

На правах рукописи



Тырылгин Алексей Афанасьевич

**Многомасштабные методы решения задач
пороупругости в неоднородных средах**

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2021

Работа выполнена на научно-исследовательской кафедре вычислительных технологий Института математики и информатики ФГАОУ ВО «Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова».

- Научный руководитель: **Ялчин Эфендиев**
PhD, профессор, Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова
- Официальные оппоненты: **Оседец Иван Валерьевич**,
доктор физико-математических наук, доцент
АНОО ВО «Сколковский институт науки и технологий», г. Москва
- Ильин Валерий Павлович**,
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБУН «Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН»,
г. Новосибирск
- Ведущая организация: ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск

Защита состоится 18 марта 2021 года в «16:00» часов на заседании диссертационного совета Д 212.306.04 при СВФУ им. М.К. Аммосова, по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СВФУ им. М.К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58 и на сайте университета по адресу

<https://www.s-vfu.ru/upload/iblock/7b4/7b4c943ca429621c3a23c22b11430ede.pdf>

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н.



Саввинова Н.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В настоящее время численное моделирование задач пороупругости является одним из инструментов, используемых для исследования процессов разработки месторождений нефти и газа. Модель пороупругой среды (пороупругости) описывает фильтрацию флюида в порах совместно с полноценной механической моделью напряженно-деформированного состояния коллектора. Пористые материалы (коллектор) по определению представляют собой твердые материалы, содержащие большое количество соединенных между собой пор. При этом взаимное соединение пор является достаточным для обеспечения протекания жидкости через материал. Пористые материалы в первую очередь связаны с такими объектами, как горные породы и глины, но и биологические ткани, пеноматериалы и бумажные изделия также попадают в эту категорию. Следовательно, изучение пороупругости имеет большое значение в ряде различных инженерных дисциплин, таких как нефтяная инженерия, аграрная наука и биомедицина. Неоднородные и трещиноватые микроструктуры и высокая контрастность физических свойств являются ключевыми характеристиками современных композитных и многофункциональных материалов. Однако многомасштабное моделирование пороупругости вызывают большие трудности при их компьютерном моделировании. Решение таких сложных многомасштабных задач является вычислительно затратным, поскольку пренебрежение соответствующих микроскопических включений приводит к сомнительным результатам. Для их учета целесообразно использовать методы усреднения и многомасштабные методы.

Цель диссертационной работы состоит в разработке многомасштабных методов решения задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи исследования:

- Численное решение задачи вязкопороупругости с использованием формулировки Кельвина-Фойгта для метода конечных элементов;
- Разработка методов аппроксимации на грубой сетке для задач пороупругости в неоднородных средах. Составление алгоритма метода численного усреднения, обобщённого многомасштабного метода конечных элементов, метода конечных элементов для задач пороупругости в неоднородных средах;

- Разработка обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости в трещиноватых средах, использование обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости в мультиконтинуумной среде, решение обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости со встроенной моделью трещины.

Научная новизна и практическая значимость. Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

- Реализован алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для решения задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах;
- Проведено моделирование задачи пороупругости обобщённым многомасштабным методом конечных элементов со встроенной моделью трещин;
- Проведено моделирование задачи пороупругости в мультиконтинуумной среде обобщённым многомасштабным методом конечных элементов;
- Получено решение задачи пороупругости с использованием численного усреднения в неоднородных средах.

Проведённые численные расчёты имеют практическое значение при моделировании процессов актуальных задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах.

Методология и методы исследования. В данной работе для решения задач пороупругости применялись следующие методы: метод численного усреднения, обобщённый многомасштабный метод конечных элементов, дискретная модель трещины и встроенная модель трещины. Для получения эталонного решения применялся метод конечных элементов на подробной сетке.

Положения выносимые на защиту:

- Численное усреднение задач пороупругости в неоднородных средах;
- Обобщённый многомасштабный метод конечных элементов численного решения задач пороупругости в неоднородных средах;
- Алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости в мультиконтинуумной среде;
- Алгоритм обобщённого многомасштабного метода конечных элементов для задач пороупругости в трещиноватых средах.

Обоснованность и достоверность результатов подтверждена использова-

нием при построении математических моделей фундаментальных законов механики сплошных сред, применением современных методов вычислительной математики, удовлетворительным совпадением полученных результатов с результатами счета на подробных сетках и публикациями в рецензируемых журналах из списка ВАК, Web of Science, Scopus.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", конференцзал научной библиотеки СВФУ, Учебно – лабораторный корпус (УЛК), 30.07.2017 – 04.08.2017;
- The Seventh Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, г. Албена, Болгария, 20.06.2018 – 25.06.2018;
- The Tenth Jubilee Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, г. Лозенец, Болгария, 11.06.2018 – 18.06.2018;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 08.08.2018 – 10.08.2018;
- II Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", ИВМ РАН, ул. Губкина, д. 8, 9 этаж, г. Москва, 15.08.2018 – 17.08.2018;
- Двенадцатая международная конференция "Сеточные методы для краевых задач и приложения", г. Казань, 20.09.2018 – 25.09.2018;
- IV Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования ул. Губкина, 8, г. Москва, 19.05.2019 – 21.05.2019;
- Международная конференция "Многомасштабные и высокопроизводительные вычисления для мультифизических задач", СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 24.05.2019 – 25.05.2019;
- III Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", Дальневосточный федеральный университет, Остров Русский, Владивосток, 07.10.2019 – 11.10.2019;
- Применение цифровых технологий в промышленности, бизнесе и здравоохранении Республика Саха, СВФУ им. М.К. Аммосова, ул. Белинского,

58, г. Якутск, 23.12.2019 – 25.12.2019;

- International Society for Porous Media - Interpore, 31.08.2020 – 04.09.2020;
- IV Международная конференция "Многомасштабные методы и высокопроизводительные научные вычисления", г.Сочи, Екатеринбургский квартал. 5 корпус, 08.09.2020 – 13.09.2020.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 14 научных работ, из них 4 статьи в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК [1, 2, 3, 4], 10 статей в международных научных изданиях [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], включенных в систему цитирования Web of Sciences и Scopus, 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [15, 16].

Личный вклад автора. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [1, 6, 7, 11, 10, 12, 13] им разработан и реализован вычислительный алгоритм, проведены расчеты и проведён анализ результатов вычислительных экспериментов; в работах [3, 5, 8, 14] диссертант участвовал в разработке математической модели и численной реализации. В работах [2, 9, 4, 15, 16] автор принял участие в постановке математической модели и численной реализации. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертационной работы составляет 132 страниц, содержит 49 иллюстраций и 10 таблиц. Список литературы содержит 131 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантами РНФ 17-71-20055 и 19-11-00230, грантами РФФИ 17-01-00732А, 19-31-90066\19 и 19-31-90120\19.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цель и задачи исследования, кратко излагается содержание диссертации по главам.

В **первой главе** рассматриваются задачи пороупругости в трещиноватых и неоднородных средах и задача вязкопороупругости. Аппроксимация на мелкой

(подробной) сетке проводится с помощью метода конечных элементов.

Задача № 1. Описывается численное моделирование задачи пороупругости в неоднородной среде. Рассмотрим задачу пороупругости в ограниченной области Ω . Математическая модель содержит связанную систему дифференциальных уравнений с частными производными для перемещения и давления. Определяющие уравнения записывается в виде

$$-\operatorname{div} \sigma_T(u, p) = 0, \quad \sigma_T(u, p) = \sigma(u) - \alpha p \mathcal{I}, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где u – вектор перемещения, p – поровое давление жидкости, α – коэффициент Био, σ_T – тензор полного напряжения, σ – линейное напряжение.

Соотношение между тензором напряжения σ и тензором деформации ε имеет вид

$$\sigma(u) = \lambda \varepsilon_v \mathcal{I} + 2\mu \varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = 0.5(\nabla u + (\nabla u)^T), \quad (2)$$

где ε_v – объемная деформация, а λ и μ – коэффициенты Ламе.

В теории консолидации Био предполагается, что скорость потока жидкости в пористой среде описывается законом Дарси. Закон сохранения массы жидкости и закон Дарси имеют вид:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q) = \rho f, \quad q = -\frac{k}{\nu_f} \operatorname{grad} p, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где m – масса жидкости, q – скорость потока жидкости, ν_f – коэффициент динамической вязкости жидкости, ρ – плотность жидкости, а f – источник. Здесь, для простоты изложения, пренебрегаем действием гравитационных сил.

Из-за упругого деформирования твердого скелета имеем следующее соотношение

$$\partial m = \rho \partial \phi + \rho \partial \phi \varepsilon_v, \quad (4)$$

где

$$\partial \phi = (\alpha - \phi) \left(\frac{1}{K} \partial p + \partial \varepsilon_v \right), \quad (5)$$

и ϕ – пористость. Далее определим сжимаемость жидкости c_m и модуль Био M :

$$c_m = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}, \quad \frac{1}{M} = \phi c_m + \frac{\alpha - \phi}{K}. \quad (6)$$

Используя (5), получаем следующее соотношение для жидкости

$$\begin{aligned} \partial t m &= \rho \partial \phi + \phi \partial \rho + \rho \partial \varepsilon_v = \\ &= \rho \left((\alpha - \phi) \frac{1}{K} \partial p + (a - \phi) \partial \varepsilon_v + \phi c_m \partial p + \phi \partial \varepsilon_v \right) = \rho \left(\frac{1}{M} \partial p + \alpha \partial \varepsilon_v \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Предположим, что $\rho = const$. Таким образом, имеем следующую связанную систему уравнений для перемещения и давления в пористой матрице

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) + \alpha \operatorname{grad} p &= 0, \quad x \in \Omega, \\ c_m \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \operatorname{div} (a_m \operatorname{grad} p) &= f, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$c_m = \frac{1}{M}, \quad a_m = \frac{k}{\nu_f}.$$

Для численного решения задачи пороупругости на мелкой сетке используется стандартный метод конечных элементов

$$\begin{aligned} a(u, v) + g(p, v) &= 0, \quad \text{for all } v \in \hat{V}, \\ d \left(\frac{du}{dt}, q \right) + c \left(\frac{dp}{dt}, q \right) + b(p, q) &= (f, q), \quad \text{for all } q \in \hat{Q} \end{aligned} \quad (9)$$

для $u \in V = [H^1(\Omega)]^d$ и $p \in Q = H^1(\Omega)$. Здесь для билинейных и линейных форм определяем

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) v dx, \quad b(p, q) = \int_{\Omega} \left(\frac{k}{\nu} \operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q \right) dx, \quad c(p, q) = \int_{\Omega} \frac{1}{M} p q dx$$

и

$$g(p, v) = \int_{\Omega} \alpha (\operatorname{grad} p, v) dx, \quad d(u, q) = \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} u q dx, \quad (f, q) = \int_{\Omega} f q dx.$$

Задача № 2. Рассматривается задача пороупругости в трещиноватых средах. На высокопроницаемую трещину должны добавить в *первую задачу* уравнение для потока в трещине. Используем модель приведенной размерности для потока жидкости на $\gamma \in R^{(d-1)}$

$$\frac{\partial(m_f b)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q_f) = \rho[q \cdot n], \quad q_f = -b \frac{k_f}{\nu_f} \operatorname{grad} p_f, \quad x \in \gamma, \quad (10)$$

где b – толщина трещины ($b > 0$), m_f – масса жидкости в трещине, q_f и p_f – поток массы и давление жидкости в трещине. Здесь, в качестве исходного

члена, имеем скачок в потоке массы матрицы по направлению нормали $[q \cdot n]$ и предполагаем линейную связь между потоком и перепадом давления $[q \cdot n] = \sigma_{fm}(p - p_f)$.

Для пороупругих сред имеем

$$\frac{\partial(m_f b)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \phi_f b)}{\partial t} = \rho \left(\phi_f \frac{\partial b}{\partial t} + b \frac{1}{M_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} \right),$$

где M_f – модуль Био для трещины.

Предположим, что $\rho = const$ и $b = const$. Таким образом, имеем следующую связанную систему уравнений для перемещения и давления в пористой матрице и трещинах

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) + \alpha \operatorname{grad} p &= 0, \quad x \in \Omega, \\ c_m \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \operatorname{div}(a_m \operatorname{grad} p) + \sigma_{mf}(p - p_f) &= f, \quad x \in \Omega, \\ c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div}(a_f \operatorname{grad} p_f) - \sigma_{fm}(p - p_f) &= f_f, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$c_m = \frac{1}{M}, \quad c_f = \frac{b}{M_f}, \quad a_m = \frac{k}{\nu_f}, \quad a_f = b \frac{k_f}{\nu_f}.$$

Обозначим через \mathcal{T}^h конечно-элементное разбиение области на Ω , а Γ_h – множество всех внутренних граней между элементами \mathcal{T}^h . Предположим, что $\cup_j \gamma_j \subset \Gamma_h$ – это подмножество граней, представляющих трещины, где $j = \overline{1, N_{frac}}$ и N_{frac} – число дискретных трещин.

Слабая формулировка уравнения упругости для метода конечных элементов имеет вид

$$\int_{\Omega} (\sigma(u, p), \varepsilon(v)) dx + \int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot v dx = 0. \quad (12)$$

Для уравнений давления предполагаем непрерывность матрицы и давления трещины на поверхности трещины и, используя принципы суперпозиции, получаем следующее приближение конечных элементов с использованием дискретной модели трещины (DFM)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} c_m \frac{\partial p}{\partial t} z dx + \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} z dx + \int_{\Omega} a_m \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} z dx \\ & + \sum_j \left(\int_{\gamma_j} c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} z_f ds + \int_{\gamma_j} a_f \operatorname{grad} p_f \cdot \operatorname{grad} z_f ds \right) \\ & = \int_{\Omega} f z dx + \sum_j \int_{\gamma_j} f_f z_f dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Задача № 3. Рассматривается задача пороупругости в мультиконтинуумных средах. Пусть $\Omega \subset R^d$ - вычислительная область для задачи с двойным континуумным подходом. Имеем следующую связанную систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \operatorname{div} \cdot (k_1 \operatorname{grad} p_1) + q_{12} + q_{1f} &= f_1, \quad x \in \Omega, \\ \alpha_2 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_2} \frac{\partial p_2}{\partial t} - \operatorname{div} \cdot (k_2 \operatorname{grad} p_2) - q_{21} + q_{2f} &= f_2, \quad x \in \Omega, \\ \alpha_f \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div} \cdot (k_f \operatorname{grad} p_f) - q_{f1} - q_{f2} &= f_f, \quad x \in \gamma, \\ -\operatorname{div} \sigma(u) + \alpha_1 \operatorname{grad} p_1 + \alpha_2 \operatorname{grad} p_2 + \alpha_f \operatorname{grad} p_f &= 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Аппроксимация на мелкой сетке

Для аппроксимации системы уравнений (14) используется метод конечных элементов. Для этого определим следующие функциональные пространства

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_D\}, \quad W_1 = W_2 = H^1(\Omega),$$

$$W_f = \{w \in H^1(\gamma) : w = g \text{ на } \Gamma_\gamma\}, \quad \hat{W}_f = \{w \in H^1(\gamma) : w = 0 \text{ на } \Gamma_\gamma\}.$$

Вариационная формулировка задачи пороупругости в многоконтинуумных средах может быть записана следующим образом: найти $(p_1, p_2, p_f, u) \in W_1 \times W_2 \times W_f \times V$, такие что

$$\begin{aligned} d_i \left(\frac{\partial u}{\partial t}, w_i \right) + c_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial t}, w_i \right) + b_i(p_i, w_i) \\ + \sum_j q_{ij}(p_i - p_j, w_i) = l(w_i), \quad \forall w_i \in W_i, \\ a(u, v) + \sum_j g_j(p_j, v) = 0, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (15)$$

где билинейные и линейные формы следующие

$$\begin{aligned} b_i(p_i, w_i) &= \int_{\Omega_i} k_i \nabla p_i \cdot \nabla w_i dx, \quad l(w_i) = \int_{\Omega_i} f_i w_i dx, \\ c_i(p_i, w_i) &= \int_{\Omega_i} \frac{1}{M_i} p_i w_i dx, \quad d_i(u, w_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \operatorname{div} u w_i dx, \\ q_{ij}(p_i - p_j, w_i) &= \int_{\Omega_i} r_{ij}(p_i - p_j) w_i dx, \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v) dx, \quad g_i(p_i, v) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \operatorname{grad} p_i v dx, \end{aligned}$$

и $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_f = \gamma$, $i = 1, 2, f$.

Задача № 4. Рассматривается задача вязкопорупругости грунтов. Система уравнений, описывающая процесс вторичной консолидации в вязкоупругой пористой среде включает в себя уравнения для перемещения и давления

$$\nabla \cdot \sigma + \alpha \nabla p = f_u(x, t), \quad (16)$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u) - \nabla \cdot (k \nabla p) = f_p(x, t) \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (17)$$

где u – вектор перемещения, p – поровое давление жидкости, α – коэффициент Био, σ – тензор напряжения, k – проницаемость среды и f_l – внутренние источники ($l = p, u$).

Классической моделью, используемой для описания вязкоупругой среды, является модель Кельвина-Фойгта, в которой используются следующие соотношения для тензора деформаций ε и тензора напряжения σ :

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v, \quad \sigma = \sigma^e + \sigma^v, \quad (18)$$

где индексы v и e используются для обозначения вязкоупругой и упругой компонентов тензоров, соответственно

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T).$$

Аппроксимация на мелкой сетке

Запишем вариационную формулировку для уравнений (16 – 17): найти $u \in W$, $p \in V$ такие, что

$$r(\dot{u}, v) + a(u, v) + g(p, v) = l^u(v), \quad v \in W', \quad (19)$$

$$d(\dot{u}, q) + b(p, q) = l^p(q), \quad q \in V', \quad (20)$$

где билинейные и линейные формы задаются следующим образом:

$$r(\dot{u}, v) = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma^v(u) \dot{\varepsilon}(v)}{\partial t} dx, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma^e(u) \varepsilon(v) dx,$$

$$g(p, v) = \alpha \int_{\Omega} \nabla p v dx, \quad d(\dot{u}, q) = \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} q dx,$$

$$b(p, q) = \int_{\Omega} (k \nabla p, \nabla q) dx,$$

$$l^u(v) = \int_{\Omega} f_u v dx, \quad l^p(q) = \int_{\Omega} f_p q dx + \int_{\partial \Omega} p_1 q ds.$$

Билинейные формы $r(\cdot, \cdot)$, $a(\cdot, \cdot)$ и $b(\cdot, \cdot)$ симметричны и положительно определены, а $d(v, v) = -g(v, v)$ для $v \in V, v \in W$.

Во **второй главе** исследуется решение задачи пороупругости в неоднородных средах с помощью численного усреднения. В работе представлен метод численного усреднения для задачи пороупругости в неоднородных средах. В предлагаемом методе макроскопические коэффициенты вычисляются путём решения локальных задач на каждой ячейке грубой сетки.

Рассмотрим линейную задачу пороупругости в области Ω

$$-\nabla \cdot \sigma(u) + \alpha \nabla p = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \nabla \cdot u}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{k}{\nu} \nabla p \right) = f, \quad x \in \Omega, \quad (21)$$

где u и p – перемещение и давление соответственно, σ – тензор напряжения, k – проницаемость, ν – вязкость жидкости, f – источник, M – модуль Био, α – коэффициент Био.

Численное усреднение

Для расчета эффективной проницаемости решаем следующую локальную задачу в K_i

$$-\nabla \cdot \left(k^{K_i} \nabla \psi_j^{K_i} \right) = 0, \quad x \in K_i, \quad (22)$$

$$\psi_j^{K_i} = x_j, \quad x \text{ на } \partial K_i,$$

где $k^{K_i} = k^{K_i}(x)$ – ограничение неоднородного коэффициента k для локальной области K_i , $x = (x_1, x_2)$ – для двумерного случая и $x = (x_1, x_2, x_3)$ – для трехмерного случая.

Далее можно найти элементы тензора эффективной проницаемости для текущего K_i

$$k_{lj}^{*,K_i} = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} k^{K_i}(x) \frac{\partial \psi_l^{K_i}}{\partial x_j} dx, \quad l, i = 1..d, \quad (23)$$

где d – размерность задачи, $d = 2, 3$.

Для эффективного модуля упругости применяем аналогичный алгоритм и решаем следующую локальную задачу в K_i

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma(\psi_{rs}^{K_i}) &= 0, \quad x \in K_i, \\ \phi_{rs}^{K_i} &= \Lambda^{(rs)}x, \quad x \text{ на } \partial K_i, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ для $d = 2$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ для $d = 3$.

Элементы эффективного модуля упругости рассчитываются следующим образом

$$C_{rspq}^{*,K_i} = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} C_{ljk n} \varepsilon(\phi_{lj}^{(rs)}) : \varepsilon(\phi_{kn}^{(pq)}) dx, \quad r, s, p, q = 1, \dots, d. \quad (25)$$

В **третьей главе** описано течение жидкости в деформируемой пористой среде. Для аппроксимации на грубой сетке используется обобщенный многомасштабный метод конечных элементов (GMsFEM). Данный метод решает задачу на грубой сетке путем построения локальных многомасштабных базисных функций для давления и перемещения.

Пусть $\Omega \subset R^d$ является вычислительной областью. Рассмотрим линейную задачу пороупругости

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) + \alpha \operatorname{grad}(p) &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \alpha \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{k}{\nu} \operatorname{grad} p \right) &= f \text{ in } \Omega, \end{aligned} \quad (26)$$

Аппроксимация на грубой сетке с использованием GMsFEM

Пусть \mathcal{T}_H и \mathcal{T}_h – это грубые и мелкие сетки. Для построения многомасштабных базисных функций решаем локальные спектральные задачи в области ω_i для перемещения и давления отдельно. Локальные спектральные задачи:

Перемещение

$$\begin{aligned} a^u(u, v) &= \lambda_u s^u(u, v), \\ a^u(u, v) &= \int_{\omega_i} \sigma(u), \varepsilon(v) dx, \quad s^u = \int_{\omega_i} (\lambda + 2\mu)(u, v) dx. \end{aligned}$$

Давление

$$\begin{aligned} a^p(p, q) &= \lambda_p s^p(p, q), \\ a^p(p, q) &= \int_{\omega_i} k \nabla p, \nabla q dx, \quad s^p = \int_{\omega_i} k p q dx, \end{aligned}$$

где v, q – пробные функции.

Многомасштабные пространства V_h, Q_h , будем формировать, используя собственные векторы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_L$, соответствующие первым наименьшим собственным значениям L , где $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_L$.

Запишем спектральные задачи в матричной форме:

Перемещение

$$A^u \varphi = \lambda_u S^u \varphi, \quad x \in \omega_i.$$

Давление

$$A^p \psi = \lambda_p S^p \psi, \quad x \in \omega_i,$$

где A^u, S^u – матрицы жесткости и массы для перемещения, а A^p, S^p – для давления.

Из-за того, что спектральная задача должна решаться много раз, нужно уменьшить размер задачи. Для решения локальной спектральной задачи используем снейпшот пространство V_{snap} для перемещения и Q_{snap} для давления. Далее определяем переходные матрицы R_{snap}^u, R_{snap}^p : $R_{snap}^u = [\varphi_1^{snap}, \dots, \varphi_{L_i}^{snap}]$ для перемещения и $R_{snap}^p = [\psi_1^{snap}, \dots, \psi_{L_i}^{snap}]$ для давления.

Перемещение

$$\bar{A}_u \bar{\varphi} = \lambda_u \bar{S}_u \bar{\varphi}, \quad x \in V_{snap},$$

где $\bar{A}_u = R_{snap}^u A^u (R_{snap}^u)^T$, $\bar{S}_u = R_{snap}^u S^u (R_{snap}^u)^T$ и $\varphi_j^\omega = (R_{snap}^u)^T \bar{\varphi}_j$.

Давление

$$\bar{A}_p \bar{\psi} = \lambda_p \bar{S}_p \bar{\psi}, \quad x \in Q_{snap},$$

где $\bar{A}_p = R_{snap}^p A^p (R_{snap}^p)^T$, $\bar{S}_p = R_{snap}^p S^p (R_{snap}^p)^T$ и $\psi_j^\omega = (R_{snap}^p)^T \bar{\psi}_j$.

Для получения соответствующих базисных функций используем линейное разбиение единичных функций. Строим матрицу перехода R из мелкой сетки в грубую сетку и используем ее для уменьшения размерности задачи. Матрица перехода

$$R = \begin{pmatrix} R_u \\ R_p \end{pmatrix}$$

с

$$R_u = \{\chi^1 \varphi_1^1, \chi^1 \varphi_2^1, \dots, \chi^1 \varphi_L^1, \dots, \chi^{N_c} \varphi_1^{N_c}, \chi^{N_c} \varphi_2^{N_c}, \dots, \chi^{N_c} \varphi_L^{N_c}\}$$

и

$$R_p = \{\chi^1 \psi_1^1, \chi^1 \psi_2^1, \dots, \chi^1 \psi_L^1, \dots, \chi^{N_c} \psi_1^{N_c}, \chi^{N_c} \psi_2^{N_c}, \dots, \chi^{N_c} \psi_L^{N_c}\},$$

где χ^i – линейное разбиение единичных функций, L – число базисных функций, а N_c – число вершин грубой сетки.

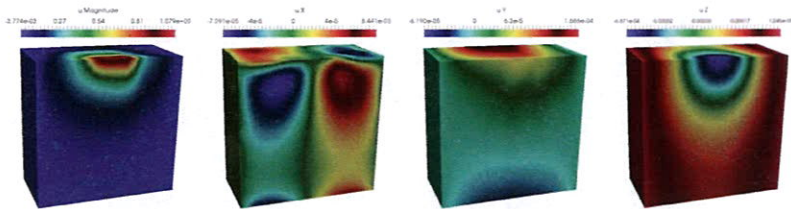


Рис. 1. Распределение давления и перемещения по X , Y и Z (слева направо) в последний момент времени.

Тогда система уравнений может быть переведена в грубую сетку

$$A_c u_c + G_c p_c = F_c,$$

$$D_c u_c + B_c p_c = Y_c,$$

где $A_c = R_u A_f R_u^T$, $B_c = R_p B_f R_p^T$, $F_c = R_u F_f$, $Y_c = R_p Y_f$, $G_c = R_u G_f R_p^T$, $D_c = R_p D_f R_u^T$ и

$$A_f u = \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(v) dx, \quad B_f p = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \frac{p}{\tau} q dx + \int_{\Omega} (k \nabla p, \nabla q) dx,$$

$$G_f p = \int_{\Omega} \alpha \nabla p \cdot v dx, \quad D_f u = \int_{\Omega} \alpha \frac{\operatorname{div} u}{\tau} q dx,$$

$$F_f = \int_{\Omega} f_u v dx, \quad Y_f = \int_{\Omega} f_p q dx.$$

После получения решения на грубой сетке можем реконструировать решение на мелкой сетке.

$$u_{ms} = R_u^T u_c, \quad p_{ms} = R_p^T p_c.$$

В результате получаем решение на мелкой сетке для задачи пороупругости (u_{ms}, p_{ms}) . Численные результаты задачи пороупругости в трехмерной постановке показаны на рис. 1

В **четвертой главе** рассматриваются решения задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах с помощью обобщенного многомасштабного метода конечных элементов.

Задача № 1. Рассматривается моделирование задачи потока и геомеханики в трещиновато-пористых средах с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов. Проводится исследование влияние трещины

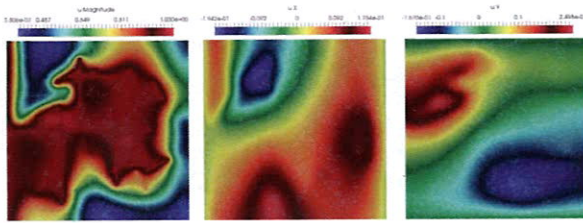


Рис. 2. Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени. Неоднородные трещиноватые пористые среды.

относительно однородности и неоднородности среды и количества многомасштабных базисных функций.

Имеем следующую связанную систему уравнений для перемещения и давления в пористой матрице и трещин

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div} \sigma(u) + \alpha \operatorname{grad} p &= 0, & x \in \Omega, \\
 c_m \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \operatorname{div} (a_m \operatorname{grad} p) + \sigma_{mf}(p - p_f) &= f, & x \in \Omega, \\
 c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div} (a_f \operatorname{grad} p_f) - \sigma_{fm}(p - p_f) &= f_f, & x \in \gamma,
 \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$c_m = \frac{1}{M}, \quad c_f = \frac{b}{M_f}, \quad a_m = \frac{k}{\nu_f}, \quad a_f = b \frac{k_f}{\nu_f}.$$

Аппроксимация на грубой сетке

Здесь K_ω, A_ω – матрицы жесткости для перемещения и давления в локальной области ω_i , а Q_ω, S_ω – матрицы масс для перемещения и давления

$$\begin{aligned}
 Q_\omega &= [q_{ij}], \quad q_{ij} = \int_\Omega a_m \phi_i \phi_j dx + \sum_l \int_{\gamma_l} a_f \psi_i \psi_j dx \\
 S_\omega &= [s_{ij}], \quad s_{ij} = \int_\Omega (\lambda + 2\mu) \Phi_i \Phi_j dx.
 \end{aligned}$$

Выберем собственные векторы $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{L_l}$ и $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{L_l}$, соответствующие первым наименьшим собственным значениям L_l , где $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{L_l}$ ($l = u, p$).

На рис. 2 представлено распределение давления и перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени в неоднородных средах.

Задача № 2. проводится решение задач пороупругости в мультиконтинуальных средах с помощью обобщённого многомасштабного метода конечных

элементов. Математическая модель описывается системой уравнений для давлений в каждом континууме и уравнением для перемещения.

Имеем следующую связанную систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \operatorname{div} \cdot (k_1 \operatorname{grad} p_1) + q_{12} + q_{1f} &= f_1, \quad x \in \Omega, \\ \alpha_2 \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_2} \frac{\partial p_2}{\partial t} - \operatorname{div} \cdot (k_2 \operatorname{grad} p_2) - q_{21} + q_{2f} &= f_2, \quad x \in \Omega, \\ \alpha_f \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} + \frac{1}{M_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div} \cdot (k_f \operatorname{grad} p_f) - q_{f1} - q_{f2} &= f_f, \quad x \in \gamma, \\ -\operatorname{div} \sigma(u) + \alpha_1 \operatorname{grad} p_1 + \alpha_2 \operatorname{grad} p_2 + \alpha_f \operatorname{grad} p_f &= 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Многомасштабные базисные функции для давлений в многоконтинуумных средах

Чтобы построить снэпшот пространство, мы решаем следующую локальную задачу в области ω_l : найти $\psi^{l,j} = (\psi_1^{l,j}, \dots, \psi_M^{l,j}) \in W_1^h \times \dots \times W_M^h$ такой что

$$b_i(\psi_i^{l,j}, w_i) + \sum_j q_{ij}(\psi_i^{l,j} - \psi_j^{l,j}, w_i) = 0, \quad \forall w_i \in \hat{W}_i^h, \quad (29)$$

где

$$W_i^h = \{w \in H^1(\omega_l) : w = \delta_i^j \text{ on } \partial\omega_l\}, \quad \hat{W}_i^h = \{w \in H^1(\omega_l) : w = 0 \text{ on } \partial\omega_l\}$$

и δ_i^j – кусочно-постоянная функция (дельта-функция) для $j = 1, \dots, N_v^{\omega_l}$ ($N_v^{\omega_l}$ – количество узлов на вычислительной сетки для ω_l), i – индекс континуума ($i = 1, \dots, M$). Поэтому решаем локальные задачи $L_p^{\omega_l} = N_v^{\omega_l} \cdot M$.

Мы определяем снэпшот пространство для давлений в многоконтинуумных средах следующим образом

$$W_{snap}(\omega_l) = \operatorname{span}\{\psi^{l,j}, l = 1, \dots, N_v^H, j = 1, \dots, L_p^{\omega_l}\}. \quad (30)$$

Далее мы решаем следующую локальную спектральную задачу на снэпшот пространстве

$$\tilde{A}_p \tilde{\phi}^l = \lambda_p \tilde{S}_p \tilde{\phi}^l, \quad (31)$$

где $\hat{\phi}^l = (R_{snap}^p)^T \tilde{\phi}^l$ и

$$\tilde{A}_p = R_{snap}^p A_p (R_{snap}^p)^T, \quad \tilde{S}_p = R_{snap}^p S_p (R_{snap}^p)^T, \quad R_{snap}^p = (\psi^{l,1}, \dots, \psi^{l,L_p^{\omega_l}})^T$$

На рис. 3 представлено распределение давления для первого и второго континуума, перемещения по направлениям X, Y в последний момент времени.

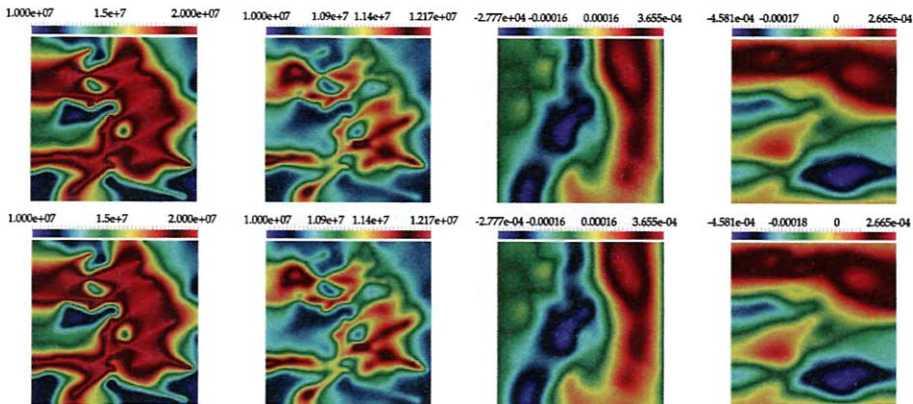


Рис. 3. Давление для первого континуума и второго континуума и перемещения по направлению X и Y в конечный момент времени (слева направо). Первый ряд: мелкомасштабное решение. Второй ряд: многомасштабное решение с использованием 16 многомасштабных базисных функций.

Задача № 3. Рассматривается встроенная модель трещины при моделировании задачи поропругости с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов.

Пусть Ω – расчетная область для пористой матрицы, а γ – область трещины пониженного порядка. Мы рассматриваем математическую модель течения и геомеханики в трещиноватой поропругой среде, которая описывается следующей системой уравнений для перемещения, давления в пористой матрице и трещин

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div} \sigma(u) + \alpha \operatorname{grad} p &= 0, \quad x \in \Omega, \\
 c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} - \operatorname{div} (k_m \operatorname{grad} p_m) + r_{mf}(p_m - p_f) &= f_m, \quad x \in \Omega, \\
 c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div} (k_f \operatorname{grad} p_f) - r_{fm}(p_m - p_f) &= f_f, \quad x \in \gamma
 \end{aligned} \tag{32}$$

с линейной зависимостью между тензорами напряжения σ и деформации ε

$$\sigma(u) = \lambda \varepsilon_v \mathcal{I} + 2\mu \varepsilon(u), \quad \varepsilon(u) = 0.5(\nabla u + (\nabla u)^T),$$

где λ , μ – параметры Ламе, u – перемещение, p – давление, α – коэффициент Био, f – источник, $k_\alpha = \kappa_\alpha / \nu$, ν – вязкость, κ_α – проницаемость для $\alpha = m, f$, $r_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} r$, r – коэффициент переноса, $\eta_{\alpha\beta}$ – геометрические факторы, c_α – сжимаемость для $\alpha = m, f$.

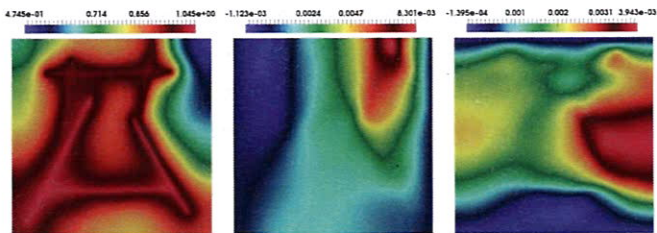


Рис. 4. Распределение давления, перемещения по направлениям X и Y в последний момент времени для 8 многомасштабных базисных функций.

Для аппроксимации задачи потока мы используем аппроксимацию конечно-го объема на структурированных мелких сетках и получаем следующую дискретную систему

$$\begin{aligned}
 c_m \frac{p_{m,i} - \check{p}_{m,i}}{\tau} |\zeta_i| + \sum_j T_{ij} (p_{m,i} - p_{m,j}) + \sum_l q_{il} (p_{m,i} - p_{f,l}) &= f_m |\zeta_i|, \quad \forall i = 1, N_f^m, \\
 c_f \frac{p_{f,l} - \check{p}_{f,l}}{\tau} |u_l| + \sum_n W_{ln} (p_{f,l} - p_{f,n}) - \sum_i q_{il} (p_{m,i} - p_{f,l}) &= f_f |u_l|, \quad \forall l = 1, N_f^f,
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

где $T_{ij} = k_m |E_{ij}| / \Delta_{ij}$ ($|E_{ij}|$ – длина интерфейса между ячейками ζ_i и ζ_j , Δ_{ij} – расстояние между средней точкой ячеек ζ_i и ζ_j), $W_{ln} = k_f / \Delta_{ln}$ (Δ_{ln} – расстояние между точками l и n), $|\zeta_i|$ и $|u_l|$ – объем ячеек ζ_i и u_l , $q_{il} = r$ если $\zeta_i \cap u_l \neq \emptyset$ в противном случае равен нулю. Здесь $(\check{p}_m, \check{p}_f)$ – решение из предыдущего временного шага.

На рис. 4, представлено распределение давления и перемещения по направлениям X и Y в конечный момент времени для 8 многомасштабных базисных функций в неоднородных средах.

Основные результаты работы. В диссертационной работе представлены многомасштабные методы для решения задач пороупругости в неоднородных и трещиноватых средах, которые позволяют значительно уменьшить размерность дискретного аналога исходной системы с минимальной потерей точности. Полученные результаты могут быть сформулированы следующим образом:

1. Для численного решения задачи пороупругости в неоднородных средах разработаны методы аппроксимации на грубой сетке: обобщенный многомасштабный метод конечных элементов и метод усреднения. Из получен-

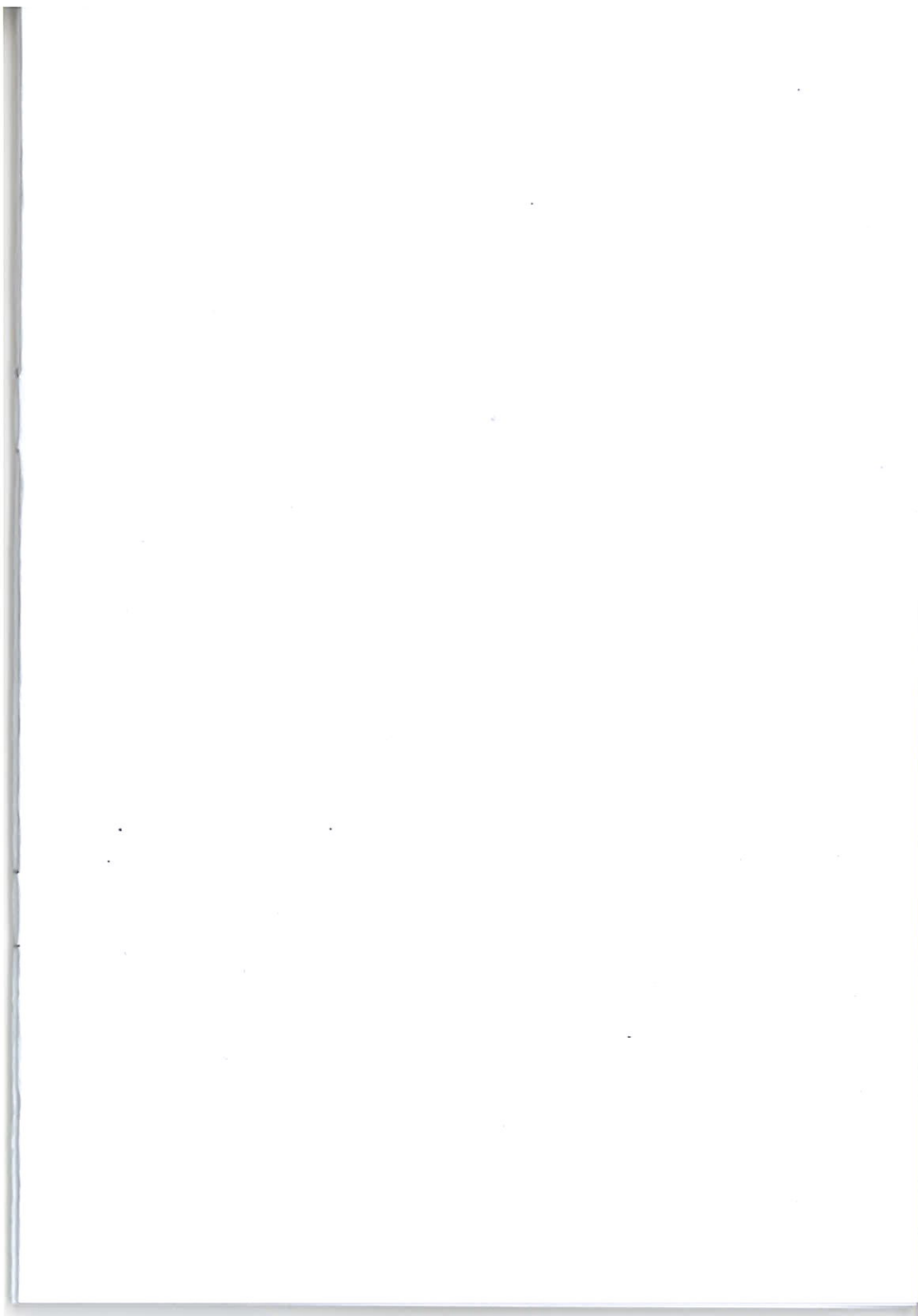
ных результатов следует, что точность обобщенного многомасштабного метода конечных элементов повышается при увеличении числа многомасштабных базисов, используемых при моделировании, а для метода усреднения не наблюдается повышения точности. Этот факт следует учитывать в тех приложениях, где исходные данные задачи задаются с большой погрешностью.

2. Выполнены исследования по моделированию задачи вязкопорупругости. При построении математической модели для задачи вторичной консолидации была использована вязкоупругая формулировка Кельвина-Фойгта. Для численного решения связанной системы уравнений для давления и перемещения построена аппроксимация задачи с помощью метода конечных элементов с использованием линейных базисных функций. Проведено численное исследование задачи при различных граничных условиях и построены графики численного сравнения моделей для давления и перемещения при различных коэффициентах вторичной консолидации.
3. Рассмотрены математические модели для численного решения задач порупругости мультисконтинуумных средах. При построении многомасштабного пространства использовались несвязанные многомасштабные базисные функции для давлений и перемещения. Представлена аппроксимация на мелкой сетке на основе метода конечных элементов и подхода дискретной модели трещины для двух и трехмерных формулировок. Предлагаемый многомасштабный метод обеспечивает хорошую точность для задачи мультисконтинуума.
4. Для численного решения задачи порупругости в трещиноватых средах разработан обобщенный многомасштабный метод конечных элементов. Дискретизация на мелкой сетке построена на основе метода конечных объемов для давления в трещиноватой среде и метода конечных элементов для перемещения. Для решения задачи потока и деформации в трещиноватых средах со встроенной моделью трещин использован GMsFEM. Работоспособность метода проверена на двумерной модельной задаче с различным количеством многомасштабных базисных функций.

Публикации автора по теме диссертации

1. Васильева М. В., Колесов А. Е., Тырылгин А. А. Численное моделирование задачи вязкопорупругости грунтов // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. – 2017. – №. 3 (59). –С. 48–57.
2. Васильева М. В., Васильев В. И., Тырылгин А. А. Консервативная разностная схема для задач фильтрации в трещиноватых средах // Математические заметки СВФУ. – 2018. – Т. 25. – №. 4. –С. 84–101.
3. Алексеев, В. Н., Васильева, М. В., Прокопьев, Г. А., Тырылгин, А. А. Модели термоупругости для пористых материалов с учетом наличия трещин // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24. – №. 3. –С. 19–37.
4. Alekseev, V. N., Tyrylgin, A. A., Vasilyeva, M. V., Vasilyev, V. I. Численное усреднение для задач теплопереноса в условиях криолитозоны // Mathematical notes of NEFU. – 2020. – Т. 27. – №. 2. – С. 77–92.
5. Alekseev V., Tyrylgin A., Vasilyeva M. Generalized Multiscale Finite Element Method for Elasticity Problem in Fractured Media // International Conference on Finite Difference Methods. – Springer, Cham, 2018. – С. 137–144. (Scopus).
6. Tyrylgin A., Vasilyeva M., Brown D. Generalized Multiscale Finite Element Method for Poroelasticity Problems in Heterogeneous Media // International Conference on Finite Difference Methods. – Springer, Cham, 2018. – С. 566–573. (Scopus).
7. Tyrylgin A., Vasilyeva M., Zhang Q., Spiridonov D., Alekseev V. Mathematical modeling of the fluid flow and geo-mechanics in the fractured porous media using generalized multiscale finite element method // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2018. – Т. 2025. – № 1. – С. 100009. (Web of Sciences & Scopus).
8. Alekseev V., Gavrilova U., Spiridonov D., Tyrylgin A., Vasilyeva M. Numerical simulation of the transport and flow problems in perforated domains using generalized multiscale finite element method // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2018. – Т. 2025. – № 1. – С. 100001. (Web of Sciences & Scopus).

9. Vasilyeva M., Tyrylgin A. Convolutional neural network for fast prediction of the effective properties of domains with random inclusions // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1158. – №. 4. – С. 042034. (Web of Sciences & Scopus).
10. Tyrylgin A., Vasilyeva M., Chung E. T. Embedded fracture model in numerical simulation of the fluid flow and geo-mechanics using Generalized Multiscale Finite Element Method // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1392. – №. 1. – С. 012075. (Scopus).
11. Tyrylgin A., Spiridonov D., Vasilyeva M. Numerical homogenization for poroelasticity problem in heterogeneous media // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1158. – №. 4. – С. 042030. (Web of Sciences & Scopus).
12. Tyrylgin A., Vasilyeva M., Spiridonov D., Chung E. T. Generalized Multiscale Finite Element Method for the poroelasticity problem in multicontinuum media // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – Т. 374. – С. 112783. (Web of Sciences, Q1 & Scopus).
13. Tyrylgin A., Chen Y., Vasilyeva M., Chung E. T. Multiscale model reduction for the Allen-Cahn problem in perforated domains // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2020. – Т. 381. – С. 113010. (Web of Sciences, Q1 & Scopus).
14. Vasilyeva M., Chung E. T., Efendiev Y., Tyrylgin A. A. Three-level multi-continua upscaling method for flow problems in fractured porous media // COMMUNICATIONS IN COMPUTATIONAL PHYSICS, 2018. – Т. 27, №. 3. – С. 619–638 (Web of Sciences, Q1)
15. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ "Вычислительная библиотека для численного усреднения задачи пороупругости в неоднородных средах"(Тырылгин А.А.). № 2019667154 от 07.12.2019 г.
16. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ "Вычислительная библиотека для численного моделирования задачи пороупругости в трещиноватых средах с использованием обобщенного многомасштабного метода конечных элементов"(Тырылгин А.А.). № 2019667153 от 07.12.2019 г.



Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60x84/16.
Гарнитура «Таймс». Печать цифровая.
Печ. л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ № 4.

Издательский дом Северо-Восточного федерального университета,
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.

Отпечатано в типографии ИД СВФУ