На правах рукописи

Григорьев Александр Виссарионович

Численное моделирование фильтрации в трещиновато-пористых средах на основе модели двойной пористости

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численное методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Якутск 2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и в Центре вычислительных технологий Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова

Научный руководитель:	**Вабищевич Петр Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Бадриев Ильдар Бурханович**, доктор физико-математических наук, профессор Казанского Государственного Университета, г. Казань, **Мордовской Сергей Денисович**, доктор технических наук, заведующий кафедрой ИТ Института Математики и Информатики СВФУ, г. Якутск
Ведущая организация:	Институт прикладной математики им. Келдыша РАН

Защита состоится 20 декабря 2013 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.306.04 при Северо-Восточном федеральном университете имени М. К. Аммосова, расположенного по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского 58, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова.

Автореферат разослан 19 ноября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Саввинова Н.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. При решении прикладных проблем мы имеем дело с краевыми задачами для систем нестационарных уравнений в частных производных. При построении вычислительных алгоритмов для таких задач решаются проблемы аппроксимации уравнений с учетом соответствующих начальных и граничных условий. Аппроксимация по пространству проводится на основе разностных методов, метода конечных элементов, метода конечных объемов. В настоящее время необходимо решать задачи в сложных расчетных областях. В силу этого метод конечных элементов рассматривается как основная технология для проведения инженерных и научных исследований.

Большое прикладное значение в строительстве гидротехнических сооружений, в мелиорации, водоснабжении, при добыче нефти и газа имеют исследования движение жидкости (воды, нефти) или газа (воздуха, природного газа) сквозь пористую среду. Наиболее простые модели фильтрации жидкости приводят к одному эллиптическому (стационарные задачи) или параболическому (нестационарные задачи) уравнению второго порядка с линейными или нелинейными коэффициентами. Более содержательные задачи связаны с необходимостью рассмотрения краевых задач для систем уравнений.

Модель пористой среды представляет собой систему непроницаемых, неподвижных зерен произвольной формы, между которыми имеются небольшие пустоты — поры. Считаем, что поры заполнены жидкостью или газом, которые могут при соответствующих условиях перемещаться. Во многих прикладных проблемах мы должны учитывать что в породах, кроме пор, имеется развитая система трещин. Проблема математического моделирования двойной пористости тесно связана с задачами разработки месторождений углеводородов, с задачами течения подземных вод, просачивания жидкости в грунт и рядом других актуальных задач. Данные задачи связаны с особенностью большинства реальных грунтов — наличием трещин. Математические модели движения жидкости в такой среде были разработаны в конце 50-х годов Г.И.Баренблаттом, Ю.П.Желтовым, И.Н.Кочиной. В современной литературе эта модель двойной пористости (в порах и в трещинах) известна как модель Баренблатта. Модель характеризуется наличием обмена давлениями между фазами.

Классическая модель двойной пористости включает два параболических уравнения для давления в порах и давления в трещинах. Основная особенность рассматриваемой математической модели состоит в том, что отдельные уравнения связаны друг с другом по младшему коэффициенту — обмен между трещинами и порами до установления одного и того же давления. Актуальной проблемой является построение и обоснование вычислительных алгоритмов для приближенного решения подобных задач, когда переход на новый временной слой был бы связан с решением двух отдельных задач, несвязанных друг с другом. Более общие модели двойной пористости основаны на системах уравнений, в которой уравнения завязаны также по старшим коэффициентам и по коэффициентам при производных по времени. Упрощенная модель двойной пористости приводит к одному уравнению, которое является псевдопараболическим уравнением. Хорошо известны схемы расщепления по пространственным переменным для параболических задач. Интересно построить схемы расщепления по направлениям для краевых задач для псевдопараболических уравнений.

Эрозия почвы — разрушение и снос верхних наиболее плодородных горизонтов почвы. Эффективная защита почв от водной эрозии возможна при плановом и систематическом внедрении комплекса противоэрозионных мероприятий, разработанного с учетом конкретных природно-географических условий каждого района или хозяйства. Также такие задачи ставятся при строительстве помещений, технических сооружений и транспортных путей сообщения. Защита естественных и техногенных массивов дисперсных грунтов от размыва является одной из самых актуальных проблем на территории России. На данный момент не существует универсального способа позволяющего решить указанную проблему. Область рационального применения существующих методов защиты грунтов от эрозии достаточно ограниченна, поэтому использующиеся на практике методы часто применяются в несвойственных для них условиях, что приводит либо к завышенной стоимости профилактических работ, либо их низкой эффективности. Очевидным является тот факт, что наличие систем трещин в грунте делает его наиболее подверженным водной эрозии. В данных случаях с целью правильного и не затратного обеспечения защиты от водной эрозии будет целесообразно проведения комплекса расчетно-теоретического исследования процесса увлажнения.

Целью диссертационной работы является разработка вычислительных алгоритмов расщепления для численного моделирования процессов фильтрации с учетом наличия трещин. Для достижения данной цели сформулированы следующие задачи:

- Построение вычислительных алгоритмов расщепления, реализующих модели двойной пористости;
- Создание программ для численного моделирования фильтрации в трещиновато-пористых средах;
- Тестирование разработанных вычислительных алгоритмов и программ на модельных тестовых двумерных задачах;
- Численное моделирование задачи просачивания жидкости в грунт при наличии в нем системы трещин.

Научная новизна и практическая значимость. В диссертационной работе получены следующие результаты:

- Построены и исследованы схемы расщепления для моделей двойной пористости;
- Разработаны вычислительные алгоритмы и прикладное программное обеспечение для численного исследования процессов насыщенной и ненасыщенной фильтрации в трещиновато-пористых средах;
- Проведено численное моделирование процесса просачивания воды из канала в грунт. Моделирование просачивания воды в трещиновато-пористую среду проведено в условиях максимально приближенных к реальным: трехмерная задача, сложная геометрия вычислительной области, подробные расчетные сетки.

Апробация работы. Основные материалы диссертации докладывались на научных конференциях:

- International Young Scientists Conference on Mathematical Modeling (Liniy, China, May 24-25, 2010);
- Supercomputer Technologies of Mathematical Modeling (Yakutsk, November 28-30, 2011);

- Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации (Якутск, 21-26 мая, 2012);
- 5th International Conference on Porous Media & Annual Meeting (Prague, Czech Republic, May 21-24, 2013);
- Supercomputer Technologies of Mathematical Modeling (Yakutsk, July 8-11, 2013).

Работа выполнена при поддержке следующих грантов:

- *Разработка математических моделей и высокопроизводительных программных средств для суперкомпьютерного моделирования рационального природопользования с учетом антропогенного и техногенного воздействия на окружающую среду* регионального конкурса *ДАЛЬНИЙ ВОСТОК* Российского фонда фундаментальных исследований;
- *Разработка прикладного ПО для численного моделирования добычи углеводородного сырья на высокопроизводительных вычислительных системах* №5542 ГЗ МО;
- грант 02.740.11.0041 *Разработка симуляторов экологически безопасных технологий разработки и мониторинга месторождений ископаемых Арктики и регионов Севера* Федеральной целевой программы.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 8 научных работах, из них 2 статьи [1, 2] в рецензируемых журналах входящих, в перечень ВАК, 3 статьи [3–5], 2 тезиса конференций [6, 7] и одно учебное пособие [8].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Содержание работы

Во **введении** дана краткая характеристика моделей двойной пористости, обсуждаются задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах, обоснована актуальность разрабатываемых и исследуемых в диссертации вычислительных алгоритмов расщепления. Кратко излагается содержание диссертации по главам и дана характеристика основных результатов работы.

В **первой главе** рассматриваются проблемы математического моделирования фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде на основе псевдопараболического уравнения. Модель двойной пористости приводится к краевой задаче для псевдопараболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \operatorname{grad} u - \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0.$$

Здесь u – давление в трещиноватой среде, γ – параметр, задающий псевдопараболичность модели. После вычисления u мы имеем возможность определить давление в порах. Модель замыкается соответствующими начальными и граничными условиями. Сформулированы условия, при которых это приближение работает.

Для решения двумерной модельной задачи используется стандартная конечно-элементная аппроксимация по пространству. Для аппроксимации по времени применяются схемы с весами, вычислительная реализация которых связана с решением сеточного эллиптического уравнения на каждом шаге по времени. На модельной двумерной (обезразмеренной) задаче исследуется зависимость точности приближенного решения от физических и вычислительных параметров. На рис. 1 приводятся характерные результаты численных расчетов распределения давления при шаге по времени $\tau = 0.06$ на расчетной сетке из 1294 треугольных элементов со сгущением в участках с наибольшими градиентами решения. Можно, в частности, отметить, что фильтрация в трещинах протекает быстрее чем в порах.

Основной результат этой части нашего исследования связан с построением и исследованием схем расщепления по пространственным переменным. Особенность задачи обусловлена расщеплением оператора при производной по времени.

В задаче Коши для эволюционного уравнения первого порядка ищется функция $u(t) \in H$, удовлетворяющая уравнению

$$B \frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0,$$

по заданному $f(t) \in H$ и начальному условию

$$u(0) = u^0.$$

Линейные операторы A и B — положительные, самосопряженные и стационарные.

В случае псевдопараболической модели оператор

$$B = E + \gamma A.$$

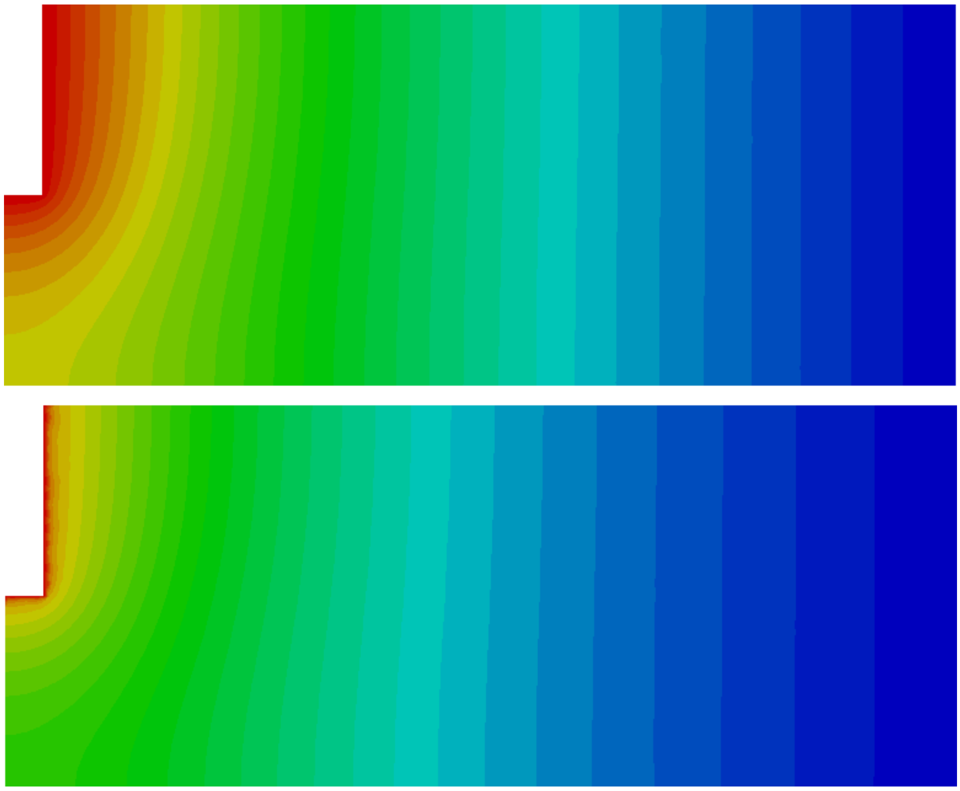

Рис. 1: Распределение давления в трещинах (сверху), в порах (снизу) при $t = 1$.

Для аддитивных разностных схем характерно разбиение оператора A на сумму операторов более простой структуры:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \quad A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Понижение вычислительной сложности численного решения задачи связывается с использованием аддитивного представления также и для оператора B. Схемы расщепления строятся на основе решения задач

$$(E + \gamma A_\alpha)\frac{du_\alpha}{dt} + A_\alpha u_\alpha = f_\alpha(t), \quad t > 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., p$$

на каждом временном слое при задании соответствующих начальных условий.

В работе строятся векторные аддитивные схемы. От исходного уравнения переходим к системе уравнений, когда компоненты вектора $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ определяются из

$$\frac{du_\alpha}{dt} + \gamma \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta \frac{du_\beta}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta u_\beta = f(t), \quad t > 0,$$

$$u_\alpha(0) = u^0, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Построенная схема расщепления для векторной задачи имеет вид

$$(E + \gamma A_\alpha)\left(\theta \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} + (1-\theta)\frac{y_\alpha^n - y_\alpha^{n-1}}{\tau}\right) + \sum_{\alpha \neq \beta = 1}^{p} (E + \gamma A_\beta)\frac{y_\beta^n - y_\beta^{n-1}}{\tau} +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} A_\beta \frac{y_\beta^{n+1} + y_\beta^n}{2} + A_\alpha \frac{y_\alpha^{n+1} + 2y_\alpha^n + y_\alpha^{n-1}}{4} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta \frac{y_\beta^n + y_\beta^{n-1}}{2} = \varphi^n,$$

$$n = 0, 1, ..., \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Вычислительная реализация схемы связана с решением сеточных задач

$$\left(E + \left(\gamma\theta + \frac{\tau}{4}\right) A_\alpha\right) y_\alpha^{n+1} = \chi_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Доказана безусловная устойчивость предложенной схемы расщепления.

Проблемам численного моделирования двойной пористости на основе системы уравнений для давлений в трещинах и порах посвящена **вторая глава**. Рассматривается модель двойной пористости для описания однофазной фильтрации флюида в трещиновато-пористой среде (среды несжимаемы):

$$c_1(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_1}{\partial t} - \operatorname{div}(d_1(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u_1) + r(\boldsymbol{x})(u_1 - u_2) = f_1(\boldsymbol{x}, t),$$

$$c_2(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(d_2(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u_2) + r(\boldsymbol{x})(u_2 - u_1) = f_2(\boldsymbol{x}, t).$$

где индексами 1 и 2 обозначены соответственно параметры трещиноватой и пористой сред, $r(\boldsymbol{x})(u_1 - u_2)$ — обменный поток между средами, $d_\alpha = k_\alpha/\mu$, k_α — проницаемости, μ — вязкость флюида, $\alpha = 1, 2$. Краевая задача рассматривается в ограниченной области Ω при $0 < t \leq T$.

Строится вычислительный алгоритм решения задачи при использовании неявных аппроксимаций по времени. Для решения модельной двумерной задачи используется стандартная конечно-элементная аппроксимация по пространству. Для аппроксимации по времени применяется полностью неявная схема:

$$c \int_\Omega \frac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\tau} v_1 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \operatorname{grad} y_1^{n+1} \operatorname{grad} v_1 d\boldsymbol{x} + r \int_\Omega (y_1^{n+1} - y_2^{n+1}) v_1 d\boldsymbol{x} = 0,$$

$$\int_\Omega \frac{y_2^{n+1} - y_2^n}{\tau} v_2 d\boldsymbol{x} + d \int_\Omega \operatorname{grad} y_2^{n+1} \operatorname{grad} v_2 d\boldsymbol{x} + r \int_\Omega (y_2^{n+1} - y_1^{n+1}) v_2 d\boldsymbol{x} = 0.$$

Обезразмеривание проведено при постоянных коэффициентах и однородных правых частях так, что

$$c_1 = c, \quad d_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad d_2 = d.$$

На основе вариантных численных расчетов проведено исследование зависимости точности приближенного решения от вычислительных (сетки по пространству и шаг по времени) и физических параметров (коэффициенты системы уравнений).

Для уменьшения вычислительной работы строятся схемы расщепления по физическим процессам, когда переход на новый временной слой обеспечивается раздельным расчетом давлений для трещин и пор. Отмечены два варианта схем с расщеплениям: последовательный (расчет одного давления после расчета другого) и параллельный (независимый расчет давлений на каждом шаге по времени). Последовательная схема расщепления имеет вид:

$$c \int_\Omega \frac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\tau} v_1 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \operatorname{grad} y_1^{n+1} \operatorname{grad} v_1 d\boldsymbol{x} + r \int_\Omega (y_1^{n+1} - y_2^n) v_1 d\boldsymbol{x} = 0,$$

$$\int_\Omega \frac{y_2^{n+1} - y_2^n}{\tau} v_2 d\boldsymbol{x} + d \int_\Omega \operatorname{grad} y_2^{n+1} \operatorname{grad} v_2 d\boldsymbol{x} + r \int_\Omega (y_2^{n+1} - y_1^{n+1}) v_2 d\boldsymbol{x} = 0.$$

Для параллельной схемы расщепления имеем:

$$c \int_\Omega \frac{y_1^{n+1} - y_1^n}{\tau} v_1 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \operatorname{grad} y_1^{n+1} \operatorname{grad} v_1 d\boldsymbol{x} + r \int_\Omega (y_1^{n+1} - y_2^n) v_1 d\boldsymbol{x} = 0,$$

$$\int_\Omega \frac{y_2^{n+1} - y_2^n}{\tau} v_2 d\boldsymbol{x} + d \int_\Omega \operatorname{grad} y_2^{n+1} \operatorname{grad} v_2 d\boldsymbol{x} + r \int_\Omega (y_2^{n+1} - y_1^n) v_2 d\boldsymbol{x} = 0.$$

Обобщенная модель двойной пористости основывается на системе уравнений

$$c_{11}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + c_{12}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(d_{11}(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u_1) - \operatorname{div}(d_{12}(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u_2)$$
$$+ r(\boldsymbol{x})(u_1 - u_2) = f_1(\boldsymbol{x}, t),$$

$$c_{21}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u_1}{\partial t} + c_{22}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u_2}{\partial t} - \operatorname{div}(d_{21}(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u_1) - \operatorname{div}(d_{22}(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u_2)$$
$$+ r(\boldsymbol{x})(u_2 - u_1) = f_2(\boldsymbol{x}, t).$$

Построены схемы расщепления, которые основаны на явно-неявных аппроксимациях по времени. Рассмотрен, в частности, случай зацепления уравнений не только по младшим и старшим коэффициентам системы, но и зацепление по коэффициентам при производных по времени. Доказана безусловная устойчивость явно-неявных схем в соответствующих гильбертовых пространствах.

Третья глава посвящена численному моделированию процесса фильтрации в ненасыщенном грунте в приближении двойной пористости. Рассмотрена система уравнений, которая описывает процесс ненасыщенной фильтрации в трещиновато-пористой среде на основе уравнений Ричардса:

$$m_1 \frac{\partial s_1(p_1)}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \operatorname{div}(K_1(p_1) \operatorname{grad}(p_1 + x_3)) + r(\boldsymbol{x})(p_1 - p_2) = f_1,$$

$$m_2 \frac{\partial s_2(p_2)}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial t} - \operatorname{div}(K_2(p_2) \operatorname{grad}(p_2 + x_3)) + r(\boldsymbol{x})(p_2 - p_1) = f_2,$$

где индексами 1 и 2 обозначены параметры трещиноватой и пористой сред соответственно, $p_\alpha = \tilde{p}_\alpha / \rho g$ — приведенное давление, $\tilde{p}_\alpha$ — давление, m_α — пористость, $s_\alpha(p_\alpha)$ — насыщенность, $K_\alpha(u_\alpha)$ — гидравлическая проводимость, $r(\boldsymbol{x})(u_1 - u_2)$ — обменный поток между средами. Данные уравнения являются существенно нелинейными из-за нелинейных функций $s_\alpha(p_\alpha)$, $K_\alpha(p_\alpha)$. Вклад гравитационный силы в процесс просачивания воды осуществляется за счет последнего слагаемого в диффузионных операторах $\operatorname{div}(K_\alpha(p_\alpha) \operatorname{grad}(p_\alpha + x_3))$.

На модельной двумерной задаче исследуется зависимость точности приближенного решения от физических и вычислительных параметров. На рис. 2 приводятся характерные результаты по распределению давления при шаге по времени $\tau = 0.1$ на расчетной сетке из 1132 треугольных элементов со сгущением в участках с наибольшими градиентами решения.

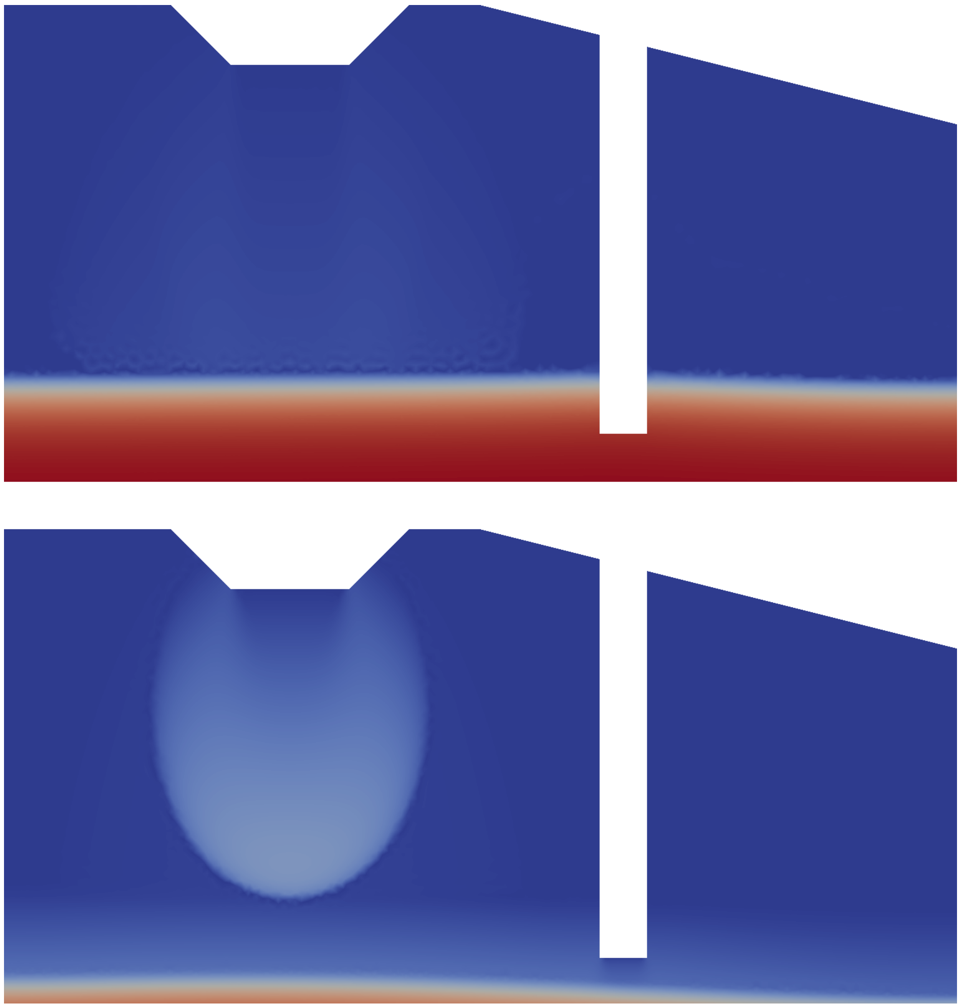

Рис. 2: Распределение насыщенности в трещинах (сверху), в порах (снизу) при $t = 20$ ч.

Основное внимание уделяется численному моделированию задачи просачивания из канала с учетом системы колодцев. Трехмерные расчеты выполнены при использовании конечно-элементных аппроксимаций по пространству и шаге по времени $\tau = 0.1$ на расчетной сетке из 71574 тетраэдральных элементов. На рис. 3, 4 показано давление в трещинах и в порах.

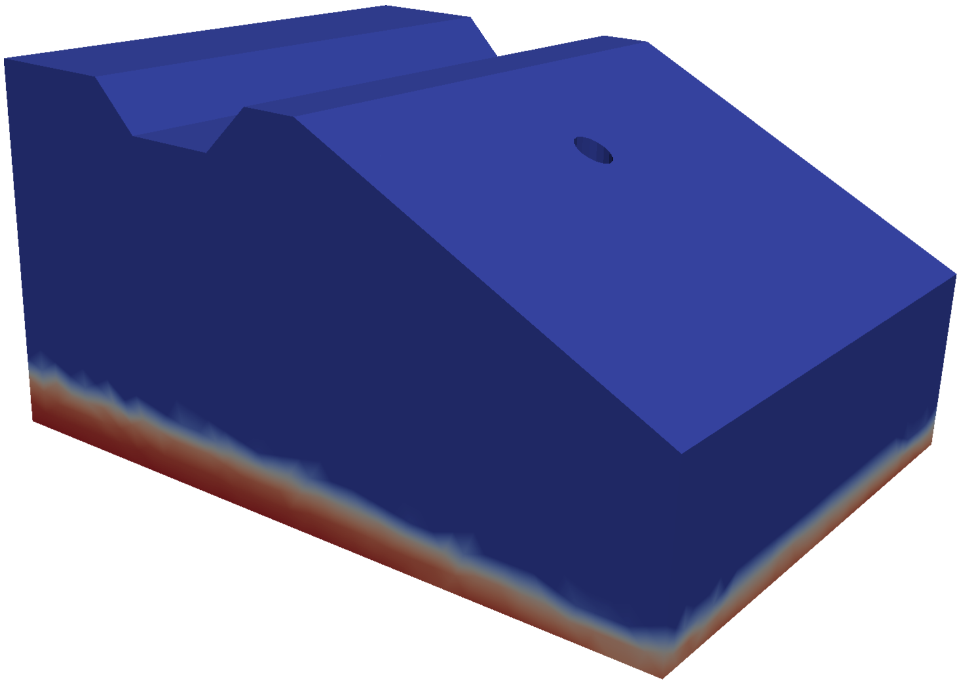

Рис. 3: Распределение насыщенности в трещинах при $t = 10$ ч.

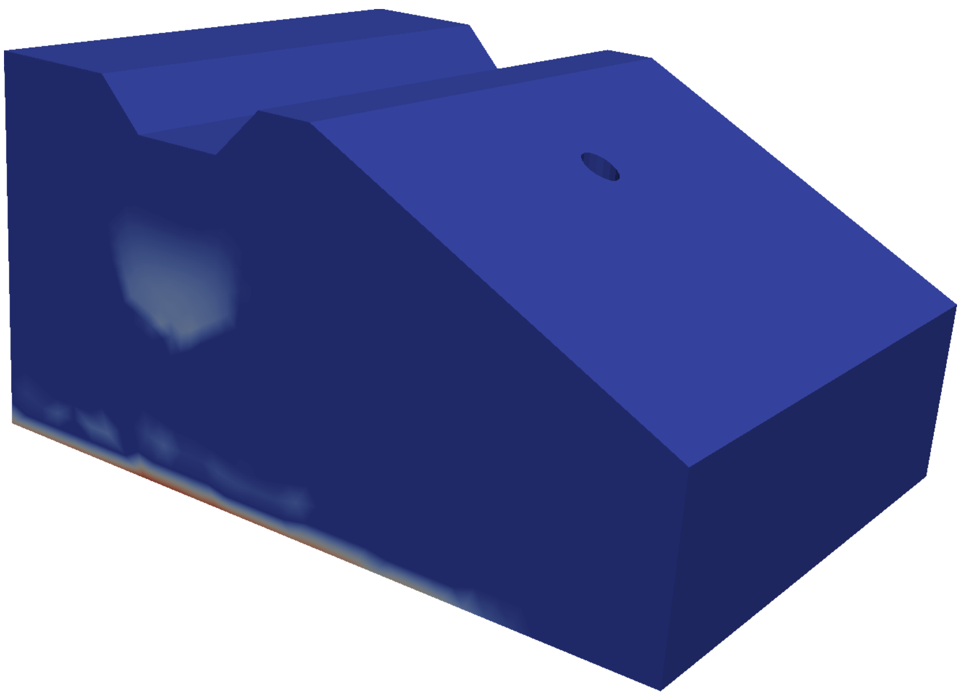

Рис. 4: Распределение насыщенности в порах при $t = 10$ ч.

Расчеты выполнены на вычислительном кластере СВФУ. На рис. 5 отображено разбиение области на не пересекающиеся подобласти. График зависимости времени счета от количества процессоров представлен на рис. 6).

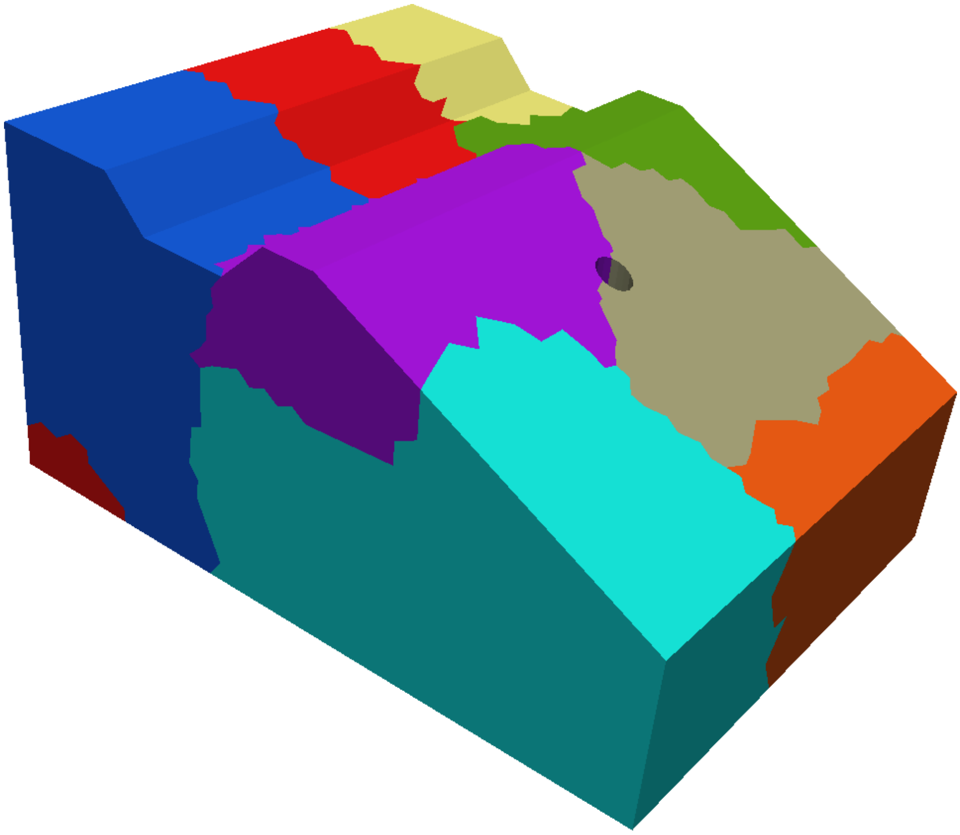

Рис. 5: Разбиение области по процессорам

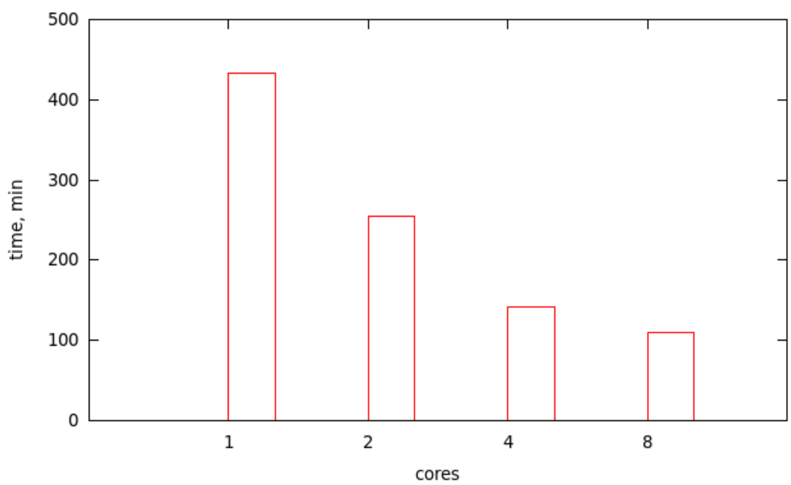

Рис. 6: Зависимость времени счета от числа процессоров

Основные результаты работы:

1. Предложены и исследованы аддитивные схемы расщепления по направлениям для псевдопараболической модели двойной пористости;
2. Построены безусловно устойчивые схемы расщепления по процессам для общей модели двойной пористости;
3. Проведено трехмерное численное моделирование процесса просачивания из канала в грунт в приближении двойной пористости.

Список литературы

1. Вабищевич П. Н., Григорьев А. В. Схемы расщепления для псевдопараболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, №7. с. 837–843.
2. Григорьев А. В. Численное моделирование фильтрации в трещиновато-пористой среде // Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 18, выпуск 2.
3. Григорьев А. В. Preparing input data for modeling the development of oil fields // Труды международных конференций по математическому моделированию, Под редакцией В.И. Васильева. Якутск: Сфера. 2012. С. 31–34.
4. Григорьев А. В. Массивно-параллельное решение уравнения Пуассона с использованием технологии CUDA // Труды международных конференций по математическому моделированию, Под редакцией В.И. Васильева. Якутск: Сфера. 2012. С. 308–314.
5. Gaspar F. J., Grigoriev A. V., Vabishchevich P. N. Explicit-implicit splitting schemes for some systems of evolutionary equations // International Journal of Numerical Analysis & Modeling. Accepted for publication, 2013.
6. Григорьев А. В. Реализация модели двойной пористости с применением гетерогенных вычислений CUDA // Сборник тезисов, Математическое моделирование развития северных территорий 2012, с. 139-140. 2012.

7. Григорьев А. В. Modelling of filtration in fractured porous media // Тезисы Международной конференции: Суперкомпьютерные технологии математического моделирования Якутск: Издательский дом СВФУ, с. 32. 2013.

8. Васильева М. В., Григорьев А. В., Захаров П. Е. Параллельное программирование на основе библиотек // Якутск: Издательско-полиграфический комплекс СВФУ. 2011.