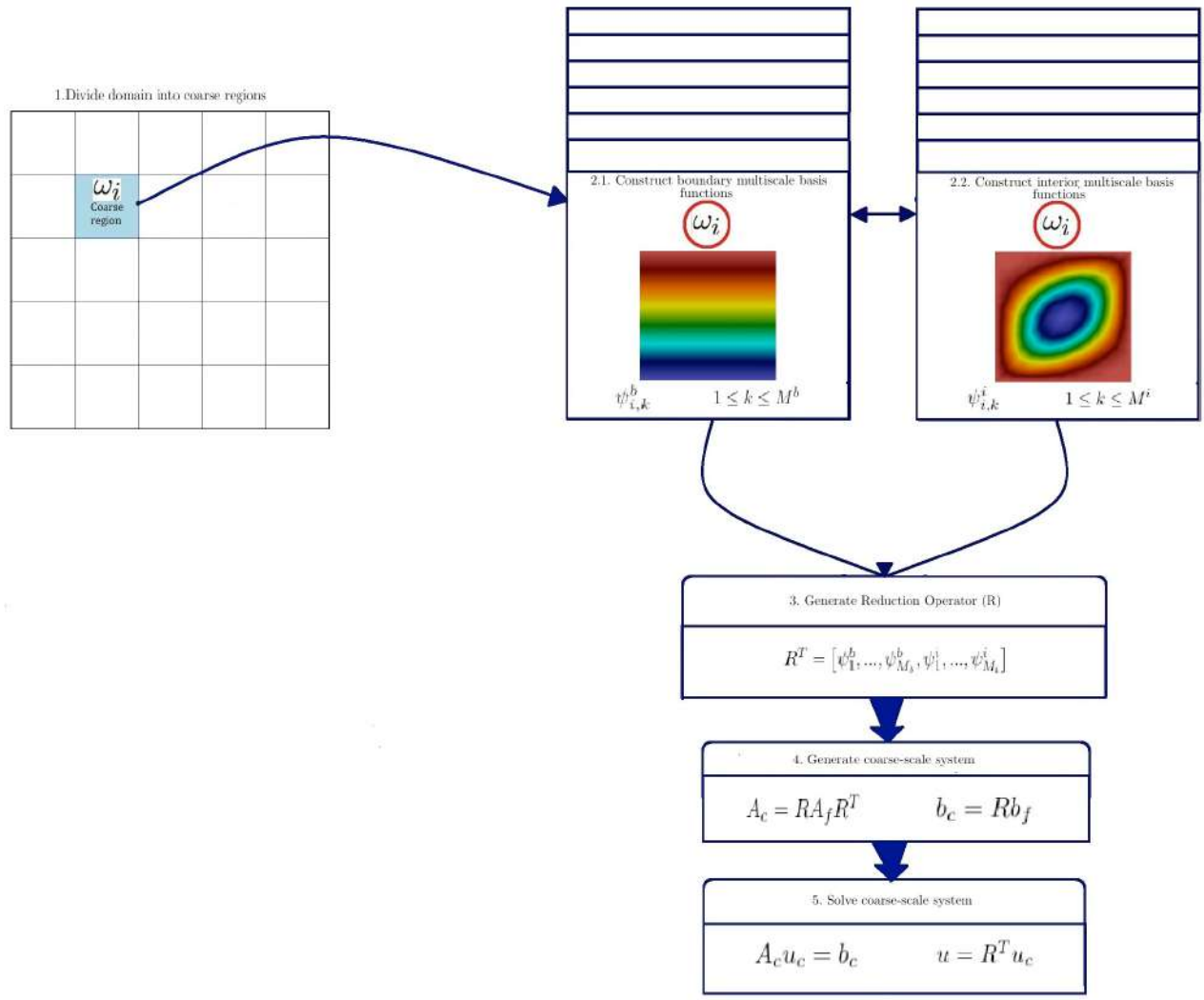


Рис. 3.1: Блок-схема алгоритма многомасштабного метода.

(2) модуль решателей, содержащих классический решатель на мелкой сетке, решатель задачи на собственные значения в локальных подобластях для граничного и внутреннего многомасштабного пространства и решателя на грубой сетке посредством использования обобщенных многомасштабных базисных функций.

Модуль 2:

- spectral/boundaryspectral/spectral.cpp
- spectral/boundaryspectral/task.ufl
- spectral/interiorspectral/spectral.cpp
- spectral/interiorspectral/task.ufl

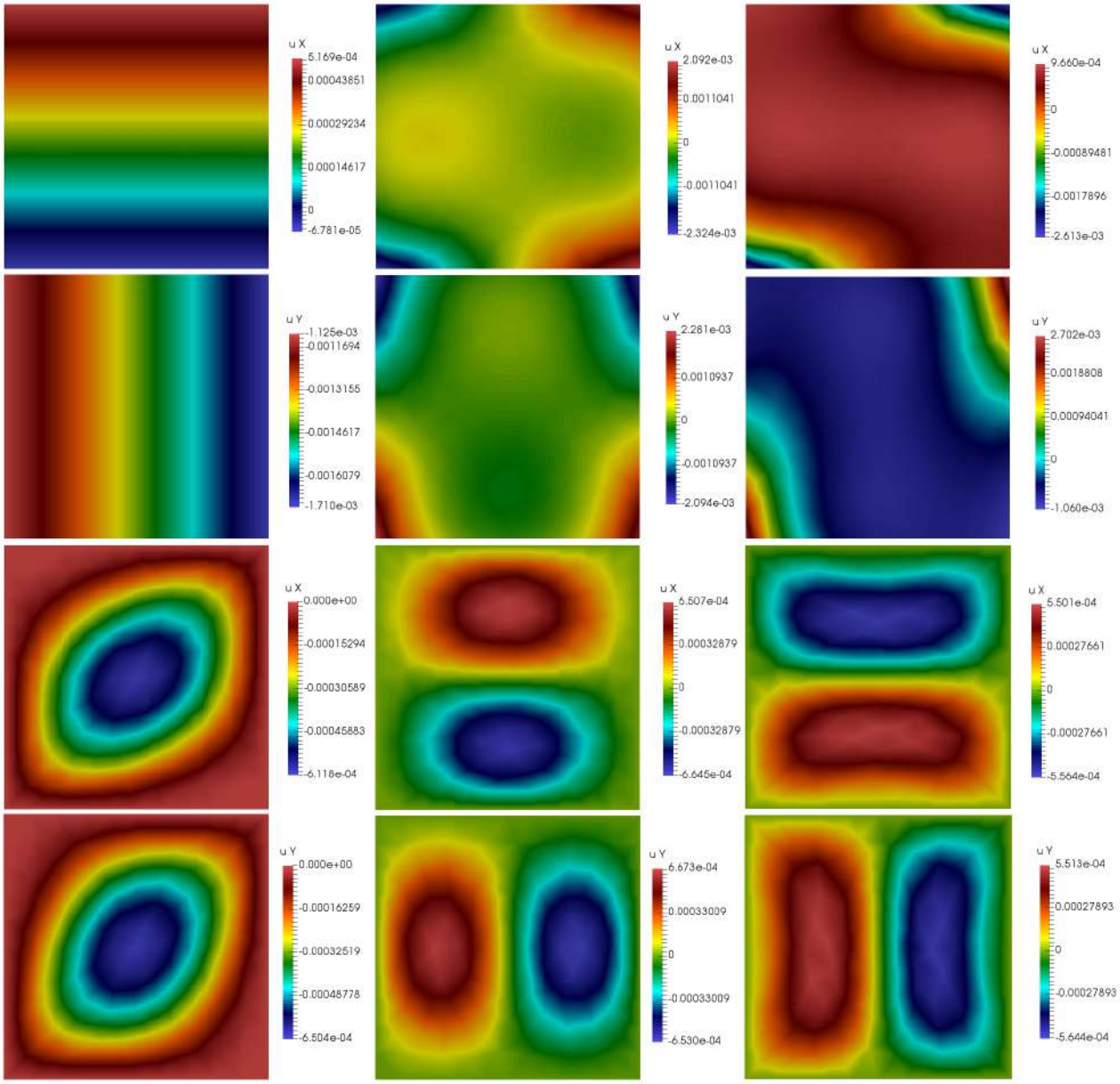


Рис. 3.2: Первые три граничные V_b и внутренние V_i многомасштабные базисные функции по направлению осей X и Y.

- solver/ex11.c
- solver/solver.cpp
- solver/run

В данном модуле реализованы некоторые базовые классы которые необходимы для проведения расчетов. Для получения базисов граничного и внутреннего пространства необходимо запустить файлы task.ufl и spectral.cpp для каждого пространства соответственно. Затем для получения решения на грубой и

мелкой сетке необходимо запустить файл solver.cpp. через ./main 50 ... чтобы получить решение на мелкой сетке, затем файл ex11.c запускается с помощью файла run. И затем запускаем solver.cpp через ./main 51 ... чтобы получить решение на грубой сетке.

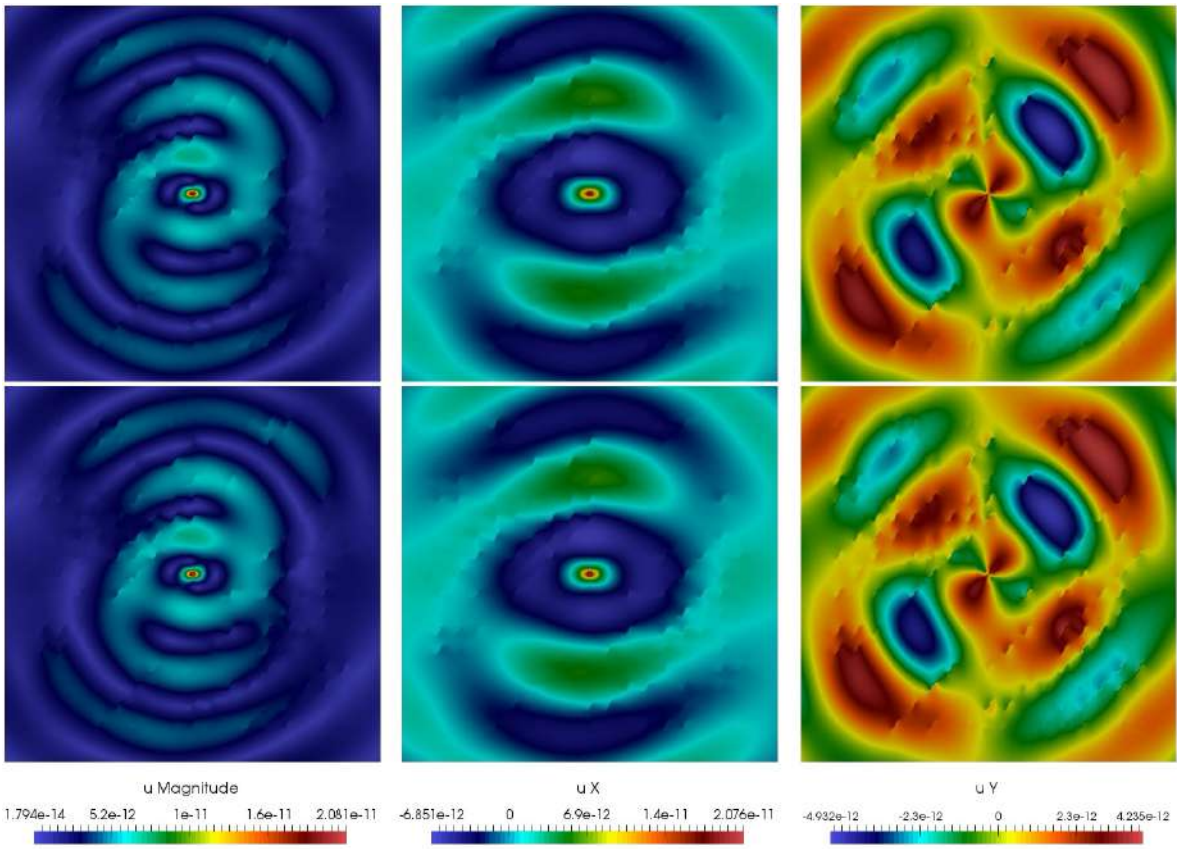


Рис. 3.3: Первая строка – решение на мелкой сетке, вторая строка – многомасштабное решение.

Программа для ЭВМ «Вычислительная библиотека для моделирования волновых процессов с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина» предназначена для численного решения уравнения Гельмгольца в комплексных переменных на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина посредством построения специальных многомасштабных базисных функций. Программа разработана с использованием языка C++ и Си. Программа состоит из нескольких файлов:

- makeomega/makeomega.cpp — файл, где строятся локальные области;
- spectral/boundaryspectral/spectral.cpp – файл, где строятся граничные базисные функции
- spectral/interiorspectral/spectral.cpp – файл, где строятся внутренние базисные функции;
- solver/ex11.c — решает комплексную часть;
- solver/solver.cpp — решатель на грубой и мелкой сетке ;
- solver/run – запускает файл ex11.c;
- makeomega/task.ufl — фениксовский файл для определения пространств файла makeomega.cpp ;
- spectral/boundaryspectral/task.ufl — фениксовский файл для определения вариационных форм файла spectral.cpp;
- spectral/interiorspectral/task.ufl — фениксовский файл для определения вариационных форм файла spectral.cpp;
- spectral/interiorspectral/DirichletBC.h – файл, являющейся частью DOLFIN
- solver/FElastic.ufl — фениксовский файл для определения вариационных форм файла solver.cpp;
- solver/FElasticProblem.h — файл, который работает с файлом FElastic.ufl
- solver/MsProblemComplex.h — файл, который сохраняет файлы, генерирует матрицу R
- solver/MsBlock.h — файл, который работает с дофами
- solver/CoarseWrapper.h — файл, который работает с грубой сеткой

3.2 Вычислительная библиотека для моделирования уравнения Гельмгольца в средах с неоднородными включениями с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов

Библиотека посвящена численному решению прикладных задач на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов путем построения специальных многомасштабных базисных функций. Базисные функции строятся для каждой границы локальной подобласти посредством решения локальных спектральных задач в локальных подобластях. Программа является вычислительной библиотекой написанной на языке C++ и Си с примерами решения задачи Гельмгольца в комплексных переменных.

Чтобы уменьшить размер дискретной системы, строится новое многомасштабное приближение на грубой сетке. Мы используем обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов, где строится многомасштабное пространство, используя решение локальных спектральных задач во вспомогательном пространстве для каждой границы сетки.

3.2.1 Методология

Разработан обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов для решения уравнения Гельмгольца в комплексных переменных с использованием адаптивного подхода. Разработанный подход разделяется на оффлайн и онлайн этапы.

На оффлайн этапе, мы строим грубую сетку и локальные подобласти, в которых определяем многомасштабные базисные функции на каждой грани локальной подобласти посредством решения локальных задач. Заметим, что при этом каждый элемент грубой сетки (локальная подобласть) является объедине-

нием ячеек мелкой сетки, а локальная подобласть — объединение грубых ячеек вокруг одной вершины ячейки соответственно. Чтобы построить локальные многомасштабные базисные функции, в первую очередь, нужно определить многомасштабное пространство посредством решения локальных спектральных задач на каждой границе локальной области. Спектральное разложение базируется на проведенном анализе и локальном собственно-ортогональном разложении, что позволяет выбирать в качестве элементов оффлайн пространства наиболее доминирующие моды разложения. Далее решается локальная задача в каждой локальной области для построения дополнительной многомасштабной базисной функции и многомасштабной функции разбиения единицы.

На онлайн этапе, мы решаем задачу при заданных входных параметрах с использованием построенного оффлайн пространства. И проводим сравнение погрешностей решения на мелкой сетке и решения на грубой сетке, используя многомасштабные базисные функции, в L_2 и H_1 нормах при разных коэффициентах и количествах базисов.

Проведено исследование, построенных многомасштабных пространств, для решения задачи рассеяния в комплексных переменных. Исследование проводилось для области с перфорациями.

3.2.2 Техническое и программное решение

Программа состоит из трех модулей:

(1) модуль построения локальных подобластей.

Модуль 1:

- makeomega/makeomega.cpp
- makeomega/task.ufl

Данный модуль работает с построенной расчетной сеткой. На вход подается файл с мелкой расчетной сеткой. Для запуска необходимо запустить файлы task.ufl и makeomega.cpp с соответствующими входными данными.

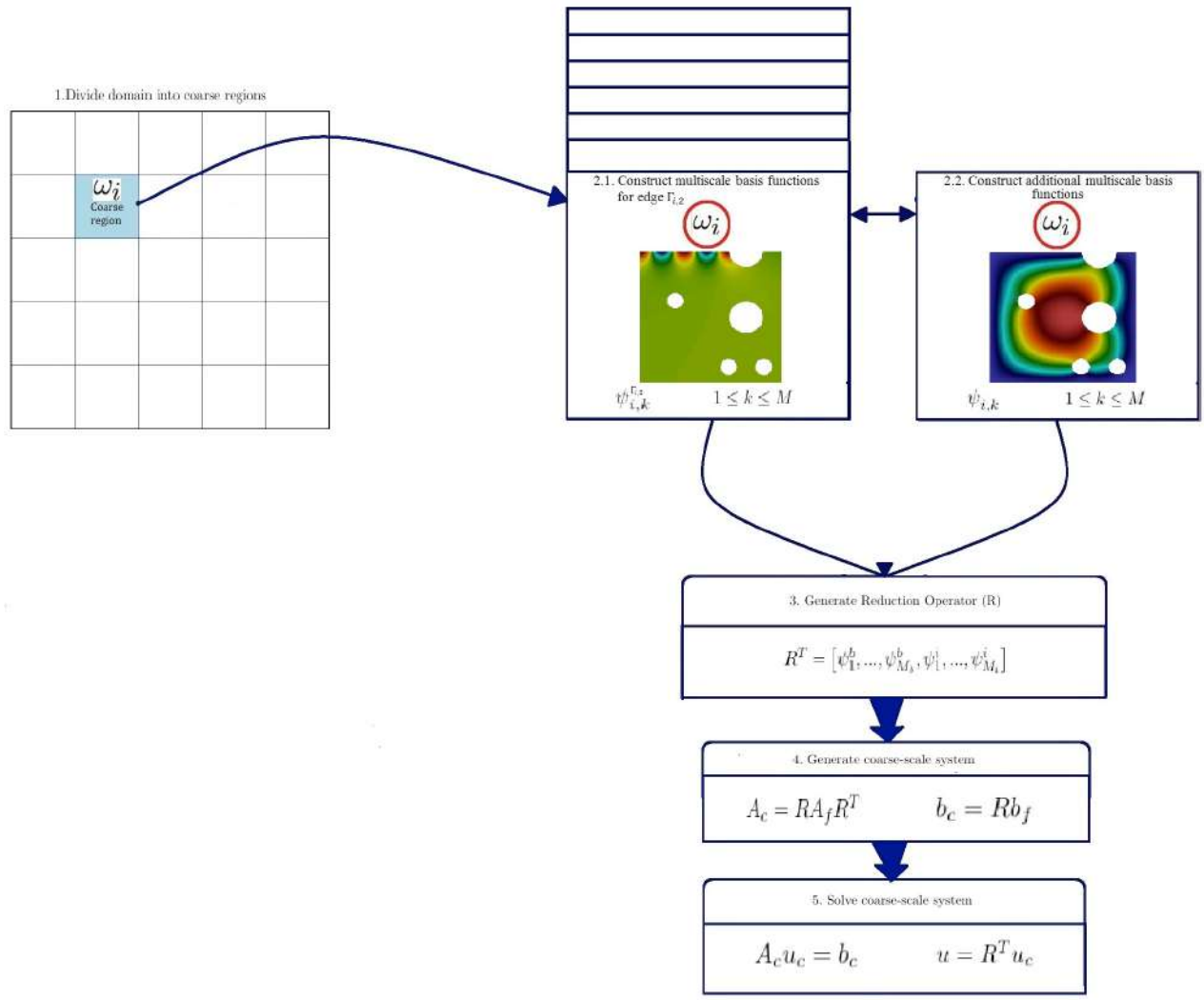


Рис. 3.4: Блок-схема алгоритма многомасштабного метода.

(2) модуль построения базисных функций, содержащих решатель функции разбиения единицы, решатель задачи на собственные значения в локальных подобластях многомасштабного пространства и решатель построения дополнительной многомасштабной базисной функции.

Модуль 2:

- POU/POU.cpp
- POU/task.ufl
- spectral/spectral/spectral.cpp
- spectral/spectral/task.ufl
- spectral/ispectral/spectral.cpp

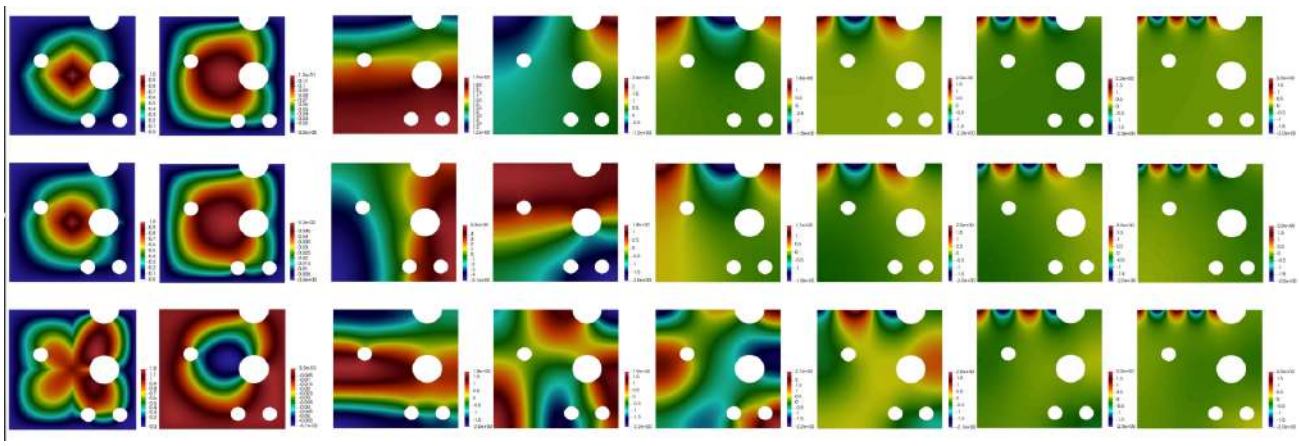


Рис. 3.5: Многомасштабная функция разбиения единицы, дополнительная базисная функция, и первые шесть собственные вектора соответствующие наименьшим собственным значениям для границы $\Gamma_{i,2}$ (слева направо) для разного значения $k = 1, 4, 8$ (сверху вниз)

- spectral/ispectral/task.ufl

В данном модуле строятся обобщенные многомасштабные базисные функции. Для получения базисных функций и дополнительного базиса многомасштабного пространства необходимо запустить файлы task.ufl и spectral.cpp для каждого базиса, соответственно.

(3) модуль решателей, содержащих классический решатель на мелкой сетке и решателя на грубой сетке посредством использования обобщенных многомасштабных базисных функций.

Модуль 3:

- solver/ex11.c
- solver/solver.cpp
- solver/run
- solver/Celliptic.ufl
- solver/CellipticProblem.h
- solver/MsProblemComplex.h
- solver/MsBlock.h

- solver/CoarseWrapper.h

В данном модуле реализованы некоторые базовые классы которые необходимы для проведения расчетов. Для получения решения на грубой и мелкой сетках необходимо запустить файл solver.cpp, ex11.c через ./run чтобы получить решение на мелкой и грубой сетке.

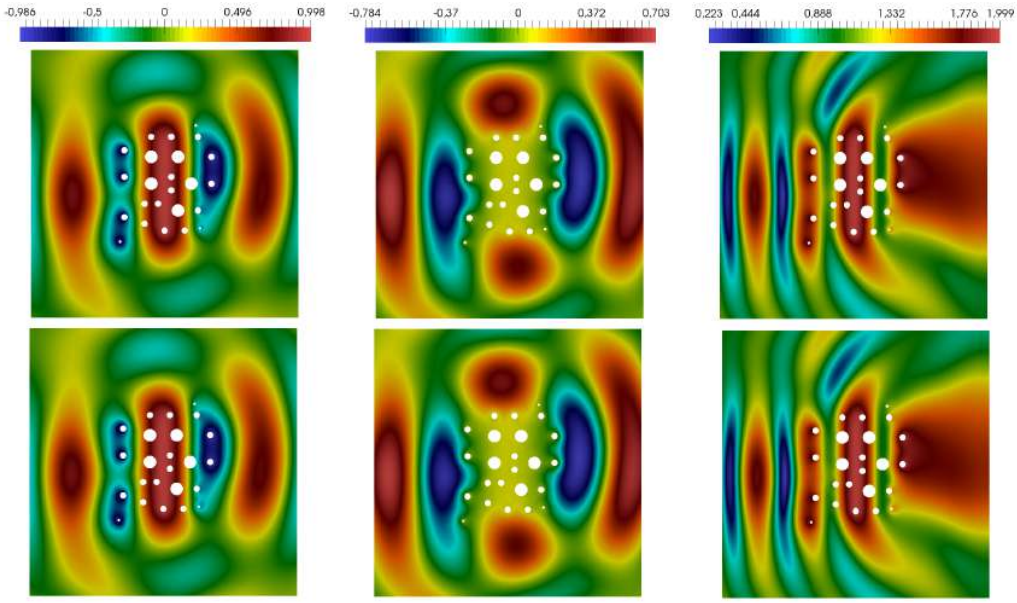


Рис. 3.6: Решение для реальной Re(u), мнимой Im(u) и абсолютного значений Abs(u) при $k = 4$. Первая строка – решение на мелкой сетке, вторая строка – многомасштабное решение.

Программа для ЭВМ «Вычислительная библиотека для моделирования уравнения Гельмгольца в средах с неоднородными включениями с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов» предназначена для численного решения уравнения Гельмгольца в комплексных переменных на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов посредством построения специальных многомасштабных базисных функций. Программа разработана с использованием языка C++ и Си. Программа состоит из нескольких файлов:

- makeomega/makeomega.cpp — файл, где строятся локальные области;
- POU/POU.cpp — файл, где решаются локальные задачи с линейными гра-

ничными условиями;

- spectral/spectral/spectral.cpp – файл, где строятся базисные функции;
- spectral/ispectral/spectral.cpp – файл, где строятся дополнительные базисные функции;
- solver/ex11.c — решает комплексную часть;
- solver/solver.cpp — решатель на грубой и мелкой сетке;
- solver/run – запускает файлы solver.cpp и ex11.c для мелкой сетки и разных базисов;
- makeomega/task.ufl — фениксовский файл для определения пространств файла makeomega.cpp;
- spectral/spectral/task.ufl — фениксовский файл для определения вариационных форм файла spectral.cpp;
- spectral/ispectral/task.ufl — фениксовский файл для определения вариационных форм файла spectral.cpp;
- solver/CElliptic.ufl — фениксовский файл для определения вариационных форм файла solver.cpp;
- solver/CEllipticProblem.h — файл, который работает с файлом CElliptic.ufl
- solver/MsProblemComplex.h — файл, который сохраняет файлы, генерирует матрицу R;
- solver/MsBlock.h — файл, который работает с дофами;
- solver/CoarseWrapper.h — файл, который работает с грубой сеткой.

3.3 Выводы

В этом разделе были разработаны комплексы программ, реализующие объектно-ориентированные модели многомасштабных систематических моделей распространения и рассеяния волн в неоднородных средах. Программа предназначена для численного решения уравнения Гельмгольца в комплексных переменных на грубой сетке с использованием обобщенного многомасштаб-

ного метода конечных элементов посредством построения специальных многомасштабных базисных функций. Базисные функции строятся посредством решения локальных спектральных задач в локальных подобластях. Программы состоит нескольких модулей: модуль построения локальных подобластей; модуля решателей, содержащих классический решатель на мелкой сетке; решатель задачи на собственные значения в локальных подобластях для многомасштабного пространства и решателя на грубой сетке посредством использования обобщенных многомасштабных базисных функций. Вычислительные параметры численных методов вводятся вручную, с возможностью точной настройки. Все выполненные и представленные вычислительные эксперименты в настоящей диссертации выполнены при помощи данного комплекса.

Заключение

Диссертационная работа посвящена разработке алгоритмов и исследованию многомасштабных методов для решения задачи распространения и рассеяния волн, а также задачи конвекции-диффузии в неоднородных средах. В работе получены следующие основные результаты:

- Предложен алгоритм решения задачи Гельмгольца, описывающий распространение волн в неоднородных средах с использованием метода численного усреднения. Эффективные коэффициенты тензора упругости вычисляются с помощью локальных решений на грубой сетке. Проведено сравнение тензора упругости, полученных с помощью метода численного усреднения с использованием решения локальной задачи и с расчетом эффективных свойств аналитическим способом. В качестве модельных задач рассматривались задачи с неоднородными свойствами и с наличием трещин. Результаты счета показывают, что предлагаемый метод на грубой сетке может обеспечить точные приближения решений на мелкой сетке, следовательно, могут эффективно использоваться для решения поставленной задачи.
- Исследован многомасштабный метод конечных элементов решения задачи рассеяния волн в неоднородной области. Математическая модель описывается уравнением Гельмгольца для гармонической волны с поглощающимися граничными условиями. Построена аппроксимация на мелкой сетке методом конечных элементов. Представлены два подхода построения локальных базисных функций на основе локальных задач с использованием оператора эллиптической части и оператора Гельмгольца. Для демонстрации эффективности данного метода был разработан программно-вычислительный комплекс.
- Выполнены исследования по построению и сравнению двух многомас-

штабных методов: непрерывный обобщенный многомасштабный метод Галеркина и разрывный обобщенный многомасштабный метод Галеркина для распространения упругих волн. Многомасштабные базисные функции строятся путем решения локальных спектральных задач в каждой локальной области для извлечения доминирующих мод локального решения. Представлены результаты численного решения уравнения Гельмгольца предложенными методами для различного числа базисных функций. Разработан и реализован программно-вычислительный комплекс для моделирования многомасштабных разрывного метода Галеркина.

- Разработан и численно реализован алгоритм обобщенного граничного многомасштабного метода конечных элементов для задачи рассеяния и задачи конвекции-диффузии в перфорированных средах. Построено многомасштабное пространство, основанное на решении локальных спектральных задач во вспомогательном пространстве, связанные с гранями грубой сетки. Построены и исследованы дополнительные базисные функции для учета неоднородных граничных условий на границах перфорации. Численные результаты показывают, что представленный метод дает хорошее приближение решения и уменьшает размер системы. Представленные численные результаты показали эффективность данного метода.

Литература

1. CR Bates, DR Phillips, R Grimm, H Lynn. The seismic evaluation of a naturally fractured tight gas sand reservoir in the Wind River Basin, Wyoming // Petroleum Geoscience. — 2001. — Т. 7, № 1. — С. 35–44.

2. Hsu Chaur-Jian, Schoenberg Michael. Elastic waves through a simulated fractured medium // Geophysics. — 1993. — Т. 58, № 7. — С. 964–977.

3. Куликовский Андрей Геннадиевич, Погорелов Николай Владимирович, Семёнов АЮ. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Физматлит, 2012.

4. Kulikovskii Andrey Gennadievich, Sveshnikova Elena Ivanovna, Chugainova Anna Pavlovna. Mathematical methods for studying discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic systems of equations // Lektsionnye Kursy NOC. — 2010. — Т. 16. — С. 3–120.

5. Неклюдов Дмитрий Александрович, Сильвестров Илья Юрьевич, Чеверда Владимир Альбертович. Итерационный метод решения трехмерного уравнения Гельмгольца с «почти аналитическим» предобусловливателем для моделирования акустических волновых полей в задачах сейсморазведки // Вычислительные методы и программирование. — 2014. — Т. 15. — С. 514–529.

6. Chugainova AP, Il'ichev AT, Shargatov VA. Stability of shock wave structures in nonlinear elastic media // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2019. — Т. 24, № 11. — С. 3456–3471.

7. Вишневский Дмитрий Михайлович, Лисица Вадим Викторович, Решетова Галина Витальевна. Численное моделирование распространения сей-

смических волн в средах с вязкоупругими включениями // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14, № 1. — С. 155–165.

8. Квасов Игорь Евгеньевич, Петров Игорь Борисович, Челноков Ф Б. Расчет волновых процессов в неоднородных пространственных конструкциях // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, № 5. — С. 3–9.

9. В. Д. Иванов, В. И. Кондауров, И. Б. Петров, А. С. Холодов. Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 11. — С. 10–29.

10. Квасов Игорь Евгеньевич, Петров Игорь Борисович. Численное моделирование волновых процессов в геологических средах в задачах сейсморазведки с помощью высокопроизводительных ЭВМ // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 2. — С. 330–341.

11. Virieux Jean. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method // Geophysics. — 1986. — Т. 51, № 4. — С. 889–901.

12. Saenger Erik H, Gold Norbert, Shapiro Serge A. Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid // Wave motion. — 2000. — Т. 31, № 1. — С. 77–92.

13. Lisitsa Vadim, Reshetova Galina, Tcheverda Vladimir. Finite-difference algorithm with local time-space grid refinement for simulation of waves // Computational geosciences. — 2012. — Vol. 16, no. 1. — P. 39–54.

14. Chichinina Tatiana, Sabinin Vladimir, Ronquillo-Jarillo Gerardo. QVOA analysis: P-wave attenuation anisotropy for fracture characterization // Geophysics. — 2006. — Т. 71, № 3. — С. C37–C48.

15. Lisitsa Vadim, Tcheverda Vladimir, Botter Charlotte. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation // Journal of Computational Physics. — 2016. — Т. 311. — С. 142–157.

16. Triangular mesh methods for the neutron transport equation : Отчет / Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA) ; исполн.: William H Reed, TR Hill : 1973.

17. Cohen Gary, Ferrieres Xavier, Pernet Sébastien. A spatial high-order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time domain // Journal of Computational Physics. — 2006. — Т. 217, № 2. — С. 340–363.

18. Cockburn Bernardo, Li Fengyan, Shu Chi-Wang. Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for the Maxwell equations // Journal of Computational Physics. — 2004. — Т. 194, № 2. — С. 588–610.

19. A generalized multiscale finite element method for elastic wave propagation in fractured media / Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Richard L Gibson, Maria Vasilyeva // GEM-International Journal on Geomathematics. — 2016. — Т. 7, № 2. — С. 163–182.

20. Lähivaara Timo. Discontinuous Galerkin method for time-domain wave problems. — University of Eastern Finland Joensuu, 2010.

21. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes-IV. Anisotropy / Josep de la Puente, Martin Käser, Michael Dumbser, Heiner Igel // Geophysical Journal International. — 2007. — Т. 169, № 3. — С. 1210–1228.

22. Dumbser Michael, Käser Martin, Toro Eleuterio F. An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes-V. Local time stepping and p-adaptivity // Geophysical Journal International. — 2007. — Т. 171, № 2. — С. 695–717.

23. Santos Juan E, Corredor Robiel Martinez, Carcione José M. Seismic velocity and Q anisotropy in fractured poroelastic media // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2014. — Т. 70. — С. 212–218.

24. Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Richard L Gibson, Maria Vasilyeva. A generalized multiscale finite element method for elastic wave propagation in fractured media // GEM-International Journal on Geomathematics. — 2016. — Т. 7, № 2. — С. 163–182.

25. Schoenberg Michael. Elastic wave behavior across linear slip interfaces // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1980. — Т. 68, № 5. — С. 1516–1521.

26. Santos Juan Enrique, Gauzellino Patricia Mercedes. Numerical Simulation in Applied Geophysics. Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing. — Springer, 2016.

27. Shekhar Ravi, Gibson Jr Richard L. Correlated fracture network modeling using simulated annealing // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2008. — Society of Exploration Geophysicists, 2008. — С. 1541–1545.

28. Иосифьян Григорий Андроникович, Олейник Ольга Арсеньевна, Шамаев Алексей Станиславович. Усреднение собственных значений и собственных функций краевой задачи теории упругости в перфорированной области // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 1983. — № 4. — С. 53–63.

29. Олейник Ольга Арсеньевна, Иосифьян Григорий Андроникович, Шамаев Алексей Станиславович. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего . . . , 1990.

30. Nasedkin A., Nasedkina A., Rybyanets A. Finite element simulation of effective properties of microporous piezoceramic material with metallized pore surfaces // Ferroelectrics. — 2017. — Т. 508, № 1. — С. 100–107.

31. Papanicolau George, Bensoussan Alain, Lions J-L. Asymptotic analysis for periodic structures. — Elsevier, 1978.

32. Keller Joseph B. Effective behavior of heterogeneous media // Statistical mechanics and statistical methods in theory and application. — Springer, 1977. — С. 631–644.

33. Babuška Ivo. Homogenization and its application. Mathematical and computational problems // Numerical solution of partial differential equations–III. — Elsevier, 1976. — С. 89–116.

34. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах // Математические задачи механики композиционных материалов. — 1984.

35. Murat François, Tartar Luc. Calculus of variations and homogenization // Topics in the mathematical modelling of composite materials. — Springer, 1997. — С. 139–173.

36. Страховская ЛГ, Федоренко РП. Об одной специальной разностной схеме // Численные методы механики сплошной среды. — 1976. — Т. 7, № 4. — С. 149–163.

37. Федоренко Радий Петрович, Страховская Людмила Глебовна. Об одном варианте метода конечных элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1979. — Т. 19, № 4. — С. 950–960.

38. Галанин Михаил Павлович, Савенков Евгений Борисович. К обоснованию метода конечных суперэлементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 5. — С. 713–729.

39. Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии / Виктор Тимофеевич Жуков, Наталия Дмитриевна Новикова, Людмила Глебовна Страховская и др. // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. — 2001. — № 0. — С. 8–17.

40. Hou T., Wu X.H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media // J. Comput. Phys. — 1997. — Т. 134. — С. 169–189.

41. Hou Thomas Y, Wu Xiao-Hui. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media // Journal of computational physics. — 1997. — Т. 134, № 1. — С. 169–189.

42. Hou Thomas, Wu Xiao-Hui, Cai Zhiqiang. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients // Mathematics of computation. — 1999. — Т. 68, № 227. — С. 913–943.

43. Efendiev Yalchin Rafik. The multiscale finite element method (MsFEM) and its applications. — California Institute of Technology, 1999.

44. Efendiev Y., Hou T. Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications. — New York : Springer, 2009. — Т. 4 из Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences.

45. Efendiev Yalchin, Galvis Juan, Hou Thomas Y. Generalized multiscale finite element methods (GMsFEM) // Journal of Computational Physics. — 2013. — T. 251. — C. 116–135.

46. A numerical homogenization method for heterogeneous, anisotropic elastic media based on multiscale theory / Kai Gao, Eric T Chung, Richard L Gibson Jr и др. // Geophysics. — 2015. — T. 80, № 4. — C. D385–D401.

47. Gao Kai, Fu Shubin, Chung Eric T. A high-order multiscale finite-element method for time-domain acoustic-wave modeling // Journal of Computational Physics. — 2018. — T. 360. — C. 120–136.

48. Chung Eric T, Leung Wing Tat. Mixed GMsFEM for the simulation of waves in highly heterogeneous media // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2016. — T. 306. — C. 69–86.

49. Chung Eric, Pun Sai-Mang. Computational multiscale methods for first-order wave equation using mixed CEM-GMsFEM // Journal of Computational Physics. — 2020. — C. 109359.

50. Efendiev Yalchin, Galvis Juan, Hou Thomas Y. Generalized multiscale finite element methods (GMsFEM) // Journal of Computational Physics. — 2013. — T. 251. — C. 116–135.

51. Multiscale model reduction of the wave propagation problem in viscoelastic fractured media / M Vasilyeva, JD De Basabe, Y Efendiev, RL Gibson Jr // Geophysical Journal International. — 2019. — T. 217, № 1. — C. 558–571.

52. Chung E., Efendiev Y., Leung W. T. An adaptive generalized multiscale discontinuous Galerkin method (GMsDGM) for high-contrast flow problems. // preprint, available as arXiv:1409.3474. — 2014.

53. Chung Eric T, Efendiev Yalchin, Fu Shubin. Generalized multiscale finite element method for elasticity equations // GEM-International Journal on Geomathematics. — 2014. — Т. 5, № 2. — С. 225–254.

54. Generalized multiscale finite element methods: Oversampling strategies / Yalchin Efendiev, Juan Galvis, Guanglian Li, Michael Presho // International Journal for Multiscale Computational Engineering. — 2014. — Т. 12, № 6. — С. 465–484.

55. Randomized Oversampling for Generalized Multiscale Finite Element Methods / Victor M. Calo, Yalchin Efendiev, Juan Galvis, Guanglian Li // Multiscale Modeling & Simulation. — 2016. — Т. 14, № 1. — С. 482–501.

56. Fu Shubin, Chung Eric, Li Guanglian. Edge Multiscale Methods for elliptic problems with heterogeneous coefficients // Journal of Computational Physics. — 2019.

57. Wavelet-based Edge Multiscale Finite Element Method for Helmholtz problems in perforated domains / Shubin Fu, Guanglian Li, Richard Craster, Sebastien Guenneau // arXiv preprint arXiv:1906.08453. — 2019.

58. Logg Anders, Mardal Kent-Andre, Wells Garth. Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book. — Springer Science & Business Media, 2012. — Т. 84.

59. Geuzaine Christophe, Remacle Jean-François. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities // International journal for numerical methods in engineering. — 2009. — Т. 79, № 11. — С. 1309–1331.

60. Ayachit Utkarsh. The paraview guide: a parallel visualization application. — Kitware, Inc., 2015.

61. Васильева Мария Васильевна, Гаврильева Уйгулаана Семеновна. Численное моделирование упругих волн разрывным методом Галеркина в неоднородных средах // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. МК Аммосова. — 2017. — № 5 (61). — С. 47–56.

62. Гаврильева Уйгулаана Семеновна, Алексеев Валентин Николаевич, Васильева Мария Васильевна. Течение и перенос в перфорированных и трещиноватых областях с неоднородными граничными условиями Робина // Математические заметки СВФУ. — 2017. — Т. 24, № 3.

63. Generalized Multiscale Discontinuous Galerkin Method for Helmholtz Problem in Fractured Media / Uigulaana Gavrileva, Valentin Alekseev, M Vasilyeva и др. // International Conference on Finite Difference Methods / Springer. — 2018. — С. 250–257.

64. Gavrilieva U, Alekseev V, Vasilyeva M. Numerical homogenization for wave propagation in fractured media // AIP Conference Proceedings / AIP Publishing. — Т. 2025. — 2018. — С. 100002.

65. Numerical simulation of the transport and flow problems in perforated domains using generalized multiscale finite element method / V Alekseev, U Gavrileva, D Spiridonov и др. // AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC. — Т. 2025. — 2018. — С. 100001.

66. Multiscale Finite Element Method for scattering problem in heterogeneous domain / Uygulaana Gavrilieva, Maria Vasilyeva, Isaac Harris и др. // Journal of Physics: Conference Series / IOP Publishing. — Т. 1392. — 2019. — С. 012067.

67. Gavrilieva Uygulana, Vasilyeva Maria, Chung Eric T. Generalized Multiscale Finite Element Method for Elastic Wave Propagation in the Frequency Domain // Computation. — 2020. — Т. 8, № 3. — С. 63.

68. DG-GMsFEM for Problems in Perforated Domains with Non-Homogeneous Boundary Conditions / Valentin Alekseev, Maria Vasilyeva, Uygulaana Kalachikova, Eric T Chung // Computation. — 2021. — Т. 9, № 7. — С. 75.

69. Generalized multiscale discontinuous Galerkin method for convection–diffusion equation in perforated media / Eric T Chung, Uygulaana Kalachikova, Maria Vasilyeva, Valentin Alekseev // Mathematics and Computers in Simulation. — 2022. — Т. 193. — С. 666–688.

70. Васильева Мария Васильевна, Гаврильева Уйгулаана Семеновна, Алексеев Валентин Николаевич. Вычислительная библиотека для моделирования волновых процессов с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина. — 2018.

71. Эрик Чун Тсз Сун, Васильева Мария Васильевна, Гаврильева Уйгулаана Семеновна. Вычислительная библиотека для моделирования уравнения Гельмгольца в средах с неоднородными включениями с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. — 2019.

72. Cui Xiaoqin, Lines Laurence R, Krebes Edward S. Seismic modelling for geological fractures // Geophysical Prospecting. — 2017. — Т. 66, № 1. — С. 157–168.

73. Multiscale finite volume method for discrete fracture modeling on unstructured grids (MS-DFM) / Sebastian Bosma, Hadi Hajibeygi, Matei Tene, Hamdi A Tchelepi // Journal of Computational Physics. — 2017. — Т. 351. — С. 145–164.

74. Ruzhanskaya A, Khokhlov Nikolay. Modelling of Fractures Using the Chimera Grid Approach // 2nd Conference on Geophysics for Mineral Exploration and

Mining / European Association of Geoscientists & Engineers. — T. 2018. — 2018. — C. 1–5.

75. Khokhlov Nikolay, Stognii Polina. Novel Approach to Modeling the Seismic Waves in the Areas with Complex Fractured Geological Structures // Minerals. — 2020. — T. 10, № 2. — C. 122.

76. Enriched Galerkin finite element approximation for elastic wave propagation in fractured media / Janaki Vamaraju, Mrinal K Sen, Jonas De Basabe, Mary Wheeler // Journal of Computational Physics. — 2018. — T. 372. — C. 726–747.

77. Engquist Björn, Majda Andrew. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1977. — T. 74, № 5. — C. 1765–1766.

78. Grechka Vladimir, Kachanov Mark. Effective elasticity of fractured rocks: A snapshot of the work in progress // Geophysics. — 2006. — T. 71, № 6. — C. W45–W58.

79. Seismic wave propagation in fractured media: a discontinuous Galerkin approach / Jonás D De Basabe, Mrinal K Sen, Mary F Wheeler и др. // SEG Expanded Abstr. — T. 30. — 2011. — C. 2920.

80. De Basabe Jonás D, Sen Mrinal K, Wheeler Mary F. Elastic wave propagation in fractured media using the discontinuous Galerkin method // Geophysics. — 2016. — T. 81, № 4. — C. T163–T174.

81. Schoenberg Michael, Sayers Colin M. Seismic anisotropy of fractured rock // Geophysics. — 1995. — T. 60, № 1. — C. 204–211.

82. Nichols David, Muir Francis, Schoenberg Michael. Elastic properties of rocks

with multiple sets of fractures // SEG Technical Program Expanded Abstracts 1989. — Society of Exploration Geophysicists, 1989. — С. 471–474.

83. Zhang Jianfeng. Elastic wave modeling in fractured media with an explicit approach // Geophysics. — 2005. — Т. 70, № 5. — С. T75–T85.

84. Huet Ch. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1990. — Т. 38, № 6. — С. 813–841.

85. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach / T Kanit, S Forest, Ia Galliet и др. // International Journal of solids and structures. — 2003. — Т. 40, № 13. — С. 3647–3679.

86. Cottereau Régis. Numerical strategy for unbiased homogenization of random materials // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2013. — Т. 95, № 1. — С. 71–90.

87. Hazanov S, Huet C. Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1994. — Т. 42, № 12. — С. 1995–2011.

88. Sánchez-Palencia Enrique. Non-homogeneous media and vibration theory // Non-homogeneous media and vibration theory. — Т. 127. — 1980.

89. Craster Richard V, Kaplunov J, Pichugin AV. High-frequency homogenization for periodic media. — 2010. — Т. 466, № 2120. — С. 2341–2362.

90. Fan LF, Ma GW, Wong Louis Ngai Yuen. Effective viscoelastic behaviour of rock mass with double-scale discontinuities // Geophysical Journal International. — 2012. — Т. 191, № 1. — С. 147–154.

91. Cakoni Fioralba, Haddar Houssem, Harris Isaac. Homogenization approach for the transmission eigenvalue problem for periodic media and application to the inverse problem // arXiv preprint arXiv:1410.3729. — 2014.

92. Cakoni Fioralba, Harris Isaac. The factorization method for a defective region in an anisotropic material // Inverse Problems. — 2015. — Т. 31, № 2. — С. 025002.

93. Cakoni Fioralba, Guzina Bojan B, Moskow Shari. On the homogenization of a scalar scattering problem for highly oscillating anisotropic media // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2016. — Т. 48, № 4. — С. 2532–2560.

94. Cakoni Fioralba, Colton David, Haddar Houssem. The interior transmission problem for regions with cavities // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2010. — Т. 42, № 1. — С. 145–162.

95. Chung Eric T, Efendiev Yalchin, Leung Wing Tat. Generalized multiscale finite element methods for wave propagation in heterogeneous media // Multiscale Modeling & Simulation. — 2014. — Т. 12, № 4. — С. 1691–1721.

96. Cakoni Fioralba, Colton David, Haddar Houssem. Inverse scattering theory and transmission eigenvalues. — SIAM, 2016.

97. Chung Eric T., Efendiev Yalchin, Leung Wing Tat. An Online Generalized Multiscale Discontinuous Galerkin Method (GMsDGM) for Flows in Heterogeneous Media // Communications in Computational Physics. — 2017. — Т. 21, № 2. — С. 401–422.

98. Grote Marcus J, Schneebeli Anna, Schötzau Dominik. Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2006. — Т. 44, № 6. — С. 2408–2431.

99. Arnold Douglas N. An interior penalty finite element method with discontinuous elements // SIAM journal on numerical analysis. — 1982. — Т. 19, № 4. — С. 742–760.

100. Chung Eric T, Efendiev Yalchin, Leung Wing Tat. Generalized multiscale finite element methods for wave propagation in heterogeneous media // Multiscale Modeling & Simulation. — 2014. — Т. 12, № 4. — С. 1691–1721.

101. Generalized Multiscale Finite-Element Method (GMsFEM) for elastic wave propagation in heterogeneous, anisotropic media / Kai Gao, Shubin Fu, Richard L Gibson и др. // Journal of Computational Physics. — 2015. — Т. 295. — С. 161–188.

102. Efendiev Yalchin, Hou Thomas Y. Multiscale finite element methods: theory and applications. — Springer Science & Business Media, 2009. — Т. 4.

103. Chung Eric T, Efendiev Yalchin, Leung Wing Tat. An adaptive generalized multiscale discontinuous Galerkin method (GMsDGM) for high-contrast flow problems // arXiv preprint arXiv:1409.3474. — 2014.

104. A multiscale discontinuous Galerkin method in perforated domains / Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Maria Vasilyeva, Yating Wang // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. — Т. 42. — 2016. — С. 212–229.

105. Online adaptive local multiscale model reduction for heterogeneous problems in perforated domains / Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Wing Tat Leung и др. // Applicable Analysis. — 2017. — Т. 96, № 12. — С. 2002–2031.

106. Upscaling method for problems in perforated domains with non-homogeneous boundary conditions on perforations using Non-Local Multi-Continuum method (NLMC) / Maria Vasilyeva, Eric T Chung, Wing Tat Leung и др. //

Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2019. — Т. 357. — С. 215–227.

107. Chung Eric T, Efendiev Yalchin, Leung Wing Tat. Constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2018. — Т. 339. — С. 298–319.

108. Non-local multi-continua upscaling for flows in heterogeneous fractured media / Eric T Chung, Yalchin Efendiev, Wing Tat Leung и др. // Journal of Computational Physics. — 2018. — Т. 372. — С. 22–34.

109. Chung Eric T, Leung Wing Tat. A sub-grid structure enhanced discontinuous Galerkin method for multiscale diffusion and convection-diffusion problems // Communications in Computational Physics. — 2013. — Т. 14, № 2. — С. 370–392.

110. Kim Mi-Young, Wheeler Mary F. A multiscale discontinuous Galerkin method for convection–diffusion–reaction problems // Computers & Mathematics with Applications. — 2014. — Т. 68, № 12. — С. 2251–2261.

111. Jeong ShinJa, Kim Mi-Young. Computational aspects of the multiscale discontinuous Galerkin method for convection-diffusion-reaction problems // Electronic Research Archive. — 2020. — С. 0.

112. Shargatov Vladimir A., Il'ichev Andrej T., Tsypkin George G. Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2015. — Т. 83. — С. 552–561.

113. Muratova Galina V, Andreeva Evgeniya M. Multigrid method for solving convection-diffusion problems with dominant convection // Journal of computational and applied mathematics. — 2009. — Т. 226, № 1. — С. 77–83.

114. Абделхафиз М А, Цибулин Вячеслав Георгиевич. Численное моделирование конвективных движений в анизотропной пористой среде и сохранение косимметрии // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 10. — С. 1734–1747.

115. Spiridonov Denis, Vasilyeva Maria, Leung Wing Tat. A Generalized Multiscale Finite Element Method (GMsFEM) for perforated domain flows with Robin boundary conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2019. — Т. 357. — С. 319–328.

116. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems / Douglas N Arnold, Franco Brezzi, Bernardo Cockburn, L Donatella Marini // SIAM journal on numerical analysis. — 2002. — Т. 39, № 5. — С. 1749–1779.

117. Rivière Béatrice. Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: theory and implementation. — Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

118. Cockburn Bernardo. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // High-order methods for computational physics. — Springer, 1999. — С. 69–224.

119. Chung Eric, Efendiev Yalchin, Hou Thomas Y. Adaptive multiscale model reduction with generalized multiscale finite element methods // Journal of Computational Physics. — 2016. — Т. 320. — С. 69–95.

120. Eric T Chung, Wing Tat Leung, Maria Vasilyeva, Yating Wang. Multiscale model reduction for transport and flow problems in perforated domains // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2018. — Т. 330. — С. 519–535.

121. Maria Vasilyeva, Eric T Chung, Wing Tat Leung, Valentin Alekseev .

Nonlocal multicontinuum (NLMC) upscaling of mixed dimensional coupled flow problem for embedded and discrete fracture models// GEM-International Journal on Geomathematics. — 2019. — Т. 10, № 1. — С. 23.

Приложение 1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018663107

«Вычислительная библиотека для численного моделирования задач в трещиноватых областях с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина»

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова» (RU)*

Авторы: *Васильева Мария Васильевна (RU), Гаврильева Уйгулаана Семеновна (RU), Алексеев Валентин Николаевич (RU)*

Заявка № 2018660888

Дата поступления 08 октября 2018 г.

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ *22 октября 2018 г.*

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Приложение 2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019667152

"Вычислительная библиотека для моделирования уравнения Гельмгольца в средах с неоднородными включениями с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов"

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова" (RU)*

Авторы: *Чун Тсз Сун Эрик (HK), Васильева Мария Васильевна (RU), Гаврильева Уйгулаана Семеновна (RU)*

Заявка № 2019666181

Дата поступления 07 декабря 2019 г.

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ *19 декабря 2019 г.*

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев