МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА

III Всероссийский этап Всероссийской олимпиады студентов образовательных организаций высшего образования (Всероссийской студенческой олимпиады) в 2019-2020 учебном году

Олимпиада по математике XXIV Лаврентьевских чтений

составители:
д.ф.-м.н., профессор С.В. Попов
д.ф.-м.н., проф. А.Ю. Чеботарев
к.ф.-м.н., доцент А.Д. Больбот

Якутск
26.10.2020 г.

ЗАДАЧИ

1. На доске написано 35 целых чисел. Разрешается взять любые 23 и прибавить к ним по единичке. Сможем ли мы повторяя этот процесс сделать все числа равными?

2. Существует ли целочисленная 2×2 матрица A с положительным определителем, для которой $A^3 = 2A$?

3. Пусть $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$, $x \in [0, 1]$.

$$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)),\ n = 1, 2, \dots \quad f_0(x) = f(x),\ x \in [0, 1].$$

Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

4. Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x)}{1 + x^2}\, dx.$$

5. Пусть $n > m$, а A и B — вещественные матрицы порядков соответственно $n \times m$ и $m \times n$. Матрица AB симметрична, ее ранг равен m и все ненулевые собственные числа одинаковы. Докажите, что матрица BA скалярна.

6. Найдите непрерывную функцию $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такую, что

$$5 \int\limits_0^1 (f(x))^2\, dx + \frac{1}{3} = \int\limits_0^1 (6x - 2) f(x)\, dx - 4 \int\limits_0^1 f(x) f(1 - x)\, dx.$$

7. Непрерывная функции $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 xg(x)dx = 1.$$

Найдите минимально возможное значение интеграла $\int\limits_0^1 (g(x))^2 dx$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Ответ: можно.

К определенным в задаче операциям добавим операции прибавления и вычитания по единице из каждого числа, выполнение которых, очевидно, не нарушает упорядочение чисел. С учетом этого можно считать допустимой операцию вычитания единицы из любых 12-ти чисел. Тогда мы можем выполнить операцию вычитания единицы из любого записанного числа, для этого достаточно в процедуре из трех таких вычитаний данное число указать два раза, а остальные по одному, а потом ко всем числам прибавить 1 (что для решаемой задачи и не очень-то нужно). Далее будем последовательно вычитать единицы из любого максимального числа до тех пор, пока записанные на доске числа не станут равными.

2. Ответ: не существует.

Пусть $a = tr\, A$, $b = det\, A > 0$. Характеристический многочлен 2×2 матрицы A имеет вид $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - a\lambda + b$ и в силу теоремы Гамильтона-Кэли справедливо равенство (его можно проверить и непосредственно)

$$A^2 - aA + bI = 0.$$

Поэтому

$$A^2 = aA - bI, \quad A^3 = aA^2 - bA = a(aA - bI) - bA.$$

Предположим, что $A^3 = 2A$, тогда $b^3 = 4b$, $b = 2$ и получаем равенство $a(aA - 2I) - 2A = 2A$ или $(a^2 - 4)A = 2aI$. Отсюда, в частности, следует, что $a \neq 0$. Вычислив след левой и правой частей, приходим к уравнению $(a^2 - 4)a = 4a$. Следовательно, $a^3 = 8$, что невозможно для целочисленных матриц.

3. Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пусть $x_0 \in (0, 1)$. Тогда $x_1 = f(x_0) \leq 1/2$. Далее, в силу вогнутости функции f, получаем

$$x_1 \leq x_2 = f(x_1) \leq 1/2, \ldots, x_n \leq x_{n+1} = f(x_n) \leq 1/2, \ldots .$$

Последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена. Следовательно существует предел $x_* = \lim x_n \in (0, 1/2]$, $x_* = f(x_*)$. Уравнение $x = f(x)$ имеет единственный положительный корень $x = 1/2$. Поэтому $x_* = 1/2$. Таким образом, $f_n(x_0) \to 1/2$. Переходя к пределу под знаком интеграла, получим $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = 1/2$.

4. Ответ: $\frac{\pi}{8} \ln 2$.

Сделаем замену $x = \operatorname{tg} t$, получим

$$\int\limits_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} t)\, dt = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - \ln\cos t\right) dt = \frac{\pi}{8}\ln 2,$$

так как $\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin(\frac{\pi}{4} + t)\, dt = \int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos t\, dt$.

5. Пусть λ — ненулевое собственное число матрицы AB и $v_1, v_2, \ldots, v_m$ — ортогональный базис собственного подпространства. Тогда вектора $Bv_1, Bv_2, \ldots, Bv_m$ — собственный базис для BA с единственным собственным числом λ. Поэтому $BA = \lambda E$.

6. Ответ: $x - \frac{1}{2}$.

Используем следующие равенства:

$$5\int\limits_0^1 (f(x))^2 dx = \int\limits_0^1 \left(4(f(x))^2 + (f(1-x))^2\right) dx, \quad \frac{1}{3} = \int\limits_0^1 x^2 dx,$$

$$\int\limits_0^1 (6x - 2)f(x)dx = \int\limits_0^1 (4xf(x) - 2(1-x)f(x))\, dx = \int\limits_0^1 (4xf(x) + 2xf(1-x))\, dx.$$

Тогда из равенства в условии задачи, перенося все в левую часть, выводим

$$\int_0^1 \left(4(f(x))^2 + (f(1-x))^2 + x^2 + 4f(x)f(1-x) - 4xf(x) - 2xf(1-x)\right) dx = 0$$

или

$$\int_0^1 (2f(x) + f(1-x) - x)^2 \, dx = 0.$$

Следовательно, $2f(x) + f(1-x) = x$, $x \in [0,1]$. Полагая $x := 1-x$, получаем $2f(1-x) + f(x) = 1-x$. Тогда $f(x) = x - 1/3$.

7. 4. Ответ: 4.

Подберем линейную функцию $f(x) = kx+b$, удовлетворяющую условиям задачи. Если $f(x) = 6x - 2$, то

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Поэтому для любой функции g, удовлетворяющей условиям задачи,

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))dx = \int_0^1 x(g(x) - f(x))dx = 0.$$

Следовательно, $\int\limits_0^1 f(x)(g(x) - f(x))dx = 0$. Далее,

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))^2 dx = \int_0^1 g(x)(g(x) - f(x))dx =$$

$$= \int_0^1 (g(x))^2 dx - \int_0^1 g(x)(6x-2)dx = \int_0^1 (g(x))^2 dx - 4.$$

В силу неотрицательности левой части равенства $\int\limits_0^1 (g(x))^2 dx \geq 4$. Значение $\int\limits_0^1 (g(x))^2 dx$ равное 4 достигается, если $g := f$.

Замечание. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(0,1)$ со скалярным произведением $(u,v) = \int\limits_0^1 u(x)v(x)dx$ и подпространство $L = \{f \in L^2(0,1) : \ (f,1) = (f,x) = 0\}$. Ортогональным дополнением к L является множество линейных функций $L^\perp = \{kx+b, \ x \in [0,1]\}$. Любая функция $g \in L^2(0,1)$ раскладывается в сумму $g = g_0 + g_1$, где $g_0 \in L$, $g_1 \in L^\perp$ и при этом

$$\int_0^1 (g(x))^2 dx = \|g\|^2 = \|g_0\|^2 + \|g_1\|^2 \geq \|g_1\|^2.$$

Кроме того, $(g,1) = (g_1,1) = 1$, $(g,x) = (g_1,x) = 1$. Единственная линейная функция, удовлетворяющая этим условиям есть $g_1(x) = 6x-2$. Следовательно, $\|g\|^2 \geq \|g_1\|^2 = \int\limits_0^1 (6x-2)^2 dx = 4$.