На правах рукописи

Спиридонов Денис Алексеевич

Многомасштабные методы для решения задач в перфорированных и неоднородных областях и их приложения

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Якутск – 2019

Работа выполнена на научно-исследовательской кафедре вычислительных технологий Института математики и информатики ФГАОУ ВО «Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова».

Научный руководитель:	**Васильева Мария Васильевна** кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Четверушкин Борис Николаевич** доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН», г. Москва **Талонов Алексей Владимирович** доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва
Ведущая организация:	ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва

Защита состоится «25» декабря 2019 года в «16:30» часов на заседании диссертационного совета Д 212.306.04 при СВФУ им. М.К. Аммосова, по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СВФУ им. М.К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58 и на сайте университета по адресу https://www.s-vfu.ru/upload/iblock/329/329d21a938218e348e8ea68abe63be57.pdf

Автореферат разослан «24» октября 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Саввинова Н.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Неоднородность и многомасштабность свойств среды необходимо учитывать во многих прикладных задачах строительства, авиации, добычи полезных ископаемых и т.д. В качестве примеров можно привести моделирование напряжённо-деформированного состояния строительных материалов, фильтрации нефти и газа в неоднородных пористых средах, тепломассопереноса в геотермальных месторождениях. Во многих прикладных задач процессы происходят в перфорированных и неоднородных областях. Перфорированные области можно рассматривать как области с наличием полостей или пустот различных форм и размеров. В качестве неоднородной области можно рассматривать область с различной проницаемостью в каждой точке среды или область, содержащую трещины. Следовательно разработка математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов для численного моделирования задач в перфорированных и трещиноватых средах является актуальной задачей. Математическая модель должна учитывать весь комплекс сложных многомасштабных процессов, протекающих в трещиноватых и перфорированных средах. Одной из основных сложностей при построении вычислительного алгоритма является учет перфораций и трещин, поскольку сеточное разрешение неоднородностей приводит к большому количеству неизвестных и требует больших вычислительных ресурсов. Многомасштабные методы позволяют существенно понизить размерность задачи, посредством построения макромодели и расчета задачи на грубой сетке.

Цель диссертационной работы состоит в разработке многомасштабных методов для решения задач в неоднородных, перфорированных и трещиноватых средах. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи исследования:

- разработка методов аппроксимации на грубой сетке для задач в неоднородных областях с высоким контрастом коэффициентов. Построение алгоритмов метода численного усреднения, обобщённого многомасштабного метода конечных элементов, смешанного обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для тестовой эллиптической задачи в неоднородной области;
- разработка многомасштабных методов для решения задач в перфорированных и неоднородных средах: метода численного усреднения для задачи теплопроводности в перфорированных средах, обобщённого многомасштабно-

го метода конечных элементов для эллиптической задачи с неоднородными граничными условиями Робина на перфорациях, смешанного обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для эллиптической задачи в перфорированной среде с неоднородными граничными условиями Дирихле на перфорациях;

- разработка многомасштабных методов для задач фильтрации в неоднородных и трещиноватых средах: смешанного обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задачи фильтрации двойного континуума, обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задачи ненасыщенной фильтрации в трещиноватых средах, многомасштабного моделирования задачи тепломассопереноса в трещиноватых средах.

Научная новизна и практическая значимость. Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

- Впервые построен алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для решения эллиптических задач в перфорированной области с учётом неоднородного граничного условия Робина на перфорациях.
- Разработан алгоритм смешанного обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для эллиптических задач в смешанной постановке в перфорированных областях с неоднородным граничным условием Дирихле на перфорациях.
- Проведено моделирование задачи ненасыщенной фильтрации в трещиноватых средах обобщённым многомасштабным методом конечных элементов с использованием модели двойного континуума.
- Решена задача тепломассопереноса в трещиноватых средах с использованием обобщённого многомасштабного метода конечных элементов.

Проведённые численные расчёты имеют практическое значение в моделировании процессов в перфорированных и трещиноватых средах.

Методология и методы исследования. В данной работе для решения задач применялись следующие методы: метод численного усреднения, обобщённый многомасштабный метод конечных элементов, смешанный обобщённый многомасштабный метод конечных элементов. Для получения эталонного решения применялся метод конечных элементов.

Положения выносимые на защиту:

- Обобщённый многомасштабный метод конечных элементов для эллиптической задачи в неоднородной перфорированной среде с неоднородным граничным условием Робина на границах перфораций. Модификация метода в виде дополнительной многомасштабной базисной функции для учёта граничного условия Робина на перфорациях.

- Смешанный обобщённый многомасштабный метод конечных элементов для эллиптической задачи в смешанной формулировке в перфорированной среде с неоднородным граничным условием Дирихле на границе перфораций. Модификация метода в виде дополнительной многомасштабной базисной функции для учёта граничного условия Дирихле на перфорациях.
- Алгоритм смешанного обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задачи фильтрации двойного континуума в неоднородный и трещиноватых средах.
- Алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задачи мультиконтинуума ненасыщенной фильтрации в трещиноватых средах. Вычисление связанных многомасштабных базисных функций, а также упрощённых многомасштабных базисных функций.
- Алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задачи тепломассопереноса в трещиноватых средах.

Обоснованность и достоверность результатов подтверждена вычислительными эксперментами при решении модельных задач, приближённых к реальным. В ходе численного эксперимента проводилось сравнение полученных результатов с эталонным, заведомо правильным, решением.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Общеуниверситетская научная конференция студентов СВФУ «АММОСОВ – 2017», г.Якутск, Россия;
- VI Международная конференция «Проблемы математической физики и математическое моделирование», 2017, г. Москва, Россия;
- Международная конференция «Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления», 2017, г. Якутск, Россия;
- Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, 2018, г. Лозенец, Болгария;
- Tenth Jubilee Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, 2018, г. Албена,

Болгария;

- Международная конференция «Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач», 2018, г. Якутск, Россия;
- II Международная конференция «Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления», 2018, г. Москва, Россия;
- IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», 2019, г. Москва, Россия;
- Международная конференция «Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизичных задач», 2019, г. Якутск, Россия;

Публикации. По теме диссертации опубликованы 15 научных работ, в том числе – 5 статей в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК [1, 2, 3, 4, 14], 10 статей в международных научных изданиях [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], включенных в систему цитирования Web of Sciences и Scopus, 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [15].

Личный вклад автора. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [1, 2, 3, 5, 7, 13, 14] им разработан и реализован вычислительный алгоритм, проведены расчеты и проведён анализ результатов вычислительных экспериментов; в работах [6, 8, 10, 12] диссертант участвовал в разработке математической модели, разработал вычислительный алгоритм, численно его реализовал. В работах [4, 9, 11, 15] автор принял участие в постановке математической модели и численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертационной работы составляет 161 страниц, они содержит 53 иллюстрации и 26 таблиц. Список литературы содержит 155 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантом РНФ 17-71-20055, грантом РНФ 19-11-00230, грантом РФФИ 17-01-00732 А, грантом РФФИ 19-31-90066.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цель и задачи исследования, кратко излагается содержание диссертации по главам.

В **первой главе** рассматриваются методы аппроксимации задачи на грубой сетке: метод численного усреднения, обобщённый многомасштабный метод конечных элементов, смешанный обобщённый многомасштабный метод конечных элементов. Обзор методов производится путём решения тестовых эллиптических задач в двумерной области с неоднородными включениями.

Задача № 1. Описывается метод численного усреднения на примере эллиптической задачи в области с неоднородными включениями. В области Ω мы решаем следующее уравнение:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

со следующим граничным условием:

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Опишем метод усреднения для данной задачи в области с неоднородными включениями, где $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Аппроксимация на мелкой сетке проведена с помощью метода конечных элементов и выглядит следующим образом: найти $u \in V$ такую, что

$$\int\limits_{\Omega} (\kappa \nabla u, \nabla q)\, dx = \int\limits_{\Omega} f q\, dx, \quad \forall q \in V. \tag{3}$$

Отметим, что в качестве базисных функций используются стандартные линейные базисные функции.

Для вычисления эффективных характеристик будем решать следующие локальные задачи в подобласти K_j:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u_m) = 0,\ x = (x_1, x_2) \in K_j,$$
$$u_m = x_m,\ x \in \partial K_j,\ m = 1, 2,$$

где коэффициент κ – неоднородный.

Эффективный коэффициент $\kappa^\star$ вычисляется следующим образом:

$$\kappa^\star = \begin{bmatrix} \kappa^\star_{11} & \kappa^\star_{12} \\ \kappa^\star_{21} & \kappa^\star_{22} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где компоненты тензора имеют вид

$$\begin{aligned} \kappa^\star_{11} = \frac{1}{|K_j|}\int\limits_{K_j} \kappa\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,dx,\ \kappa^\star_{12} = \frac{1}{|K_j|}\int\limits_{K_j} \kappa\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\,dx, \\ \kappa^\star_{21} = \frac{1}{|K_j|}\int\limits_{K_j} \kappa\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,dx,\ \kappa^\star_{22} = \frac{1}{|K_j|}\int\limits_{K_j} \kappa\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Вычисленный коэффициент $\kappa^\star$ будем использовать при решении задачи (1),(2) на грубой сетке.

Задача № 2. Рассматривается обобщённый многомасштабный метод конечных элементов на примере эллиптической задачи (1),(2) в области с неоднородными включениями. Аппроксимация на мелкой сетке проведена с помощью метода конечных элементов (см. (3))

Построим многомасштабное пространство

$$V_{\text{off}} = \text{span}\{\phi_j\}_{j=1}^{N},$$

где N – число грубых базисных функций. Каждый ϕ_j находится в локальной области ω_i.

Снепшот пространство. Для вычисления многомасштабных базисных функций мы сначала построим снепшот пространство $V^{\omega_i}_{\text{snap}}$. Снепшот пространство строится путём решения следующих локальных задач:

$$-\nabla\cdot(\kappa\nabla\psi_l) = 0, \quad x \in \omega_i \tag{6}$$

с граничным условием

$$\psi_l(x) = \delta_j, \quad x \in \partial\omega_i,$$

где δ_i – функция, которая принимает значение 1 при $x = x_j$ и нуль в других точках. Количество решений задачи (6) $l = 1, ..., J_i$ будет равно количеству вершин на границе ω_i.

Многомасштабное пространство. Второй шаг – решение локальных спектральных задач на снепшот пространстве. Эти спектральные задачи выделяют доминантные моды и используются для построения многомасштабного пространства. Чтобы построить подходящие базисные функции, мы умножаем собственные векторы, связанные с наименьшими собственными значениями, на функции разбиения единицы.

Решаем следующую спектральную задачу в ω_i:

$$A\varphi^i = \lambda S\varphi^i, \tag{7}$$

где элементы матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $S = \{s_{ij}\}$ определяются следующим образом

$$a_{ij} = \int\limits_{\omega_i} \kappa \nabla u \cdot \nabla q dx, \quad s_{ij} = \int\limits_{\omega_i} \kappa \, u \, q \, dx.$$

Мы решаем эту спектральную задачу на снепшот пространстве

$$\tilde{A}\tilde{\varphi}^i = \lambda \tilde{S}\tilde{\varphi}^i, \quad \tilde{A} = PAP^T, \quad \text{и} \quad \tilde{S} = PSP^T, \tag{8}$$

где $P = \{\psi_0, \psi_1, ..., \psi_{J_i}\}$ и $\varphi^i_k = P\tilde{\varphi}^i_k$ для $k = 1, 2, ...$ Затем выбираем собственные векторы, соответствующие наименьшим собственным значениям M_i из (8), и используем их для построения многомасштабных базисных функций.

Многомасштабное пространство определяется базисами $\chi_i\varphi^i_k$, где χ_i – обычная узловая базисная функция для узла i (линейная функция разбиения единицы).

Аппроксимация на грубой сетке. Далее, мы создаём следующую матрицу для каждой ω_i:

$$R^i = \left[\chi_i\varphi^i_1, \ldots, \chi_i\varphi^i_{M_i}\right]$$

и определяем матрицу проекции от мелкой сетки к грубой сетке, чтобы уменьшить размерность задачи:

$$R = [R^1, R^2, ..., R^{N_v}],$$

где N_v – количество локальный областей ω_i.

Затем, используя матрицу проекции R и систему на мелкой сетке (3), мы строим аппроксимацию на грубой сетке:

$$A_c u_c = b_c, \quad A_c = RAR^T \quad \text{и} \quad b_c = Rb,$$

и, используя решение на грубой сетке u_c, мы можем восстановить решение на мелкой сетке $u_{ms} = R^T u_c$.

Задача № 3. Рассматривается смешанный обобщённый многомасштабный метод конечных элементов на примере эллиптической задачи в смешанной постановке в области с неоднородными включениями. В области Ω мы решаем задачу

$$\begin{gathered} \kappa^{-1} q + \nabla u = 0, \quad x \in \Omega, \\ \nabla \cdot q = f, \quad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{9}$$

со следующими граничными условиями:

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{10}$$

Задачу (9),(10) будем также решать в области с неоднородными включениями.

Вариационная постановка задачи на мелкой сетке записывается следующим образом: найти $(q, u) \in (V, Q)$ такие, что

$$\begin{gathered} m(q, v) + b(u, v) = 0, \quad \forall v \in V, \\ b(q, r) = l(r), \quad \forall r \in Q, \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} m(q, v) = -\int\limits_{\Omega} \kappa^{-1}\, q \cdot v \, dx, \quad b(u, q) = \int\limits_{\Omega} u \, \nabla \cdot q \, dx, \\ l(r) = \int\limits_{\Omega} f\, r \, dx. \end{gathered} \tag{12}$$

Для функций q и u берём элементы Равиарта - Томаса наименьшего порядка и кусочно постоянные функции соответственно.

Построим многомасштабное пространство для скорости $q_{ms} \in V_{ms}$:

$$V_{ms} = \text{span}\{\psi_1, ..., \psi_{N_c \cdot N_E}\},$$

где ψ_i - многомасштабная базисная функция, которая вычисляется в локальной области ω_i, и N_c – количество базисных функций в каждой локальной области. Для давления мы используем кусочно-постоянные функции Q_{ms} на всей грубой сетке $\mathcal{T}_H$.

Снепшот пространство. Для построения снепшот пространства мы решаем локальную задачу в области ω_i в вариационной формулировке: найти $(\phi_j, \eta) \in$

$V_h^{\omega_i} \times Q_h^{\omega_i}$ такую, что

$$\int\limits_{\omega_i} \kappa^{-1}\phi_j v \ dx - \int\limits_{\omega_i} \eta \ \nabla \cdot v \ dx = 0, \quad v \in V_h^{\omega_i},$$

$$\int\limits_{\omega_i} r \ \nabla \cdot \phi_j dx = \int\limits_{\omega_i} \frac{|e_j|}{S_{\omega_i}} \ r \ dx, \quad r \in Q_h^{\omega_i},$$

с граничными условиями

$$\phi_j \cdot n = 0, \quad x \in \partial\omega_i,$$

где n – вектор внешней нормали, $\partial\omega_i$ – граница области ω_i.

На грубой грани E_i мы применяем дополнительное граничное условие

$$\phi_j \cdot n = \delta_j,$$

где $j = 1, ..., J^{\omega_i}$ и количество локальных задач равно J^{ω_i}, J^{ω_i} – количество граней мелкой сетки e_j на E_i, $E_i = \cup_{j=1}^{J^{\omega_i}} e_j$, δ_j – кусочно-постоянная функция определенная на E_i, которая принимает значение 1 на e_j и 0 во всех остальных гранях мелкой сетки, $|e_j|$ – длина грани мелкой сетки e_j, S_{ω_i} – площадь локальной области ω_i.

Многомасштабное пространство. Теперь приступим к решению локальных спектральных задач на снепшот пространстве. В каждой локальной области ω_i решаем следующую задачу:

$$\overline{A}^{\omega_i}\overline{\psi}_k^{\omega_i} = \lambda_k \overline{S}^{\omega_i}\overline{\psi}_k^{\omega_i},$$

где

$$\overline{A}^{\omega_i} = R^{\omega_i} A^{\omega_i} R^{\omega_i T}, \quad \overline{S}^{\omega_i} = R^{\omega_i} S^{\omega_i} R^{\omega_i T},$$
$$R^{\omega_i} = [\phi_1, ..., \phi_{J^{\omega_i}}],$$

и

$$A^{\omega_i} = [a_{mn}^{\omega_i}], \quad a_{mn}^{\omega_i} = a_{\omega_i}(\phi_m, \phi_n) = \int\limits_{E_i} \kappa^{-1}(\phi_m \cdot n)(\phi_n \cdot n) \ ds,$$

$$S^{\omega_i} = [s_{mn}^{\omega_i}], \quad s_{mn}^{\omega_i} = s_{\omega_i}(\phi_m, \phi_n) = \int\limits_{\omega_i} \kappa^{-1}\phi_m\phi_n \ dx + \int\limits_{\omega_i} \nabla \cdot \phi_m \nabla \cdot \phi_n \ dx.$$

Сортируем собственные значения в возрастающем порядке и выбираем первые M^{ω_i} собственных значений и берём соответствующие им собственные вектора $\psi_k^{\omega_i} = R^{\omega_i}\overline{\psi}_k^{\omega_i}$ в качестве базисных функций, $k = 1, 2, ..., M^{\omega_i}$.

Далее, мы вычисляем отдельно базисную функцию, которая будет являться первой в нашем наборе базисов. Для этого решаем следующую локальную задачу в области ω_i: найти $(\chi^{\omega_i}, \eta) \in V_h^{\omega_i} \times Q_h^{\omega_i}$ такую, что

$$\int\limits_{\omega_i} \kappa^{-1} \chi^{\omega_i} \, v \, dx - \int\limits_{\omega_i} \eta \, \nabla \cdot v \, dx = 0, \quad v \in V_h^{\omega_i},$$
$$\int\limits_{\omega_i} r \, \nabla \cdot \chi^{\omega_i} \, dx = \int\limits_{\omega_i} \frac{|E_i|}{S_{\omega_i}} \, r \, dx, \quad r \in Q_h^{\omega_i},$$

со следующими граничными условиями

$$\chi^{\omega_i} \cdot n = 0, \quad x \in \partial\omega_i,$$
$$\chi^{\omega_i} \cdot n = 1, \quad x \in E_i,$$

где $|E_i|$ – длина грани грубой сетки E_i.

Определим многомасштабное пространство для q, используя полученные базисные функции

$$V_{ms} = \text{span}\{\chi^{\omega_i}, \psi_k^{\omega_i}, 1 \le k \le M_{\omega_i}, 1 \le i \le N_E\},$$

и запишем матрицу проекции

$$R = \begin{bmatrix} R_q & 0 \\ 0 & R_u \end{bmatrix}, \quad R_q = [R_{q,1}, ..., R_{q,N_E}]^T,$$

где $R_{q,i} = [\chi^{\omega_i}, \psi_1^{\omega_i}, ..., \psi_{M_{\omega_i}}^{\omega_i}]$ и R_u – матрица проекции для u, содержащая константы на ячейке грубой сетки в каждой строке. Здесь N_E – количество граней грубой сетки, M^{ω_i} – количество локальных многомасштабных базисных функций.

Аппроксимация на грубой сетке. Используя полученное многомасштабное пространство, мы получаем следующую систему на грубой сетке в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A_c & B_c^T \\ B_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_c \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_c \end{pmatrix},$$

где

$$A_c = R_q A R_q^T, \quad B_c = R_q B R_u^T, \quad b_c = R_u b.$$

Используя решение на грубой сетке q_c, мы можем восстановить решение на мелкой сетке $q_{ms} = R_q^T q_c$ и использовать q_{ms} для представления результатов.

Во **второй главе** рассматривается моделирование задач в перфорированной области. Решение задач проводится с помощью методов аппроксимации на грубой сетке, описанных в предыдущей главе. Представлены модификации данных методов, которые необходимы для получения точного решения в перфорированных средах.

Задача № 1. Рассматривается решение нестационарного уравнения теплопроводности в перфорированной среде методом численного усреднения:

$$c\frac{\partial T}{\partial T} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = f,\ x \in \Omega,\ 0 < t < t_{max},$$

дополним уравнение теплопроводности следующим начальным условием:

$$T_0 = 0,\ x \in \Omega,$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} T &= g,\ x \in \Gamma_D, \\ -\kappa\frac{\partial T}{\partial n} &= 0,\ x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

где Γ_D – левая граница области Ω, Γ_N – верхняя, нижняя и правая границы области Ω.

В перфорированной области метод численного усреднения требует некоторых изменений в вычислении эффективных характеристик. В случае перфорированной области эффективные характеристики вычисляются путём вычисления следующих локальных задач в подобласти K_j:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\kappa \nabla T_m) &= 0,\ x = (x_1, x_2) \in K_j, \\ T_m &= x_m,\ x \in \partial K_j / \Gamma_P,\ m = 1, 2, \\ \kappa\frac{\partial T_m}{\partial n} &= 0,\ x \in \Gamma_P. \end{aligned} \tag{13}$$

Эффективный коэффициент теплопроводности κ вычисляется по формулам (4),(5). Для вычисления усредненного коэффициента $c^\star$ будем использовать среднее значение по локальной области K_j

$$c^\star = \frac{1}{|K_j|}\int\limits_{K_j} c\ dx, \tag{14}$$

где $|K_j|$ – площадь локальной области K_j.

Задача № 2. Рассматривается решение эллиптического уравнения в перфорированной среде обобщённым методом конечных элементов с неоднородным граничным условием Робина на перфорациях. Расчёты проводились для задач в двумерной и трёхмерной постановках.

Рассмотрим численное решение эллиптического уравнения

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f, \quad x \in \Omega,$$

со следующими граничными условиями:

$$u = 0, \quad x \in \Gamma_O,$$
$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - a), \quad x \in \Gamma_P.$$

Мы обозначаем через Γ_P границы перфораций, а через $\Gamma_O = \Omega/\Gamma_P$ – внешнюю границу Ω.

Введём дополнительную базисную функцию, чтобы учесть неоднородные граничные условия Робина на перфорациях:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla \eta^i) = 0, \quad x \in \omega_i,$$

где

$$\eta^i = 0, \quad x \in \partial\omega_i/\Gamma_P, \quad \text{и} \quad -\kappa \frac{\partial \eta^i}{\partial n} = \alpha \eta^i, \quad x \in \Gamma_P.$$

Решения задачи в трёхмерной области представлено на рис. 1.

Задача № 3. Рассматриваем решение эллиптического уравнения в смешанной постановке в перфорированной среде с неоднородными граничными условиями Дирихле на границе перфораций. Решаем следующую задачу смешанным обобщённым многомасштабным методом конечных элементов:

$$\kappa^{-1} q + \nabla u = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$\nabla \cdot q = f, \quad x \in \Omega,$$

со следующими граничными условиями:

$$u = 0, \quad x \in \Gamma_O,$$
$$u = g, \quad x \in \Gamma_P.$$

Для учёта граничного условия Дирихле на границах перфораций возникает необходимость для вычисления дополнительного базиса для каждой локальной

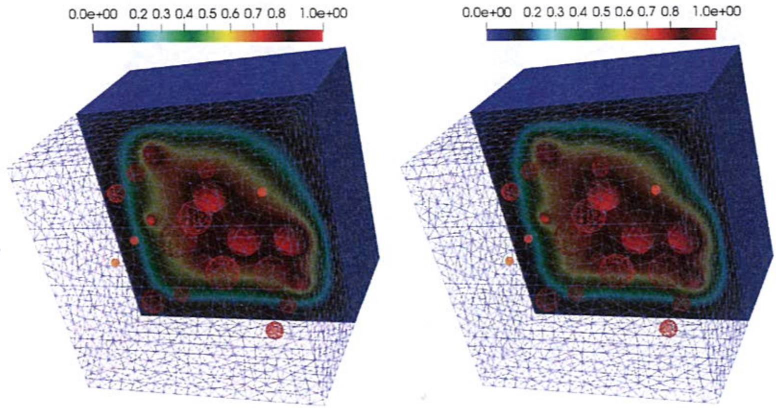

Рис. 1. Решение на мелкой сетке(слева) и многомасштабное решение(справа) для трёхмерной задачи.

области, в которой присутствуют перфорации. Для этого в локальных областях с перфорациями решается следующая задача: найти $(\varrho^{\omega_i}, \eta) \in V_h^{\omega_i} \times Q_h^{\omega_i}$ такую, что

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\omega_i} \kappa^{-1} \varrho^{\omega_i} \ v \ dx - \int\limits_{\omega_i} \eta \ \nabla \cdot v \ dx = 0, \quad v \in V_h^{\omega_i}, \\
\int\limits_{\omega_i} r \ \nabla \cdot \varrho^{\omega_i} \ dx = \int\limits_{\omega_i} \frac{|\Gamma_P|}{S_{\omega_i}} \ r \ dx, \quad r \in Q_h^{\omega_i},
\end{aligned}
$$

со следующими граничными условиями:

$$
\begin{aligned}
\varrho^{\omega_i} \cdot n = 0, \quad x \in \partial\omega_i, \\
\eta = 1, \quad x \in \Gamma_P,
\end{aligned}
$$

где $|\Gamma_P|$ – длина границы Γ_P.

Решение задачи представлено на рис. 2.

В **третьей главе** рассматривается решение задач в трещиноватых средах с помощью многомасштабных методов конечных элементов.

Задача № 1. Рассматривается решение задачи потока в трещиновато-пористых средах с моделью двойного континуума с помощью смешанного обобщённого мно-

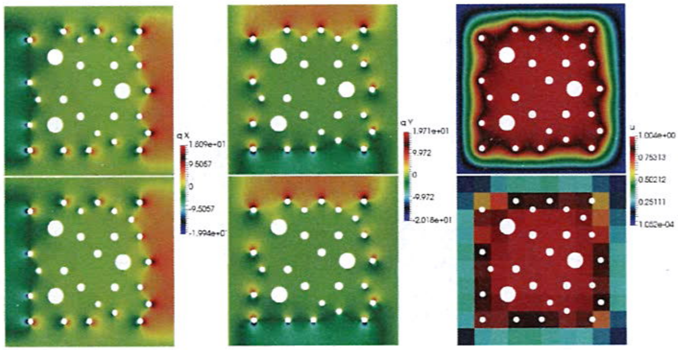

Рис. 2. Решение на мелкой сетке(верхний ряд), многомасштабное решение с использованием 8 базисов(нижний ряд).

гомасштабного метода конечных элементов(Mixed GMsFEM):

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot q_1 + \sigma_{12}(p_1 - p_2) + \sigma_{1f}(p_1 - p_f) = f_1, \quad x \in \Omega_1, \\
&q_1 = -k_1 \nabla p_1, \quad x \in \Omega_1, \\
&\nabla \cdot q_2 + \sigma_{21}(p_2 - p_1) + \sigma_{2f}(p_2 - p_f) = f_2, \quad x \in \Omega_2, \\
&q_2 = -k_2 \nabla p_2, \quad x \in \Omega_2, \\
&\nabla \cdot q_f + \sigma_{f1}(p_f - p_1) + \sigma_{f2}(p_f - p_2) = f_f, \quad x \in \gamma, \\
&q_f = -k_f \nabla p_f, \quad x \in \gamma,
\end{aligned} \tag{15}$$

где q_α, p_α, f_α поток, давление и источник для α континуума, $\alpha = 1, 2, f$, где индексы $1, 2$ обозначают первый и второй континуумы, а индекс f обозначает модель трещин пониженной размерности. Здесь $k_\alpha = \kappa_\alpha/\mu$, μ – вязкость жидкости, κ_α – проницаемость континуума α ($\alpha = 1, 2, f$). Система уравнений (15) связана членами массообмена между континуумами $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$), где $\alpha, \beta = 1, 2, f$ и $\beta \neq \alpha$. Для аппроксимации крупномасштабных трещин γ используется встроенная модель трещин(EFM).

Задача № 2. Мы строим алгоритм решения задач мультиконтинуума ненасыщенной фильтрации в пористых средах, основанные на связанной системе уравнений Ричардса с помощью обобщённого многомасштабного метода конечных элементов.

Имеем следующую систему уравнений для давлений p_1, p_2 и p_f:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \nabla \cdot (k_1(x,p_1)\nabla(p_1+z)) + L_{12} + L_{1f} = f_1, \quad x \in \Omega, \\
&\frac{\partial \Theta_2}{\partial t} - \nabla \cdot (k_2(x,p_2)\nabla(p_2+z)) - L_{21} + L_{2f} = f_2, \quad x \in \Omega, \\
&\frac{\partial \Theta_f}{\partial t} - \nabla \cdot (k_f(x,p_f)\nabla(p_f+z)) - L_{f1} - L_{f2} = f_f, \quad x \in \gamma,
\end{aligned} \tag{16}$$

где индексы $1, 2$ обозначают первый и второй континуум и индекс f обозначает модель трещин пониженной размености.

Рассматривается модель ненасыщенной фильтрации с системой уравнений (16) со следующими начальными условиями:

$$p_1 = p_2 = p_f = p^0, \tag{17}$$

и граничными условиями:

$$\begin{aligned}
&p_1 = p_2 = p_f = g, \quad x \in \Gamma_D, \\
&q_1 \cdot n = q_2 \cdot n = q_f \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_N,
\end{aligned}$$

где $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, Γ_D – верхняя граница вычислительной области и Γ_N обозначает левую, правую и нижнюю границы области Ω. Для аппроксимации крупномасштабных трещин пониженной размерности используется дискретная модель трещин(DFM).

Численное решение задачи двойного континуума в трёхмерной области представлено на рис. 3.

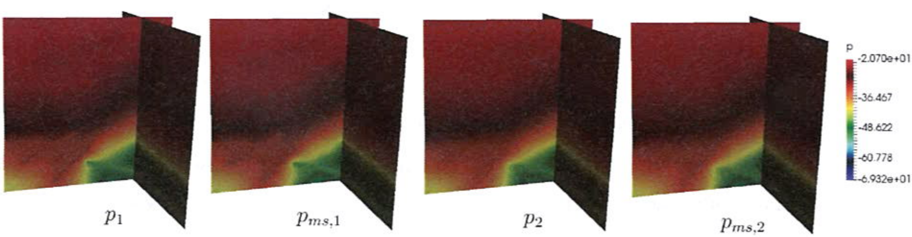

Рис. 3. Решение p_1, p_2 и $p_{ms,1}, p_{ms,2}$ в последний момент времени; p_1, p_2 – решения на мелкой сетке $DOF_f = 43218$; $p_{ms,1}, p_{ms,2}$ – многомасштабное решение с использованием 16 базисных функций $DOF_c = 6912$.

Задача № 3. Рассматриваются процессы тепломассопереноса в трещиноватых пористых средах. Решения задач производятся с помощью обобщённого многомасштабного метода конечных элементов.

Мы имеем следующую систему уравнений для давлений в матрице и трещинах

$$a_m \frac{\partial p_m}{\partial t} - h_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - \nabla \cdot (b_m \nabla p_m) + r_{mf} = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$a_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - h_f \frac{\partial T_f}{\partial t} - \nabla \cdot (b_f \nabla p_f) - r_{fm} = 0, \quad x \in \gamma,$$

а также следующую систему уравнений для температуры в матрице и температуры в трещинах:

$$(c\rho)_m \frac{\partial T_m}{\partial t} + (c\rho)_w \nabla \cdot (q_m T_m) - \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m) + L_{mf} = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$(c\rho)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (c\rho)_w \nabla \cdot (q_f T_f) - \nabla \cdot (\lambda_f \nabla T_f) - L_{fm} = 0, \quad x \in \gamma,$$

где

$$L_{mf} = \beta \eta_{mf} (T_m - T_f) + (c\rho)_w \sigma \eta_{mf} (p_m - p_f) T_{mf}.$$

На левой границе мы применяем граничное условие Дирихле для давления и температуры. На других границах мы устанавливаем нулевой поток жидкости и тепла.

Решение задачи в трёхмерной области представлено на рис. 4

Основные результаты работы. В диссертационной работе представлены многомасштабные методы для решения задач в неоднородных, перфорированных и трещиноватых средах, которые позволяют значительно уменьшить размерность исходной системы с минимальной потерей точности.

В диссертационной работе были получены следующие результаты.

1. Рассмотрены методы аппроксимации на грубой сетке на примере тестовой эллиптической задачи. Решение задачи проводилось в неоднородной области с включениями. Метод численного усреднения, обобщённый многомасштабный метод конечных элементов и смешанный обобщённый многомасштабный метод конечных элементов исследовались на точность относительно контраста коэффициента. Результаты исследования показали, что метод численного усреднения не подходит для решения задач с высоким контрастом коэффициентов. Из численного эксперимента можно сделать вывод, что точность многомасштабных методов улучшается при использовании большего количества многомасштабных базисных функций. Многомасштабные методы имеют хорошую применимость для задач с неоднородными свойствами, в том числе с большим контрастом.

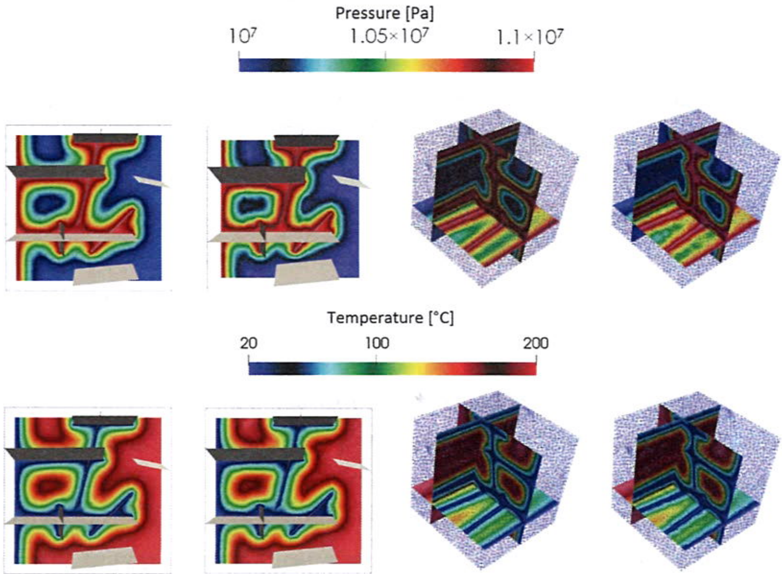

Рис. 4. Решение на мелкой сетке и многомасштабное решение в последний момент времени для давления (первая строка) и температуры (вторая строка). Первый столбец: решение на мелкой сетке для среза $Z = 5$. Второй столбец: многомасштабное решение для среза $Z = 5$. Третий столбец: решение на мелкой сетке для срезов $X = 7$, $Y = 2.5$ и $Z = 5$. Четвёртый столбец: многомасштабное решение для срезов $X = 7$, $Y = 2.5$ и $Z = 5$. Размер области 10 м $\times$ 10 м $\times$ 5 м.

2. Разработан обобщённый многомасштабный метод конечных элементов для численного решения эллиптической задачи в неоднородной перфорированной среде с неоднородным граничным условием Робина на перфорациях. Представлена модификация метода в виде дополнительного базиса для учёта влияния граничного условия Робина на перфорациях. Проведено численное решение задачи в двумерной перфорированной области, а также в двумерной области с множественными мелкими перфорациями. Получены результаты в трёхмерной перфорированной области. Проведён вычислительный эксперимент, который показал эффективность и высокую точность метода. Вычислительный эксперимент также показал, что использование дополнительного базиса необходимо для данного типа задач.

3. Построен алгоритм смешанного обобщённого многомасштабного метода ко-

нечных элементов для численного решения эллиптической задачи в перфорированной области с неоднородным граничным условием Дирихле на перфорациях. Для учёта влияния граничного условия Дирихле на перфорациях решается дополнительная локальная задача, с помощью которой строится дополнительная базисная функция. Проведён вычислительный эксперимент в двумерной перфорированной области, который показал хорошую применимость метода к данным типам задач. По полученным результатам видно, что для получения точного решения необходимо использовать дополнительный базис.

4. Разработан смешанный обобщённый многомасштабный метод конечных элементов для численного решения задачи фильтрации в неоднородных средах. Моделирование проводилось в неоднородной области с использованием модели мультиконтинуума. Для построения многомасштабного пространства использовались несвязные многомасштабные базисные функции. При численном моделировании рассматривалась задача в двумерной постановке. В результате численного эксперимента смешанный обобщённый многомасштабный метод конечных элементов показал хорошую точность.

5. Выполнено численное моделирование задачи ненасыщенной фильтрации в трещиноватых средах с помощью обобщённого многомасштабного метода конечных элементов. Представлены результаты в двумерных и трёхмерных неоднородных трещиноватых областях. Также проведено численное моделирование для модели двойного континуума в двумерных и трёхмерных областях. Показано использование связанных многомасштабных базисных функций для построения аппроксимации на грубой сетке. Представлена модификация метода в виде упрощенных базисных функций, которые позволяют получить многомасштабные базисные функции в областях с упрощенной геометрией трещин. Так же исследуется адаптивный подход при выборе количества базисных функций в каждой локальной области в зависимости от величины собственных значений. Вычислительный эксперимент показал хорошую точность метода для данного типа задач.

6. Выполнено численное моделирование задачи тепломассопереноса в трещиноватых средах с помощью обобщённого многомасштабного метода конечных элементов. Представлены результаты в двумерных и трёхмерных трещино-

ватых областях. Показана зависимость точности метода от размерности грубой сетки. Представлено вычисление многомасштабных базисных функций для расщеплённой системы на грубой сетке. Проведён вычислительный эксперимент, который показал хорошую применимость метода к данным типам задач.

Публикации автора по теме диссертации

1. **Васильева М. В., Стальнов(Спиридонов) Д. А. Математическое моделирование термомеханического состояния тепловыделяющего элемента // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. – 2016. – № 1 (51). – С. 45-60.**
2. **Васильева М. В., Стальнов(Спиридонов) Д. А. Численное усреднение для задачи теплопроводности в неоднородных и перфорированных средах // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. – 2017. – № 2 (58). – С. 49-60.**
3. **Спиридонов Д. А., Васильева М. В. Моделирование задач фильтрации в трещиноватых пористых средах посредством смешанного метода конечных элементов (встроенная модель трещин) //Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24. – № 3. – С. 100-110.**
4. **Васильева, М. В., Захаров, П. Е., Сивцев, П. В., Спиридонов, Д. А. Численное моделирование задач термоупругости для конструкции с внутренним источником // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24. – № 3. – С 52-65.**
5. **Spiridonov D., Vasilyeva M. Generalized Multiscale Finite Element Method for Unsaturated Filtration Problem in Heterogeneous Medium // International Conference on Finite Difference Methods. – Springer, Cham, 2018. – С. 517-524.** (Scopus).
6. **Tyrylgin, A., Vasilyeva, M., Zhang, Q., Spiridonov, D., Alekseev, V. . Mathematical modeling of the fluid flow and geo-mechanics in the fractured porous media using generalized multiscale finite element method / AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2018. – Т. 2025. – № 1. – С. 100009.** (Scopus).
7. **Spiridonov D., Vasilyeva M. Multiscale model reduction of the**

flow problem in fractured porous media using mixed generalized multiscale finite element method / AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2018. – Т. 2025. – № 1. – С. 100008. (Scopus).

8. Alekseev V., Gavrileva, U., Spiridonov, D., Tyrylgin, A., Vasilyeva, M. Numerical simulation of the transport and flow problems in perforated domains using generalized multiscale finite element method / AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2018. – Т. 2025. – № 1. – С. 100001. (Scopus).
9. Stepanov, S., Grigorev, A., Vasilyeva, M., Nikiforov, D., Spiridonov, D. Multiscale model reduction of fluid flow based on the dual porosity model / Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1158. – № 4. – С. 042025. (Scopus).
10. Tyrylgin A., Spiridonov D., Vasilyeva M. Numerical homogenization for poroelasticity problem in heterogeneous media / Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1158. – № 4. – С. 042030. (Scopus).
11. Vasilyeva M., Chung, E. T., Leung, W. T., Wang, Y., Spiridonov, D. Upscaling method for problems in perforated domains with nonhomogeneous boundary conditions on perforations using Non-Local Multi-Continuum method (NLMC) // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2019. – Т. 357. – С. 215-227. (Web of Sciences & Scopus).
12. Vasilyeva M., Babaei, M., Chung, E. T., Spiridonov, D. Multiscale modeling of heat and mass transfer in fractured media for enhanced geothermal systems applications //Applied Mathematical Modelling. – 2019. – Т. 67. – С. 159-178. (Web of Sciences & Scopus).
13. Spiridonov D., Vasilyeva M., Leung W. T. A Generalized Multiscale Finite Element Method (GMsFEM) for perforated domain flows with Robin boundary conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2019. – Т. 357. – С. 319-328. (Web of Sciences & Scopus).
14. Васильева М. В., Спиридонов Д. А., Чун Э. Т., Эфендиев Я. Смешанный многомасштабный метод конечных элементов для задач в перфорированных средах с неоднородными граничными условиями Дирихле // Математические заметки СВФУ. – 2019. – Т. 26. –

№ 2. – С. 65-79. (Scopus)

15. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ "Вычислительная библиотека для численного моделирования задач в неоднородных и перфорированных областях с использованием смешанного обобщённого многомасштабного метода конечных элементов"(Спиридонов Д.А.). № 2018660899 от 08.10.2018 г.

Подписано в печать 21.10.2019. Формат 60х84/16.
Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.
Печ. л. 1, 5. Уч.-изд. л. 1,75. Тираж 100 экз. Заказ № 291.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.

Отпечатано в типографии ИД СВФУ