

На правах рукописи



Иванов Дьулус Харлампович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2023

Работа выполнена на кафедре *Вычислительные технологии* Института математики и информатики и в ЯО РНОМЦ *Дальневосточный центр математических исследований* ФГАОУ ВО *Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова*.

Научный руководитель: **Вабищевич Петр Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры вычислительных технологий
Института математики и информатики СВФУ

Официальные оппоненты: **Ягола Анатолий Григорьевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математики Физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

Аммосова Ольга Александровна,
кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории климатических испытаний Института проблем нефти и газа СО РАН, обособленного подразделения ЯНЦ СО РАН, г. Якутск

Ведущая организация: ФГБУН Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится «19» апреля 2023 года в «15:00» часов на заседании диссертационного совета 24.2.396.02 на базе СВФУ по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, д. 42, Библиотека ГУК, зал *Синергия*.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке СВФУ по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58, — и на официальном сайте университета www.s-vfu.ru.

Автореферат разослан «_____» _____ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
канд. физ.-мат. наук



Степанов Сергей Павлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена разработке численных методов решения прямых и обратных задач гравиметрии.

Методы гравиметрии используются для качественной интерпретации гравитационных аномалий на дневной поверхности Земли для определения неоднородностей в структуре земной коры, в частности, при поиске полезных ископаемых. Прямая задача гравиметрии заключается в определении гравитационного потенциала и его производных от материального тела с заданными физическими и геометрическими свойствами. В обратной задаче необходимо восстановить неизвестные параметры тела по наблюдениям элементов гравитационного поля.

Традиционные численные методы решения прямых задач гравиметрии отталкиваются от интегральных представлений элементов гравитационного поля. Аналитические формулы гравитационного потенциала и его производных получены для тел правильной геометрии и ограниченного класса функций распределения плотности. По мере усложнения модели аналитические формулы становятся громоздкими и непригодными для практического применения. Для приближенного вычисления интегральных представлений используются полуаналитические подходы, квадратурные формулы, разложение в ряды по различным системам ортогональных функций, преобразование Фурье.

Современные методы приближенного вычисления гравитационного потенциала базируются на основе решения краевой задачи для уравнения Пуассона. Особенностью данного подхода является переход от задачи в бесконечной области к задаче в ограниченной области. Основные проблемы связаны с выбором размера расчетной области и граничного условия, аппроксимирующего поведение гравитационного потенциала на удалении. В большинстве существующих методов краевая задача ставится для уравнением Пуассона по отысканию гравитационного потенциала, а вычисление элементов гравитационного поля базируются на процедурах численного дифференцирования. Во избежание дополнительных вычислительных затрат краевая задача может быть поставлена непосредственно для производной потенциала.

Альтернативные способы решения прямой задачи гравиметрии получаются из представления объемных потенциалов в виде суммы потенциалов

простого и двойного слоя. Введением вспомогательной функции, удовлетворяющей решению дополнительной краевой задачи для уравнения Пуассона в ограниченной области, гравитационный потенциал и его производные могут быть представлены в виде поверхностного интеграла по границе расчетной области. В зависимости от типа граничного условия в постановке вспомогательной краевой задачи переходим к потенциалу простого слоя или сумме потенциалов простого и двойного слоя.

Обратная задача гравиметрии относится к классу некорректно поставленных задач. Прежде всего, нарушается условие единственности решения, обусловленное тем, что существуют тела различной геометрии и плотности, создающие одинаковые внешние поля. Не менее важной проблемой, которую требуется учитывать при построении численных методов решения обратных задач, является неустойчивость решения к малым возмущениям в данных наблюдения.

Из интегральных представлений элементов гравитационного поля обратная задача гравиметрии сводится к решению линейных или нелинейных интегральных уравнений Фредгольма. В случае, когда прямая задача гравиметрии решается с привлечением краевой задачи, необходимо восстановить правую часть уравнения Пуассона — коэффициентная обратная задача для эллиптического уравнения. Для приближенного решения некорректно поставленных задач необходимо сузить класс допустимых решений по имеющейся априорной информации и наложением ограничений на модель. Универсальным методом решения некорректных задач является метод регуляризации Тихонова, в котором искомое решение приближается решением регуляризованной, корректно поставленной задачи.

Большое внимание уделяется классу обратных задач гравиметрии по восстановлению области залегания рудного или контактного тела при известной функции распределения плотности. основополагающие результаты по исследованию единственности решения получены для однородных рудных тел, заключенных в звездной или выпуклой относительно фиксированного направления областях. Для численного решения таких обратных задач существующие подходы основаны на явном описании границы аномалии и ее движении при решении сложных систем уравнений. Построение более удобных вычислительных алгоритмов остается важной прикладной проблемой.

Целью диссертационной работы является разработка вычислительных алгоритмов для численного решения прямых и обратных задач гравиметрии. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Провести анализ существующих численных методов решения прямой задачи гравиметрии на основе вычисления объемных интегралов, исследовать вычислительный алгоритм нахождения элементов гравитационного поля с помощью квадратурных формул, рассмотреть численные методы решения прямой задачи гравиметрии на основе решения краевой задачи, разработать и исследовать алгоритм вычисления элементов гравитационного поля на основе решения краевой задачи методом конечных элементов.
2. Разработать, реализовать и исследовать вычислительный алгоритм определения элементов гравитационного поля на основе решения вспомогательной краевой задачи при постановке общего граничного условия третьего рода, свести задачу вычисления значений объемного потенциала к задаче вычисления потенциалов простого и двойного слоев.
3. Разработать и исследовать вычислительный алгоритм идентификации кусочно-постоянной правой части эллиптического уравнения по информации о решении на границе расчетной области при описании границы неоднородности правой части изоповерхностью решения вспомогательной краевой задачи, реализовать итерационный алгоритм минимизации функционала невязки при изменении правой части вспомогательной задачи.
4. Разработать вычислительный алгоритм идентификации границы рудного тела с заданной плотностью по измерениям гравитационных аномалий на земной поверхности, исследовать его возможности при приближенном решении тестовых двух- и трехмерных задач с точными и зашумленными данными наблюдений.

Научная и практическая значимость полученных результатов заключается в следующем:

1. Предложен численный метод расчета элементов гравитационного поля на основе приближенного решения вспомогательной эллипти-

ческой краевой задачи с граничными условиями третьего рода в области, содержащей аномалию, и вычислений значений потенциалов простого и двойного слоя.

2. Разработан вычислительный алгоритм для восстановления кусочно-постоянной правой части эллиптического уравнения по граничному условию переопределения при идентификации неоднородности правой части по изоповерхности решения вспомогательной краевой задачи. Такой алгоритм применяется для приближенного решения обратной задачи гравиметрии по нахождению области залегания однородного рудного тела заданной плотности по наблюдениям гравитационного поля.
3. Разработанные вычислительные алгоритмы имеют прямое практическое применение в задачах гравиразведки для интерпретации гравитационных аномалий. Эти алгоритмы могут быть реализованы в виде специализированного прикладного программного обеспечения для современных вычислительных систем параллельной архитектуры. Полученные результаты и предложенные идеи могут быть применены в других отраслях разведочной геофизики, прежде всего, при электро- и магниторазведке, а также при решении других прикладных прямых и обратных задач, которые описываются эллиптическими уравнениями второго порядка.

Методология и методы исследования. Разработка вычислительных алгоритмов базируется на применении современных вычислительных технологий. Прикладное исследовательское программное обеспечение создано на вычислительной платформе инженерных и научных вычислений FEniCS, предназначенной для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных элементов, с использованием языка программирования Python. Дополнительная библиотека *dolfin-adjoint* применяется для автоматического вычисления градиента параметризованного функционала невязки, который минимизируется с применением алгоритма оптимизации библиотеки SciPy. Для создания геометрии и генерации неструктурированной сетки используется программа Gmsh, для построения более простых расчетных сеток применяется встроенный редактор вычислительной платформы FEniCS.

Основные положения, выносимые на защиту, соответствуют основным результатам диссертационной работы, приведенным в заключении.

Степень достоверности полученных результатов является высокой и обеспечивается корректным применением методов математического моделирования, глубокой проработкой ключевых элементов вычислительных алгоритмов конечно-элементного анализа, созданием исследовательского программного обеспечения на базе проверенных библиотек инженерных и научных вычислений, соответствием расчетных данных результатам, полученными другими авторами, сопоставлением с аналитическими решениями.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция *Многомасштабные методы и высокопроизводительные вычисления для мультифизных задач*, г. Якутск, Россия, 8.08.2018 – 10.08.2018;
- IV Международная конференция *Суперкомпьютерные технологии математического моделирования*, г. Москва, Россия, 19.05.2019 – 21.05.2019;
- Международная конференция *Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач*, г. Якутск, Россия, 24.06.2019 – 25.06.2019;
- Одиннадцатая международная молодёжная научная школа-конференция *Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач*, г. Новосибирск, Россия, 26.08.2019 – 4.09.2019;
- IV Международная конференция *Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления*, г. Сочи, Россия, 8.09.2020 – 13.09.2020;
- Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием *Актуальные вопросы теплофизики, энергетики и гидрогазодинамики в условиях Арктики*, г. Якутск, Россия, 12.07.2021 – 17.07.2021;
- Международная конференция *Математическое моделирование, обратные задачи и большие данные*, г. Якутск, Россия, 18.07.21 – 25.07.2021;

- Международной конференции *Марчуковские научные чтения 2021*, г. Новосибирск, Россия, 4.10.2021 – 8.10.2021;
- V Международная конференция *Суперкомпьютерные технологии математического моделирования*, г. Москва, Россия, 27.06.2022 – 30.07.2022;

Помимо этого результаты обсуждались на научных семинарах кафедры *Вычислительных технологий* ИМИ СВФУ и ЯО РНОМЦ *Дальневосточный центр математических исследований*.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 научных работах [1–5] в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК и международную систему цитирования Scopus. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для электронных вычислительных машин [6].

Личный вклад. В работах, выполненных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [1–4] автор принимал участие в постановке задачи и внес основной вклад в построение и реализацию вычислительного алгоритма для расчета гравитационного поля, выполнил расчеты; в работе [5] диссертант принимал участие в разработке вычислительного алгоритма и выполнил расчеты. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта в работах [1–4] был определяющим.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения. Полный объем диссертации составляет 141 страниц текста с 100 рисунками и 14 таблицами. Список литературы содержит 155 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантами РФФИ 19-31-50044, 20-01-00207 и Минобрнауки РФ, соглашение от 02.02.2022 № 075-02-2022-881.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приводится краткий обзор научной литературы, сформулирована цель, поставлены задачи, отмечены научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена численным методам решения прямой задачи гравиметрии. Проанализированы и систематизированы существующие подходы для вычисления элементов гравитационного поля тяготеющих тел.

Гравитационный (ньютоновский) потенциал рудного тела с плотностью $\rho(Q)$ в точке наблюдения $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ задается в виде

$$U(P) = \gamma \int_D \rho(Q) \frac{1}{r} dv, \quad (1)$$

где γ — универсальная гравитационная постоянная, D — область тела, $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$. Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\Delta U = 4\pi\gamma \rho(P), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

и условию на удалении

$$\lim_{r(Q,P) \rightarrow \infty} U(P) = 0, \quad Q \in D.$$

Гравитационное поле (сила тяжести), создаваемое телом, определяется через градиент гравитационного потенциала:

$$\mathbf{g}(P) = \nabla U(P) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

Вычисление производных более высокого порядка потенциала происходит соответствующим образом.

В работе проведены вычисления вертикальной силы тяжести на основе расчета объемного интеграла и на основе численного решения краевой задачи для уравнения Пуассона.

В первом методе интегральное представление целевой функции имеет вид

$$g_z(P) = \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma \int_D \rho(Q) \frac{z' - z}{r^3} dv. \quad (3)$$

В области рудного тела D строится сетка (регулярная или неструктурированная) с тетраэдральными элементами. Интеграл (3) вычисляется суммированием интегралов по отдельно взятым элементам сетки с применением квад-

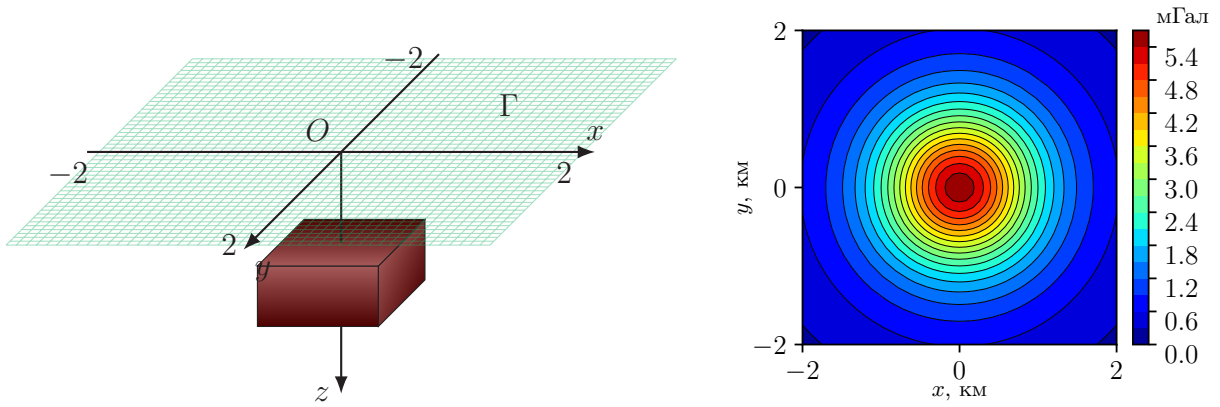


Рис. 1 — Слева: модельная задача; справа: точное решение.

ратурной формулы порядка d . В качестве модельных задач рассмотрены рудные тела достаточно простой геометрии с однородной или переменной плотностью. Например, рассчитывалась вертикальная составляющая гравитационного поля на дневной поверхности Γ для однородной призмы с $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$ размера 1.0, 1.0 и 0.5 км, погруженной на глубину 0.75 км с точным решением g_z^E , см. рисунок 1, $1 \text{ мГал} = 10^{-5} \text{ м/с}^2$. На рисунке 2 показаны погрешности аппроксимации при использовании различного порядка квадратурной формулы. Расчеты выполнены при использовании равномерной сетки $13 \times 13 \times 6$ и квазиоднородной неструктурированной сетки с характерным шагом $h = 1/12 \text{ км}$ и количеством ячеек 3863.

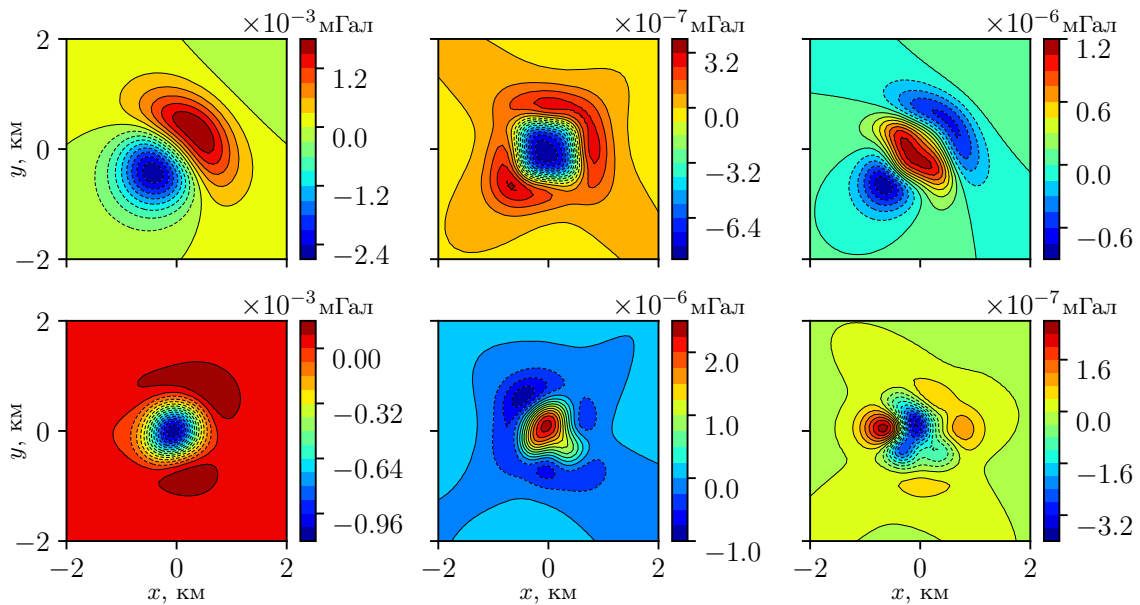


Рис. 2 — Ошибка аппроксимации $\delta = g_z - g_z^E$. Верхний ряд: регулярная сетка; нижний ряд: неструктурированная сетка. Левый столбец: $d = 1$; средний столбец: $d = 2$; правый столбец: $d = 3$.

Во втором методе краевая задача ставится непосредственно для вертикальной составляющей гравитационного поля. Уравнение для этой компоненты получается дифференцированием уравнения для потенциала (2) по направлению z :

$$-\Delta g_z = 4\pi\gamma \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^3. \quad (4)$$

При решении задачи в неограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрены различные граничные условия, аппроксимирующие поведение гравитационного поля на удалении, $P \in \partial\Omega$:

1. $g_z(P) = g_z^E(P)$, где $g_z^E(P)$ — точное аналитическое решение;
2. $g_z(P) = 0$;
3. $g_z(P) = g_z^{mp}(P)$, где $g_z^{mp}(P)$ — вертикальная сила тяжести от материальной точки с эквивалентными массой и барицентром;
4. $\nabla g_z \cdot \mathbf{n} + \alpha g_z = 0$, где параметр $\alpha = \mathcal{O}(r^{-1})$;
5. $\nabla g_z \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\alpha}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} g_z = 0$.

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$. В граничном условии 5 вектор-функция $\boldsymbol{\alpha}(x, y, z)$ определена следующим образом

$$\boldsymbol{\alpha}(x, y, z) = \left(\frac{3(x - x_0)}{r^2}, \frac{3(y - y_0)}{r^2}, \frac{3(z - z_0)}{r^2} - \frac{1}{z - z_0} \right),$$

где (x_0, y_0, z_0) — центр масс тела.

Для численного решения краевой задачи (4) методом конечных элементов ставится вариационная формулировка: найти $g_z \in V^h$, такую что

$$(\nabla g_z, \nabla v) = -4\pi\gamma \left(\rho, \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \forall v \in V^h,$$

где $V^h \subset L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство лагранжевых конечных элементов со стандартными скалярным произведением и нормой. Дополнительно вводится обозначение

$$(u, v)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} uv \, ds.$$

Учет первых трех граничных условий в точках на границе расчетной области (для $P \in \partial\Omega$) дает

$$(g_z, v)_{\partial\Omega} = (g_z^E, v)_{\partial\Omega}, \quad (g_z, v)_{\partial\Omega} = 0, \quad (g_z, v)_{\partial\Omega} = (g_z^{mp}, v)_{\partial\Omega}, \quad \forall v \in V^h,$$

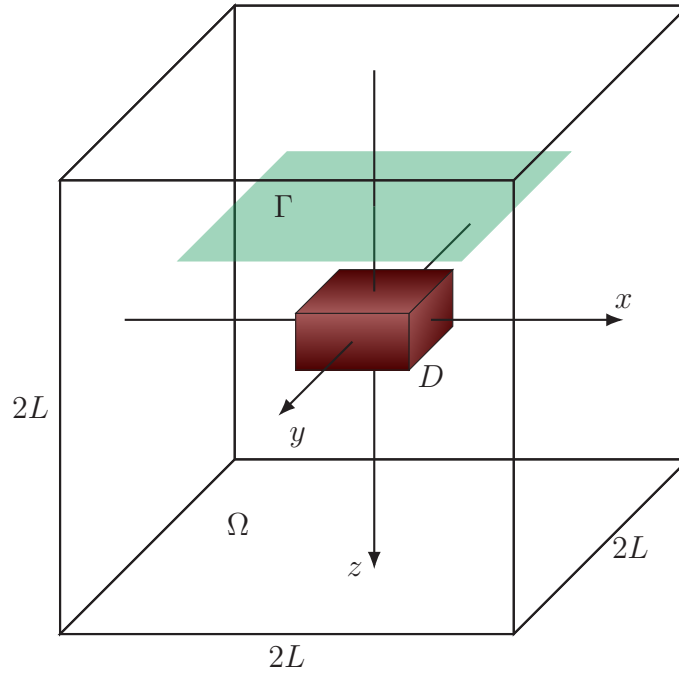


Рис. 3 — Расчетная область Ω , рудное тело D и поверхность наблюдения Γ .

соответственно.

Учет граничных условий третьего рода обеспечивается модификацией вариационной формулировки: для граничного условия 4

$$(\nabla g_z, \nabla v) + \alpha(g_z, v)_{\partial\Omega} = -4\pi\gamma \left(\rho, \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \forall v \in V^h,$$

а для граничного условия 5

$$(\nabla g_z, \nabla v) + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n} g_z, v)_{\partial\Omega} = -4\pi\gamma \left(\rho, \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \forall v \in V^h.$$

В расчетной области, см. рисунок 3, строится равномерная регулярная сетка. Отдельно рассмотрен случай неравномерной регулярной сетки, где в части расчетной области размеры элементов увеличиваются в геометрической прогрессии по мере удаления от рудного тела.

Проведены исследования влияния параметров материальной точки в граничном условии 3 и постоянного параметра в граничном условии 4. На рисунке 4 и 5 показаны относительные ошибки аппроксимации для $L_2(\Gamma)$ и $L_\infty(\Gamma)$ в зависимости от размера расчетной области для различных граничных условий при решении краевой задачи с использованием конечных элементов первого и второго порядка, соответственно.

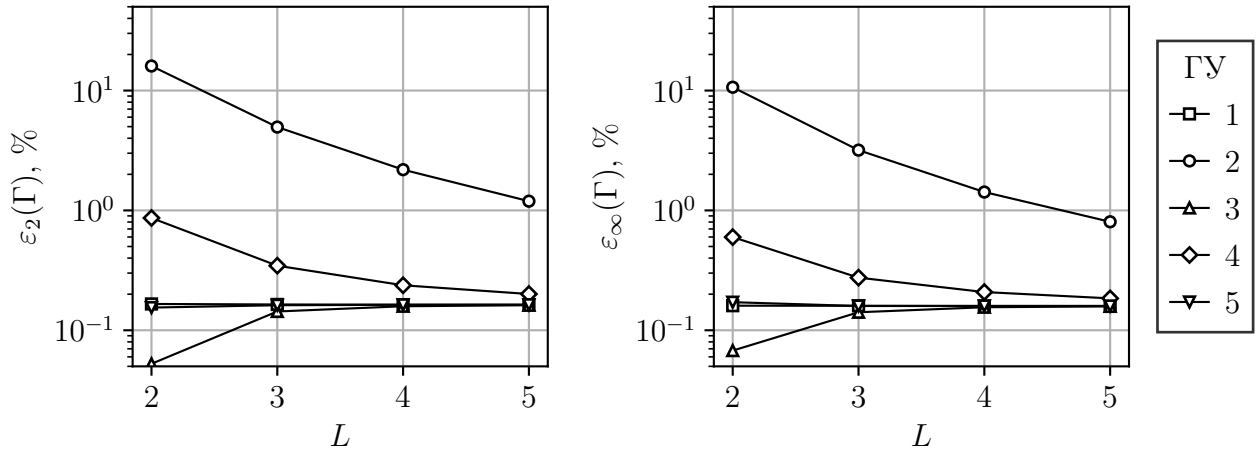


Рис. 4 — Ошибки аппроксимации g_z в зависимости от размера расчетной области при использовании конечных элементов первого порядка.

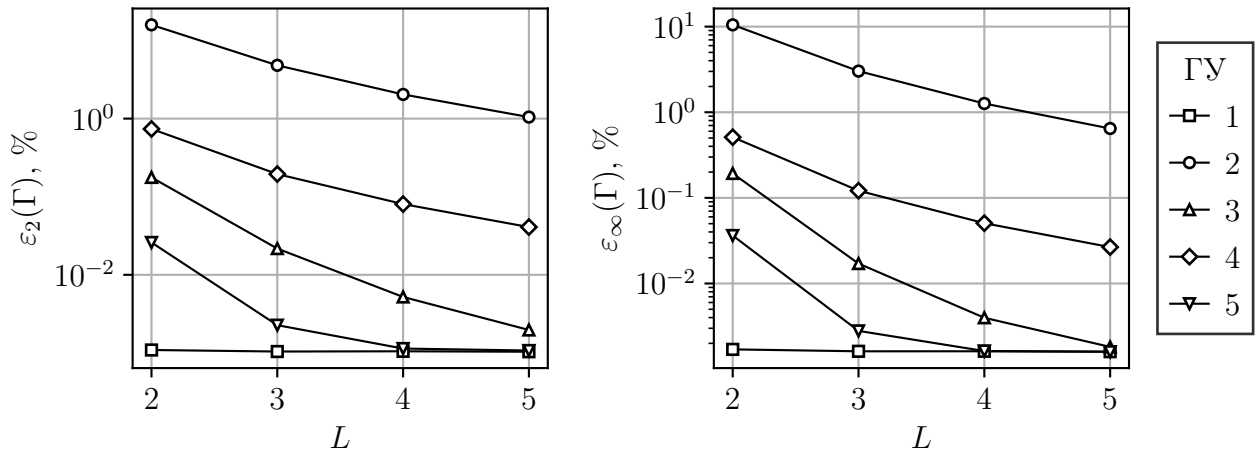


Рис. 5 — Ошибки аппроксимации g_z в зависимости от размера расчетной области при использовании конечных элементов второго порядка.

Во **второй главе** предложен новый подход для вычисления гравитационного поля от заданного материального тела на основе привлечения вспомогательной функции. Объемный потенциал представляется в виде суммы потенциала простого и двойного слоя.

Вспомогательная функция W определяется как решение краевой задачи в ограниченной области Ω , $D \subseteq \Omega$, с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, см. рисунок 6:

$$\begin{aligned} -\Delta W &= 4\pi\gamma\rho(P), & P \in \Omega, \\ \frac{\partial W}{\partial n} + \alpha W &= 0, & P \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5}$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, $\alpha > 0$ — постоянная величина размерности м^{-1} . Для функции $W(P)$ и функции $G(P, Q) =$

$1/r(P,Q)$ применение третьей формулы Грина дает

$$\chi W(P) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial n}(Q) G(P,Q) - W(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P,Q) \right) ds - \int_{\Omega} \Delta W(Q) G(P,Q) dv,$$

где число χ зависит от местоположения точки P : для гладкой границы $\partial\Omega$ оно равно 4π , если $P \in \Omega$, 2π , если $P \in \partial\Omega$, и 0 , если $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

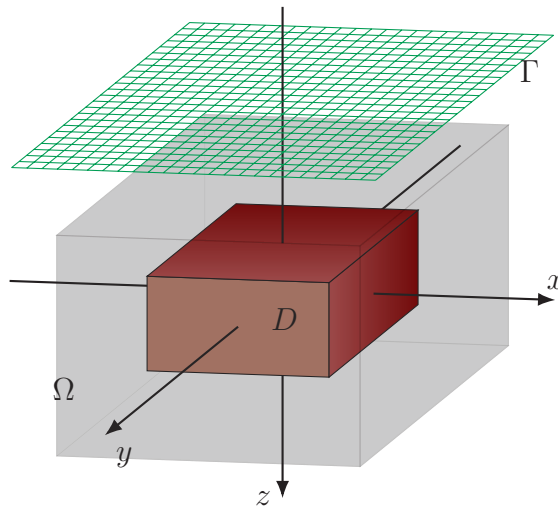


Рис. 6 — Расчетная область.

Ограничиваясь случаем $\Gamma \cap \Omega = \emptyset$, с учетом интегрального представления гравитационного потенциала (1) и граничного условия в краевой задаче (5) получим

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\alpha W(Q) G(P, Q) + W(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) \right) ds. \quad (6)$$

Вычисление компонент силы тяжести происходит формальным дифференцированием (6) по соответствующим направлениям. Например, для вертикальной составляющей гравитационного поля имеем

$$g_z(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\alpha W(Q) G_z(P, Q) + W(Q) \frac{\partial}{\partial n} G_z(P, Q) \right) ds, \quad (7)$$

где

$$G_z(P, Q) = \frac{\partial G}{\partial z}(P, Q) = -\frac{z - z'}{r^3(P, Q)}.$$

При расчете вертикальной силы тяжести g_z вспомогательную функцию можно определить как решение краевой задачи для уравнения, полученной дифференцированием уравнения (5) по z . Для нахождения вспомога-

ной функции w решается задача

$$\begin{aligned} -\Delta w &= 4\pi\gamma \frac{\partial \rho}{\partial z}, & P \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha w &= 0, & P \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Применение формулы Грина дает

$$g_z(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\alpha w(Q) G(P, Q) + w(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) \right) ds \quad (9)$$

для точек вне области Ω .

Для решения краевой задачи (5) или (8) в ограниченной области Ω применяется метод конечных элементов. Область Ω покрывается тетраэдральной сеткой, решение аппроксимируется лагранжевыми конечными элементами.

Вариационная формулировка краевой задачи (5) ставится следующим образом: найти $W \in V^h$, такую что

$$(\nabla W, \nabla v) + \alpha(W, v)_{\partial\Omega} = 4\pi\gamma(\rho, v), \quad \forall v \in V^h.$$

Аналогично, для краевой задачи (8) ставится следующая вариационная формулировка: найти $w \in V^h$, такую что

$$(\nabla w, \nabla v) + \alpha(w, v)_{\partial\Omega} = -4\pi\gamma \left(\rho, \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \forall v \in V^h.$$

Гравитационное поле (7) или (9) в точках наблюдения $P_i \in \Gamma$, $i = 1, \dots, M$, приближенно вычисляется с помощью квадратурной формулы

$$g_z(P_i; W) \approx \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_q} \theta_k W(Q_k) (\alpha G_z(P_i, Q_k) + \mathbf{n}_j \cdot \nabla G_z(P_i, Q_k)),$$

или

$$g_z(P_i; w) \approx \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_q} \theta_k w(Q_k) (\alpha G(P_i, Q_k) + \mathbf{n}_j \cdot \nabla G(P_i, Q_k)),$$

соответственно, с квадратурными весами θ_k и узлами Q_k .

Проведено численное исследование влияния параметра α в граничном условии третьего рода на точность каждого метода. Расчеты показали, что ме-

тод на основе решения вспомогательной краевой задачи, поставленной непосредственно для вертикальной силы тяжести, с большим значением параметра α и аналитическим представлением функции $G(P, Q)$ является наиболее эффективным методом приближения вертикальной силы тяжести. Численный анализ на последовательности сгущающихся сеток показал, что погрешность приближенного решения имеет второй порядок, см. рисунок 7.

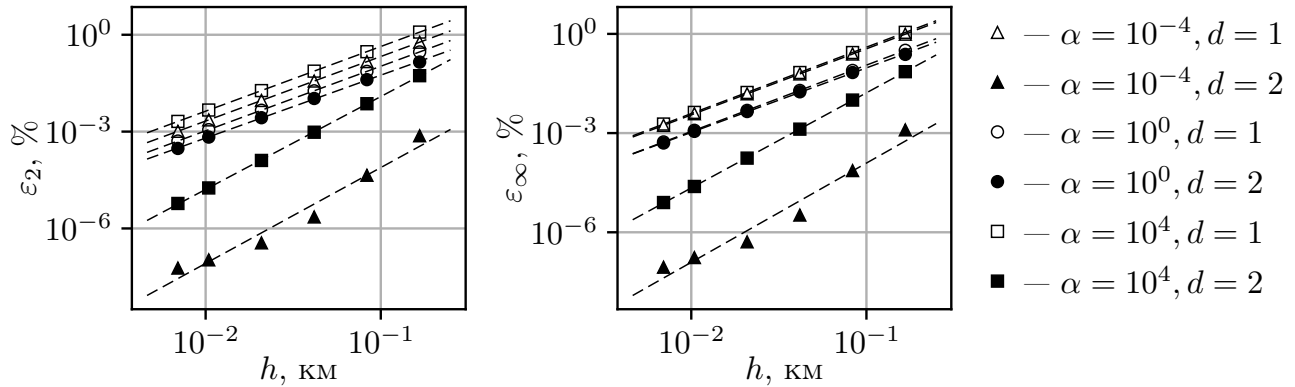


Рис. 7 — Сходимость квадратичной ошибки (слева), сходимость абсолютной ошибки (справа) аппроксимации вертикальной силы тяжести.

В **третьей главе** разрабатывается вычислительный алгоритм для восстановления кусочно-постоянной правой части эллиптического уравнения по дополнительной информации о решении на границе расчетной области.

Пусть функция u является решением краевой задачи в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$):

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \rho(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10}$$

Обратная задача заключается в восстановлении кусочно-постоянной функции ρ вида

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_0, & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega/D, \end{cases}$$

где ρ_0 — заданное число, $D \subset \Omega$. В качестве дополнительной информации задаются значения $d(\mathbf{x}) = \partial u / \partial n(\mathbf{x})$ на границе $\partial\Omega$. Задача эквивалента восстановлению неизвестной области D , носителя функции источника ρ . Функция ρ может быть представлена с помощью индикаторной функции области D : $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 \chi_D(\mathbf{x})$.

Для представления контура ∂D вводится вспомогательная достаточно гладкая функция $c(\mathbf{x})$, определенная во всей области Ω . Аппроксимация функции ρ происходит с привлечением функции Хевисайда:

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 H(c(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (11)$$

Для обеспечения необходимой гладкости вспомогательной функции минимизируется функционал

$$\min_{c \in L_2(\Omega)} \|c - f\|^2 + \gamma \|c\|_A^2,$$

где f — функция управления, γ — параметр сглаживания, оператор $\mathcal{A}c = -\Delta c$ определен для функций c : $\mathcal{B}c = q(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Из условия минимума получаем следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} -\gamma \Delta c + c &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathcal{B}c &= q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (12)$$

где слагаемое $-\gamma \Delta c$ контролирует гладкость решения, при этом параметр $\gamma > 0$ играет роль параметра регуляризации. Граничный оператор \mathcal{B} соответствует общему граничному условию третьего рода:

$$\mathcal{B}c := \alpha \frac{\partial c}{\partial n} + \beta c = q(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

где параметры α , β и $q(\mathbf{x})$ подбираются из априорной информации о поведении области D вблизи границы расчетной области $\partial\Omega$. В случае $\alpha = 0$ данное условие переходит к граничному условию первого рода, а в случае $\beta = 0$ — к граничному условию второго рода.

Для нахождения функции $u(\mathbf{x})$ необходимо решить две краевые задачи, сначала (12) для заданной правой части $f(\mathbf{x})$, затем (10), используя функцию $\rho(\mathbf{x})$ из (11). Численная реализация базируется на применении метода лагранжевых конечных элементов первого порядка, для чего используются соответствующие вариационные формулировки.

Неизвестная область D ищется по заданным $d(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, на основе минимизации следующего функционала невязки

$$J(f) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}; f) - d(\mathbf{x}) \right)^2 ds.$$

Для вычисления градиента J по управляющей функции решается сопряженная задача

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^* \lambda = \left(\frac{\partial J}{\partial u} \right)^*,$$

где $F(u, f) = 0$ представляет полную систему, $*$ — оператор сопряжения, и

$$\frac{dJ}{df} = -\lambda^* \frac{\partial F}{\partial f}.$$

Разработан вычислительный алгоритм для численного восстановления кусочно-постоянной правой части на основе минимизации функционала невязки оптимизационным методом с использованием градиента. Для иллюстрации эффективности построенного численного алгоритма выполнен ряд расчетов двумерных и трехмерных задач. Исследованы основные параметры предложенного алгоритма: влияние параметра сглаживания γ , начального приближения $f(\mathbf{x})$ и параметр гладкой аппроксимации функции Хевисайда. На рисунке 8 представлены результаты восстановления неизвестной области по зашумленным входным данным. В трехмерном случае восстановление неизвестной составной области приведено на рисунке 9.

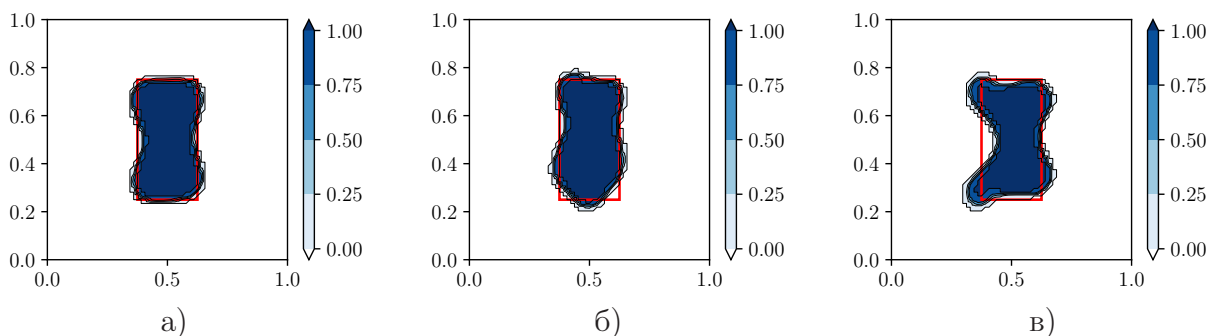
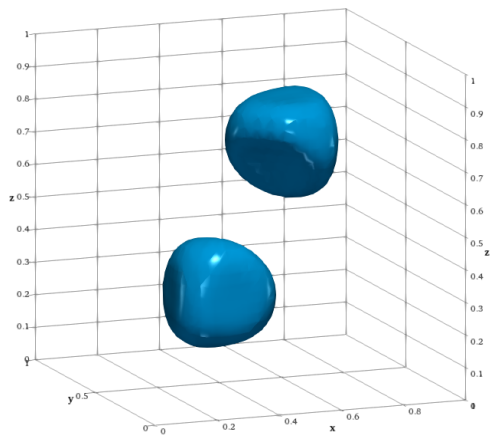
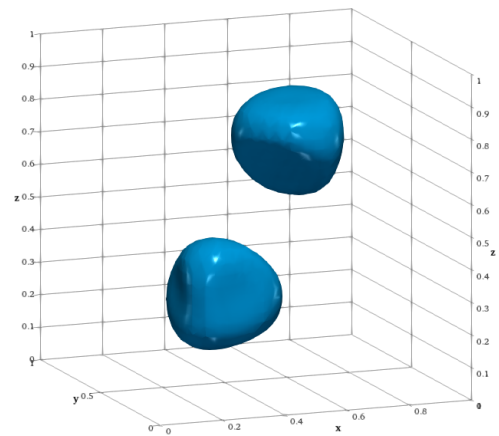


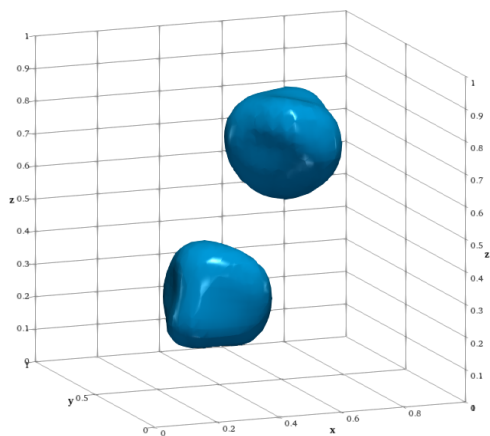
Рис. 8 — Восстановление прямоугольной области в зависимости от уровня шума во входных данных: а) $\delta = 0.01$, б) $\delta = 0.05$, в) $\delta = 0.1$.



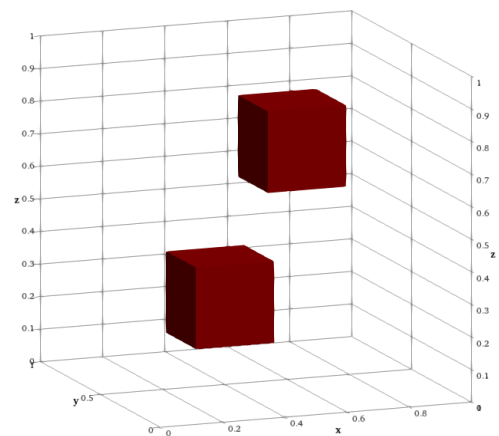
а)



б)



в)



г)

Рис. 9 — Восстановление составной области, нулевая изоповерхность c : а) $\delta = 0$, б) $\delta = 0.05$, в) $\delta = 0.1$, г) точная область.

В **четвертой** главе рассматривается численное решение обратной задачи гравиметрии. Рассматривается практическое применение вычислительного алгоритма из третьей главы для приближенного решения обратной задачи гравиметрии по определению области залегания однородного рудного тела. В качестве входных данных берется наблюдение за гравитационным полем на дневной поверхности или в вертикальной скважине.

Компоненты гравитационного поля приближаются путем решения соответствующих краевых задач в ограниченной области достаточно большого размера, объемлющей рудное тело и область наблюдения, на основе подхода, описанного в первой главе. Используется приближенное однородное граничное условие третьего рода с пространственно зависящим коэффициентом.

Обратная задача сводится к задаче минимизации функционала невязки между вычисленными и наблюдаемыми данными с применением градиентного итерационного метода. Возможности разработанного подхода иллюстрируются примерами решения двух- и трехмерных модельных задач. Например, для двухмерной задачи на рисунке 10 показана восстановленная область прямоугольного рудного тела, данные наблюдения взяты на горизонтальном отрезке $[-1, 1]$ км при $z = 0$. Для трехмерной задачи на рисунке 11 приведена восстановленная область составного рудного тела, область наблюдения представляет собой горизонтальную квадратную площадь со сторонами 2 км на дневной поверхности $z = 0$.

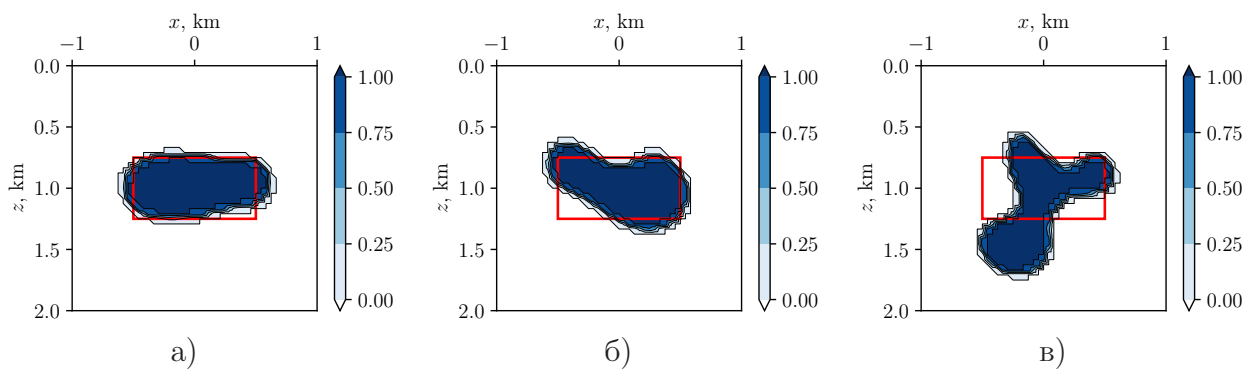


Рис. 10 — Восстановленная форма рудного тела в зависимости от уровня шума во входных данных: а) $\delta = 1\%$ б) $\delta = 5\%$ в) $\delta = 10\%$.

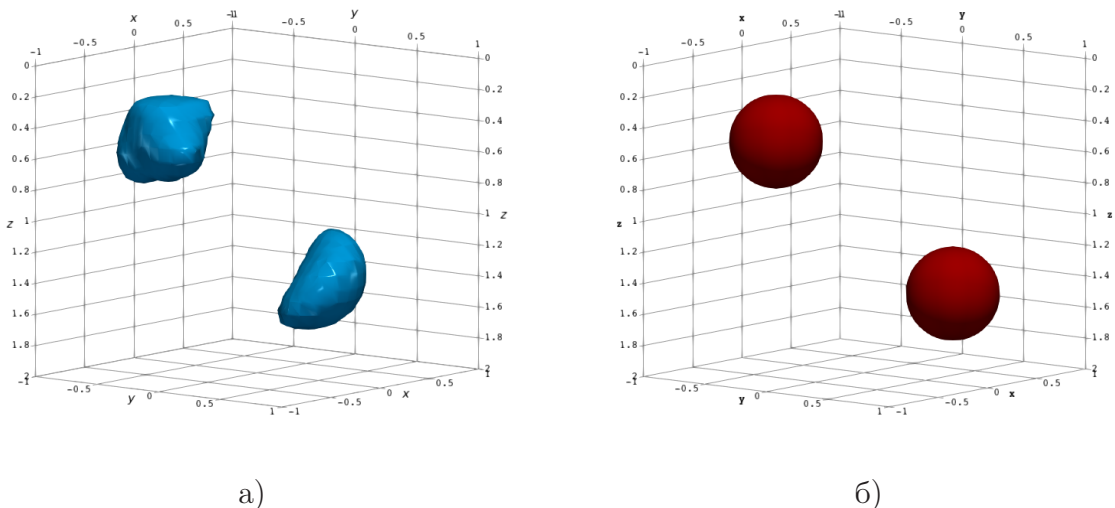


Рис. 11 — а) Восстановленная форма рудного тела, состоящего из двух сфер, уровень шума $\delta = 5\%$, б) точная форма.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Для численного расчета вертикальной составляющей гравитационного поля локализованной аномалии используются квадратурные формулы Гаусса при триангуляции области залегания и вычислительный алгоритм на основе решения краевой задачи для уравнения Пуассона в ограниченной области, включающей рудное тело. На тестовых трехмерных задачах исследованы различные приближенные граничные условия, аппроксимирующие поведение гравитационного поля на удалении. Расчеты на неравномерных сетках показали возможность повышения точности приближенного решения без существенного увеличения вычислительных затрат.
2. Предложен новый численный метод для прямой задачи гравиметрии на основе решения вспомогательной краевой задачи в ограниченной области, включающей аномалию, с общими граничными условиями третьего рода. Расчет аномального гравитационного поля обеспечивается применением стандартной конечно-элементной технологии для решения вспомогательной задачи и последующими приближенными вычислениями значений потенциалов простого и двойного слоя в точках наблюдения. Вычислительная эффективность предложенного подхода обеспечивается фактическим уменьшением размерности задачи — переходом от объемных интегралов к поверхностным. Возможности метода продемонстрированы на ряде тестовых трехмерных прямых задач гравиметрии.
3. Разработан вычислительный алгоритм для приближенного решения обратной краевой задачи по восстановлению кусочно-постоянной правой части эллиптического уравнения по граничным данным. Искомая граница неоднородности правой части приближается линией уровня функции, которая определяется решением вспомогательной краевой задачи для эллиптического уравнения. Минимизация невязки между приближенными и наблюдаемыми данными обеспечивается подбором правой части вспомогательной краевой задачи. Вычислительная реализация предложенного метода базируется на:
1) применении градиентных методов минимизации функционала

невязки и 2) решении эллиптических краевых задач для вспомогательной функции, основного и сопряженного состояния методом конечных элементов. Проведенные тестовые расчеты для двух- и трехмерных обратных задач при точных и зашумленных данных переопределения демонстрируют работоспособность метода и его эффективность.

4. Разработан вычислительный алгоритм восстановления области залегания однородного рудного тела по наблюдениям гравитационного поля на дневной поверхности. Вычисления гравитационных аномалий проводятся на основе решения краевой задачи непосредственно для гравитационного поля. Идентификация границы аномалий выполняется по линии уровня вспомогательной функции, которая определяется решением дополнительной краевой задачи для эллиптического уравнения. Итерационная минимизация невязки между приближенными и наблюдаемыми данными проводится за счет подбора правой части вспомогательной краевой задачи. Возможности предложенного вычислительного алгоритма иллюстрируются решением тестовых трехмерных обратных задач гравиметрии для простых и составных рудных тел.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Вабищевич, П. Н.* Расчет вертикальной силы тяжести из решения вспомогательной краевой задачи и вычисления поверхностного интеграла / П. Н. Вабищевич, Д. Х. Иванов // Вычислительные технологии. — 2022. — Т. 27, № 1. — С. 21–38.
2. *Ivanov, D. K.* Numerical solution of a boundary value problem with effective boundary conditions for calculation of gravity / D. K. Ivanov, P. N. Vabishchevich // Математические заметки СВФУ. — 2021. — Т. 28, № 1. — С. 93–113.
3. *Ivanov, D. K.* Numerical method for recovering the piecewise constant right-hand side function of an elliptic equation from a boundary overdetermination data / D. K. Ivanov, A. E. Kolesov, P. N. Vabishchevich // Journal of Physics : Conference Series. V. 1392. — IOP Publishing. 2019. — P. 012081.
4. *Ivanov, D. K.* Numerical method for solving the piecewise constant source inverse problem of an elliptic equation from a partial boundary observation data / D. K. Ivanov, A. E. Kolesov, P. N. Vabishchevich // Journal of Physics : Conference Series. V. 2092. — IOP Publishing. 2021. — P. 012006.
5. *Kolesov, A. E.* Recovery of a piecewise constant lower coefficient of an elliptic equation / A. E. Kolesov, D. K. Ivanov, P. N. Vabishchevich // Journal of Physics : Conference Series. V. 1392. — IOP Publishing. 2019. — P. 012084.
6. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Вычислительная библиотека для расчета гравитационного поля на основе решения краевой задачи для эллиптического уравнения / Д. Х. Иванов ; СВФУ. — № 2022617944 ; заявл. 30.04.2022 ; опубл. 19.05.2022, 2022619197 (Рос. Федерация).