

На правах рукописи



Калачикова Уйгулаана Семеновна

**Многомасштабные вычислительные технологии  
для моделирования волновых процессов в  
неоднородных средах**

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2022

Работа выполнена на кафедре «Вычислительные технологии» Института математики и информатики ФГАОУ ВО «Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова».

Научный руководитель: **Ялчин Эфендиев**

PhD, профессор, Северо-Восточный  
федеральный университет им. М.К. Аммосова

Официальные оппоненты: **Петров Игорь Борисович,**

доктор физико-математических наук, профессор,  
член-корреспондент РАН,

ФГАОУ ВО «Московский физико-технический  
институт (национальный исследовательский  
университет)», г. Москва

**Лисица Вадим Викторович,**

доктор физико-математических наук,  
ФГБУН Институт нефтегазовой геологии и  
геофизики им. А.А.Трофимука СО РАН,  
г. Новосибирск

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»  
г. Ростов-на-Дону

Защита состоится «6» сентября 2022 года в «16:30» часов на заседании диссертационного совета 24.2.396.02 при СВФУ им. М.К. Аммосова, по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, 42, ауд. 237.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СВФУ им. М.К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58 и на сайте университета по адресу <https://www.s-vfu.ru>

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н.



Степанов С.П.

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Моделирование многомасштабных процессов вызывает большой интерес в различных прикладных областях. К ним относятся акустика в газах и жидкостях, упругие волны в твердых телах, течения в пористых средах, механика, биологические приложения и т.д. Из-за колебательного характера волновых явлений численные аппроксимации волновых уравнений являются сложными. Аппроксимация волновых задач с допустимой точностью требует использования очень мелкой пространственной дискретизации. Для стандартных численных методов, таких как метод конечных разностей и метод конечных элементов низкого порядка, необходимо сеточно разрешать длину волны посредством десяти ячеек расчетной сетки. В частности, при моделировании задач с высокими частотами требования налагаемые на расчетные сетки приводят к задачам с очень большой размерностью т.е. с высокой вычислительной сложностью. Другой особенностью рассматриваемых задач является наличие в грунтах неоднородностей. При этом коэффициенты уравнения могут быть неоднородными, но также в моделируемой среде могут содержаться разномасштабные трещины и перфорации. Наличие неоднородностей и трещин в грунте существенно сказывается на волновых процессах и их необходимо учитывать при построении математической модели, что приводит к большим трудностям при компьютерном моделировании. Для построения подходящей математической модели распространения сейсмических волн используются многомасштабные методы или методы усреднения, которые существенно понижают размер системы. В многомасштабных методах основной исследовательской задачей является построение приближения грубой сетки для более быстрых результатов, где многомасштабные базисные функции вычисляются на мелкой сетке, чтобы учесть влияние трещин и других неоднородностей.

**Целью диссертационной работы** является разработка алгоритмов и вычислительная реализация методов понижения порядка для волнового уравнения в неоднородной области. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи исследования:

- Разработка алгоритма метода усреднения для решения задачи Гельмгольца в неоднородной области;
- Разработка многомасштабного метода конечных элементов (ММКЭ) для решения задачи Гельмгольца в неоднородной области;

- Разработка обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (ОММКЭ) с разрывными и непрерывными базисными функциями для распространения упругих волн;
- Разработка обобщенного граничного многомасштабного метода конечных элементов (ОГММКЭ) для задачи рассеяния в перфорированной области.
- Разработка обобщенного многомасштабного метода конечных элементов (ОММКЭ) для уравнения конвекции-диффузии в перфорированной области.

**Научная новизна и практическая значимость.** Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

- С помощью численного метода усреднения получено решение задачи Гельмгольца в неоднородной области;
- Проведено моделирование задачи Гельмгольца в неоднородной области многомасштабным методом конечных элементов;
- Реализован алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов разрывного метода Галеркина и непрерывного метода Галеркина для решения задачи распространения упругих волн в трещиноватых средах;
- Разработан обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов для задачи рассеяния в перфорированной области.
- Представлен обобщенный многомасштабный разрывный метод Галеркина с разными типами построения базисных функций для уравнения конвекции-диффузии в перфорированной области.

Проведённые численные расчёты имеют практическое значение в моделировании волновых процессов в неоднородных средах.

**Методология и методы исследования.** В данной работе для решения задач Гельмгольца применялись следующие методы: метод конечных элементов, разрывный метод Галеркина, модель линейного скольжения, метод численного усреднения, многомасштабный метод конечных элементов, обобщённый многомасштабный метод конечных элементов и обобщенный граничный многомасштабный метод конечных элементов.

**Положения выносимые на защиту:**

- Численное усреднение волнового уравнения в неоднородных средах;
- МКЭ для задачи Гельмгольца в неоднородных средах;

- ОММКЭ непрерывным и разрывным методом Галеркина для распространения волн в трещиноватых средах;
- Алгоритм ОГММКЭ для задачи рассеяния в перфорированных средах.
- ОММКЭ разрывным методом Галеркина для задачи конвекции-диффузии в перфорированной области.

**Обоснованность и достоверность результатов** подтверждена вычислительными экспериментами численной реализации математической моделей волновых процессов, решении модельных задач волновых процессов, сравнении полученных результатов с эталонным решением и публикациями в рецензируемых журналах из списка ВАК, Web of Science, Scopus, а также свидетельствами о регистрации ПО.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", зал конференции научной библиотеки СВФУ, Учебно-лабораторный корпус (УЛК), 30.07.2017 - 04.08.2017;
- The Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, г. Албена, Болгария, 20.06.2018 - 25.06.2018;
- The Tenth Jubilee Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, г. Лозенец, Болгария, 11.06.2018 - 18.06.2018;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 08.08.2018 - 10.08.2018;
- II Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", 2018 ИВМ РАН, ул. Губкина, д. 8, 9 этаж, г. Москва, 15.08.2018 - 17.08.2018;
- IV Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования ул. Губкина, 8, г. Москва, 19.05.2019 - 21.05.2019;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 24.05.2019 - 25.05.2019;
- III Международная конференция "Многомасштабные методы и высоко-

производительные научные вычисления", Дальневосточный федеральный университет, Остров Русский, Владивосток, 07.10.2019 - 11.10.2019;

- Применение цифровых технологий в промышленности, бизнесе и здравоохранении Республика Саха, СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, 58, г. Якутск, 23.12.2019 - 25.12.2019;
- IV Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г. Сочи, 5 корпус Екатеринбургский квартал, 08.09.2020 - 13.09.2020;
- Online international conference «Multiscale and high-performance computing for multiphysical problems», СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, Россия, 7 декабря 2020.
- Международная конференция «Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные», СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, Россия, 18-25 июля 2021.

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 11 научных работ - в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК (ВАК, Scopus, Web of Science) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], в т.ч. 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [10, 11].

**Личный вклад автора.** В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [1, 2, 3, 4, 6, 7, 9] им разработан и реализован вычислительный алгоритм, проведены расчеты и проведён анализ результатов вычислительных экспериментов; в работах [5, 8] диссертант участвовал в разработке математической модели и участвовал в численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертационной работы составляет 164 страницы, содержит 57 иллюстраций и 10 таблиц. Список литературы содержит 121 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантом РНФ 17-71-20055, грантом РФФИ 17-01-00689, грантом 17-01-00732, грантом РФФИ 19-31-90117.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цель и задачи исследования, кратко излагается содержание диссертации по главам.

В **первой главе** рассматривается численное моделирование задачи распределения волн в неоднородных средах. В *первом разделе* рассматривается распределение упругих волн в неоднородной среде, где математическая модель описывается гиперболическим уравнением второго порядка для перемещений. Аппроксимация уравнений проводится с использованием разрывного метода Галеркина. Данный метод аппроксимации позволяет получить блочно-диагональную матрицу масс и, следовательно, ее легко обратить при построении эффективной вычислительной реализации. Результаты численного решения для двумерной задачи представлены для трех модельных задач с неоднородными свойствами грунтов и также с учетом наличия трещин.

Во *втором разделе* исследовано численное усреднение для задачи распространения волн в трещиноватых средах. Математическая модель описывается уравнением Гельмгольца для распространения упругих волн.

Рассматривается уравнение Гельмгольца для распространения упругих волн в расчетной области  $\Omega$

$$-\operatorname{div} \sigma - \omega^2 \rho u = f, \quad \sigma(u) = C : \varepsilon(u), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

где  $C$  - коэффициенты тензора упругости,  $\omega$  - это частота,  $\rho$  - плотность,  $f$  - функция источник и  $u = \operatorname{Re}(u) + i\operatorname{Im}(u)$ .

Чтобы избежать нежелательных отражений, вызванных расчетной областью, в качестве граничных условий используются поглощающие граничные условия первого порядка

$$i\rho\omega Au = -\sigma(u)n, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Аппроксимация мелкой сетки строится с помощью метода конечных элементов. Слабая формулировка уравнения Гельмгольца для классического непрерывного метода Галеркина дается формулой

$$\int_{\Omega} (\sigma(u), \varepsilon(v)) dx - \int_{\Omega} \rho\omega^2 uv dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad (3)$$

где  $u = \sum_j u_j \phi_j$ ,  $\phi_j$  являются линейными базисными функциями для мелкомасштабного приближения.

Основная идея численного усреднения состоит в том, чтобы определить эффективные коэффициенты в грубой ячейке  $C^*$ . Трещины фиксируются в тензоре эффективной упругости и рассчитываются путем решения локальной задачи в представительном объеме

$$-\operatorname{div} \sigma(u) = 0, \quad x \in K, \quad (4)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u^{(rs)} = \Lambda^{(rs)} x \quad \text{on } \partial K. \quad (5)$$

где

$$\Lambda_{ij}^{(rs)} = \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}), \quad r, s = 1, 2. \quad (6)$$

Мы предполагаем, что трещины имеют исчезающую ширину, и, следуя модели линейного скольжения, мы имеем линейную связь между вектором тяги и величиной разрыва в поле смещения следующим образом:

$$[u] = Z \sigma \cdot n, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

где  $[u]$  - скачок поля смещения в трещине,  $\sigma \cdot n$  - вектор тяги на поверхности трещины,  $Z$  - матрица податливости трещины,  $z_1 = k_1^{-1}$  и  $z_2 = k_2^{-1}$  нормальное и касательное соответствие.

Используем метод РМГВШ для аппроксимации локальной задачи и имеем следующую вариационную формулировку: найти  $u^{(rs)} \in V_h(K)$  такое, что

$$a_{DG}(u^{(rs)}, v) = 0, \quad v \in V_h(K), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} a_{DG}(u, v) = & \int_K (\sigma(u), \varepsilon(v)) dx - \int_{\Gamma_0} \{\sigma(u)n\} [v] ds - \int_{\Gamma_0} \{\sigma(v)n\} [u] ds \\ & + \frac{\gamma_f}{h} \int_{\Gamma_0} \{\lambda + 2\mu\} [u][v] ds + \sum_i \int_{\gamma_i} Z^{-1} [u][v] ds, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\{\cdot\}$  и  $[\cdot]$  являются средним значением и скачком вектор-функции  $u$  и задаются выражением

$$\{u\} = \frac{u|_{K^+} + u|_{K^-}}{2}, \quad [u] = u|_{K^+} - u|_{K^-}.$$



Компоненты эффективных модулей упругости  $C^*$  определяются усреднением локальных деформаций

$$C_{rspq}^* = \frac{1}{|K|} \int_K C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(rs)} \varepsilon_{kl}^{(pq)} dx, \quad (10)$$

где  $r, s, p, q = 1, 2$  и  $\varepsilon^{(rs)} = \varepsilon(u^{(rs)})$  - поле деформации.

В *третьем разделе* представлен алгоритм многомасштабного метода конечных элементов (ММКЭ) для задачи рассеяния в неоднородных средах. Этот алгоритм построен на основе теории усреднения для задач в периодических средах. В предлагаемом методе для приближения на грубой сетке решается локальная задача для построения многомасштабных базисных функций. Представлены два подхода к построению локальных базисных функций на основе двух типов локальных задач с использованием эллиптической части оператора и оператора Гельмгольца.

Рассмотрим комплекснозначную задачу Гельмгольца в неоднородной области  $\Omega = \Omega_0 \cup \sum_{j=1,2,\dots} D_j$

$$\nabla \cdot (A(x)\nabla u_s) + k^2 n(x) u_s = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

где волновое число  $k$  является постоянным и считается положительным,  $u = u_i + u_s$  - полное поле,  $u_s$  - поле рассеяния и

$$n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_0 \\ \alpha_j & x \in D_j, j = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad A(x) = \begin{cases} \mathcal{I} & x \in \Omega_0 \\ A_j & x \in D_j, j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

и ненулевая правая часть в подобластях  $D_j$

$$f(x) = \nabla \cdot ((I - A(x))\nabla u_i) + k^2(1 - n(x))u_i,$$

где  $u_i = e^{ikx \cdot d} = \cos(kx \cdot d) + i \sin(kx \cdot d)$  - заданное падающее поле, а  $d$  - направление падающей волны.

Рассмотрим уравнение с условием излучения Зоммерфилда

$$\frac{\partial u_s}{\partial n_b} - iku_s = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где  $n_b$  - единичная нормаль на границе.

Для аппроксимации уравнения Гельмгольца на мелкой сетке мы используем метод конечных элементов и имеем следующую вариационную формулировку:

найти  $u \in V_h = H_1(\Omega)$  такое что

$$a(u_s, v) - k^2 m(u_s, v) - ib(u_s, v) = l(v), \quad v \in V_h, \quad (12)$$

где

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad m(u, v) = \int_{\Omega} n u v \, dx,$$

$$b(u, v) = \int_{\partial\Omega} k u v \, ds, \quad l(v) = - \int_{\Omega} f v \, dx,$$

и  $u_s = \text{Re}(u_s) + i\text{Im}(u_s)$ .

Для приближения на грубой сетке мы используем многомасштабный метод конечных элементов со следующим вычислительным алгоритмом:

- построение многомасштабных базисных функций в локальной области  $\omega_i$
- построение и решение системы грубых сеток на многомасштабном пространстве.

Для построения многомасштабных базисных функций в локальных областях мы рассматриваем следующие локальные задачи в  $K_j \in \omega_i$

- Случай 1 с эллиптическим оператором

$$\nabla \cdot (A(x) \nabla \phi_i) = 0, \quad x \in K_j, \quad \forall K_j \in \omega_i, \quad (13)$$

с линейным граничным условием на  $\partial K_j$ .

- Случай 2 с полным оператором

$$\nabla \cdot (A(x) \nabla \phi_i) + k^2 n(x) \phi_i = 0, \quad x \in K_j, \quad \forall K_j \in \omega_i, \quad (14)$$

с линейным граничным условием на  $\partial K_j$ .

В *четвертом разделе* исследуется обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (ОММКЭ) для распространения упругих волн. Рассматривается задача распространения упругой волны в неоднородной области, описываемое уравнением Гельмгольца (1) с поглощающими граничными условиями (2) и условием линейного скольжения на трещине (7). Для аппроксимации на мелкой сетке используется Разрывный метод конечных элементов Галеркина с внутренним штрафом. Рассматриваем два типа построения обобщенных многомасштабных базисных функций: с непрерывными многомасштабными базисными функциями и с разрывными многомасштабными базисными функциями для каждой локальной области. Главными различиями между двумя методами

построения базисных функций являются определение локальных областей и многомасштабных пространств.

Основные этапы многомасштабного метода одинаковы для обоих подходов. В многомасштабном вычислительном алгоритме у нас есть следующие шаги:

1. Построение грубой сетки и локальных областей;
  - для *ОММКЭ с непрерывными базисами*, локальная область  $\omega_i$  определяется как грубая окрестность, которая содержит четыре ячейки четырехугольника грубой сетки вокруг узла грубой сетки, где  $i = 1, \dots, N_v$  и  $N_v$  - количество узлов грубой сетки.
  - для *ОММКЭ с разрывными базисами*, локальная область - это ячейка грубой сетки  $K_i$ , где  $i = 1, \dots, N_c$  и  $N_c$  - количество ячеек грубой сетки.
2. Построение многомасштабных базисных функций, путем решения локальной задачи собственных значений в каждой локальной области;

Для *ОММКЭ с непрерывными базисами*:

$$a_{CG}(\phi^{\omega_i}, v) = \eta s(\phi^{\omega_i}, v), \quad \forall v \in V_h(\omega_i), \quad (15)$$

где  $s(\phi^{\omega_i}, v) = \int_{\omega_i} \rho \phi^{\omega_i} v ds$ .

Для *ОММКЭ с разрывными базисами*:

$$a_{DG}(\phi^{K_i,b}, v) = \eta^b s^b(\phi^{K_i,b}, v), \quad \forall v \in V_h(K_i), \quad (16)$$

где  $s^b(\phi^{K_i,b}, v) = \int_{\partial K_i} \rho \phi^{K_i,b} v ds$ .

$$a_{DG}(\phi_j^{K_i,o}, v) = \eta_j^o s^{in}(\phi_j^{K_i,o}), \quad (17)$$

где  $s^{in}(u, v) = \int_{K_i} \rho u v ds$ .

Для определения многомасштабных базисных функций мы выбираем первые  $M$  собственных векторов  $\phi_1^{\omega_i}, \phi_2^{\omega_i}, \dots, \phi_M^{\omega_i}$  соответствует первым  $M$  наименьшим собственным значениям  $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_M$ . Чтобы построить непрерывное многомасштабное пространство, мы умножаем собственные векторы на разбиение функций единицы  $\chi_i$  в локальной области  $\omega_i$ .

3. Построение матрицы проекции  $R$  (от мелкой сетки к грубой сетке) с использованием вычисленных многомасштабных базисных функций;

$$R_{CG,i} = [\psi_1^{\omega_i}, \psi_2^{\omega_i}, \dots, \psi_M^{\omega_i}]^T, \quad (18)$$

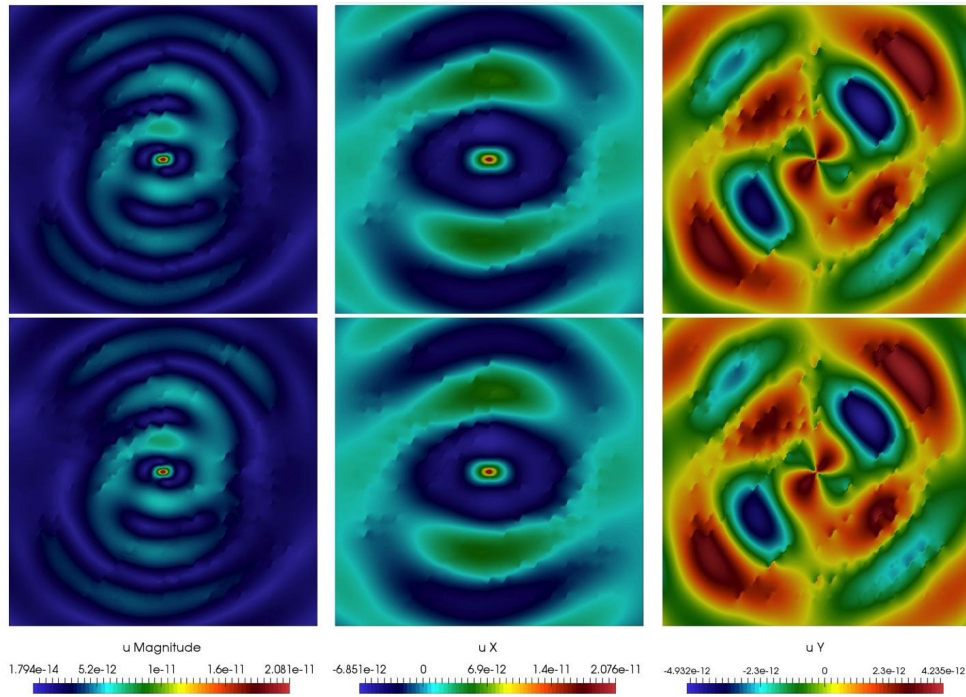


Рис. 1. Численное решение для Геометрии 2. Магнитудное значение, X и Y компоненты перемещения (слева на право). Среднее: многомасштабное решение с использованием непрерывных базисов. Нижнее: многомасштабное решение с использованием разрывных базисов.

где  $\psi_j^{\omega_i} = \chi_i \phi_j^{\omega_i}$  ( $j = 1, \dots, M$ ), а  $\chi_i$  - кусочно-билинейная функция формы на грубой сетке, равная 1 в грубой вершине  $x_i$ , и равна 0 во всех остальных грубых вершинах.

$$R_{DG,i}^b = \left[ \phi_1^{K_i,b}, \phi_2^{K_i,b}, \dots, \phi_{M_b}^{K_i,b} \right]^T; \quad R_{DG,i}^o = \left[ \phi_1^{K_i,o}, \phi_2^{K_i,o}, \dots, \phi_{M_o}^{K_i,o} \right]^T. \quad (19)$$

4. Построение системы мелких сеток и проекции на грубую сетку с помощью матрицы  $R$ ;

Матрица глобальной проекции определяется следующим образом

$$R_{CG} = (R_{CG,1}, R_{CG,2}, \dots, R_{CG,N_v}). \quad (20)$$

$$R_{DG} = (R_{DG,1}^b, R_{DG,1}^o, R_{DG,2}^b, R_{DG,2}^o, \dots, R_{DG,N_v}^b, R_{DG,N_v}^o). \quad (21)$$

5. Решение модели, приведенного порядка и реконструкция решения на мелкой сетке.

В пятом разделе рассматривается гармоническая задача рассеяния (11) в неоднородной области в  $\Omega$ . Для аппроксимации используется метод конечных элементов и имеем следующую вариационную формулировку (12). В многомасштабном методе есть следующие шаги:

1. Генерация мелкой сетки, соответствующей краям грубой сетки, и извлечение подсетки для локальной области  $\omega_p$ .
2. Решение локальных задач в каждой локальной области  $\omega_p$  с различными граничными условиями и уменьшение размерности путем решения локальной спектральной задачи на вспомогательном пространстве  $(\Psi_\kappa^{\omega_p})$ . Представлено построение двух типов многомасштабных базисных функций: 1) первый тип основан на эллиптической части оператора задачи ( $\mathcal{L}u = \nabla A(x)\nabla u$ ); 2) второй тип основан на полном операторе ( $\mathcal{L}u = \nabla A(x)\nabla u + k^2 n(x)u$ ). Спектральная задача, используемая для определения доминирующих мод, одинакова для обоих типов.
3. Генерация локальных многомасштабных базисных функций путем умножения доминирующих собственных значений  $\Psi_\kappa^{\omega_p}$  из предыдущего шага ( $p = 1, \dots, M_i$ ) на многомасштабное разбиение единичной функции  $\chi_p$  ( $\phi_\kappa^{\omega_p} = \chi_p \Psi_\kappa^{\omega_p}$ ).
4. Построение проекционной матрицы проекций  $R = (R_1, R_2, \dots, R_{N_v})^T$ ,  $R_i = (\phi_1^{\omega_p}, \phi_2^{\omega_p}, \dots, \phi_{M_i}^{\omega_p})^T$ .
5. Генерация матриц грубого масштаба и правой части,  $M_H = RM_h R^T$ ,  $K_H = RK_h R^T$ ,  $B_H = RB_h R^T$ ,  $F_H = RF_h$  с использованием проекционной матрицы, мелкомасштабных матриц и правой части.
6. Решение грубой системы,  $(K_H - iB_H - k^2 M_H)U_H = F_H$ .
7. Реконструкция мелкомасштабного решения,  $U_{ms} = R^T U_H$ .

Представлены численные результаты для задачи Гельмгольца в неоднородной области с неоднородными свойствами на препятствиях. Предлагаемый метод исследуется для различных волновых чисел и количества многомасштабных базисных функций.

Во **второй главе** представлены многомасштабные методы для задач в перфорированных средах. В *первом разделе* предлагается новый метод построения

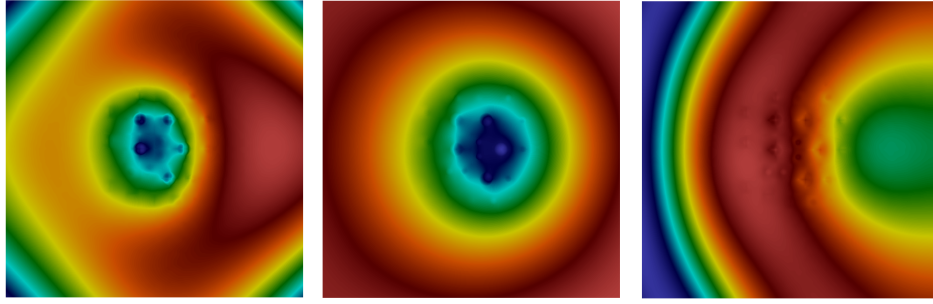


Рис. 2. Эталонные и многомасштабные решения для  $k = 1$ ,  $\text{Re}(u)$ ,  $\text{Im}(u)$  и  $\text{Abs}(u)$ (слева направо). Тип 2 многомасштабные базисные функции с  $M = 6$ . Многомасштабные решения на грубой сетке  $20 \times 20$ ,  $\text{DOF}_c = 2646$ .

многомасштабных базисных функций для задачи рассеяния в перфорированной области. Математическая модель описывается уравнением Гельмгольца для гармонической рассеянной волны с граничным условием поглощения. Аппроксимация на мелкой сетке строится методом конечных элементов на неструктурированной мелкой сетке. Для приближения на грубой сетке предложен вычислительный алгоритм, в котором подробно описывается и раскрывается каждый этап построения базисной функции. В отличие от классического метода ОММКЭ, в предлагаемом нами методе ОГММКЭ строим вспомогательные пространства для каждого грубого края локальной области, также строим дополнительные базисные функции. Сравниваются относительные погрешности между решением на мелкой сетке и представленным приближением на грубой сетке с различным количеством многомасштабных базисных функций для различных волновых чисел.

У нас есть следующий вычислительный алгоритм для аппроксимации на грубой сетке методом ОГММКЭ:

1. построение мелкой сетки и локальных областей  $\omega_i$ ;
2. решение локальных спектральных задач для каждой грани грубой ячейки в снэпшот пространстве для построения многомасштабных базисных функций в  $\omega_i$ ;
3. решение локальной задачи для построения дополнительной многомасштабной базисной функции в  $\omega_i$  и многомасштабного разбиения единичных функций;
4. построение и решение приближения грубой сетки на многомасштабном

пространстве.

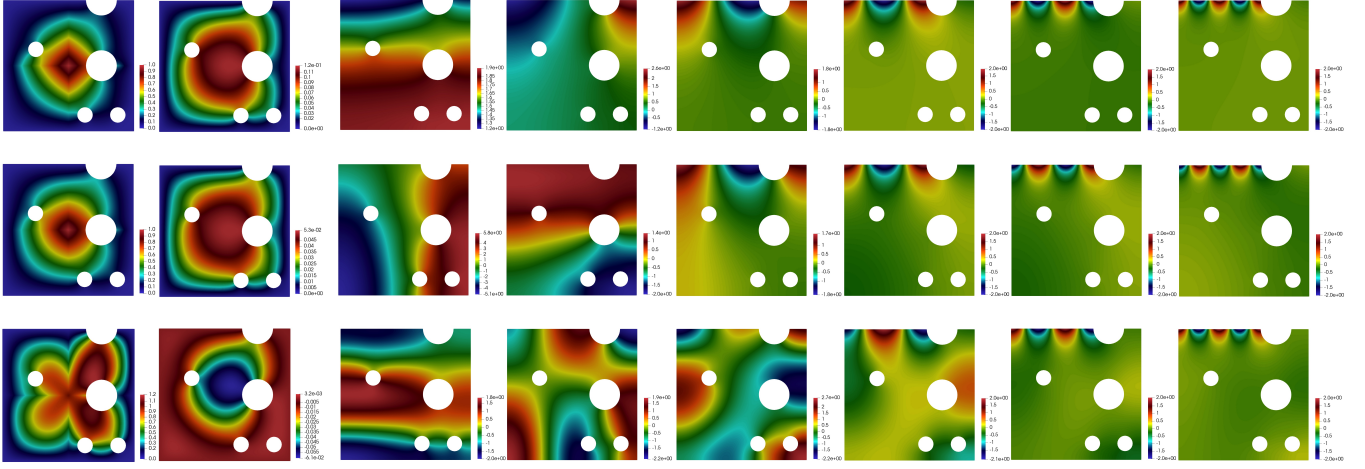


Рис. 3. Многомасштабная функция разбиение единицы  $\chi_i$ , дополнительный базис  $\eta_i$  и первые шесть собственных векторов, соответствующие наименьшим собственным значениям для грани  $\Gamma_{i,2}$  для  $k = 1, 4, 8$  (сверху вниз).

В каждой локальной области  $\omega_i$  решаем следующую задачу для снэпшот пространства, соответствующую  $\Gamma_{i,l} \in \partial\omega_i$

$$a(\phi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}, v) - k^2 m(\phi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}, v) = 0, \quad x \in \omega_i, \quad (22)$$

с граничными условиями Дирихле для соответствующей грубой грани  $\Gamma_{i,l}$

$$\phi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}} \cdot n = \delta_j, \quad x \in \Gamma_{i,l},$$

и нулевые граничные условия Неймана на других границах

$$\frac{\partial \phi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\omega_i / (\Gamma_{i,l}),$$

Для создания краевого многомасштабного пространства для  $\Gamma_{i,l} \in \partial\omega_i$ , решаем следующую локальную спектральную задачу в  $\omega_i$

$$a(\psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}, v) - k^2 m(\psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}, v) = \lambda_j s(\psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}, v), \quad v \in V_{\text{snap}}^{i,l}, \quad (23)$$

где  $\psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}} \in V_{\text{snap}}^{i,l} = \text{span}\{\phi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}\}$  и  $s(u, v) = \int_{\Gamma_{i,l}} u v ds$ .

Чтобы решить локальную спектральную задачу в снэпшот пространстве, мы используем концепцию проекции и определяем матрицу проекции на снэпшот пространство.

$$R_{\text{snap}}^{i,l} = (\phi_1^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}, \phi_2^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}, \dots, \phi_{N_v}^{\omega_i, \Gamma_{i,l}})^T,$$

где  $N_v^{\Gamma_{i,l}}$  - количество вершин мелкой сетки на грани  $\Gamma_{i,l}$ . Следовательно, в матричной форме имеем следующую спектральную задачу

$$(K_{\text{snap}}^{i,l} - k^2 M_{\text{snap}}^{i,l}) \psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}} = \lambda_j S_{\text{snap}}^{i,l} \psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}},$$

$$K_{\text{snap}}^{i,l} = R_{\text{snap}}^{i,l} K^{\omega_i} (R_{\text{snap}}^{i,l})^T, \quad M_{\text{snap}}^{i,l} = R_{\text{snap}}^{i,l} M^{\omega_i} (R_{\text{snap}}^{i,l})^T, \quad S_{\text{snap}}^{i,l} = R_{\text{snap}}^{i,l} S^{\omega_i} (R_{\text{snap}}^{i,l})^T,$$

где  $(S)_{rn} = s(\phi_r, \phi_n)$ .

Чтобы построить многомасштабное пространство  $V_H^{\omega_i}$ , мы выбираем первые собственные векторы  $M_i$ , соответствующие первым наименьшим собственным значениям  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{M_i}$  для каждой грани спектральной задачи, и определим пространство  $V_H^{\omega_i}$  с помощью

$$V_H^{\omega_i} = \text{span} \left\{ \chi_i \eta_i, \chi_i \Psi_1^{\omega_i, \Gamma_{i,1}}, \dots, \chi_i \Psi_{M_i}^{\omega_i, \Gamma_{i,1}}, \dots, \chi_i \Psi_1^{\omega_i, \Gamma_{i, N_e^i}}, \dots, \chi_i \Psi_{M_i}^{\omega_i, \Gamma_{i, N_e^i}} \right\}.$$

где  $N_e^i$  - количество граней локальной области  $\omega_i$ . Многомасштабное пространство определяется базисными функциями  $\chi_i \Psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}$ , где  $\Psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}} = (R_{\text{snap}}^{i,l})^T \psi_j^{\omega_i, \Gamma_{i,l}}$  и  $\chi_i$  - многомасштабное разбиение единичных функций (обычная узловая базисная функция для узла  $i$ ).

Используем концепцию проекции и определяем матрицу проекции из мелкомасштабного пространства в многомасштабное пространство

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_{N_v})^T, \quad R_i = (\chi_i \eta_i, \chi_i \Psi_1^{\omega_i, \Gamma_{i,1}}, \dots, \chi_i \Psi_{M_i}^{\omega_i, \Gamma_{i,1}}, \dots, \chi_i \Psi_1^{\omega_i, \Gamma_{i, N_e^i}}, \dots, \chi_i \Psi_{M_i}^{\omega_i, \Gamma_{i, N_e^i}})^T.$$

где  $R_i$  - матрица локальной проекции в локальной области  $\omega_i$ , а  $N_v$  - количество вершин грубой сетки.

Затем, используя глобальную матрицу проекций  $R$ , мы можем определить систему на грубой сетке

$$(K_H - k^2 M_H + i B_H) U_H = 0, \quad (24)$$

где  $U_H$  - комплексное значение,  $M_H$  и  $K_H$  - матрицы масс и жесткости на грубой сетке, а  $B_H$  - граничная матрица масс на грубой сетке

$$M_H = R M_h R^T, \quad K_H = R K_h R^T, \quad B_H = R B_h R^T.$$

После расчета решения на грубой сетке мы восстанавливаем мелкомасштабное решение  $U_{ms} = R^T U_H$ .

Во *втором разделе* представлено и вычислительно реализован многомасштабная аппроксимация уравнения конвекции-диффузии в перфорированных



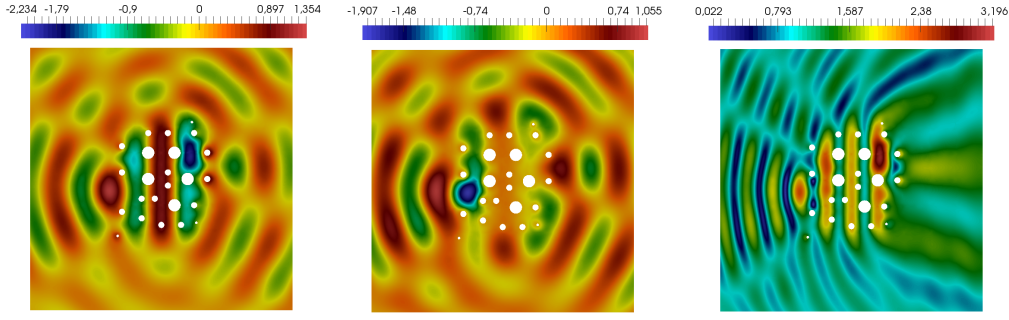


Рис. 4. Решение на мелкой сетке (сверху) и на грубой сетке (снизу) с  $k = 8$  для действительной части, мнимой части и абсолютного значения (слева направо) для области с перфорацией.

средах с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина. Рассмотрено нестационарное уравнение для концентрации, учитывающее диффузионное и конвективное течение в перфорированной области с реактивными граничными условиями на перфорациях. Приближение на мелкой сетке строится с использованием разрывного метода Галеркина с внутренним штрафом (РМГВШ). Для приближения на грубой сетке предлагаются три типа построения многомасштабных базисных функций, основанных на разделении границ. Численные результаты получены путем исследования нескольких тестовых задач с различными параметрами.

В перфорированной области рассматривается нестационарное уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c - \nabla \cdot (D \nabla c) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (25)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии, который постоянен, но обычно может быть неоднородным  $D(x)$ ,  $c$  – концентрация,  $u$  – поле скорости. Дополним уравнение (25) следующим начальным условием

$$c = c_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0.$$

Пусть  $\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_w = \partial\Omega$  и  $n$  – внешняя нормаль на  $\partial\Omega$ . На границах входа и выхода потока ( $\Gamma_{in}$  и  $\Gamma_{out}$ ) задаются следующие граничные условия

$$c = c_{in}, \quad x \in \Gamma_{in}, \quad -D \nabla c \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_{out}. \quad (26)$$

На перфорациях, верхней и нижней границах ( $\Gamma_w$ ) применяем реактивные граничные условия

$$-D \nabla c \cdot n = \alpha(c - c_w), \quad x \in \Gamma_w, \quad (27)$$

где  $\alpha$  – параметр реакции,  $c_w$  и  $c_{in}$  – заданные концентрации. Обратите внимание, что мы предполагаем, что для поля скорости мы имеем  $u \cdot n = 0$  на  $\Gamma_w$  и  $u = u_1$  на  $\Gamma_{in}$ .

Поле скорости рассчитывается с помощью закона Дарси и уравнения неразрывности

$$\begin{aligned} k^{-1}u + \nabla p &= 0, & x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0, & x \in \Omega \end{aligned} \quad (28)$$

с граничными условиями

$$u = u_1, \quad x \in \Gamma_{in}, \quad p = 0, \quad x \in \Gamma_{out}, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma_w, \quad (29)$$

где  $u$  – скорость,  $p$  – давление.

У нас есть следующие вариационные формулировки метода РМГВШ: найти  $c_h \in P_h$  такое, что

$$\frac{1}{\tau} m(c_h - \check{c}_h, r) + a_{DG}(c_h, r) + c_{DG}(c_h, r) = l(r), \quad \forall r \in P_h, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} a_{DG}(c, r) &= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K D \nabla c \cdot \nabla r \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_{b,w}^h} \int_E \alpha c r \, ds \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_o^h \cup \mathcal{E}_{b,in}^h} \int_E \left( \{D \nabla c \cdot n\}[r] + \{D \nabla r \cdot n\}[c] - \frac{\gamma}{h} \{D\}[c][r] \right) ds, \end{aligned}$$

$$c_{DG}(c, r) = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K (u c) \cdot \nabla r \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_o^h \cup \mathcal{E}_{b,out}^h} \int_E (\tilde{u}_+ c_+ - \tilde{u}_- c_-) [r] \, ds,$$

$$m(c, r) = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K c r \, dx, \quad l(r) = \sum_{E \in \mathcal{E}_{b,in}^h} \int_E \left( \frac{\gamma}{h} D r - \{D \nabla r \cdot n\} \right) c_{in} \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_w^h} \int_E \alpha c_w r \, ds,$$

и  $\gamma$  – штрафной параметр и  $\tilde{u} = (u \cdot n + |u \cdot n|)/2$ .

В матричной форме схема (30) имеет следующий вид

$$\frac{1}{\tau} M_h(c_h - \check{c}_h) + (A_h + C_h)c_h = F_h, \quad (31)$$

где

$$M_h = m(\phi_i, \phi_j); \quad A_h = a_{DG}(\phi_i, \phi_j); \quad C_h = c_{DG}(\phi_i, \phi_j); \quad F_h = l(\phi_j),$$

$c_h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i \phi_i$ , где размер системы является  $N_h = 3 \cdot N_{cell}^h$  для линейных базисных функций и треугольных ячеек мелкой сетки.

Ниже приведено пространство на мелкой сетке для потока

$$V = \{v \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}, \quad Q = q \in L^2(\Omega).$$

Слабая формулировка закона Дарси: найти  $(u, p) \in V \times Q$  такое, что

$$\begin{aligned} d(u, v) + n(p, v) &= 0, \quad \forall v \in V \\ n(u, q) &= 0, \quad \forall q \in Q \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$d(u, v) = - \int_{\Omega} k^{-1} u \cdot v dx, \quad n(u, p) = \int_{\Omega} p \nabla \cdot u dx = 0.$$

Мы можем записать аппроксимацию закона Дарси в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D & N^T \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где мы используем пространство Равьяра-Томаса для скорости и кусочно-постоянный элемент для давления в мелкомасштабной системе.

Для построения многомасштабных базисных функций рассматривается несколько типов вспомогательных пространств. Генерируется вспомогательное пространство в локальной области  $K_i$ , учитывая различные граничные условия на границе стенки  $\Gamma_w^i$  и на внешней границе локальной области  $\partial K_i \setminus \Gamma_w^i$ . Мы определяем несколько типов многомасштабных пространств на основе следующего представления внешней границы локальной области

$$\partial K_i \setminus \Gamma_w^i = \Gamma_T^i \cup \Gamma_B^i \cup \Gamma_L^i \cup \Gamma_R^i.$$

Этот подход аналогичен методу, описанный во втором разделе второй главы. Были исследованы несколько типов построения многомасштабных базисных функций для различных внешних граничных потоков. Эти многомасштабные базисные функции могут эффективно фиксировать более мелкую информацию о задаче конвекции-диффузии и позволяют использовать меньше степеней свободы, чем соответствующее моделирование с использованием аппроксимации конечных элементов на мелкой сетке. Представлены несколько примеров для проверки эффективности представленного метода. Сравнивая решение на мелкой сетке и решение на грубой сетке, видим, что ОГММКЭ может точно аппроксимировать решение на мелкой сетке с меньшим количеством степеней свободы.

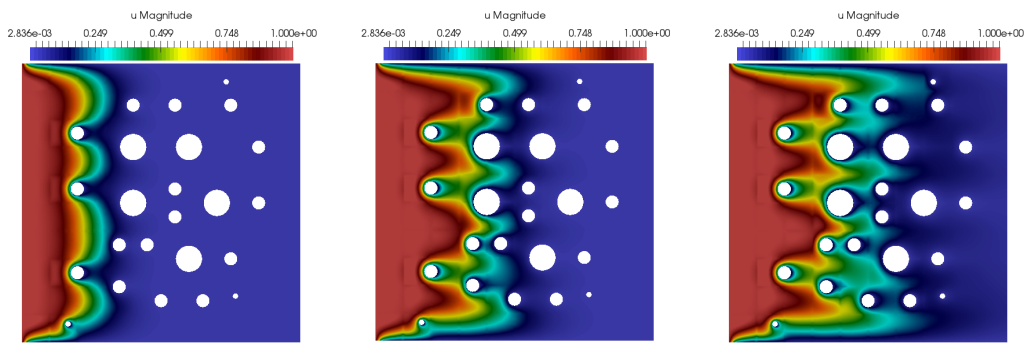


Рис. 5. Концентрация во временном шаге  $t_m$ ,  $m = 20, 40, 80$ . Многомасштабное решение для многомасштабного пространства Типа 1 с  $M = 30$  и  $DOF_H = 3540$ ,  $e(c_{20}) = 5.2\%$ ,  $e(c_{40}) = 3.0\%$  и  $e(c_{80}) = 2.4\%$  для 1 геометрии с 1 случаем потока.

В **третьей главе** описывается комплекс программ для построения многомасштабных пространств для задач распространения волн в неоднородных средах. Программы являются вычислительными библиотеками, написанными на языке Си и C++. Глава разделена на два основных раздела. *Первый раздел* посвящен вычислительной библиотеке для моделирования волновых процессов с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина. Во *втором разделе* реализована вычислительная библиотека для моделирования уравнения Гельмгольца в средах с неоднородными включениями с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов.

**Основные результаты работы.** Диссертационная работа посвящена разработке алгоритмов и исследованию многомасштабных методов для решения задачи распространения и рассеяния волн, а также задачи конвекции-диффузии в неоднородных средах.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Предложен алгоритм решения задачи Гельмгольца, описывающий распространение волн в неоднородных средах с использованием метода численного усреднения. Эффективные коэффициенты тензора упругости вычисляются с помощью локальных решений на грубой сетке. Результаты счета показывают, что предлагаемый метод на грубой сетке может обеспечить точные приближения решений на мелкой сетке, следовательно, могут эффективно использоваться для решения поставленной задачи.
2. Исследован многомасштабный метод и обобщенный многомасштабный метод конечных элементов решения задачи рассеяния волн в неоднородной

области. Математическая модель описывается уравнением Гельмгольца для гармонической волны с поглощающимися граничными условиями. Представлены два подхода построения локальных базисных функций на основе локальных задач с использованием оператора эллиптической части и оператора Гельмгольца. Для демонстрации эффективности данного метода был разработан программно-вычислительный комплекс.

3. Выполнены исследования по построению и сравнению двух многомасштабных методов: непрерывный обобщенный многомасштабный метод Галеркина и разрывный обобщенный многомасштабный метод Галеркина для распространения упругих волн. Представлены результаты численного решения уравнения Гельмгольца предложенными методами для различного числа базисных функций. Разработан и реализован программно-вычислительный комплекс для моделирования многомасштабных разрывного метода Галеркина.
4. Разработан и численно реализован алгоритм обобщенного граничного многомасштабного метода конечных элементов для задачи рассеяния и задачи конвекции-диффузии в перфорированных средах. Построены и исследованы разные типы базисных функций для учета неоднородных граничных условий на границах перфорации. Численные результаты показывают, что представленный метод дает хорошее приближение решения и уменьшает размер системы. Представленные численные результаты показали эффективность данного метода.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Васильева М. В., Гаврильева У. С. Численное моделирование упругих волн разрывным методом Галеркина в неоднородных средах // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. – 2017. – №. 5 (61).
2. Гаврильева У. С., Алексеев В. Н., Васильева М. В. Течение и перенос в перфорированных и трещиноватых областях с неоднородными граничными условиями Робина // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24. – №. 3.
3. Gavrilieva U., Alekseev, V., Vasilyeva, M., De Basabe, J. D., Efendiev, Y., Gibson, R. L. Generalized Multiscale Discontinuous Galerkin Method for Helmholtz Problem in Fractured Media // International Conference on Finite Difference Methods. – Springer, Cham, 2018. – С. 250-257. (Scopus).
4. Gavrilieva U., Alekseev V., Vasilyeva M. Numerical homogenization for wave propagation in fractured media // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2018. – Т. 2025. – №. 1. – С. 100002. (Web of Sciences & Scopus).
5. Alekseev V., Gavrilieva, U., Spiridonov, D., Tyrylgin, A., Vasilyeva, M. Numerical simulation of the transport and flow problems in perforated domains using generalized multiscale finite element method // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2018. – Т. 2025. – №. 1. – С. 100001. (Web of Sciences & Scopus).
6. Gavrilieva U., Vasilyeva, M., Harris, I., Chung, E. T., Efendiev, Y. Multiscale Finite Element Method for scattering problem in heterogeneous domain // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1392. – №. 1. – С. 012067. (Scopus).
7. Gavrilieva U., Vasilyeva M., Chung E. T. Generalized Multiscale Finite Element Method for Elastic Wave Propagation in the Frequency Domain // Computation. – 2020. – Т. 8. – №. 3. – С. 63. (Web of Sciences & Scopus).
8. Alekseev, V., Vasilyeva, M., Kalachikova, U., Chung, E. T. DG-GMsFEM for Problems in Perforated Domains with Non-Homogeneous Boundary Conditions // Computation. – 2021. – Т. 9. – №. 7. – С. 75.

(Web of Sciences & Scopus).

9. Chung, E. T., Kalachikova, U., Vasilyeva, M., Alekseev, V. Generalized multiscale discontinuous Galerkin method for convection–diffusion equation in perforated media // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2022. – Т. 193. – С. 666-688. (Web of Sciences & Scopus).
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ "Вычислительная библиотека для численного моделирования задач в трещиноватых областях с использованием обобщенного многомасштабного разрывного метода Галеркина"(Гаврильева У.С.). №2018663107 от 22.10.2018 г.
11. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ "Вычислительная библиотека для моделирования уравнения Гельмгольца в средах с неоднородными включениями с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов"(Гаврильева У.С.). №2019667152 от 19.12.2019 г.

