На правах рукописи

Афанасьева Надежда Михайловна

Устойчивые схемы для задач конвекции-диффузии при численном моделировании фильтрации сжимаемой жидкости

специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и в Центре вычислительных технологий Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова.

Научный руководитель:	**Вабищевич Петр Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Крукиер Лев Абрамович**, доктор физико-математических наук, профессор, директор Южно-российского регионального центра информатизации ЮФУ, г. Ростов-на-Дону, **Голиков Иннокентий Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ИКФИА СО РАН, г. Якутск
Ведущая организация:	Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск

Защита состоится 20 декабря 2013 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.306.04 при Северо-Восточном федеральном университете им. М. К. Аммосова, расположенном по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского 58, зал заседаний Ученого Совета.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова.

Автореферат разослан ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор Саввинова Н. А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Современные теоретические исследования прикладных проблем базируются на широком использовании вычислительных средств (компьютеров и численных методов). Традиционные аналитические средства прикладной математики используются для предварительного качественного исследования математических моделей, тестирования вычислительных алгоритмов.

Прикладные математические модели механики сплошной среды включают системы связанных друг с другом нестационарных нелинейных уравнений с частными уравнениями, системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. Основные особенности проблем механики сплошной среды связаны с учетом конвекции, ее доминированием во многих процессах. Теоретическая и методическая отработка вычислительных алгоритмов, ориентированных на численное моделирование таких проблем, должна проводиться на базовых, модельных задачах — краевых задачах для уравнений конвекции-диффузии.

При рассмотрении параболических уравнений второго порядка конвективные слагаемые могут браться в дивергентной, недивергентной и симметричной формах. Нестационарные задачи конвекции-диффузии записываются как эволюционные операторные уравнения в соответствующих пространствах. Их рассмотрение базируется на основных свойствах дифференциальных операторов конвективного и диффузионного переносов. При построении дискретных аналогов необходимо ориентироваться на такие аппроксимации, которые сохраняют основные свойства операторов задачи.

При численном решении нестационарных задач для уравнений конвекции-диффузии наиболее широко применяются двух- и трехслойные схемы. Для базовых задач механики сплошной среды большое внимание уделяется построению монотонных схем, которые связываются с выполнением принципа максимума на дискретном уровне. Это свойство отражает качество приближенного решения, с одной стороны, и, с другой стороны, позволяет сформулировать условия устойчивости в соответствующих нормах. Исследование устойчивости и сходимости двух- и трехслойных схем для приближенного решения конвекции-диффузии базируется на теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем А.А. Самарского с учетом несамосопряжённости операторов.

В случае сжимаемых сред основные проблемы порождены тем, что оператор задачи, вообще говоря, незнакоопределен. В этом случае рассматриваемый процесс может быть недиссипативным, т.е. норма решения однородной задачи не убывает со временем. Такое поведение нормы решения необходимо передать на дискретном уровне при выборе аппроксимаций по времени. В частности, с учетом незнакоопределенности оператора задачи мы должны ориентироваться на ϱ-устойчивые ($\varrho > 1$) операторно-разностные схемы. Построение безусловно устойчивых схем для сжимаемых сред является актуальной проблемой вычислительной математики и прикладного математического моделирования.

Исследование устойчивости в гильбертовых пространствах базируется на проверке соответствующих операторных неравенств. Для задач конвекции-диффузии с конвективными слагаемыми в недивергентной и дивергентной формах устойчивость рассматривается в банаховых пространствах $L_\infty(\omega)$ и $L_1(\omega)$ (сеточных аналогах $L_\infty(\Omega)$ и $L_1(\Omega)$). Основные результаты получены с применением принципа максимума для сеточных величин. Более перспективным представляется использование понятия логарифмической нормы, когда мы снова оперируем с операторными неравенствами. Представляет несомненный интерес с использованием этого математического аппарата исследовать различные классы схем для задач конвекции-диффузии.

Давление при фильтрации многофазной жидкости описывается параболическим уравнением. В случае, когда важен учет сжимаемости отдельных фаз жидкости, в параболическом уравнении для давления оператор представляет собой взвешенную сумму самосопряженных эллиптических операторов. Необходимо построить безусловно устойчивые двухслойные схемы для таких задач с учетом несамосопряженности оператора задачи. Имеет смысл разработать специальные схемы расщепления, когда переход на новый временной слой был бы связан с решением последовательности задач для давлений в отдельных фазах.

Целью диссертационной работы является исследование схем аппроксимации для нестационарных задач конвекции-диффузии в случае сжимаемых сред, построение безусловно устойчивых схем с учетом свойств оператора задачи и применение их в численном моделировании. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи:

- Построение и исследование безусловно устойчивых и монотонных разностных схем для нестационарных задач конвекции-диффузии при рассмотрении сжимаемых сред;
- Разработка вычислительного алгоритма для задач многофазной фильтрации с расщеплением по физическим процессам (отдельные уравнения для давления по фазам);
- Численное моделирование задачи двухфазной фильтрации с использованием полученных теоретических результатов.

Научная новизна и практическая значимость. В диссертационной работе получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

- Построены безусловно устойчивые разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии при рассмотрении сжимаемых сред;
- Установлены свойства устойчивости и монотонности с использованием логарифмической нормы при применении центрально-разностных аппроксимаций, аппроксимаций с направленными разностями и экспоненциальных схем;
- Построен вычислительный алгоритм для задач многофазной фильтрации с расщеплением по физическим процессам (отдельные уравнения для давления по фазам) и проведено численное моделирование задачи двухфазной фильтрации.

Результаты, изложенные в диссертации, имеют практическое значение. Полученные в диссертации теоретические результаты и предлагаемые безусловно устойчивые схемы для задач конвекции-диффузии применимы к задачам механики сплошной среды в сжимаемых средах. Разработанные вычислительные алгоритмы и программное обеспечение для численного моделирования фильтрации двухфазной жидкости позволяют повысить эффективность и точность приближенного решения прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- II международная конференция *Высокопроизводительные вычисления — математические модели и алгоритмы* (Калининград, 2013);
- Международная конференция *Суперкомпьютерные технологии математического моделирования* (Якутск, 2013, 2011);
- *Fifth Conference on Numerical Analysis and Applications* (Lozenetz, Bulgaria, 2012);
- Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов *Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации* (Якутск, 2012, 2009);
- *Международная конференция по математическому моделированию* (Якутск, 2011);
- Международный молодежный научный форум *ЛОМОНОСОВ* (Москва, 2011);
- XLIX Международная научная студенческая конференция *Студент и научно-технический прогресс* (Новосибирск, 2011);
- *International young scientists conference on Mathematical modeling* (Linyi, China, 2010).

Работа выполнена при поддержке следующих грантов:

Грант ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., работа «Разработка симуляторов экологически безопасных технологий разработки и мониторинга месторождений полезных ископаемых Арктики и регионов Севера», (гос.контракт №02.740.11.0041); «Разработка прикладного ПО для численного моделирования добычи углеводородного сырья на высокопроизводительных вычислительных системах» №5542 Государственный заказ Министерства образования РФ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 21 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК [1–3], 1 статья [4], тезисы конференций [5–20] и одно учебное пособие [21].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проводимых в диссертации исследований, обсуждаются проблемы приближенного решения задач конвекции-диффузии с учетом сжимаемости среды. Кратко излагается содержание диссертации по главам.

В **первой главе** предложены и исследованы безусловно устойчивые схемы для задач конвекции-диффузии с учетом сжимаемости среды, которые учитывают незнакоопределенность оператора задачи. Рассмотрены двухслойные схемы с весами для нестационарных задач конвекции-диффузии, проведено исследование их устойчивости при использовании различных форм записи конвективного переноса. Безусловно ϱ-устойчивая разностная схема построена на основе введения новых переменных.

В разделе 1.2 рассматриваются модельные двумерные задачи для нестационарных уравнений конвекции-диффузии. Нестационарное уравнение конвекции-диффузии, когда конвективный перенос записывается в недивергентном виде, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k\left(\boldsymbol{x}\right)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)=f\left(\boldsymbol{x},t\right),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad 0<t\leq T, \quad (1)$$

при стандартных предположениях $k_1 \leq k\left(\boldsymbol{x}\right) \leq k_2$, $k_1 > 0$, $T > 0$. Это уравнение дополняется граничными условиями Неймана и задается начальное условие. В качестве основных также рассматриваются уравнения конвекции-диффузии в дивергентной и в симметричной форме. Обсуждаются основные свойства дифференциальной задачи.

Дифференциальная-разностная задача описывается в разделе 1.3. Разностные операторы задачи строятся с наследованием основных свойств дифференциальных операторов. Двухслойные схемы с весами для аппроксимации по времени рассмотрены в разделе 1.4 и исследована их устойчивость. Для рассматриваемых задач при использовании записи конвективных слагаемых в дивергентном и недивергентном виде отмечена условная устойчивость.

Безусловно ϱ-устойчивая разностная схема построена на основе введения новых переменных в разделе 1.5. Для построения безусловно устойчивых схем при

$A \geq -\delta E$, $\delta > 0$ определяем новую функцию v:

$$y = \exp(\delta t) v.$$

Подстановка в (1) дает задачу для v:

$$\frac{dv}{dt} + \tilde{A} v = 0, \ \tilde{A} = A + \delta E, \ 0 < t \leq T, \tag{2}$$

$$v\,(0) = y^0. \tag{3}$$

При используемом преобразовании оператор задачи, $\tilde{A}$ является неотрицательным ($\tilde{A} \geq 0$). Для такой такой задачи двухслойная разностная схема с весами

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau} + \tilde{A}^n \left(\sigma w^{n+1} + (1 - \sigma)\, w^n \right) = 0, \tag{4}$$

$$w^0 = u^0. \tag{5}$$

при $\sigma \geq 0.5$ безусловно устойчива. Из схемы (4), (5) с учетом

$$w^n = \exp(-\delta t^n) y^n, \quad w^{n+1} = \exp(-\delta t^n) \exp(-\delta \tau) y^{n+1} \text{ при } t^{n+1} = t^n + \tau$$

получаем следующую разностную схему для искомой сеточной функции y^n:

$$\frac{\exp(\delta \tau) y^{n+1} - y^n}{\tau} + (A + \delta E) \left(\sigma \exp(\delta \tau) y^{n+1} + (1 - \sigma)\, y^n \right) = 0, \tag{6}$$

$$y^0 = u^0. \tag{7}$$

Теорема 1. *Разностная схема (6), (7) при $\sigma \geq 0.5$ безусловно ϱ-устойчива в H с*

$$\varrho = \exp(\delta \tau),$$

при этом для решения справедлива априорная оценка

$$\|y^{n+1}\| \leq \varrho \|y^n\|.$$

Положительный эффект достигается за счет корректировки оператора задачи. Подобные схемы используются также для параболических уравнений, в которых оператор задачи представляется в виде суммы операторов диффузии. Тестовая двумерная задача описана в разделе 1.7.

Во **второй главе** обсуждаются возможности построения безусловно монотонных устойчивых схем для нестационарных задач конвекции-диффузии. Исследование устойчивости для задач конвекции-диффузии обычно проводится на основе принципа максимума. При выполнении принципа максимума строятся монотонные схемы: схемы с аппроксимацией конвективных слагаемых направленными разностями, регуляризованные схемы, экспоненциальные схемы. Для исследования устойчивости мы используем понятие логарифмической нормы. Строим устойчивые и монотонные схемы для многомерных задач конвекции-диффузии.

В разделе 2.2 рассматриваются одномерные задачи Дирихле для нестационарных уравнений конвекции-диффузии с конвективными слагаемыми в дивергентном и недивергентном виде. Соответствующие априорные оценки выписываются в пространствах $L_\infty(0,l)$ и $L_1(0,l)$. Достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем для задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений получены в разделе 2.3. Рассматривается система в матричном (операторном) виде:

$$\frac{dw}{dt} + A(t)w = \phi(t), \quad t > 0, \tag{8}$$

$$w(0) = u^0. \tag{9}$$

Диагональные элементы матрицы A предполагаются неотрицательными и имеется диагональное преобладание по строкам или столбцам:

$$a_{ii} \geq \sum_{i \neq j = 1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{или} \quad a_{ii} \geq \sum_{i \neq j = 1}^{m} |a_{ji}|. \tag{10}$$

Для исследования устойчивости используется логарифмическая норма матрицы, согласованная с нормами в $L_\infty(0,l)$ и $L_1(0,l)$:

$$\mu_\infty[A] = \max_{1 \leq i \leq m} \Big(a_{ii} + \sum_{i \neq j = 1}^{m} |a_{ij}| \Big),$$

$$\mu_1[A] = \max_{1 \leq j \leq m} \Big(a_{jj} + \sum_{j \neq i = 1}^{m} |a_{ij}| \Big).$$

В силу ограничений (10), в задаче Коши (8), (9) для логарифмической нормы матрицы $-A$ имеем

$$\mu[-A] \leq 0, \tag{11}$$

в соответствующем пространстве в L_∞ и в L_1.

Логарифмическая норма имеет следующие свойства:

1. $\mu[cA] = c\mu[A], \quad c = \text{const} \geq 0;$
2. $\mu[cE + A] = c + \mu[A], \quad c = \text{const};$
3. $\|Aw\| \geq \max\{-\mu[-A],\ -\mu[A]\}\ \|w\|.$

Наибольшего внимания заслуживает именно свойство 3, которое позволяет получить легко вычисляемую по элементам матрицы оценку нормы Aw снизу. Такая оценка комбинируется с обычной оценкой нормы Aw сверху: $\|Aw\| \leq \|A\|\ \|w\|$.

Достаточные условия устойчивости разностной схемы с весами для решения (8), (9) формулируются в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Для задачи Коши (8), (9) с матрицей A, удовлетворяющей условиям (10) разностная схема с весами безусловно устойчива при $\sigma = 1$ и условно устойчива при $0 \leq \sigma < 1$ в L_∞ (в L_1), если*

$$\tau \leq \frac{1}{1-\sigma}\Big(\max_{1\leq i\leq m} a_{ii}\Big)^{-1}. \tag{12}$$

При этом для разностного решения верна априорная оценка

$$\|y^{n+1}\| \leq \|u^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau\|\varphi^k\|. \tag{13}$$

С приведенными оценками устойчивости (13) в L_∞ и L_1 непосредственно связывается свойство монотонности разностного решения задачи (8), (9) при предположении о неположительности внедиагональных элементов матрицы A.

Для рассматриваемых модельных задач аппроксимации по пространству строятся с использованием для конвективного переноса центрально-разностных схем, схем с направленными разностями. Исследуется устойчивость и монотонность разностных схем. В частности, чисто неявная схема ($\sigma = 1$) является безусловно устойчивой и монотонной. Принципиальный недостаток схем с аппроксимациями конвективного переноса направленными разностями связан с первым порядком аппроксимации по пространству. В этом смысле схемы на основе центрально-разностных аппроксимаций выигрывают — имеют второй порядок аппроксимации.

Можно построить монотонные схемы второго порядка аппроксимации, это так называемые экспоненциальные схемы, основанные на переформулировании членов конвективного и диффузионного переноса. В случае недивергентной формы конвективного переноса имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\chi(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\chi(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \tag{14}$$

где

$$\chi(x,t) = \exp\left(-\int\limits_0^x \frac{v(s,t)}{k(s)}ds\right). \tag{15}$$

В случае дивергентной формы конвективного слагаемого имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k(x)}{\chi(x,t)}\frac{\partial(\chi(x,t)u)}{\partial x}\right) = f(x,t). \tag{16}$$

После этого можно строить разностные аппроксимации по пространству.

Для сеточных функций оператор уравнения (14) можно определить соотношением:

$$\begin{aligned} Aw = &-\frac{1}{h^2\chi(x,t)}k(x+0.5h)\chi(x+0.5h,t)(w(x+h,t)-w(x,t)) \\ &+\frac{1}{h^2\chi(x,t)}k(x-0.5h)\chi(x-0.5h,t)(w(x,t)-w(x-h,t)), \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\chi(x-0.5h,t) = \exp\left(-\int\limits_0^{x-0.5h} \frac{v(s,t)}{k(s)}ds\right).$$

Принимая во внимание, что

$$\chi(x-0.5h,t) = \chi(x,t)\exp\left(-\int\limits_x^{x-0.5h} \frac{v(s,t)}{k(s)}ds\right)$$

с точностью до $O(h^2)$ положим

$$\chi(x-0.5h,t) = \chi(x,t)\exp(\theta(x,t)h)$$

при использовании обозначений

$$\theta(x,t) = \frac{v(x,t)}{2k(x)}.$$

Это позволяет вместо (17) использовать следующую аппроксимацию:

$$
\begin{aligned}
Aw = &-\frac{1}{h^2}k(x+0.5h)\exp(\theta(x,t)h)(w(x+h,t)-w(x,t)) \\
&+\frac{1}{h^2}k(x-0.5h)\exp(-\theta(x,t)h)(w(x,t)-w(x-h,t)).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Аналогично для уравнения (16) строятся подобные аппроксимации.

Полученная схема имеет такие же условия устойчивости и монотонности, как и схема с аппроксимацией конвективного переноса направленными разностями. Но при этом, как схема с центрально-разностными аппроксимациями погрешность аппроксимации по пространству имеет второй порядок. Платой является небольшое усложнение по вычислению коэффициентов разностного оператора.

Возможности построения устойчивых и монотонных схем для многомерных задач конвекции-диффузии обсуждаются в разделе 2.7. На примере двумерных задач строятся схемы расщепления по пространственным переменным.

В разделе 2.8 строится безусловно устойчивая схема для приближенного решения нестационарных задач конвекции-диффузии-реакции, используя подход который идейно примыкает к нестандартным схемам, рассмотренным в главе 1. Условия устойчивости этой схемы проверяются аналогично условиям устойчивости схем, рассмотренных в разделах этой главы, т.е. с использованием логарифмической нормы в L_∞ и L_1.

Для сравнения рассмотренных схем проведены вычислительные эксперименты на двумерной тестовой задаче, результаты которых описаны в разделе 2.9.

В **третьей главе** рассматривается параболическое уравнение второго порядка, в котором оператор задачи представляет собой сумму взвешенных самосопряженных эллиптических операторов:

$$
\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha(\boldsymbol{x})\,\mathcal{L}_\alpha u = f(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad 0<t\le T, \tag{19}
$$

где

$$
\mathcal{L}_\alpha u = -\operatorname{div}\left(k_\alpha(\boldsymbol{x})\operatorname{grad} u\right), \qquad \alpha = 1,2,...,m.
$$

На коэффициенты уравнения накладываются ограничения:

$$
\sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha(\boldsymbol{x}) > 0, \quad a_\alpha(\boldsymbol{x}) \ge 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad \alpha = 1,2,...,m.
$$

Такое уравнение возникает, в частности, при расчете давления в задачах фильтрации многофазной жидкости. Параболическое уравнение (19) дополняется граничными условиями Дирихле и начальным условием.

На множестве функций $u(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющих граничным условиям нестационарную задачу записываем в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{20}$$

$$u(0) = u^0. \tag{21}$$

Оператор задачи $\mathcal{A}$ представляется в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha(\boldsymbol{x}) \mathcal{L}_\alpha,$$

т.е. представляется в виде взвешенной суммы операторов диффузии.

Простыми вычислениями убеждаемся, что оператор $\mathcal{A}$ может быть записан в эквивалентном виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{D}, \quad \mathcal{C} = \sum_{\alpha=1}^{m} \mathcal{C}_\alpha, \quad \mathcal{D} = \sum_{\alpha=1}^{m} \mathcal{D}_\alpha.$$

Отдельные операторные слагаемые есть одномерные операторы конвекции-диффузии:

$$\mathcal{C}_\alpha u = \boldsymbol{w}_\alpha \operatorname{grad} u, \quad \boldsymbol{w}_\alpha = k_\alpha \operatorname{grad} a_\alpha,$$

$$\mathcal{D}_\alpha u = -\operatorname{div}\left(d_\alpha(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u\right), \quad d_\alpha = k_\alpha a_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, ..., m.$$

Тем самым, параболическое уравнение (19) записывается как уравнение конвекции-диффузии. Это дает возможность при построении численных методов приближенного решения опираться на результаты численного анализа проблем конвекции-диффузии.

В разделе 3.3. приводится аппроксимация уравнения по пространству и рассматриваются ее основные свойства на дискретном уровне. После аппроксимации по пространству от задачи (20),(21) переходим к дифференциально-операторной задаче

$$\frac{dy}{dt} + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T, \tag{22}$$

$$y(0) = y^0, \tag{23}$$

где $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}, t)$, $y^0 = u^0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \omega$. Оператор A имеет представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha, \quad A_\alpha = D_\alpha + G_\alpha + R_\alpha, \tag{24}$$

Далее строятся безусловно устойчивые двухслойные схемы с учетом несамосопряженности оператора задачи. Используются нестандартные аппроксимации, которые основаны на выделении соответствующей экспоненциальной амплитуды решения. Применительно к нашей задаче (22), (23), с учетом свойств оператора A безусловно устойчивая разностная схема на равномерной сетке по времени имеет вид

$$\frac{y^{n+1} - \exp(-r\tau)y^n}{\tau} + (A - rE)y^{n+1} = \varphi^n \tag{25}$$

при

$$r = \sum_{\alpha=1}^{m} r_\alpha, \quad R_\alpha \geq r_\alpha E, \quad \alpha = 1, 2, ..., m.$$

В разделе 3.5. для снижения вычислительных затрат предлагается строить схемы расщепления, вычислительная реализация которых связана с решением вспомогательных задач с самосопряженными операторами. В этом случае вместо (19) решается некоторая последовательность m задач:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + a_\alpha(\boldsymbol{x})\mathcal{L}_\alpha u_\alpha = f_\alpha(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t^n < t \leq t^{n+1}, \quad \alpha = 1, 2, ..., m.$$

Такие задачи можно решать с использованием итерационных методов для симметричных положительно определенных матриц.

В общем случае многокомпонентного ($m > 2$) расщепления на основе схемы (25) имеем:

$$\frac{y^{n+\alpha/m} - \exp(-r_\alpha\tau)y^{n+(\alpha-1)/m}}{\tau} + (A_\alpha - r_\alpha E)y^{n+\alpha/m} = \chi_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, ..., m. \tag{26}$$

Правые части зададим, например, следующим образом:

$$\chi_\alpha^n = 0, \quad \alpha = 1, 2, ..., m-1, \quad \chi_m^n = \varphi^n.$$

Теорема 3. *Аддитивная разностная схема (24), (26) безусловно устойчива, причем для разностного решения справедлива послойная оценка*

$$\|y^{n+1}\|^2 \leq \exp(-2r\tau)\|y^n\|^2 + \frac{\tau}{2}\|\varphi^n\|^2_{D_m^{-1}}.$$

При использовании аддитивной схемы (26) переход на новый временной слой связан с решением m сеточных задач:

$$\left(\frac{1}{\tau}E + A_\alpha - r_\alpha E\right) y^{n+\alpha/m} = \psi_\alpha^n, \qquad \alpha = 1, 2, ..., m.$$

С учетом свойств операторов $\mathcal{L}_\alpha$, задачи для определения $y^{n+\alpha/m},\ \alpha = 1, 2, ..., m$ можно записать в виде

$$S_\alpha y^{n+\alpha/m} = \frac{1}{a_\alpha(\boldsymbol{x})}\psi_\alpha^n, \tag{27}$$

где

$$S_\alpha = L_\alpha + \frac{1}{a_\alpha(\boldsymbol{x})\tau} - \frac{r_\alpha}{a_\alpha(\boldsymbol{x})}, \qquad \alpha = 1, 2, ..., m.$$

Принципиальный момент состоит в том, что операторы $S_\alpha,\ \alpha = 1, 2, ..., m$ в (27) являются самосопряженными и положительно определенными.

Численное моделирование задачи двухфазной фильтрации с учетом сжимаемости среды проведено в **четвертой главе**. Основное внимание уделяется задаче для давления. Уравнение давления является параболическим и оператор задачи представляет собой взвешенную сумму самосопряженных эллиптических операторов. Для типичных значений сжимаемости пластовых флюидов стандартные схемы аппроксимации по времени могут быть условно устойчивыми. Строится вычислительный алгоритм с применением безусловно устойчивых схем, предложенных в главе 3. Также для уменьшения вычислительных затрат применяем схему расщепления (отдельные уравнения для давления по фазам), которая позволяет применить итерационные методы для симметричных положительно определенных матриц.

Рассмотрена трехмерная задача с нагнетательными и добывающими скважинами при использовании конечно-элементной аппроксимации по пространству. На рис. 1 представлена область моделирования — нефтяное месторождение с добывающими и нагнетательными скважинами: 1 — контур нефтеносности, 2 — добывающие скважины, 3 — нагнетательные скважины. В трехмерном случае, в качестве расчетной области Ω рассматриваем параллелепипед с пятью скважинами: в центре — нагнетательная скважина, по углам — добывающие скважины (рис. 2).

Геометрическая область строится с использованием программы Gmsh, с помощью которой генерируем тетраэдральную сетку в трехмерной расчетной области. На рис. 3, 4 представлена расчетная сетка со сгущением вблизи скважин.

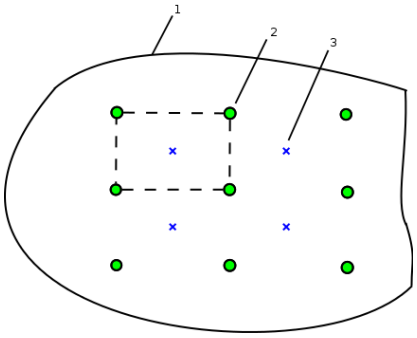

Рис. 1. Моделируемая область

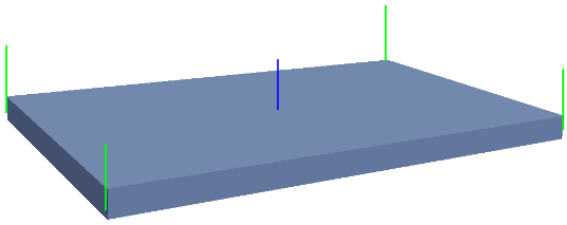

Рис. 2. Расчетная область

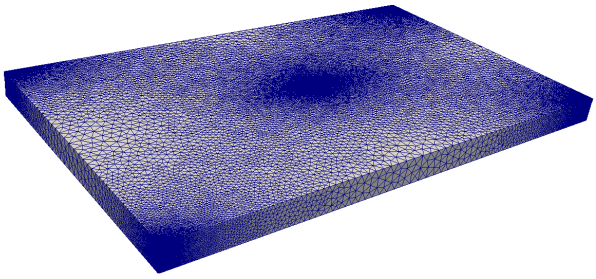

Рис. 3. Расчетная сетка, 135505 ячеек

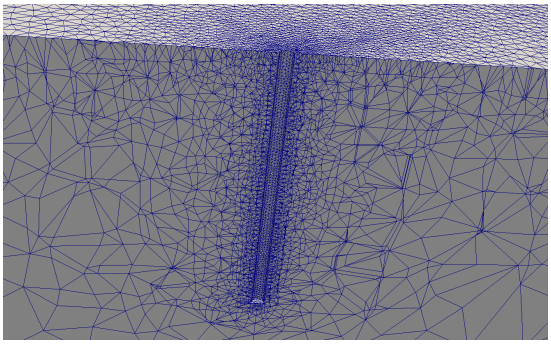

Рис. 4. Расчетная сетка вблизи скважины

Программа написана с использованием библиотеки научных вычислений FEniCS, для визуализации полученных данных используется программа Paraview. Типичные расчетные данные для давления на различные моменты времени представлены на рис.5, 6.

Основные результаты работы:

- Исследована устойчивость разностных схем с весами для задач конвекции-диффузии с различными формами записи оператора конвективного переноса. Построены безусловно устойчивые схемы для нестационарных уравнений конвекции-диффузии с учетом сжимаемости среды, которые учитывают незнакоопределенность оператора задачи;
- Исследованы схемы для задач конвекции-диффузии при применении цен-

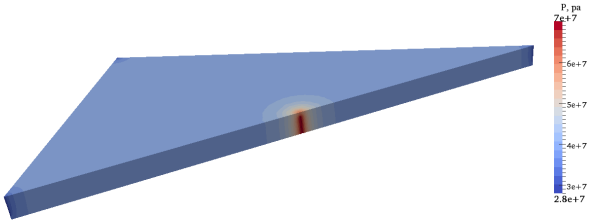

Рис. 5. Распределения давления, T = 500;

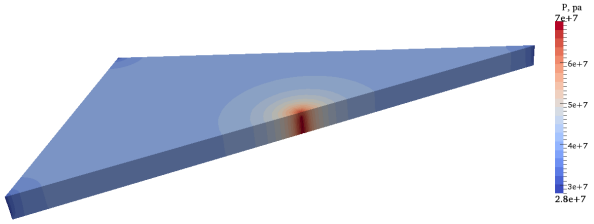

Рис. 6. Распределения давления, T = 2500;

трально-разностных аппроксимаций, аппроксимаций с направленными разностями и экспоненциальных схем. При записи конвективных слагаемых в дивергентной и недивергентной формах построение монотонных схем базируется на переформулировании членов конвективного и диффузионного переноса. Получены условия устойчивости разностных схем в равномерной и интегральной нормах с привлечением понятия логарифмической нормы. Для двумерных задач безусловно монотонные схемы строятся на основе схем расщепления по пространственным переменным;

- Предложены безусловно устойчивые схемы для краевых задач для параболического уравнения второго порядка, когда оператор задачи представляет собой взвешенную сумму самосопряженных эллиптических операторов. Аппроксимации по времени строится на основе введения новой искомой переменной. Предложены схемы расщепления, вычислительная реализация которых связана с решением вспомогательных задач с самосопряженными операторами;

- Разработан вычислительный алгоритм для задач многофазной фильтрации с расщеплением по физическим процессам (отдельные уравнения для давления по фазам). Проведено численное моделирование задачи двухфазной фильтрации сжимаемых жидкостей.

Список публикаций

1. Н. М. Афанасьева, П. Н. Вабищевич, М. В. Васильева. Безусловно устойчивые схемы для задач конвекции-диффузии // Известия вузов. Математика. 2012. № 3. С. 3–15.

2. Н. М. Афанасьева, М. В. Васильева, П. Е. Захаров. Параллельное численное моделирование процесса заводнения нефтяного месторождения // Математические заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 1. С. 159–172.

3. N. Afanasyeva, P. Vabishchevich, M. Vasilyeva. Unconditionally Stable Schemes for Non-Stationary Convection-Diffusion Equations // Numerical Analysis and its Applications, Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013. Vol. 8236. Pp. 151–157.

4. Afanasyeva N.M., Churbanov A. G., Vabishchevich P.N. Unconditionally monotone schemes for unsteady convection-diffusion problems // Computational Methods in Applied Mathematics. 2013. no. 8236. Pp. 185–205.

5. Афанасьева Н. М., Егорова М. Е., Тимофеева Т. С. Численное решение краевой задачи двухфазной трехкомпонентной фильтрации // IV Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докл. Якутск: Изд-во ГУ «РОНПО», 2004.

6. Афанасьева Н. М. Численное решение задачи вытеснения нефти раствором диоксида углерода // Всероссийская школа-семинар студентов, аспирантов молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития северных территорий в условиях рынка": Тез. докл. Якутск: Изд-во ЯГУ, 2004.

7. Афанасьева Н. М. Численное решение задачи вытеснения нефти раствором диоксида углерода // "VIII Лаврентьевские чтения"с участием молодых ученых и специалистов Дальневосточного федерального округа: Научная конференция студентов и молодых ученых: сборник статей. Якутск, 2005.

8. Афанасьева Н. М. Численное решение задачи вытеснения нефти карбонизированной водой // III Всероссийская школа-семинар студентов,

аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития Северных территорий РФ: Тез.докл. Изд-во ИПКРО в РС(Я), 2005.

9. Афанасьева Н. М. Численное моделирование совместного течения нефти, воды и газа // IV Всероссийская школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития Северных территорий РФ : Тез.докл. Якутск: филиал изд-ва ЯГУ, ИМИ ЯГУ, 2006.

10. Афанасьева Н. М. Численное моделирование трехфазного течения в пористой среде // II Всероссийская научная конференция и VII Всероссийская школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития Северных территорий РФ. : Тез.докл. / Якутск: филиал изд-ва ЯГУ, ИМИ ЯГУ, 2009.

11. Афанасьева Н. М. Numerical simulation of single phase flow with the multi-grid method // International young scientists conference in mathematical modeling. Liniy, China, 2010.

12. Васильева М. В., Афанасьева Н. М. Параллельная численная реализация задачи фильтрации с использованием пакета Petsc // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ- 2011» МАКС Пресс, 2011. 2011.

13. Васильева М. В., Афанасьева Н. М. Численное моделирование задачи фильтрации на многопроцессорной вычислительной системе // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосиб. гос. ун-т., Новосибирск, 2011.

14. Афанасьева Н. М. Сравнение схем аппроксимации по времени при моделировании задач фильтрации // Сборник трудов IX Всероссийской научно- практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и современные информационные технологии». Томск: Изд-во СПБ Графикс–С, 2011.

15. Афанасьева Н. М. Исследование схем аппроксимаций для уравнения насыщенности в задачах двухфазной фильтрации // VI Международная

конференция по математическому моделированию. Тезисы докладов / Под редакцией И.Е. Егорова, В.И. Васильева – Якутск : ОАО «Медиа- холдинг Якутия», 2011.

16. Васильева М. В., Афанасьева Н. М. Исследование схем с весами для уравнений конвекции-диффузии с использованием библиотеки Score // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования. Тезисы докладов / Под редакцией В.И. Васильева – Якутск : ОАО «Медиа-холдинг Якутия», 2011.

17. Афанасьева Н. М. Экспоненциальные схемы для нестационарных уравнений конвекции-диффузии // III Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации». Тез.докл./ Под редакцией В.И. Васильева – Якутск : Изд-во «Сфера», 2012.

18. Афанасьева Н. М., И.К.Сирдитов. Исследование эффективности распараллеливания при расчете давления в нефтяном пласте // Материалы Международного научного форума студентов, аспирантов и молодых ученых стран Азиатско-Тихоокеанского региона. под общей редакцией Н.В. Воеводиной. – Владивосток, Издательский дом Дальневост. федерал.ун-та, 2012.

19. Afanasyeva N., Vabishchevich P., Vasilyeva M. Unconditionally stable schemes for non-stationary convection-diffusion-reaction equations // NAA’12: Fifth Conference on Numerical Analysis and Applications. June 15–20, 2012 Lozenetz, Bulgaria. Abstracts, 2012.

20. Afanasyeva N. Stable schemes for convection-diffusion-reaction problems // Суперкомпьютерные технологии математического моделирования. : Тез. докл. / Под редакцией В.И. Васильева – Якутск: Издательский дом СВФУ, 2013.

21. Афанасьева Н. М., Васильева М. В., Колесов А. Е. Математическе моделирование фильтрации. Издательско-полиграфический комплекс СВФУ, 2011.