На правах рукописи

Захаров Петр Егорович

Методы декомпозиции области для решения нестационарных задач увлажнения грунта

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численное методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Якутск 2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и в Центре вычислительных технологий Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова

Научный руководитель: **Вабищевич Петр Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Поляков Сергей Владимирович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий сектором Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Старостин Николай Павлович,
доктор технических наук, профессор,
заведующий лабораторией Института проблем нефти и газа СО РАН, г. Якутск

Ведущая организация: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Защита состоится 20 декабря 2013 г. в 10^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.306.04 при Северо-Восточном федеральном университете имени М. К. Аммосова, расположенного по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского 58, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова.

Автореферат разослан 19 ноября 2013 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, д.ф.-м.н. Саввинова Н.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время сложилась новая технология научных исследований, которая базируется на исследовании прикладных математических моделей с помощью вычислительных средств (компьютеры и численные методы). Численное моделирование позволяет описать свойства исследуемого объекта с необходимой полнотой и детальностью на основе адекватных математических моделей.

Содержательные математические модели включают системы связанных друг с другом нестационарных нелинейных уравнений с частными производными, системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. Разработка вычислительных алгоритмов для прикладного математического моделирования базируется на глубоком теоретическом и методическом исследовании численных методов для базовых задач. Для аппроксимации по пространству используются все основные технологии, связанные с разностной, конечно-объемной и конечно-элементной аппроксимацией. При приближенном решении нестационарных задач основное внимание должно уделяться разностным аппроксимациям по времени.

Расчетно-теоретическое исследование прикладных проблем требует решения задач в многомерных областях со сложной геометрией, использования достаточно подробных расчетных сеток. Для нахождения приближенного решения приходится решать большие системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений.

Уменьшение вычислительной работы при приближенном решении краевых задач для нестационарных многомерных уравнений с частными производными обеспечивается использованием аддитивных схем (схем расщепления). При ориентации на компьютеры параллельной архитектуры вычислительная эффективность достигается на основе разделения данных. В рамках этой общей технологии используются методы декомпозиции области.

Теория и практика итерационного решения стационарных краевых задач для уравнений с частными производными на основе декомпозиции области достаточно полно представлена в литературе. Применяются различные варианты таких методов, которые можно разделить на методы с наложением подобластей и методы декомпозиции области без наложения подобластей.

Наиболее полно специфика нестационарных задач проявляется при использовании безитерационных методов декомпозиции области. Безитерационные схемы декомпозиции области не всегда обеспечивают близость приближенного решения к решению, которое получено с использованием стандартных неявных аппроксимаций. Поэтому безитерационные схемы декомпозиции области естественно связать с теми или иными вариантами аддитивных схем (схемами расщепления), которые названы регионально-аддитивным схемами.

Актуальной проблемой является не только построение новых схем декомпозиции области для численного решения нестационарных задач, но и систематическое сравнение уже известных схем на решении типовых задач на современных компьютерах параллельной архитектуры, с теоретической и количественной оценкой их точности и вычислительных затрат на их реализацию.

С этой **целью** в работе реализованы на вычислительном кластере численные методы декомпозиции области без налегания подобластей для параболических уравнений с выделением подзадачи расчета общих граничных условий. Теоретически и методически исследованы регионально-аддитивные схемы с наложением подобластей при различных операторах декомпозиции. Численно решается задача увлажнения грунта в дамбе на вычислительном кластере в двух- и трехмерной постановке.

Научная новизна и практическая значимость. В диссертационной работе получены следующие научные результаты:

- Получена оценка погрешности факторизованной регионально-аддитивной схемы для приближенного решения краевой задачи для параболического уравнения второго порядка;

- Проведен методический анализ методов декомпозиции области с налеганием подобластей при различных операторах декомпозиции;

- Разработан и реализован вычислительный алгоритм с использованием методов декомпозиции области для численного решения нестационарных трехмерных задач увлажнения грунта на вычислительном кластере.

Проведенное комплексное исследование, как используемых ранее алгоритмов, так и новых, позволяет более точно оценить возможности методов декомпозиции области и выбрать оптимальный метод решения в зависимости от специфики конкретной прикладной задачи. Разработанный программный комплекс был установлен и прошел апробацию на массивно-параллельной вычислительной системе *Ариан Кузьмин* Центра вычислительных технологий СВФУ.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция *International Conference on Domain Decomposition Methods* (Швейцария, г. Лугано, 2013 г.);

- Международная конференция *Суперкомпьютерные технологии математического моделирования* (РФ, г. Якутск, 2013 г.);

- Международная конференция *Суперкомпьютерные технологии математического моделирования* (РФ, г. Якутск, 2011 г.);

- Международная конференция *International Young Scientists Conference on Mathematical Modeling* (КНР, г. Линьи, 2010 г.);

- Всероссийская конференция *Математическое моделирование развития северных территорий Российской Федерации* (РФ, г. Якутск, 2009 г.).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов:

- Грант ФЦП №2009-1.1-224-010-015 *Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг., в рамках реализации мероприятия 1.1 Проведение научных исследований коллективами НОЦ, работа Разработка симуляторов экологически безопасных технологий разработки и мониторинга месторождений полезных ископаемых Арктики и регионов Севера*;

- Государственный заказ Министерства образования РФ №5542 *Разработка прикладного ПО для численного моделирования добычи углеводородного сырья на высокопроизводительных вычислительных системах*.

Личный вклад. Определение цели, вопросы теоретического обоснования и практического использования численных методов, связанных с аппроксимацией дифференциальной задачи, а также формулировка результатов выносимых на защиту были выполнены автором совместно с научным руководителем, д.ф.-м.н., профессором П. Н. Вабищевичем. Постановка тестовых задач, формулировка математических моделей для вычислительных экспериментов, разработка вычислительных алгоритмов и их программная реализация, а также интерпретация полученных результатов и оценка их практического значения проведены автором лично. Основная часть публикаций по теме диссертации написана автором совместно с научным руководителем.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и литературы. Полный объем диссертации 132 страниц текста с 89 рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит 108 наименование.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, отмечается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** рассматривается решение модельной нестационарной задачи для параболического уравнения второго порядка с использованием различных методов декомпозиции области без налегания подобластей. На примере декомпозиции явной схемы проводится исследование сложности параллельного алгоритма, дается аналитическая оценка вычислительной и коммуникационной сложности. Также выводится зависимость эффективности параллельного алгоритма от вычислительной и коммуникационной сложности алгоритма.

Далее рассматриваются явно-неявные схемы с коррекцией в интерфейсных узлах. Данные схемы являются схемами декомпозиции области без налегания подобластей. На вычислительной сетке ω с шагом h определяется множество не пересекающихся сеточных подобластей $\hat{\omega}$ и интерфейсных узлов. На непрерывном уровне эта декомпозиция связана с подобластями, у которых ширина налегания равна соответствующему шагу по пространству. Решение задачи при такой декомпозиции состоит из трех этапов: предсказание решения в интерфейсных узлах, решение в подобластсях и коррекция в интерфейсных узлах.

Для равномерной сетки по времени с шагом τ явно-неявные схемы с коррекцией можно описать факторизованной регионально-аддитивной схемой

$$B_1 B_2 \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A y^n = \varphi^n, \tag{1}$$

где

$$B_\alpha = E + \sigma\tau\chi_\alpha A, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2}$$

$$\chi_2(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \ \boldsymbol{x} \in \hat{\omega}, \\ 0, \ \boldsymbol{x} \notin \hat{\omega}, \end{cases} \quad \chi_1(\boldsymbol{x}) = 1 - \chi_2(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \omega, \tag{3}$$

с правой частью определенной в форме $\varphi^n = f(\sigma t^{n+1} + (1-\sigma)t^n)$.

Основным вопросом при построении схем декомпозиции области для нестационарных задач является оценка скорости сходимости для приближенного решения. Точность зависит от вычислительной сетки (ширины подобластей $\hat{h}$) и поэтому регионально-аддитивные схемы являются условно сходящимися.

Точность анализируется стандартным способом, через рассмотрение соответствующей задачи для погрешности

$$z^n(\boldsymbol{x}) = y^n(\boldsymbol{x}) - u^n(\boldsymbol{x}), \quad x \in \omega,$$

где $u^n(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, t^n)$ точное решение дифференциальной задачи.

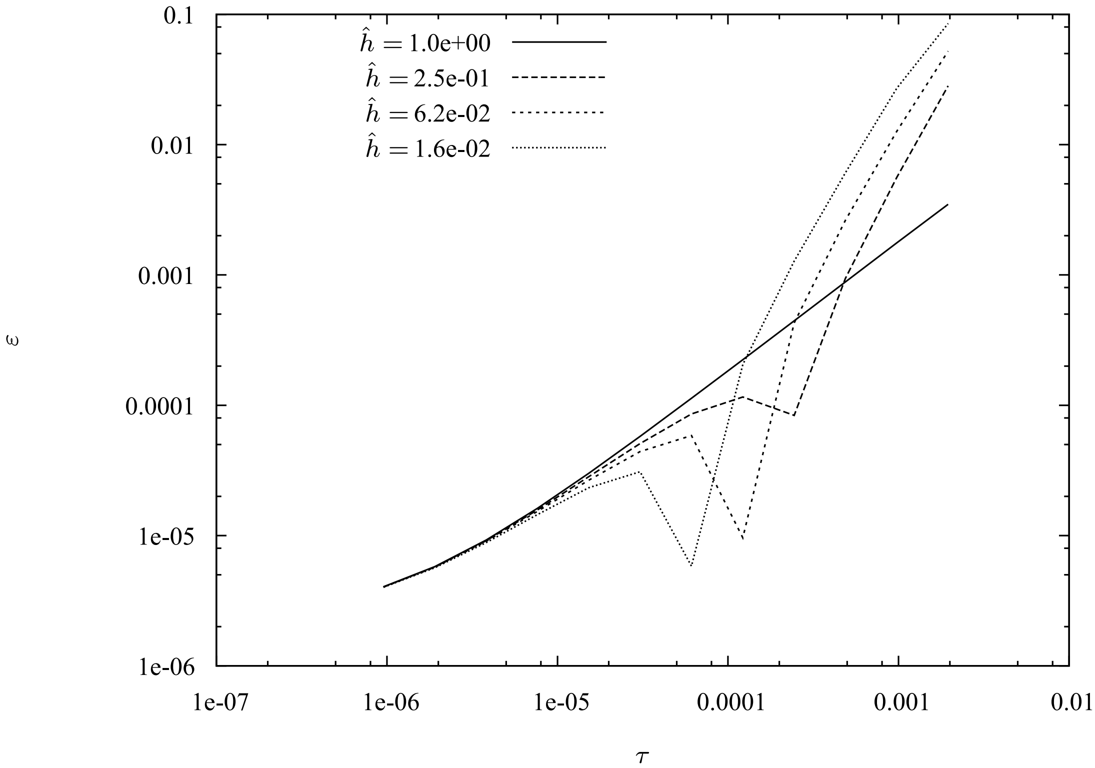

Рис. 1: Зависимость погрешности факторизованной схемы от шага по времени при $\sigma = 1$.

Теорема 1. *Для погрешности факторизованной регионально-аддитивной разностной схемы (1), (2) при $\sigma \geq 0.5$ для задачи имеем место оценка*

$$\|B_2 z^{n+1}\|_A \leq M(h^2 + \tau^2 + (\sigma - 0.5)\tau + \sigma^2\tau^2 \|A\chi_2\|_A). \tag{4}$$

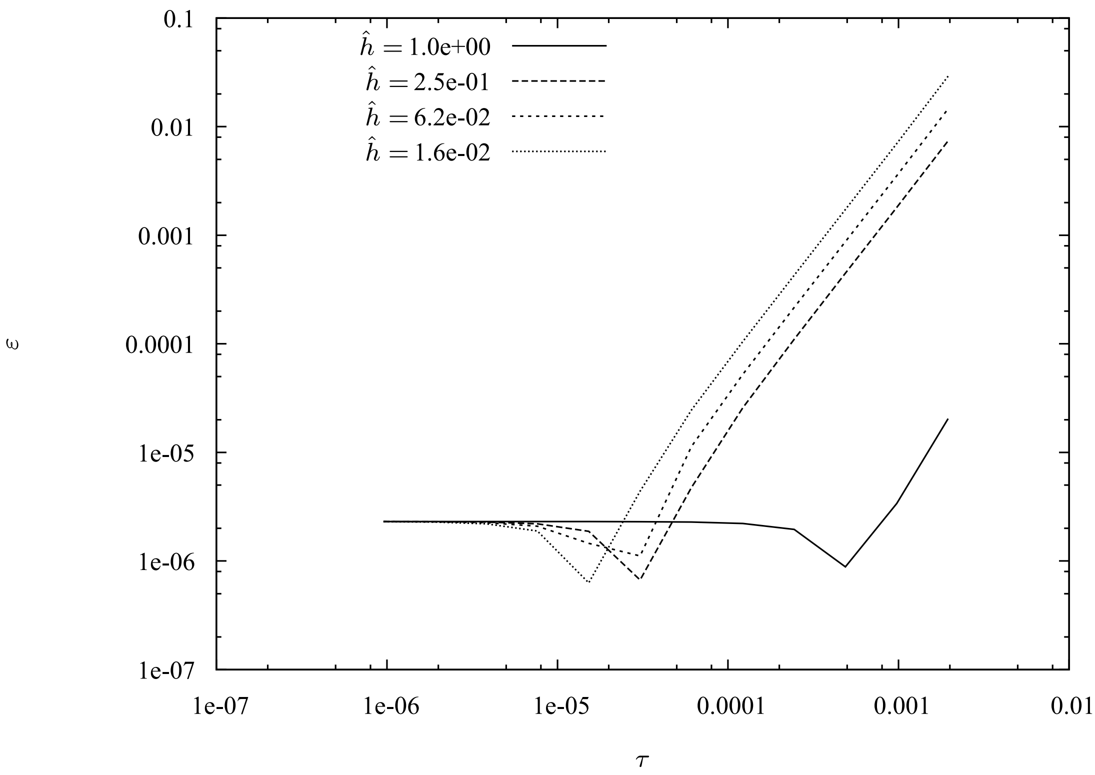

Рис. 2: Зависимость погрешности факторизованной схемы от шага по времени при $\sigma = 0.5$.

Дается сравнение результатов численных экспериментов при использовании различных схем декомпозиции области. Для выявления асимптотической зависимости погрешности от параметров задачи, вычисления проводились в большом диапазоне параметров. Например, на рис. 1, 2 представлены данные по точности (погрешность ε в $L_2(\omega)$) в зависимости от шага по времени τ при различном числе подобластей (параметр $\hat{h}$) для факторизованной схемы при $\sigma = 1$ (рис. 1) и $\sigma = 0.5$ (рис. 2). Полученные результаты погрешности решения для регионально-аддитивной факторизованной схемы соответствуют теоретической оценке.

Во **второй главе** рассматриваются регионально-аддитивные схемы декомпозиции области с налегением подобластей для решения нестационарных задач. При построении декомпозиции области для каждой подобласти строятся специальные схемы с операторами декомпозиции. Область Ω делится на m множеств подобластей

$$\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{m} \Omega_\alpha.$$

Каждое множество подобластей Ω_α состоит из p отдельных подобластей:

$$\Omega_\alpha = \bigcup_{\beta=1}^{p} \Omega_\alpha^\beta, \quad \alpha = 1, 2, ..., m,$$

$$\Omega_\alpha^{\beta_1} \cap \Omega_\alpha^{\beta_2} = \varnothing, \quad \beta_1 \neq \beta_2, \quad 1 \leq \beta_1, \beta_2 \leq p, \quad \alpha = 1, 2, ..., m.$$

Тогда для каждого множества подобластей Ω_α решаем p отдельных подзадач.

Декомпозиция разностной схемы строится на основе разбиения единицы для области Ω:

$$\rho_\alpha(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} > 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega_\alpha, \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin \Omega_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, ..., m, \tag{5}$$

где

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \rho_\alpha(\boldsymbol{x}) = 1, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6}$$

Рассматривается класс схем декомпозиции области, в которых оператор A имеем следующее аддитивное представление:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha, \tag{7}$$

где каждый оператор $A_\alpha, \alpha = 1, 2, ..., m$ связан с множеством подобластей Ω_α и разбиением (5), (6). Сравниваются три основные типа операторов декомпозиции:

$$A_\alpha = \rho_\alpha A,$$

$$A_\alpha = A \rho_\alpha,$$

$$A_\alpha = A^{1/2} \rho_\alpha A^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p.$$

Регионально-аддитивные схемы расщепления делятся на двухкомпонентные и многокомпонентные. К двухкомпонентным схемам расщепления относится классическая схема Дугласа-Рэкфорда (схема стабилизирующей поправки). Данная схема в общем виде рассматривается как факторизованная схема. Для сравнения дополнительно рассмотрены симметричная схема покомпонентного расщепления. Предложена факторизованная схема, для которой расщепление (7) не имеет места:

$$B_1 B_2 \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A y^n = \varphi^n, \tag{8}$$

в которой

$$B_\alpha = E + \sigma \tau A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{9}$$

$$A_1 = A\rho, \quad A_2 = (1 - \rho) A, \quad A \neq A_1 + A_2, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \tag{10}$$

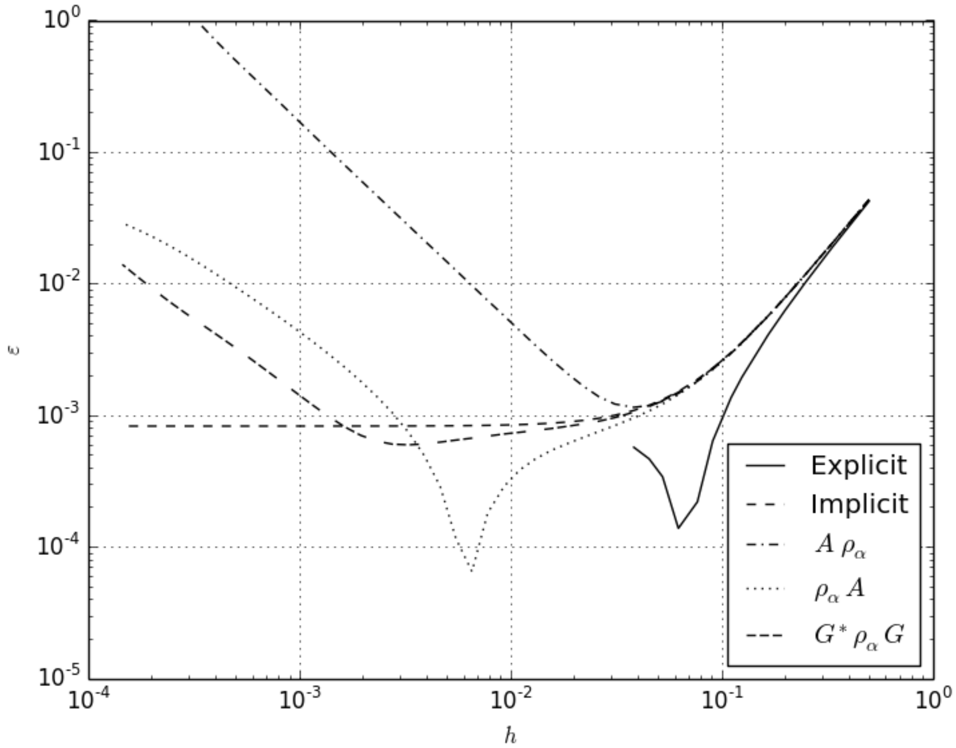

Рис. 3: Зависимость нормы погрешности факторизованных схем от шага по пространству для различных операторов декомпозиции.

Характерный результат проведенных численных экспериментов приведен на рис. 3. Здесь для модельной параболической задачи показана зависимость точности различных схем декомпозиции с минимальным наложением подобластей от расчетной сетки (шага h).

К многокомпонентным схемам относятся схемы покомпонентного расщепления, аддитивно-усредненные схемы, векторные аддитивные схемы с синхронными и асинхронными вычислениями. Исследуется устойчивость и сходимость приближенного решения двухкомпонентных и многокомпонентных схем при выборе различных операторов декомпозиции. Теоретические результаты дополняются численными экспериментами для большого диапазона параметров.

В **третьей главе** рассматривается прикладная задача смачивания грунта на примере увлажнения земляной плотины с противофильтрационным экраном (рис. 4). Для численного моделирования физического процесса строятся математические модели фильтрации в ненасыщенных и в насыщенных грунтах.

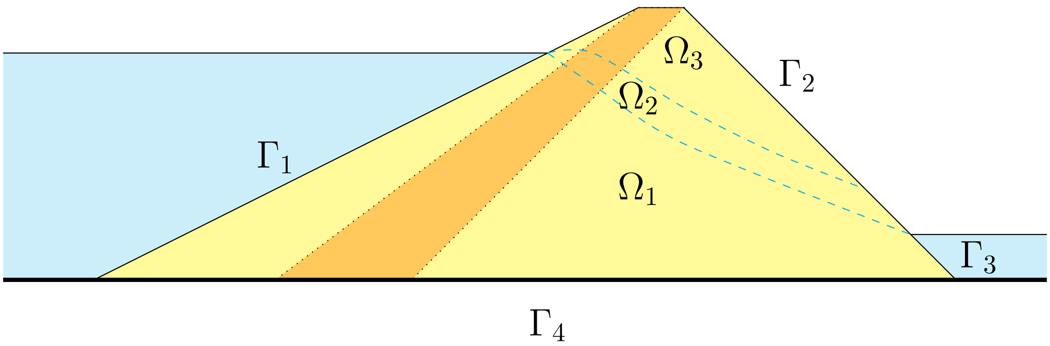

Рис. 4: Границы и подобласти земляной плотины с противофильтрационным экраном.

Движение влаги в зоне аэрации происходит по законам ненасыщенной фильтрации, которая описывается уравнением Ричардса

$$m\frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{div}\left(k(s)\operatorname{grad}(p_c - \rho g z)\right) = 0, \tag{11}$$

где m – пористость среды, s – доля водонасыщенности, $k(s, \boldsymbol{x})$ – водопроницаемость, p_c – капиллярное давление, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, z — вертикальная координата ($z = x_2$ в двумерном случае и $z = x_3$ — для трехмерного). Для решения задачи ненасыщенной фильтрации, уравнение (11) дополняется зависимостью доли воды от капиллярного давления

$$s(p_c) = 1 - \exp(-\alpha p_c), \tag{12}$$

где α – эмпирический параметр. Коэффициент водопроницаемости задается следующим образом

$$k(s) = k_s s^{\sigma}, \tag{13}$$

где k_s – водопроницаемость для насыщенной фильтрации, σ – эмпирический параметр. Подставив формулу (12) в (13) получим зависимость водопроницаемости от капиллярного давления.

Для учета напорного давления с боковых сторон, где присутствуют водоемы, используем уравнение насыщенной фильтрации несжимаемой жидкости

$$-\operatorname{div}\left(k_s \operatorname{grad}(p - \rho g z)\right) = 0, \tag{14}$$

где p – напорное давление, k_s – проницаемость водонасыщенной среды. Комбинируя уравнения для насыщенной и ненасыщенной фильтраций приходим к следующему уравнению для напорного давления

$$m s' \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad}(p - \rho g z)) = 0, \tag{15}$$

где $p_c = p - p_a$, а p_a – атмосферное давление.

Для численного решения задачи используется метод конечных элементов, который хорошо подходит для задач со сложной геометрией. Динамика границы смачивания в различных технологических условиях приведена на рис. 5.

Рассмотрено применение схемы декомпозиции области для прикладной трехмерной задачи увлажнения плотины. Пример сеточной декомпозиции показан на рис. 6. В качестве схемы декомпозиции была выбрана регионально-аддитивная факторизованная схема с минимальным налеганием. Вычислительная сетка задачи делится на два множества подобластей, для которых определяется оператор декопозиции. Полученные численные результаты решения факторизованной схемой сравниваются с результатами стандартной неявной схемы — рис. 7–9.

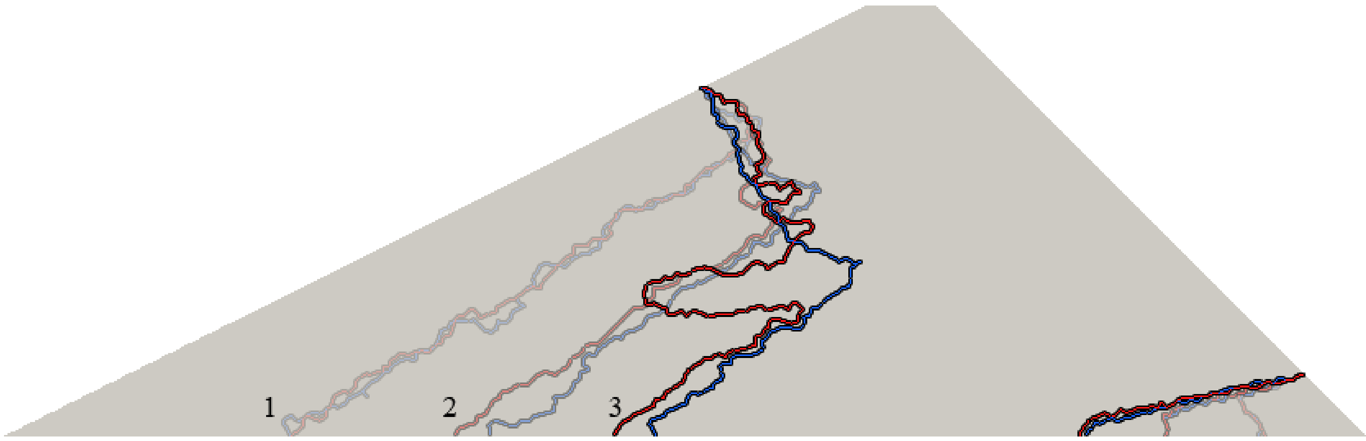

Рис. 5: Движение границы насыщенного грунта в 1-й, 2-й, 3-й день. Синяя линия – без противофильтрационного экрана, красная – с экраном.

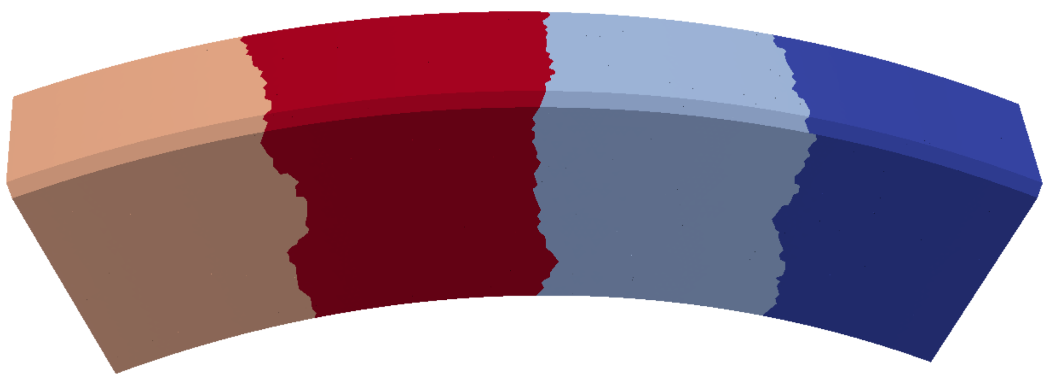

Рис. 6: Двухкомпонентная декомпозиция вычислительной сетки на 4 подобласти.

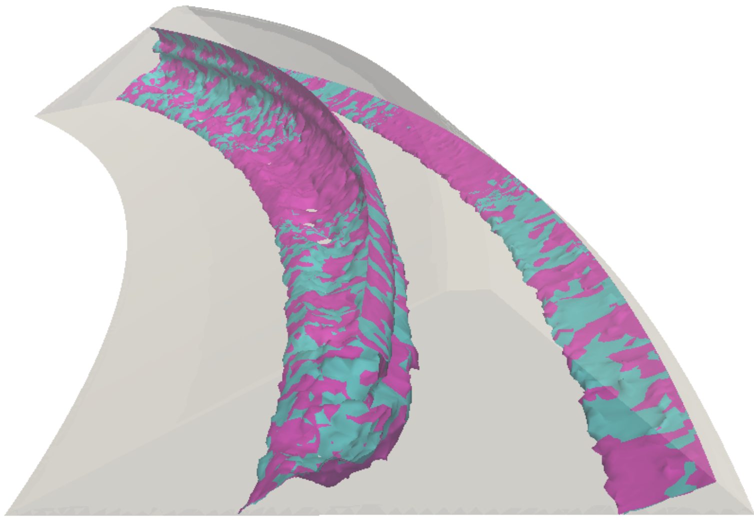

Рис. 7: Границы водонасыщенных зон в 1-й день решения факторизованной (розовый) и неявной (бирюзовый) схемой.

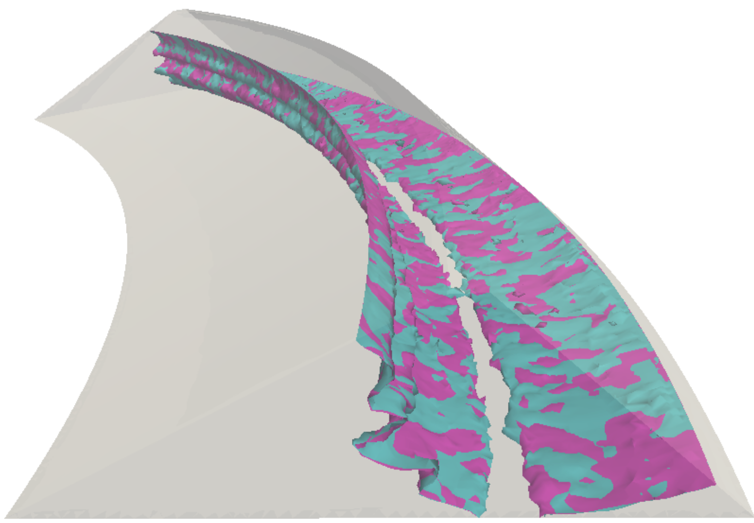

Рис. 8: Границы водонасыщенных зон в 2-й день решения факторизованной (розовый) и неявной (бирюзовый) схемой.

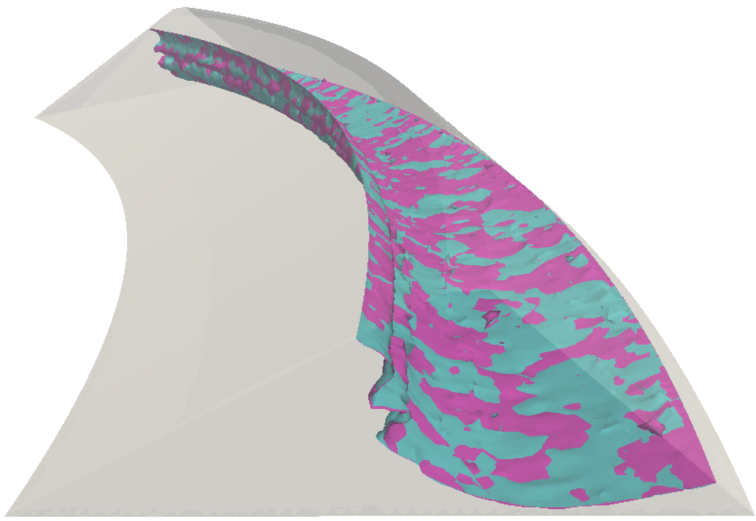

Рис. 9: Границы водонасыщенных зон в 3-й день решения факторизованной (розовый) и неявной (бирюзовый) схемой.

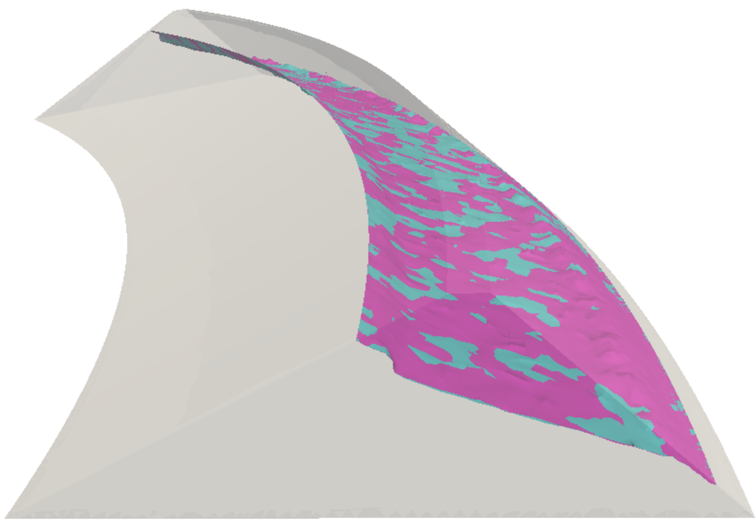

Рис. 10: Границы водонасыщенных зон в 30-й день решения факторизованной (розовый) и неявной (бирюзовый) схемой.

Основные результаты работы:

- Получена оценка погрешности второго порядка точности по временному шагу для факторизованной регионально-аддитивной схемы для нестационарных задач;
- Проведен методический анализ методов декомпозиции области для параллельных вычислительных систем кластерного типа, выполнено сравнение схем двух- и многокомпонентного расщепления при декомпозиции области без налегания и с налеганием подобластей;
- На основе сквозной математической модели фильтрации жидкости в ненасыщенном и насыщенном грунте проведено численное моделирование трехмерных задач увлажнения грунта на вычислительном кластере с использованием методов декомпозиции области.

Публикации автора по теме диссертации

1. **Захаров П. Е. Параллельные алгоритмы разделения области для параболической задачи / Захаров П. Е. // Мат. заметки ЯГУ, т. 20, вып. 2, 2013.**

2. **Захаров П. Е. Параллельное численное моделирование процесса заводнения нефтяного месторождения / Афанасьева Н.М., Васильева М.В., Захаров П. Е. // Математические заметки ЯГУ. т.18. вып 1. с. 159-172.**

3. **Захаров П. Е. Разработка пакета SCore для численного моделирования на вычислительных кластерах/ Борисов В. С., Вабищевич П. Н., Васильев В. И., Васильева М. В., Захаров П. Е., Казаков В. А. // Вестник ЦКР Роснедра. № 2, 2012, С. 36-39.**

4. Zakharov P. E. Domain Decomposition Scheme for First-Order Evolution Equations with Nonselfadjoint Operators / Vabishchevich P. N., Zakharov P. E.

// Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms, and Their Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Volume 45, 2013. pp. 279-302,

5. Захаров П. Е. Расчет потокораспределения в инженерных сетях / Захаров П. Е., Павлов Н.Н. // Математические заметки ЯГУ. т. 14, вып. 1. Новосибирск: ООО Омега Принт, 2007. с. 130-137.

6. Захаров П. Е. Параллельный алгоритм реализации математической модели вытеснения нефти водой / Захаров П. Е. // Тез. докл. Математическое моделирование развития северных территорий 2009. Якутск: Филиал изд-ва ЯГУ, 2009. с. 38-39.

7. Zakharov P. E. Numerical solution of single phase flow in porous media using conjugate gradient method on graphics processors / Zakharov P. E. // Тез. докл. International Young Scientists Conference on Mathematical Modeling. Якутск, 2010. с. 82-84.

8. Захаров П. Е. Параллельное программирование на основе библиотек / Григорьев А.В., Васильева М.В., Захаров П. Е. // Якутск: Издательско-полиграфический комплекс СВФУ, 2011. 94 с.

9. Захаров П. Е. Реализация безитерационного метода декомпозиции области для параболической задачи / Захаров П. Е. // Тез. докл. Международной конференции: Суперкомпьютерные технологии математического моделирования 2011. Якутск, 2011.

10. Захаров П. Е. Библиотека SCore для численного моделирования на высокопроизводительных вычислительных системах / Васильева М. В., Захаров П. Е. // Труды международных конференций по математическому моделированию / Под редакцией В.И. Васильева. Якутск: Сфера, 2012 г. с. 295-307.

11. Zakharov P. E. Domain decomposition schemes without overlapping for parabolic problems / Zakharov P. E.// Тез. докл. Международной конференции: Суперкомпьютерные технологии математического моделирования Якутск: Издательский дом СВФУ, 2013. с. 76