Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.К.АММОСОВА
(ФГАОУ ВО СВФУ им.М.К.Аммосова)

УДК – 517.956, 519.833, 519.217
Рег N НИОКТР АААА-А20-120050790005-9
Рег N ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор
СВФУ им. М.К. Аммосова
д-р биол. наук,
_____ А.Н. Николаев
«___»_____ 2022 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
№ FSRG-2020-0006

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

(промежуточный)

Руководитель НИР,
гл. научн. сотр., д-р физ.-мат. наук _____ Н.П.Лазарев
подпись, дата

Якутск 2022

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,
д-р физ.-мат. наук _____ Н.П. Лазарев (введение, разделы 1,2,3, заключение)
подпись, дата

Исполнители темы

д-р. физ.-мат. наук _____ И.Е. Егоров (раздел 5)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук _____ М.С. Троева (введение, раздел 8, заключение)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук _____ В.Е. Федоров (раздел 6, 7)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук _____ А.О. Иванова (введение, раздел 9, заключение)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук _____ С.В. Потапова (введение, раздел 10, заклчение)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук _____ Е.С. Ефимова (раздел 6)
подпись, дата

_____ Н.А. Николаева (раздел 4)
подпись, дата

_____ А.И. Григорьева (раздел 7)
подпись, дата

_____ С.Д. Верховцев (раздел 3)
подпись, дата

Нормоконтролер _____ Т.В. Сотникова
подпись, дата

Ректор СВФУ,
д-р. биол. наук _____ А.Н. Николаев
подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 93 с., 4 рис., 14 табл., 94 источника, 0 прил.

УСЛОВИЕ НЕПРОНИКАНИЯ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО, НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ГРАФ, ТОР, СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА, ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА МАККИНА-ВЛАСОВА, ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-БЕЛЛМАНА, ДРОБНЫЕ СИСТЕМЫ СПАРЕННЫХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ, ПРОИЗВОДНАЯ КАПУТО, БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ, АЛГОРИТМ ГАУССА-ЖОРДАНА

Объектом исследования являются неклассические краевые задачи для уравнений математической физики, нелинейные задачи для моделей композитных тел с трещинами; дробные дифференциальные уравнения на многообразиях; графы; бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

Целью работы: получение новых результатов в области краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений; развитие общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений; анализ нелинейных задач для моделей композитных тел с трещинами; исследование корректности для нелинейных дробных уравнений и дробной системы спаренных прямых и обратных уравнений на многообразиях; получение новых структурных свойств графов.

Методы, используемые в работе: современные методы теории дифференциальных уравнений, теории полугрупп линейных операторов, функционального анализа, вариационного исчисления, перераспределения эйлеровых вкладов, алгебры.

Результаты НИР: доказаны теоремы, обоснованы новые математические модели.

Область применения результатов НИР: Полученные результаты будут использованы для дальнейших исследований неклассических уравнений с частными производными, дискретных систем и их приложений.

Итоги внедрения результатов НИР: Результаты НИР включены в диссертационные работы исполнителей проекта, используются в преподавании специальных курсов для студентов и аспирантов математических направлений вузов. По результатам НИР опубликованы и приняты к опубликованию 12 научных статей, в т.ч. индексированы в Web of Science - 7, в SCOPUS - 8. Сделаны 7 научных докладов на международных конференциях.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проект направлен на исследование новых актуальных задач теории неклассических дифференциальных уравнений, дискретных систем и их приложений.

Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений имеют приложения в трансзвуковой газовой динамике, в моделях вязкоупругости, электродинамики, и других прикладных задачах физики и, в частности, механики. Неклассическим уравнениям математической физики посвящена обширная научная литература (см., например, [1–7]). Одним из активно развивающихся направлений современной теории неклассических дифференциальных уравнений являются краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка. Интерес к исследованию этих краевых задач вызван тем, что дробные производные наиболее адекватно описывают реальные процессы с памятью и наследственными свойствами.

Краевые задачи с свободными границами в рамках контактных задач, представляют собой интерес как с точки зрения развития методов вариационного исчисления, так и в связи прикладными инженерными задачами. В изучении подобных задач, необходимо преодолевать трудности в исследовании связанные с нелинейностью, негладкостью областей, а также с соотношениями, отражающими неоднородные свойства рассматриваемых тел. В настоящее время с помощью вариационного подхода исследованы различные задачи теории трещин с краевыми условиями в виде неравенств см., например, [8–10]. Надежный прогноз механического поведения армированных композитных конструкций может быть проведен на основе анализа численных экспериментов, которые, в свою очередь, должны быть тщательно обоснованы. В частности, анализ соответствующих математических моделей позволяет выявить оптимальные геометрические и механические характеристики, обеспечивающие запас структурной целостности композитов. Одним из важных вопросов, связанных с созданием армированных композитов, является исследование наилучшего расположения жестких компонентов с учетом характера их взаимосвязей.

Применение бесконечных систем (БС) для решения различных практических задач имеет широкий спектр: задачи статической теории упругости, теория дифракции, теория электрических цепей, теория кибернетических систем, квантовой химии и т.д. Теория решения БС развита, в основном, для двух узких классов БС: регулярных и систем с разностными индексами, поэтому их практическое приложение в естествознании и технике сильно ограничивается

недостаточной разработанностью теории БС. Данный проект направлен на разработку нового подхода исследования общих бесконечных систем.

Теория графов (бинарных отношений) находит приложения во многих областях дискретной математики, в структурной химии, генных и транспортных сетях и т.д. В 1989 Бородин подтвердил гипотезу Коцига 1963 года о том, что каждый граф с минимальной степенью $\delta = 5$ содержит грань типа $(5, 5, 7)$ или $(5, 6, 6)$, где все параметры точны. В 1995 Августинович и Бородин доказали, что каждая триангуляция тора с $\delta \geq 3$ содержит грань одного из следующих типов: $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 10)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 4, 4, 6)$, $(4, 4, 4, 4)$, где все параметры неулучшаемы. Доказано, что любая триангуляция с минимальной степенью 5 на торе содержит грань, у которой степени инцидентных вершин мажорируются одной из троек (5,5,8), (5,6,7) или (6,6,6), причем ни один из параметров этого описания не допускает улучшения.

Заметим, что дробные уравнения стали популярным предметом исследований в связи с их широкой применимостью в разных областях естественных наук. Исследуемый класс абстрактных нелинейных дробных псевдодифференциальных уравнений в банаховых пространствах, который включает в себя как уравнения типа Мак-Кина-Власова, описывающие нелинейные марковские процессы, так и уравнение стохастического управления Гамильтона-Якоби-Беллмана, позволяет проводить единый анализ этих уравнений. Построена абстрактная модель для системы спаренных прямых и обратных уравнений и их дробных аналогов, рассматривая эти уравнения как развивающиеся в дуальных банаховых тройках. С использованием разработанного абстрактного подхода доказаны результаты корректности для нелинейных дробных уравнений и дробной системы спаренных прямых и обратных уравнений на многообразиях. Системы спаренных прямых и обратных уравнений (прямая эволюция Маккина-Власова и обратная эволюция Гамильтона-Якоби-Беллмана) занимают центральное место в современной теории игр среднего поля. В частности, дробные системы прямых и обратных уравнений возникают при анализе дробных игр среднего поля. Игры среднего поля используются в моделировании проблем ценообразования на финансовых рынках, в теории распределения энергетических ресурсов и др.

Цель работы: получение новых результатов в области краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений с частными производными; развитие методологии исследования краевых задач для уравнений математической физики на основе развития общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений; анализ нелинейных задач для математи-

ческих моделей композитных тел с включениями; исследование корректности систем абстрактных спаренных прямых и обратных уравнений (прямая эволюция Маккина-Власова и обратная эволюция Гамильтона-Якоби-Беллмана) и их дробных аналогов в дуальных банаховых тройках и на многообразиях; получение новых структурных свойств графов.

На данном этапе для реализации цели проекта выполнена следующая работа:

- Установлена сходимость решений задач, описывающих равновесие упругих пластин с плоскими жесткими включениями, к решению задачи для пластины с жесткими объемными включениями при стремлении коэффициента жесткости к бесконечности.

- Для двумерной нелинейной модели о равновесии композитного тела доказана разрешимость задачи оптимального управления. При этом функционал качества определяется произвольным непрерывным функционалом в подходящем пространстве Соболева, а управление задается количеством тонких жестких тонких прямолинейных отрезков.

- Для задачи равновесии композитной пластины Тимошенко, содержащей два соединенных тонких жестких включения, доказана разрешимость задачи оптимального управления координатами точки шарнирного соединения включений. Функционал качества определен с помощью произвольного непрерывного функционала заданного на подходящем пространстве Соболева.

- Исследована задача о равновесии двумерного упругого тела, которое содержит трещину и тонкое включение, которое разбивается трещиной на две части. При этом одна часть включения моделируется балкой Бернулли–Эйлера, другая представляет собой тонкое жесткое включение. Проведен анализ сходимости решений при стремлении параметра жесткости тонкого упругого включения к бесконечности.

- Исследована однозначная разрешимость краевой задачи на полуоси для системы дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и постоянными коэффициентами в классе ограниченных функций. Получены условия типа Лопатинского для граничных матриц, при которых краевая задача будет однозначно разрешима в классе ограниченных и абсолютно непрерывных вектор-функций.

- Исследованы две краевые задачи для уравнения высокого порядка соболевского типа с меняющимся направлением времени. При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказана регулярная разрешимость этих задач. Для обеих задач получена оценка сходимости приближенных решений.

- Исследованы две краевые задачи с интегральным граничным условием для вырождающегося уравнения четного порядка. Эти задачи сводятся к соответствующим задачам с локальными граничными условиями, но для интегрально-дифференциального уравнения. Разрешимость полученных вспомогательных краевых задач доказывается методом последовательных приближений.

- Доказано точное описание граней триангуляции с минимальной степенью 5 на торе. Даны конструкции, доказывающие точность описания.

- Исследована абстрактная модель для системы спаренных прямых и обратных уравнений и их дробных аналогов, рассматривая эти уравнения как развивающиеся в дуальных банаховых тройках. Получены результаты о локальной корректности для дробной системы спаренных прямых и обратных уравнений, состоящей из прямого уравнения Маккина-Власова и обратного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для $t \in [a, T]$.

- Исследована корректность в классе мягких решений для нелинейных дробных уравнений Маккина-Власова и дробных уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана на многообразиях, а также для дробной системы спаренных прямых и обратных уравнений на многообразиях.

- Исследованы численные методы решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Сперва формально обобщен метод Гаусса-Жордана на бесконечные системы. Показано, что на основе такого алгоритма можно формально обобщить и другие численные методы, например, метод последовательных приближений или итерационный метод Зейделя. Затем на примерах конкретных совместных бесконечных систем проверена работоспособность указанных методов. Дается численное сравнение этих методов.

Полученные фундаментальные результаты могут служить теоретической основой развития методов математического моделирования реальных процессов в экономике, экологии, строительстве и других областях, необходимых для решения проблем рационального природопользования, прогнозирования экологических, биологических систем и др.

Достижение требуемого качества работ обеспечивается имеющимся научным заделом коллектива по теме проекта. При проведении исследований новых задач, поставленных в рамках проекта, использованы современные математические методы и результаты мировой науки в данной области, а также подходы, методы и результаты, полученные ранее исполнителями проекта.

1 Предельный переход в задаче о равновесии пластины с трещиной и двумя шарнирно соединенными жесткими включениями

Рассматривается семейство вариационных задач о равновесии составной пластины Кирхгофа-Лява, содержащей два шарнирно соединенных плоских жестких включения. Предполагается, что оба включения отслаиваются от упругой матрицы, образуя трещину между включениями и упругой средой. На берегах трещины задаются граничные условия перемещения типа неравенства, обеспечивающие взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Путем обоснования предельного перехода в семействе вариационных неравенств показана качественная связь задач для пластин с шарнирно соединенными плоскими включениями и для пластины с объемными шарнирно соединенными включениями. А именно установлена сходимость решений задач, описывающих равновесие упругих пластин с плоскими жесткими включениями, к решению задачи для пластины с жесткими объемными включениями при стремлении коэффициента жесткости к бесконечности (результат опубликован, см. [11]).

Успех современной промышленности во многом основывается на широком использовании композитных материалов. Математическое моделирование свойств композитов, их поведения в определенных условиях дает возможности для оптимизации параметров и характеристик композитов. В результате этих исследований разрабатываются качественно новые модели, а также различные математические подходы, ведущие к новым постановкам задач. Помимо преимуществ композитных материалов, различие физических характеристик компонентов может привести к возникновению трещин и, как следствие, к частичным повреждениям элементов конструкции или разрушению всего композита.

Наличие включения или трещины в нагруженном теле означает, что вблизи этих объектов могут быть значительные значения напряжений. По этой причине выбор того или иного способа задания граничных условий, характеризующих механические процессы вблизи трещины, может повлиять на адекватность всей математической модели в целом.

В этой работе мы следуем методам, разработанным для нелинейных моделей с использованием граничных условий типа Синьорини на берегах трещины см., например, [12–17] и другие работы. Эти нелинейные условия требуют использование вариационных формулировок. В рамках вариационного подхода успешно сформулированы и исследованы задачи равновесия композитных тел с упругими или жесткими включениями [10, 18–24].

Семейство задач о равновесии

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей Γ класса $C^{1,1}$. Предположим, что прямолинейная кривая $\gamma = (-1,1) \times \{0\}$ лежит строго внутри Ω, т.е. $\bar{\gamma} \subset \Omega$. Предположим, что Γ состоит из двух непересекающихся кривых $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, где $\mathrm{meas}(\Gamma_0) > 0$ и $\mathrm{meas}(\Gamma_1) > 0$. Будем считать, что область Ω может быть разбита на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ так, чтобы $\gamma \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, и $\mathrm{meas}(\partial\Omega_i \cap \Gamma_0) > 0$, $i = 1,2$. Последнее условие важно для выполнения неравенства Корна в нелипшицевой области $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \bar{\gamma}$. Для простоты предполагается, что пластина имеет одинаковую толщину $2h = 2$. Пусть трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ введено таким образом, чтобы множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$ соответствовало средней плоскости пластины. Кривая γ определяет трещину (разрез) в пластине. Это означает, что цилиндрическая поверхность сквозной трещины может быть определена соотношениями $x = (x_1, x_2) \in \gamma, -1 \le z \le 1$ где $|z|$ – расстояние до средней плоскости. В зависимости от направления нормали $\nu = (0,1)$ к γ, будем иметь в виду положительный берег γ^+ и отрицательный берег γ^- кривой γ. Скачок $[q]$ произвольной функции q на кривой γ находится по формуле $[q] = q|_{\gamma^+} - q|_{\gamma^-}$. Предположим, что пластина имеет два шарнирно соединенных плоских включения на положительной грани кривой γ. Для фиксированного параметра $\delta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, кривая γ разбивается на две прямолинейные кривые $\gamma_1^\delta = (-1,\delta) \times \{0\}$ и $\gamma_2^\delta = (\delta,1) \times \{0\}$, которые соответствуют двум плоским жестким включениям (см. Рис. 1).

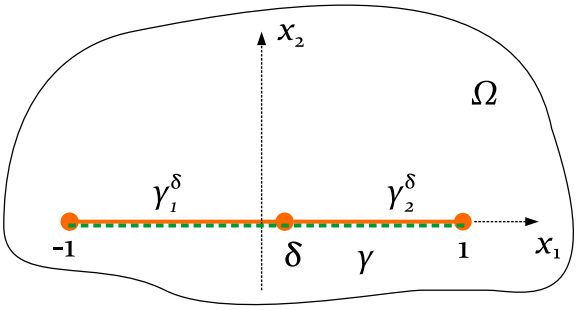

Рисунок 1 – Объекты на срединной плоскости

Таким образом, для исходного недеформированного состояния пластины плоские жесткие включения задаются множествами $\gamma_i^\delta \times [-1,1], \quad i = 1,2$, а волокно шарнирного соединения задается отрезком $\{\delta\} \times \{0\} \times [-1,1]$. Упругая часть пластины соответствует области Ω_γ.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W, w)$ вектор перемещений срединной плоскости ($x \in \Omega_\gamma$), где $W = (w_1, w_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, w — прогибы или перемещения вдоль оси z. Тензоры деформаций и интегральных напряжений обозначены $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$,

соответственно [12]:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j}), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i,j = 1,2,$$

где $\{a_{ijkl}\}$ — заданный тензор упругости, симметричный и положительно определенный:

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}, \quad i,j,k,l = 1,2, \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega_\gamma),$$
$$a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall\xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i,j = 1,2, \quad c_0 = const > 0.$$

В дальнейшем используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Далее обозначим изгибающие моменты формулами [12]

$$m_{ij}(w) = d_{ijkl}w_{,kl}\,, \quad i,j = 1,2, \quad (w_{,kl} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l})$$

где тензор $\{d_{ijkl}\}$ обладает теми же свойствами, что и тензор $\{a_{ijkl}\}$. Пусть $B(O,\cdot,\cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B(O,\chi,\bar{\chi}) = \int\limits_O \left\{\sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}(w)\bar{w}_{,ij}\,\right\}dx,$$

где $\chi = (W,w)$, $\bar{\chi} = (\bar{W},\bar{w})$ и O — некоторая измеримое подмножество области Ω. Функционал потенциальной энергии пластины имеет следующее представление [12]:

$$\Pi(\chi) = \frac{1}{2}B(\Omega_\gamma,\chi,\chi) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F\,\chi dx, \qquad \chi = (W,w),$$

где вектор $F = (f_1,f_2,f_3) \in L_2(\Omega)^3$ описывает воздействие внешних сил [12]. Введем пространства Соболева

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega_\gamma) = \left\{v \in H^1(\Omega_\gamma) \;\middle|\; v = 0 \text{ на } \Gamma_0\right\},$$
$$H^2_{\Gamma_0}(\Omega_\gamma) = \left\{v \in H^2(\Omega_\gamma) \;\middle|\; v = \tfrac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_0\right\},$$
$$H(\Omega_\gamma) = H^1_{\Gamma_0}(\Omega_\gamma)^2 \times H^2_{\Gamma_0}(\Omega_\gamma),$$

где $n = (n_1, n_2)$ вектор нормали к Γ. Отметим, что следующее неравенство

$$B(\Omega_\gamma, \chi, \chi) \geq c\|\chi\|^2 \quad \forall\, \chi \in H(\Omega_\gamma), \quad (\|\chi\| = \|\chi\|_{H(\Omega_\gamma)}) \tag{1.1}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от χ, выполняется для билинейной формы $B(\Omega_\gamma, \cdot, \cdot)$ [12].

Замечание 1.1 *Неравенство (1.1) дает эквивалентность стандартной нормы и полунормы, определяемой билинейной формой $B(\Omega_\gamma, \cdot, \cdot)$ в пространстве $H(\Omega_\gamma)$.*

Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины определяется выражением [12, 20]

$$[W\nu] \geq |\big[\frac{\partial w}{\partial \nu}\big]| \quad \text{на} \;\; \gamma, \quad (W\nu = w_i\nu_i). \tag{1.2}$$

Из-за наличия в пластине плоских жестких включений, функции, описывающие перемещения χ, удовлетворяют специальному виду соотношений на соответствующих кривых γ_1^δ, γ_2^δ. Введем следующее пространство, которое позволяет охарактеризовать свойства плоских жестких включений

$$R(S) = \{\zeta \,|\, \zeta(x) = (b^i x_2 + c_1^i, -b^i x_1 + c_2^i, a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2); \quad x \in S\},$$

где $b^i, c_1^i, c_2^i, a_0^i, a_1^i, a_2^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, и S — некоторое подмножество области Ω (см. [19, 20]). Предположим, что перемещения на двух плоских жестких включениях обладают следующими свойствами: [25]

$$\chi|_{\gamma_i^{\delta+}} = \zeta^i, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -a_1^i, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = -a_2^i \quad \text{на} \quad \gamma_i^{\delta+}, \tag{1.4}$$

где $\chi = (W, w)$, $\zeta^i \in R(\overline{\gamma}_i^\delta)$, $i = 1, 2$. Поскольку имеется шарнирное соединение включений, будем считать, что смещения и углы поворота нормальных волокон обоих включений равны в соответствующей точке $x^\delta = (\delta, 0)$ срединной плоскости пластины

$$\zeta^1(x^\delta) = \zeta^2(x^\delta), \quad \text{где} \quad \chi|_{\gamma_i^{\delta+}} = \zeta^i, \quad \zeta^i \in R(\overline{\gamma}_i^\delta), \quad i = 1, 2, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -a_1^1 = -a_1^2, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = -a_2^1 = -a_2^2. \tag{1.6}$$

Вариационная постановка, описывающая состояние равновесия упругой пластины с плос-

кими отслоившимися жесткими включениями, может быть сформулирована следующим образом:

$$\Pi(\xi^\delta) = \inf_{\eta \in K^\delta} \Pi(\eta). \tag{1.7}$$

Для фиксированного $\delta \in [-1/2, 1/2]$, через K^δ обозначим множество допустимых перемещений

$$K^\delta = \{\chi \in H(\Omega_\gamma) \,|\, \chi \text{ удовлетворяет } (2.6), (1.3), (1.4)\}.$$

Замечание 1.2 *Следует отметить, что условия $\chi \in H(\Omega_\gamma)$ и (1.3), (1.4) означают, что (1.5), (1.6) выполнены.*

Замечание 1.3 *Следует отметить, что понятия плоского включения и тонких включений (см. [19, 20]) одинаковым образом задаются с помощью цилиндрических поверхностей, но для плоских включений существуют дополнительные соотношения, описывающие связь прогибов пластины w и углов поворота нормальных волокон $\frac{\partial w}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, включения, см. (1.4). Поскольку объемные (объемные) жесткие включения в пластинах Кирхгофа-Лява определяются с помощью наборов следующего вида $\mathcal{O} \times [-1, 1]$, где $\mathcal{O}$ — некоторая подобласть, лежащая в средней плоскости пластины [18] следующие соотношения (1.4) для частных производных естественно выполняется для объемных жестких включений в $\mathcal{O}$.*

Простыми рассуждениями можно проверить, что множество K^δ выпукло и замкнуто. Коэрцитивность и слабая полунепрерывность функционала энергии вместе с (1.1) гарантируют, что задача (3.1) имеет единственное решение. Более того, в силу дифференцируемости по Гато функционала Π задача (3.1) эквивалентна следующему вариационному неравенству (см. [12])

$$\xi^\delta \in K^\delta, \quad B(\Omega_\gamma, \xi^\delta, \chi - \xi^\delta) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\chi - \xi^\delta) dx \quad \forall\, \chi \in K^\delta. \tag{1.8}$$

Предельный переход

В этом разделе мы покажем, что задача для упругой пластины с двумя шарнирно соединенными объемными включениями получается в результате предельного перехода из семейства задач для упругих пластин с двумя шарнирно соединенными плоскими включениями. В дополнение к предыдущим предположениям, будем полагать, что липшицевые односвязные подобласти ω_1^δ и ω_2^δ обладают следующими свойствами:

а) $\overline{\omega}_1^\delta \subset \Omega, \quad \overline{\omega}_2^\delta \subset \Omega, \quad \overline{\omega}_1^\delta \cap \overline{\omega}_1^\delta = (\delta, 0);$

b) $\gamma_1^\delta \subset \partial\omega_1^\delta, \quad \gamma_2^\delta \subset \partial\omega_2^\delta$.

Мы предполагаем, что данные тензоры упругости дополнительно зависят от $\lambda \in (0, \Lambda)$ (где Λ — постоянная, $0 < \Lambda < +\infty$), следующим образом:

$$a_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega_\delta^1 \cup \omega_\delta^2}, \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} & \text{в} \quad \omega_\delta^1 \cup \omega_\delta^2, \end{cases} \quad ; \quad d_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} d_{ijkl} & \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega_\delta^1 \cup \omega_\delta^2}, \\ \lambda^{-1} d_{ijkl} & \text{в} \quad \omega_\delta^1 \cup \omega_\delta^2. \end{cases}$$

Определим функции

$$\sigma_{ij}^\lambda(W) = a_{ijkl}^\lambda \varepsilon_{kl}(W), \quad m_{ij}^\lambda(w) = d_{ijkl}^\lambda w_{,kl}\,, \quad i, j = 1, 2,$$

и билинейную форму

$$B^\lambda(S, \chi, \bar{\chi}) = \int\limits_S \left\{ \sigma_{ij}^\lambda(W)\, \varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}^\lambda(w) \bar{w}_{,ij} \right\} dx$$

соответствующую некоторому измеримому множеству $S \subset \Omega$. Для фиксированного $\lambda \in (0, \Lambda)$, сформулируем соответствующую вариационную задачу

$$\Pi^\lambda(\xi^{\delta,\lambda}) = \inf_{\eta \in K^\delta} \Pi^\lambda(\eta), \tag{1.9}$$

где

$$\Pi^\lambda(\chi) = \frac{1}{2} B^\lambda(\Omega_\gamma, \chi, \chi) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F\, \chi dx, \qquad \chi = (W, w).$$

В соответствии с рассуждениями, проведенными в [18], можно показать, что задача (1.9) имеет единственное решение и эквивалентна следующему вариационному неравенству

$$\xi^{\delta,\lambda} \in K^\delta, \quad B^\lambda(\Omega_\gamma, \xi^{\delta,\lambda}, \chi - \xi^{\delta,\lambda}) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\chi - \xi^{\delta,\lambda}) dx \quad \forall\, \chi \in K^\delta. \tag{1.10}$$

Далее обоснуем предельный переход в (1.10) при λ стремящемся к нулю. Сравнивая два неравенства, соответствующие (1.10) с тестовыми функциями $\chi = 2\xi^{\delta,\lambda}$, $\chi = 0$, получим

$$B^\lambda(\Omega_\gamma, \xi^{\delta,\lambda}, \xi^{\delta,\lambda}) = \int\limits_{\Omega_\gamma} F \xi^{\delta,\lambda} dx.$$

Отсюда, применяя неравенство (1.1), получаем равномерные оценки

$$\|\xi^{\delta,\lambda}\| \le c,$$

$$\frac{1}{\lambda} B(\omega_\delta^i, \xi^{\delta,\lambda}, \xi^{\delta,\lambda}) \le c, \quad i = 1, 2, \tag{1.11}$$

где $c > 0$ не зависит от $\lambda \in (0, \Lambda)$. Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно без ограничения общности считать, что существует слабо сходящаяся в $H(\Omega_\gamma)$ последовательность $\{\xi^{\delta,\lambda_n}\}$ такая, что $\xi^{\delta,\lambda_n} \to \tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} = (\tilde{U}, \tilde{u})$ при $\lambda_n \to 0$. Ввиду (1.11) мы получаем

$$\varepsilon_{ij}(\tilde{U}) = 0, \quad \tilde{u}_{,ij} = 0 \quad \text{в} \quad \omega_\delta^k, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Из последних соотношений следует, что

$$\tilde{U} = (b^i x_2 + c_1^i, -b^i x_2 + c_2^i), \quad \tilde{u} = a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2, \quad x \in \omega_\delta^i,$$

где $b^i, c_1^i, c_2^i, a_0^i, a_1^i, a_2^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Как показано в [18], функция $\tilde{\xi}$ принадлежит множеству

$$K_\omega^\delta = \{\chi \in H(\Omega_\gamma) \,|\, \chi \text{ удовлетворяет (2.6)}, \quad \chi|_{\omega_i^\delta} = \zeta^i, \quad \zeta^i \in R(\overline{\omega}_i^\delta), \quad i = 1, 2.\}.$$

Здесь следует отметить, что в силу свойств операторов следа для функций из пространства $H(\Omega_\gamma)$, условия шарнирного соединения выполняются в точке x^δ

$$\zeta^1(x^\delta) = \zeta^2(x^\delta), \quad \text{где} \quad \chi|_{\omega_i^\delta} = \zeta^i, \quad \zeta^i \in R(\overline{\omega}_i^\delta), \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -a_1^1 = -a_1^2, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = -a_2^1 = -a_2^2,$$

где $\chi = (W, w)$, $\zeta^i \in R(\overline{\omega}_i^\delta)$, $i = 1, 2$. Теперь, выполняя предельный переход в (1.10) при $\lambda \to 0$ для произвольной тестовой функции $\chi \in K_\omega^\delta$, мы получим, что

$$\tilde{\xi} \in K_\omega^\delta, \quad B^\lambda(\Omega_\gamma, \tilde{\xi}, \chi - \tilde{\xi}) \ge \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\chi - \tilde{\xi}) dx \quad \forall\, \chi \in K_\omega^\delta.$$

Последнее вариационное неравенство эквивалентно следующей задаче минимизации

$$\Pi(\xi_\omega) = \inf_{\eta \in K_\omega^\delta} \Pi(\eta), \tag{1.12}$$

описывающее равновесие пластины Кирхгофа–Лява с двумя шарнирно закрепленными объемными включениями.

2 Оптимальное управление расположением точки шарнирного соединения жестких включений в задаче о равновесии пластины Тимошенко

Изучено семейство контактных задач о равновесии композитной пластины Тимошенко, содержащих два тонких жестких включения, которые соединены шарнирным образом. Семейство зависит от меняющегося параметра, задающего координаты точки соединения включений. Формулируется задача оптимального управления с функционалом качества, определенного с помощью произвольного непрерывного функционала заданного на подходящем пространстве Соболева. При этом управление задается параметром координаты точки соединения включений. Доказана непрерывность решений от этого параметра. Установлена разрешимость задачи оптимального управления.

Наряду с растущим промышленным интересом к использованию композитов, растет научное внимание к изучению математических моделей, которые отражают особенности тел с неоднородными свойствами. Геометрические характеристики элементов композитных тел могут влиять на прочностные свойства композитных структур и конструкций в целом. В моделировании задач механики деформируемого твердого тела часто используется подход, позволяющий формулировать задачи в рамках моделей с геометрическими объектами меньшей размерности, например, задачи о деформировании пластин и балок. В последние десятилетия активно изучаются композитные структуры с тонкими включениями, т.е. когда размерность включения на единицу меньше чем размерность всего композитного тела, см. например [26–30]. Ряд работ посвящен обратным задачам и задачам оптимального управления в моделях, в которых соединены тонкие включения с упругими или жесткими свойствами, см., например, [10, 31], в указанных статьях исследована зависимость от параметров повреждаемости, жесткости включений, жесткости сцепления. Имеется широкий круг работ, касающихся вариации геометрии включений, а также их оптимального расположения [32–35] , отметим работу в которой доказана разрешимость оптимального расположения одного жесткого включения в пластине Тимошенко [36]. Общность вариационного подхода позволяет изучать композитные тела с отслоившимися включениями на части границы которых задаются условия непроникания типа неравенств [37–39]

В настоящей работе изучена зависимость модели о равновесии пластины от размеров включений и расположения точки в которой соединяются тонкие включения. Авторам не известны работы, в которых была бы исследована задача оптимального управления расположе-

нием точек соединения для двух тонких включений. Предполагается, что пластина закреплена на одной части границы и на оставшейся части границы она может вступать в механический контакт с жестким препятствием. Исследование рассматриваемого семейства вариационных задач опирается на известные теоремы о сходимости функций, о следах функций в пространствах Соболева. Для того, чтобы установить непрерывную зависимость решений семейства задач от параметра расположения точки соединения строится специальная последовательность тестовых функций. В работе доказана разрешимость задачи оптимального управления в которой функционал качества задается произвольной непрерывной функцией, а контроль — параметром расположения точки шарнирного соединения тонких жестких включений.

Семейство вариационных задач

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — ограниченная область с ограниченной границей $\Gamma \in C^{0,1}$. Предположим, что Γ состоит из двух частей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\mathrm{meas}(\Gamma_0) > 0$, $\mathrm{meas}(\Gamma_1) > 0$. Предположим, что прямолинейный $\gamma = (-1, 1)$ лежит строго внутри Ω кроме того, считаем, что его можно продолжить так, чтобы исходная область разбивалась на две подобласти Ω_1, Ω_2 с липшицевыми границами так, чтобы $\gamma \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\mathrm{meas}(\Gamma_0 \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$. Это условие требуется для выполнения неравенства Корна в области с разрезом $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \bar{\gamma}$.

Определим трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ так, чтобы что множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало средней плоскости пластины. Мы предполагаем, что толщина пластины постоянна и равна двум, т.е., полутолщина $h = 1$. Для фиксированного параметра $\delta \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ кривая γ разбивается на два отрезка $\gamma_1^\delta = [-1, \delta] \times \{0\}$, $\gamma_2^\delta = [\delta, 1] \times \{0\}$, они соответствуют двум тонким жестким включениям, задаваемым множествами

$$\gamma_i^\delta \times [-1; 1], \quad i = 1, 2.$$

Упругая часть пластины соответствует области Ω_γ.

Обозначим через $\eta = \eta(x) = (W, w, \psi)$ обобщенный вектор перемещений точек срединной поверхности, $x \in \Omega_\gamma$, где $W = (w_1, w_2)$ и w — горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно, $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$ — углы поворота нормальных сечений [40].

Введем обозначение

$$H(\Omega) = H^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)^5, \quad H^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \,|\, v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0\}.$$

Приведем известные тензорные соотношения теории упругости, справедливые для упругих трансверсально-изотропных пластин. Тензоры, описывающие деформацию пластины, определяются по формулам

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \ i,j = 1,2.$$

Здесь нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате. Тензоры моментов и усилий вычисляются по формулам

$$m_{ij}(\psi) = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i,j,k,l = 1,2. \tag{2.1}$$

Здесь $A = \{a_{ijkl}\}$, $B = \{b_{ijkl}\}$ — тензоры модулей упругости, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i,j,k,l = 1,2,$$

$$a_{ijkl}\zeta_{kl}\zeta_{ij} \geq c_0\zeta_{ij}\zeta_{ij} \quad \forall \zeta_{ij} = \zeta_{ji}, \quad c_0 > 0,$$

аналогичные соотношения справедливы для тензора $B = \{b_{ijkl}\}$. В силу предположений о трансверсальной изотропности материала матрицы пластины в области Ω_γ ненулевые коэффициенты тензоров A и B определяются соотношениями

$$b_{iiii} = D, \ b_{iijj} = D\kappa, \ b_{ijij} = b_{ijji} = D(1-\kappa)/2, \ i \neq j, \ i,j = 1,2,$$

$$a_{ijkl} = 3b_{ijkl}, \quad i,j,k,l = 1,2,$$

где D — цилиндрическая жесткость; $0 < \kappa < 1/2$ — коэффициент Пуассона. Поперечные силы, действующие в области пластины, описываемой моделью Тимошенко, задаются выражениями

$$q_i(w,\psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad i = 1,2,$$

где $\Lambda = 2k'G$; k' — коэффициент сдвига; G — модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины. Пусть $\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega)$, $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi}) \in H(\Omega)$. Для

произвольной подобласти $\mathcal{O} \subset \Omega$ определим билинейную форму:

$$B(\mathcal{O}, \eta, \bar{\eta}) = \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\sigma_{ij}(W)\, \varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}(\psi)\, \varepsilon_{ij}(\bar{\psi}) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\psi}_i) \Big).$$

Отметим, что имеет место равенство

$$B(\Omega, \eta, \eta) \geq c\|\eta\|^2, \quad \forall\, \eta \in H(\Omega), \tag{2.2}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от η (см. [41]). Данное неравенство гарантирует эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega)$ с полунормой, которая выражается билинейной формой $B(\Omega, \eta, \eta)$.

Функционал потенциальной энергии деформированной пластины имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2} B(\Omega, \eta, \eta) - \int\limits_{\Omega} F\eta, \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega), \tag{2.3}$$

где $F = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega)^5$ – вектор заданных внешних нагрузок [19].

Из-за наличия жестких включений в пластине функции, описывающие перемещения (W, w) и углы поворота ψ на отрезках γ_i^δ удовлетворяют специальным соотношениям. Мы вводим пространство, которое позволяет нам охарактеризовать свойства тонкого жесткого включения

$$R(\gamma_i^\delta) = \{\zeta \,|\, \zeta(x) = (b^i x_2 + c_1^i, -b^i x_1 + c_2^i, a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2, -a_1^i, -a_2^i); \quad x \in \gamma_i^\delta\}, \tag{2.4}$$

где $b^i, c_1^i, c_2^i, a_0^i, a_1^i, a_2^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Мы рассмотрим случай двух связанных шарнирным образом тонких включений, в таком случае, мы имеем следующую структуру перемещений

$$\eta|_{\gamma_i^\delta} = \zeta^i, \text{ где } \zeta^i \in R(\overline{\gamma}_i^\delta), \quad i = 1, 2.$$

Далее мы предполагаем, что перемещения обоих включений совпадают в точке соединения $x^\delta = (\delta, 0)$

$$\zeta^1(x^\delta) = \zeta^2(x^\delta), \quad \text{где} \quad \eta|_{\gamma_i^\delta} = \zeta^i, \quad \zeta^i \in R(\overline{\gamma}_i^\delta), \quad i = 1, 2. \tag{2.5}$$

Рассмотрим условие типа Синьорини возможного контакта на части границы Γ_1 [39]

$$|\phi\nu| \leq -W\nu \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{2.6}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Для фиксированного δ задача о равновесии пластины с двумя тонкими жесткими включениями может быть сформулирована в виде

$$\Pi(\xi^\delta, \Omega) = \inf_{\eta \in K^\delta} \Pi(\eta, \Omega), \tag{2.7}$$

где

$$K^\delta = \{\eta \in H(\Omega) \,|\, \eta \quad \text{удовлетворяет (2.5), (2.6)}, \quad \eta|_{\gamma_i^\delta} = \zeta^i, \text{ где } \zeta^i \in R(\overline{\gamma}_i^\delta), \quad i = 1, 2\}.$$

Нетрудно установить, что множество K^δ является замкнутым и выпуклым. Функционал энергии коэрцитивен и слабо полунепрерывен снизу. Дифференцируемость функционала $\Pi(\eta, \Omega)$ по Гато, позволяет утверждать, что задача (3.1) эквивалентна следующему вариационному неравенству [12]

$$\xi^\delta \in K^\delta, \quad B(\Omega, \xi^\delta, \eta - \xi^\delta) \geq \int_\Omega F(\eta - \xi^\delta) \quad \forall\, \eta \in K^\delta. \tag{2.8}$$

Задача оптимального управления

Для произвольного непрерывного функционала $G(\chi) : H(\Omega) \to \mathbb{R}$ можно определить следующий функционал качества $J_G : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ с помощью равенства $J_G(\delta) = G(\xi^\delta)$, где ξ^δ — решение задачи (3.1). Указанное свойство непрерывности выполняется для многих физически мотивированных функционалов, например, для следующего функционала

$$G_1(\chi) = \|\chi - \chi_0\|_{H(\Omega)},$$

который характеризует отклонение обобщенного вектора перемещений от заданной функции $\chi_0 \in H(\Omega)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\text{Найти} \quad \delta^* \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \quad \text{такое что} \quad J_G(\delta^*) = \sup_{\delta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} J(\delta). \tag{2.9}$$

Теорема 2.1 *Задача* (3.5) *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Пусть $\{\delta_n\}$ — максимизирующая последовательность. В силу ограниченности интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, можно выделить подпоследовательность $\{\delta_{n_k}\} \subset \{\delta_n\}$ такую, что

$$\delta_{n_k} \to \delta^* \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad \delta^* \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Без ограничения общности считаем, что $\delta_{n_k} \neq \delta^*$ для достаточно больших k. В противном случае существовала бы подпоследовательность $\{\delta_{n_l}\}$ таких, что $\delta_{n_l} \equiv \delta^*$, и в таком случае $J(\delta^*)$ — решение задачи (3.5).

Принимая во внимание Лемму 2 доказанную ниже существует последовательность ξ_k решений (3.1) соответствующих параметрам δ_{n_k} сходится к решению ξ_{t^*} сильно в $H(\Omega)$ при $k \to \infty$. Это позволяет получить сходимость

$$J_G(\delta_{n_k}) \to J_G(\delta^*),$$

выявляющую выполнение равенства

$$J_G(\delta^*) = \sup_{\delta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} J_G(t).$$

Теорема доказана.

Лемма 2.1 *Пусть $\delta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ — фиксированное число. Тогда $\xi^\delta \to \xi^\delta$ сильно в $H(\Omega)$ при $\delta \to \delta$, где $\xi^\delta = (U^\delta, u^\delta, \phi^\delta)$, $\xi^\delta = (U^\delta, u^\delta, \phi^\delta)$ являются решениями (3.1), соответствующие параметрам $\delta, \delta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.*

Докажем, что для любой последовательности $\{\delta_n\} \subset [-1/2, 1/2]$ сходящейся к $\delta \in [-1/2, 1/2]$ существует подпоследовательность $\{\delta_k\} \subset \{\delta_n\}$ такая, что $\xi^{\delta_k} \to \xi^\delta$ в $H(\Omega)$. Это и будет означать, что имеет место сходимость $\xi^{\delta_n} \to \xi^\delta$ в $H(\Omega)$ для произвольной последовательности $\{\delta_n\} \to \delta$.

Для фиксированного $\delta \in [-1/2, 1/2]$, можно подставить в качестве тестовых функций $\eta = \xi^\delta$, $\eta = 0$ в (2.8). Это дает

$$\xi^\delta \in K^\delta, \quad B(\Omega, \xi^\delta, \xi^\delta) \leq \int\limits_\Omega F \xi^\delta dx, \tag{2.10}$$

как следствие, получаем

$$\|\xi^\delta\| \le C, \tag{2.11}$$

где $C > 0$ не зависит от δ. Пусть произвольная последовательность $\{\delta_n\} \subset [-1/2, 1/2]$ сходится к некоторой $\delta \in [-1/2, 1/2]$. Ввиду равенства (2.11) можем извлечь подпоследовательность $\{\delta_k\} \subset \{\delta_n\}$ такую, что

$$\xi^{\delta_k} \to \tilde{\xi} \quad \text{в} \quad H(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.12}$$

Следующим шагом докажем связь между множествами K^δ допустимых перемещений. Теперь покажем, что для фиксированного значения $\delta \in [-1/2, 1/2]$, и произвольной $\eta \in K^\delta$ и произвольной последовательности $\{\delta_k\} \subset [-1/2, 1/2]$ сходящейся к δ существует последовательность функций $\eta_k \in K^{\delta_k}$, $\eta_k \to \eta$ в $H(\Omega)$ при $k \to \infty$. Поскольку $x_2 = 0$ на γ_i^δ, $i = 1, 2$, для η у нас есть следующие отношения

$$\eta(x)|_{\gamma_i^\delta} = \zeta^i(x) = (c_1^i, -b^i x_1 + c_2^i, a_0^i + a_1^i x_1, -a_1^i, -a_2^i), \quad x \in \gamma_i^\delta, \quad i = 1, 2, \tag{2.13}$$

$$c_1^1 = c_1^2, \quad -b^1\delta + c_2^1 = -b^2\delta + c_2^2, \quad a_l^1 = a_l^2, \quad l = 0, 1, 2. \tag{2.14}$$

$$|\psi|\nu \le -W\nu \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{2.15}$$

где (2.13) описывает жесткие свойства тонких включений, а (2.14) отражает шарнирное соединение в точке $x^\delta = (\delta, 0)$.

Построим последовательность $\eta_k = (W_k, w_k, \phi_k)$ следующим образом $w_k = w$, $\phi_k = \phi$, для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда $w_k|_{\gamma_i^{\delta_k}} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$, $\phi_1|_{\gamma_i^{\delta_k}} = -a_1$, $\phi_2|_{\gamma_i^{\delta_k}} = -a_2$, $i = 1, 2$. Построим последовательность W_k с помощью оператора поднятия. Для этого нам нужно сначала определить то, какими должны быть функции соответствующих перемещений в плоскости (x_1, x_2) на кривых $\gamma_1^{\delta_k}$, $\gamma_2^{\delta_k}$.

Строим новые функции $\rho_k^i(x)$, $i = 1, 2$, определенные равенством:

$$\rho_k^1(x) = \big(c_1^1, -b^1 x_1 + c_2^1 - b^1(\delta - \delta_k) + b^2(\delta - \delta_k)\big), \quad x = (x_1, 0) \in \overline{\gamma}_1^{\delta_k},$$

$$\rho_k^2(x) = \big(c_1^2, -b^2 x_1 + c_2^2\big), \quad x = (x_1, 0) \in \overline{\gamma}_2^{\delta_k},$$

В этом случае для функций $\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho}_k$ определенных на $\overline{\gamma}$ соотношениями

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} (c_1^1, -b^1 x_1 + c_2^1), & x = (x_1, 0) \in \overline{\gamma}_1^{\delta}; \\ (c_1^2, -b^2 x_1 + c_2^2), & x = (x_1, 0) \in \overline{\gamma}_2^{\delta}. \end{cases} \qquad \tilde{\rho}_k(x) = \begin{cases} \rho_k^1, & \overline{\gamma}_1^{\delta_k}; \\ \rho_k^2, & x \in \overline{\gamma}_2^{\delta_k}, \end{cases}$$

имеем $\tilde{\rho}_k - \tilde{\rho} = h_k(x)$, и

$$h_k(x) = h_k(x_1, 0) = \begin{cases} (-b^2\delta_k + c_2^2) - (-b^1\delta_k + c_2^1), & x_1 \in (-1, \delta_k) \\ (-b^2 x_1 + c_2^2) - (-b^1 x_1 + c_2^1), & x_1 \in [\delta_k, \delta), \\ 0, \quad x_1 \in [\delta, 1), \end{cases}$$

для $\delta_k < \delta$;

$$h_k(x) = h_k(x_1, 0) = \begin{cases} (-b^2\delta_k + c_2^2) - (-b^1\delta_k + c_2^1), & x_1 \in (-1, \delta), \\ -b^1(x_1 - \delta_k) + b^2(x_1 - \delta_k), & x_1 \in [\delta, \delta_k), \\ 0, \quad x_1 \in [\delta_k, 1), \end{cases}$$

для случаев когда $\delta_k > \delta$. В обоих случаях мы видим, что $h_k(x) \in H^1(\gamma)$ и

$$\|h_k(x)\|_{H^1(\gamma)} \leq C|\delta - \delta_k|. \tag{2.16}$$

Теперь мы можем построить, с помощью оператора поднятия функции W_k, $\tilde{W}$ со свойствами [12]

$$\hat{W}_k^+|_\gamma = W^+|_\gamma + h_k(x), \quad \hat{W}_k^-|_\gamma = W^-|_\gamma + h_k(x), \quad \hat{W}^k|_\Gamma = W|_\Gamma.$$

$$\tilde{W}^+|_\gamma = W^+|_\gamma, \quad \tilde{W}^-|_\gamma = W^-|_\gamma, \quad \tilde{W}|_\Gamma = W|_\Gamma.$$

В силу непрерывности оператора подъема и оценки (2.16) имеем

$$\|W_k - \tilde{W}\|_{H^1(\Omega)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тогда для функции $W_k = \hat{W}_k - \tilde{W} + W$ получаем

$$\|W_k - W\|_{H^1(\Omega)^2} = \|\hat{W}_k - \tilde{W} + W - W\|_{H^1(\Omega)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.17}$$

По построению, $[W_k] = [W]$ на γ, $W_k = \rho_k^1(x)$ на $\gamma_1^{\delta_k}$, $W_k = \rho_k^2(x)$ на $\gamma_2^{\delta_k}$, которое гарантирует включение $W_k \in K^{\delta_k}$. Имея в виду сходимости (2.12), (2.17), мы можем перейти к пределу в неравенствах

$$B(\Omega, \xi^{\delta_k}, \eta_k - \xi^{\delta_k}) \geq \int\limits_{\Omega} F(\eta_k - \xi^{\delta_k}), \tag{2.18}$$

в силу произвольности η это дает неравенство

$$B(\Omega, \tilde{\xi}, \eta - \tilde{\xi}) \geq \int\limits_{\Omega} F(\eta - \tilde{\xi}). \tag{2.19}$$

Таким образом, в силу произвольности $\eta \in K^{\delta}$ выявляем, что $\tilde{\xi} = \xi^{\delta}$. Остается доказать, что имеет место сильная сходимость. Для этого перейдем к пределу $k \to \infty$ в равенствах

$$B(\Omega, \xi^{\delta_k}, \xi^{\delta_k}) = \int\limits_{\Omega} F\xi^{\delta_k} dx, \tag{2.20}$$

полученных из неравенства (2.8) с помощью подстановки $\eta = 0$, $\eta = \xi^{\delta_k}$. В итоге на основании слабой сходимости $\xi^{\delta_k} \to \xi^{\delta}$ приходим к цепочке равенств

$$\lim_{k\to\infty} B(\Omega, \xi^{\delta_k}, \xi^{\delta_k}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} F\xi^{\delta_k} dx = \int\limits_{\Omega} F\xi^{\delta_k} dx = B(\Omega, \xi^{\delta}, \xi^{\delta}). \tag{2.21}$$

В силу (2.2) получаем, что (2.21) означает сходимость норм

$$\lim_{k\to\infty} \|\xi^{\delta_k}\| = \|\xi^{\delta}\|, \tag{2.22}$$

которая влечет сильную сходимость $\xi^{\delta_k} \to \xi^{\delta}$ в $H(\Omega)$. Лемма доказана.

3 Задача об оптимальном количестве жестких тонких сегментов для равновесной модели двумерного тела с трещиной

В данном разделе рассматривается двумерное композитное тело, содержащее жесткое включение. Нелинейность рассматриваемой задачи обусловлена граничным условием типа неравенства, описывающим взаимное непроникновение противоположных берегов трещины. Мы исследуем два типа моделей о равновесии тела, соответствующие различным типам жестких включений. Для первой модели мы предполагаем, что тело имеет объемное жесткое включение, которое описывается соответствующей областью, а вторая описывает тело, содержащее набор закрепленных тонких жестких включений, каждому из которых соответствует кривая. Трещина определяется одной и той же кривой в обеих моделях. В рамках обеих моделей формулируется задача оптимального управления, при этом управление задается количеством тонких жестких тонких прямолинейных отрезков и предельным случаем, который, как оказалось, соответствует первой модели. Функционал качества определяется произвольным непрерывным функционалом в подходящем пространстве Соболева. Доказана разрешимость задачи оптимального управления [42].

Композитные материалы все более применяются в индустрии ввиду подходящих механических, термических и экологических свойств. Современные возможности инженерных подходов позволяют моделировать возможное поведение композитов на основе соответствующих математических моделей. Различные проблемы, связанные с деформацией композитных тел с неоднородностями, порождают множество новых подходов и методов решений в прикладной математики. Трудности в исследовании задач такого типа могут быть связаны с негладкостью областей и сложностью учета сопряжения различных материалов.

Хорошо известно, что наличие включений или трещин в нагруженных твердых телах может вызывать значительные концентрации напряжений. Это, в свою очередь, может привести к образованию отслоений и трещин около включений. Другой причиной появления трещин могут быть особенности температурных режимов окружающей среды. В настоящее время активно изучаются различные модели композитных твердых тел как с жесткими включениями, так и с трещинами [17, 23, 28, 29, 43–45].

В данной работе мы следуем известному подходу, использующему граничные условия типа неравенств на берегах трещины [12, 32, 46–49].

Это обстоятельство определяет нелинейность граничных условий и приводит к вариационным формулировкам. Как и для хорошо известных задач Синьорини, постановки задачи исключают априорное знание зон контакта механического взаимодействия противоположных берегов трещины. Общность методов вариационного исчисления позволяет формулировать и исследовать различные задачи для композитных твердых тел с упругими или жесткими включениями, см., например, [13–15,26,33,50–54]. Задачи оптимального управления геометрическими свойствами трещин или твердых включений в упругих телах исследуются в работах [15, 17, 51] и др. В данном разделе мы формулируем новую задачу оптимального управления, которая с практической точки зрения имеет достаточно ясную интерпретацию. В частности, это касается вопросов усиления конструкции жесткими элементами. Как и в статье [54], мы рассматриваем два различных типа двумерных моделей, описывающих равновесие упругого тела с жестким включением. Согласно статье [52], мы примем следующие понятия для включений: термин «тонкое включение» используется, когда размерность множества включений на единицу меньше размерности матрицы, а термин «объемное включение» используется, когда размерности совпадают. Для первого типа модели равновесия мы предполагаем, что тело имеет объемное включение с отслоившейся частью границы. Таким образом, имеем трещину, которая соответствует отслоению объемного включения от упругой среды. Второй тип модели касается системы соединенных тонких жестких включений, которая задается объединением конечного числа отрезков прямых линий и кривой, соединяющей эти отрезки. Следует отметить, что оба типа рассматриваемых включений имеют определенную связь в геометрическом смысле, трещины в обеих моделях задаются одной и той же кривой. Формулируется задача оптимального управления, где управление задается количеством прямолинейных сегментов, соответствующих тонким жестким включениям, и предельным случаем бесконечных сегментов, который соответствует первой модели. Функционал качества определяется произвольным непрерывным функционалом в подходящем пространстве Соболева. Доказана разрешимость задачи оптимального управления.

Постановка задачи о равновесии упругого тела с объемным жестким включением

Сформулируем задачу о равновесии двумерного тела, содержащего объемное жесткое включение. Рассматривается случай частично отслоившегося включения. В этом случае по границе включения расположена трещина. Кроме того, предполагаем, что остальная часть трещи-

ны может располагаться внутри упругой среды. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$. Рассмотрим строго внутреннюю подобласть ω области Ω ($\overline{\omega} \subset \Omega$), имеющий форму криволинейного прямоугольника шириной a:

$$\omega = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 < x_1 < 1, \quad g(x_1) < x_2 < g(x_1) + a\}, \quad a > 0,$$

где $g \in C^{0,1}(0, 2)$. Трещина в теле представлена незамкнутой липшицевой кривой

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 < x_1 < 1 + \lambda, \quad x_2 = g(x_1) + a\}, \quad \bar{\gamma} \subset \Omega, \quad -1 < \lambda < 1,$$

которая лежит на части границы ω. Предположим, что область Ω может быть разбита на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами такими, что $\gamma \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\mathrm{meas}(\partial\Omega_i \cap \Gamma) > 0$, $i = 1, 2$. Это условие гарантирует выполнение неравенства Корна в нелипшицевой области $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \bar{\gamma}$. В зависимости от направления нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ к γ мы будем говорить о положительном γ^+ и отрицательном берегах γ^- кривой γ.

Область ω соответствует объемному жесткому включению, а область $\Omega_\gamma \backslash \overline{\omega}$ задает упругую часть тела (см. Рис. 2.). Обозначим через $W = (w_1, w_2)$ вектор перемещений. Введем про-

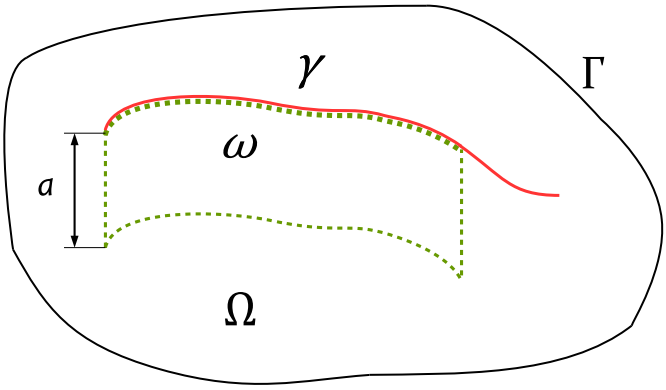

Рисунок 2 – Геометрия задачи

странства Соболева

$$H^{1,0}(\Omega_\gamma) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) \mid v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\}.$$

Введем тензоры, описывающие деформацию тела

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \; i, j = 1, 2, \quad (w_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}),$$

$$\sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{ij}(W), \; i, j = 1, 2,$$

где c_{ijkl} — заданный тензор упругости, предполагаемый симметричным и положительно определенным:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad i,j,k,l = 1,2, \quad c_{ijkl} = const.,$$

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i,j = 1,2, \quad c_0 = const., \quad c_0 > 0.$$

Из-за наличия жесткого включения в теле поле перемещений удовлетворяет специальному виду соотношений в соответствующей области ω. Линейное пространство бесконечно малых жестких перемещений $R(\omega)$ определено следующим образом [55]:

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \,|\, \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2);\, b, c_1, c_2 \in \mathbf{R},\ x \in \omega\}.$$

Условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины определяется выражением [12, 55]

$$[W]\nu \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma,$$

где $[W] = W|_{\gamma^+} - W|_{\gamma^-}$ скачок W на γ.

Чтобы дать вариационную формулировку, описывающую состояние равновесия тела с жестким включением ω и трещиной γ, введем функционал энергии

$$\Pi(W) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) - \int\limits_{\Omega_\gamma} FW,$$

где вектор $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega_\gamma)^2$ описывает внешние силы, действующие на тело, $FW = f_i w_i$. Рассмотрим задачу минимизации:

$$\text{Найти} \quad U_\omega \in K \quad \text{такое, что} \quad \Pi(U_\omega) = \inf_{W \in K} \Pi(W), \tag{3.1}$$

где

$$K = \{W \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2 \,|\, [W]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma; \quad W|_\omega \in R(\omega)\}.$$

Задача (3.1) имеет единственное решение $U_\omega \in K$, которое удовлетворяет вариационному неравенству [54, 55]

$$\int\limits_{\Omega_\gamma \setminus \overline{\omega}} \sigma_{ij}(U_\omega)\varepsilon_{ij}(W - U_\omega) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - U_\omega) \quad \forall\, W \in K. \tag{3.2}$$

Отметим, что из-за структуры перемещений в области ω имеем $\varepsilon_{ij}(W) = 0$, $i,j = 1,2$, для всех

$W \in K$. Поэтому неравенство (3.2) может быть выписано в виде

$$U_\omega \in K, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_\omega)\varepsilon_{ij}(W - U_\omega) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - U_\omega) \quad \forall W \in K.$$

Семейство задач равновесия упругих тел с тонким жестким включением

Наряду с задачей равновесия (3.1) будем рассматривать следующие задачи равновесия для специального тонкого жесткого включения [54]. Начнем с описания геометрических свойств формы включений. Предположим, что Q_n — это объединение отрезков прямых и специальной липшицевой кривой $\mathcal{L}$, таких что

$$Q_n = (\bigcup_{k=1}^{k=2^n} l_k^n) \cup \mathcal{L}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где 2^n количество следующих отрезков

$$l_k^n = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 = k/2^n,\ g(x_1) < x_2 < g(x_1) + a\}, \quad k = 1, 2, \dots 2^n,$$

и $\mathcal{L}$ — кривая

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 \leq x_1 \leq 1, \quad x_2 = \psi(x_1)\},$$

которая определяется функцией $\psi \in C^{0,1}[0, 1]$ со следующим свойством (см. Рис. 3.)

$$g(x_1) \leq \psi(x_1) < g(x_1) + a, \quad 0 \leq x_1 \leq 1.$$

Зафиксируем $n \in \mathbf{N}$ и предположим, что Q_n соответствует жесткому включению, так что

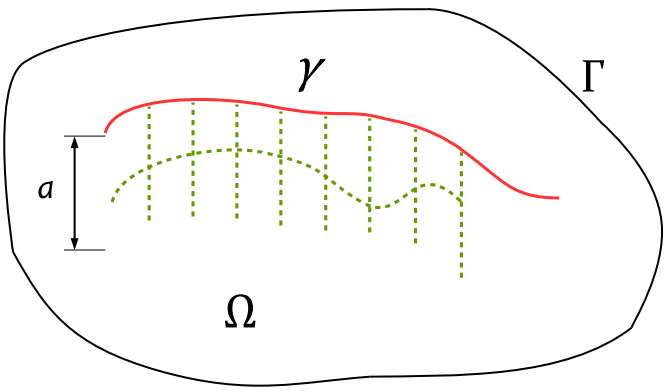

Рисунок 3 – Геометрия тела с трещиной и системой соединенных тонких жестких включений (пример Q_3).

соответствующее пространство бесконечно малых жестких перемещений имеет вид

$$R(Q_n) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \,|\, \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2);\ b, c_1, c_2 \in \mathbf{R},\ x \in Q_n\}.$$

Вариационная постановка задачи равновесия упругого тела с системой соединенных тонких жестких включений и трещины имеет следующий вид:

$$\text{найти} \quad U_n \in K_n \quad \text{такое, что} \quad \Pi(U_n, \Omega) = \inf_{W \in K_n} \Pi(W, \Omega), \tag{3.3}$$

$$K_n = \{W \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2 \,|\, [W]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma; \quad W|_{Q_n} \in R(Q_n)\}.$$

Существование и единственность решения U_n задачи (3.3) можно доказать, как и в случае одного отслоившегося включения, см. [28]. Соответствующее вариационное неравенство принимает вид

$$U_n \in K_n, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(U_n)\varepsilon_{ij}(W - U_n) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(W - U_n) \quad \forall\, W \in K_n.$$

Задача оптимального управления

Известно, что последовательность решений $\{U_n\}$ сходится к U_ω сильно $H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ при $n \to \infty$ [54]. Следовательно, для произвольного непрерывного функционала $G : H(\Omega) \to \mathbb{R}$ можем определить функционал стоимости $J : \mathbf{N} \cup \infty \to \mathbb{R}$ нашей задачи оптимального управления с использованием следующих равенств $J_G(n) = G(U(n))$, $n \in \mathbf{N}$ где $U(n)$ — это решение задачи (3.1), $J_G(\infty) = G(U_\omega)$.

В качестве примеров таких функционалов, имеющих важный физический смысл, можно привести функционал $G_1(W) = \|W - W_0\|_{H(\Omega)}$, характеризующий отклонение вектора смещения от заданной функции W_0. При предположениях, что $0 < \lambda < 1$ и что часть

$$\gamma_r = \{(x_1, x_2) \,|\, 1 < x_1 < 1 + \lambda, \quad x_2 = g(x_1) + a\}$$

кривой трещины γ, лежащей внутри упругой среды, представляет собой прямую линию, т.е. $g(x_1) = c$, $c = \text{const}$, второй пример может быть дан первой производной от функционал энергии по отношению к длине трещины. Как известно, критерий разрыва Гриффитса основан на значениях первой производной функционала энергии по длине трещины [56, 57]. Известно, что (см. [55]) функционал от первой производной функционала энергии по длине трещины может

быть выражен в виде

$$G(W) = \int\limits_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2}\theta_{,1}\, \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) - \sigma_{ij}(W) w_{i,1}\theta_{,j} \right\} - \int\limits_{\Omega_0} (\theta f_i)_{,1}\, w_{i,1}. \tag{3.4}$$

В формуле (3.4) значение производной функционала энергии не зависит от выбора функции θ, удовлетворяющей $\mathrm{supp}(\theta) \subset \mathcal{O}_1$ и $\theta = 1$ в $\mathcal{O}_2$. Здесь $\mathcal{O}_2$ и $\mathcal{O}_1$ достаточно малые окрестности точки $(1+\lambda, a+c) \in \mathbf{R}^2$, $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \subset \Omega$, $\mathcal{O}_1 \cap \bar{\omega} = \emptyset$. Мы можем обратиться к статье [58] для расширенных объяснений, связанных с первой производной функционала энергии для двумерного тела с жестким включением и трещиной.

Рассмотрим следующим задачу оптимального управления:

$$\text{найти} \quad n^* \in \mathbf{N} \cup \infty \quad \text{такое, что} \quad J_G(n^*) = \sup_{n \in \mathbf{N} \cup \infty} J_G(n). \tag{3.5}$$

Это означает, что мы хотим найти оптимальную величину включения, которая обеспечивает максимальное значение для функционала стоимости. Ниже приводится наш основной результат существования.

Теорема 3.1 *Существует решение задачи оптимального управления (3.5).*

Мы будем различать следующие два случая:

1. Для $m \in \mathbf{N}$

$$J(m) \geq J(n), \quad \forall n \in \mathbf{N};$$

2. Для каждого $m \in \mathbf{N}$ существует число $n \in \mathbf{N}$ такое, что $n > m$ и

$$J(m) < J(n).$$

Очевидно, что для первого случая у нас есть решение (3.5), заданное значением $n^* = m$. Для второго случая мы можем построить подпоследовательность $\{n_k\}$ такую, что

$$J(n_1) < J(n_2) < ... < J(n_k) < ...,$$

где $J(n_k) = G(U(n_k))$. Поскольку $U_{n_k} \to U_\omega$ сходится сильно к U_ω в пространстве $H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ при $k \to \infty$, для каждого фиксированного числа m существует $n_m \in \mathbf{N}$, такое что для всех $k \geq n_m$

выполняется $J(m) < J(n_k)$. Следовательно,

$$J(m) \leq \lim_{k\to\infty} J(n_k) = \lim_{k\to\infty} G(U(n_k)) = G(U_\omega).$$

В этом случае решение (3.5) дается как $n^* = \infty$. Теорема доказана.

4 О предельном переходе в задаче о сопряжении тонких включений в упругом теле

В представленной работе рассматривается модель двумерного упругого тела с двумя тонкими сопрягающимися включениями и трещиной. При этом одно из включений является жестким, а другое – упругим. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия типа неравенств, исключающие взаимное проникание берегов. Цель работы – обосновать предельный переход по параметру жесткости тонкого упругого включения.

Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ. Пусть $\overline{\gamma} \subset \Omega$, $\overline{\Gamma}_c \subset \Omega$ – гладкие кривые без самопересечений, которые пересекаются в точке P : $\gamma \cap \Gamma_c = \{P\} = \{(0,0)\}$. Предположим, что существуют продолжения кривых Γ_c и γ, пересекающие границу Γ и разбивающие область Ω на четыре подобласти D_1, D_2, D_3, D_4 с липшицевыми границами ∂D_i, причем $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0, \quad i = 1,2,3,4$. Для упрощения записи нормали к Γ_c и к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$; ν_0 – нормаль в точке P, которая совпадает с направлением нормали ν к Γ_c (см. рис. 1). Направлением нормалей ν определяются положительные и отрицательные берега данных кривых. Обозначим $\Omega_\gamma^c = \Omega \setminus (\overline{\gamma} \cup \overline{\Gamma}_c)$. Трещина разбивает тонкое включение на две части; $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$, где γ_1 и γ_2 гладкие кривые. В наших рассуждениях Ω_γ^c будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии, γ_1 – упругому включению с заданными свойствами, которое моделируется балкой Бернулли – Эйлера, γ_2 – тонкому жесткому включению, Γ_c – трещине. Предполагается, что имеется отслоение жесткого включения на положительном берегу γ_2^+ и, таким образом, между упругим телом и включением имеется трещина. Перемещения включения совпадают с перемещениями упругого тела на γ_2^-.

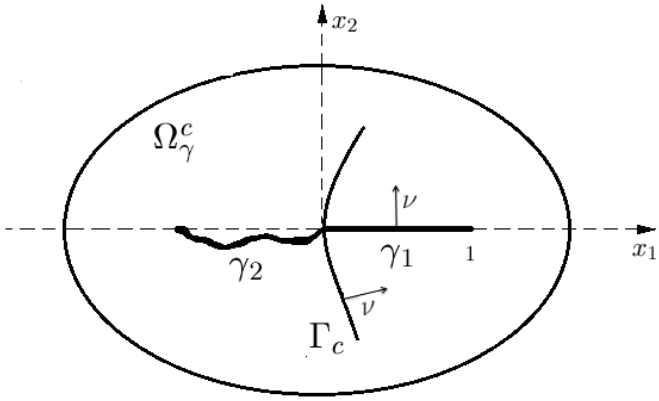

Рисунок 4 – Область Ω с трещиной Γ_c и тонкими включениями γ_1, γ_2

Рис. 1.

Вектор $u^\lambda = (u_{\lambda 1}, u_{\lambda 2})$, а также функции v^λ, w^λ задают перемещения точек двумерного тела Ω^c_γ и упругого включения γ_1 соответственно. Здесь $\lambda > 0$ это параметр жесткости. Определим компоненты тензора деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ тела с помощью формул $\varepsilon_{ij}(u^\lambda) = \frac{1}{2}\left(u^\lambda_{i,j} + u^\lambda_{j,i}\right)$, где $\varphi^\lambda_{,i} = \frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial x_i}$, а также компоненты тензора напряжений $\sigma^\lambda = \{{\sigma_{ij}}^\lambda\}$ в следующем виде $\sigma^\lambda_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u^\lambda), i, j = 1, 2$. Все двухиндексные величины предполагаются симметричными, по повторяющимся индексам производится суммирование. Коэффициенты $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),\ i, j, k, l = 1, 2$ – компоненты тензора модулей упругости, обладающего свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0|\xi|^2, \quad \forall\ \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = const > 0.$$

На берегах разреза Γ_c будем задавать условия вида $[u^\lambda_\nu] \geqslant 0$. Скобки $[v] = v^+ - v^-$ – скачок функции v на Γ_c, где $v^\pm = v|_{\Gamma^\pm_c}$ соответствуют значениям функции v на положительном и отрицательном берегах кривой Γ_c по отношению к нормали ν. Аналогичное верно и для функций v на γ_2. Эти условия обеспечивают взаимное непроникание берегов трещины [2]. Заметим, что данное условие непроникания выполняется почти всюду на Γ_c, и в этом смысле оно может не выполняться в точке $(0, 0)$. Условие $((w^\lambda(0), v^\lambda(0)) - \rho^{\lambda 0}(0))\nu_0 \geqslant 0$, в свою очередь, обеспечивает непроникание тонких жестких включений $\gamma_1,\ \gamma_2$ друг в друга в точке $(0, 0)$.

Приведем вариационную формулировку задачи. Для этого введем пространство инфинитезимальных жестких перемещений

$$R(\gamma_2) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2)|\ \rho(x_1, x_2) = b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2);\quad b,\ c_1,\ c_2 = const,\ (x_1, x_2) \in \gamma_2\}.$$

Также введем функциональное пространство и множество допустимых перемещений:

$$H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma) = \left\{v \in H^1(\Omega^c_\gamma) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma\right\},$$

$$K = \{(u, v, w) \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1) \mid v = u_\nu,\quad w = u_\tau \text{ на } \gamma_1;$$

$$[u_\nu] \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2;\quad u|_{\gamma_2^-} \in R(\gamma_2);\quad ((w(0), v(0)) - \rho^0(0))\nu_0 \geqslant 0\}.$$

Рассмотрим функционал энергии

$$\Pi_\lambda(u,v,w) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\gamma_1}(v_{xx})^2 + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\gamma_1}(w_x)^2.$$

Каждому фиксированному значению параметра λ существует единственное решение задачи

$$\inf_K \Pi_\lambda(u,v,w). \tag{4.1}$$

Решение задачи (1) удовлетворяет вариационному неравенству:

$$(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda) \in K, \int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u^\lambda)\varepsilon(\bar u - u^\lambda) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar u - u^\lambda) + \lambda\int\limits_{\gamma_1} v_{xx}^\lambda(\bar v_{xx} - v_{xx}^\lambda) +$$

$$+\lambda\int\limits_{\gamma_1} w_x^\lambda(\bar w_x - w_x^\lambda) \geqslant 0 \quad \forall\ (\bar u, \bar v, \bar w) \in K. \tag{4.2}$$

Обоснуем предельный переход при $\lambda \to \infty$. Для дальнейшего введем в рассмотрение пространство $R(\gamma_1)$ для жестких перемещений включения и множество K_r допустимых перемещений для предельной задачи:

$$R(\gamma_1) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) |\ \rho(x_1, x_2) = b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2);\ \ b,\ c_1,\ c_2 = const,\ (x_1, x_2) \in \gamma_1\},$$

$$K_r = \{v = (v_1, v_2) \in H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2 \ |\ \ \rho|_{\gamma_1} = \rho_1 \text{ и } \rho|_{\gamma_2} = \rho_2,\ \rho_i \in R(\gamma_i),\ i = 1, 2$$

$$[u]\nu \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2;\ \ (\rho_1(0) - \rho_2(0))\nu_0 \geqslant 0\}.$$

В работе доказано, что при $\lambda \to \infty$

$$u^\lambda \to u \quad \text{слабо в} \quad H_\Gamma^1(\Omega_\gamma^c)^2, \tag{4.3}$$

$$v^\lambda \to v \quad \text{слабо в} \quad H^2(\gamma_1), \tag{4.4}$$

$$w^\lambda \to w \quad \text{слабо в} \quad H^1(\gamma_1). \tag{4.5}$$

Также получено

$$v_{xx} = 0, \quad w_x = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1; \tag{4.6}$$

и

$$\rho^\lambda \to \rho^0 \quad \text{почти всюду на} \quad \gamma_2.$$

Таким образом, предельная функция (u, v, w) будет принадлежать множеству допустимых перемещений K_r.

Используя полученные сходимости (4.3)–(4.6), переходим к пределу при $\lambda \to \infty$ в вариационном неравенстве (4.2). Получим:

$$u \in K_r, \quad \int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) \geqslant \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) \quad \forall\ \bar{u} \in K_r. \tag{4.7}$$

Таким образом, предельная задача (4.7) для семейства задач (4.2) при $\lambda \to \infty$ описывает равновесие упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение, которая имеет отслоение на γ_2^+.

5 Краевая задача на полуоси для системы дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто

Вопросы существования и единственности решений краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с дробной производной изучались в работах многих авторов [59–69]. В книгах [59–64] даются исторические сведения, обзор методов и результатов теории дробного исчисления и его применений. Интерес к исследованию краевых задач для дифференциального уравнения дробного порядка вызван их применениями в инженерных и научных дисциплинах физики, механики, химии, реологии полимеров и других. При этом дробные производные наиболее адекватно описывают реальные процессы с памятью и наследственными свойствами. В этом заключается преимущество дифференциальных уравнений дробного порядка по сравнению с классическими дифференциальными уравнениями [4, 70–72].

В данной работе рассматривается краевая задача на полуоси $t > 0$ для линейно системы обыкновенных дифференциальных уравнений с производной Капуто и постоянными коэффициентами. Будут получены условия Лопатинского для граничных матриц, при которых краевая задача будет однозначно разрешима в классе ограниченных и абсолютно непрерывных вектор-функций.

Постановка краевой задачи и предварительные сведения

С помощью дробного интеграла Римана-Лиувилля [61, 62, 73]

$$\mathcal{I}_{0t}^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} y(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0$$

определяется дробная производная Капуто [65]

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} \frac{dy}{dt}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

и дробная производная Римана-Лиувилля

$$\mathcal{D}_{0t}^{\alpha} y(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} y(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть $A - (m \times m)$-матрица с постоянными элементами a_{ij}, $A : C^m \to C^m$.

Краевая задача Найти решение $u(t)$ линейной системы дифференциальных уравнений

вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Au + f(t), \quad t > 0, \quad \sup_{t>0} u(t) < \infty \tag{5.1}$$

такое, что

$$Bu|_{t=0} = \phi, \tag{5.2}$$

где B-матрица, ϕ-вектор.

При $\alpha = 1$ краевая задача (5.1),(5.2) была исследована в [4]. В дальнейшем будут показаны условия на матрицы A, B и $f(t)$, при которых краевая задача (5.1),(5.2) будет однозначно разрешима при любом выборе ϕ. Рассмотрим функцию Миттаг-Леффлера [61–63, 73]

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \; E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \; \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Приведем некоторые известные свойства функции Миттаг-Леффлера [62, 63, 73]. При $0 < \alpha < 2$, $\pi\alpha/2 < \mu < min\{\pi, \pi\alpha\}$ справедливо представление

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right) \tag{5.3}$$

при $|z| \to \infty$, $|arg(z)| \leq \mu$ и оценка

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{c}{1 + |z|}, \quad c > 0, \tag{5.4}$$

при $\mu \leq |arg(z)| \leq \pi$, $|z| \geq 0$.

Для матрицы A определена

$$E_{\alpha}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \tag{5.5}$$

Лемма 5.1 *Ряд (5.5) равномерно сходится для любой матрицы A при $||A|| \leq a$, $a > 0$.*

Исследование матрицы $E_{\alpha}(t^{\alpha} A)$, где $0 < \alpha < 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда матрица A- Жорданова клетка

$$A = \lambda I + \Delta, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

где I-единичная матрица, а Δ-нильпотентная Жорданова клетка ($\Delta^m = 0$). Известно, что Δ^k действует как сдвиг на k мест [70–73]. Выразим матрицу

$$E_\alpha\left(t^\alpha A\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n}\left(\lambda I + \Delta\right)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} = \sum_{k=0}^{m-1} t^{\alpha k} \Delta^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}(t^\alpha \lambda)^{n-k}}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \tag{5.6}$$

При выводе представления (5.6) использовалась формула

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \ AB = BA.$$

Теперь в силу равенства

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}(z)^{n-k}}{\Gamma(\alpha n + 1)} = \frac{1}{k!} E_{\alpha,1}^{(k)}(z)$$

из (5.6) получаем

$$E_\alpha\left(t^\alpha A\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k\alpha}}{k!} \left. E_{\alpha,1}^{(k)}(z)\right|_{z=t^\alpha \lambda} \Delta^k.$$

Итак, доказана

Теорема 5.1 *Имеет место представление*

$$E_{\alpha,1}\left(t^\alpha A\right) = \begin{pmatrix} E_{\alpha,1}(t^\alpha\lambda) & t^\alpha E_{\alpha,1}^{(1)}(t^\alpha\lambda) & \dots & \frac{t^{(m-1)\alpha}}{(m-1)!} E_{\alpha,1}^{(m-1)}(t^\alpha\lambda) \\ & E_{\alpha,1}(t^\alpha\lambda) & \ddots & \frac{t^{(m-2)\alpha}}{(m-2)!} E_{\alpha,1}^{(m-2)}(t^\alpha\lambda) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & E_{\alpha,1}(t^\alpha\lambda) \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

где $A = \lambda I + \Delta$.

Лемма 5.2 *Пусть матрица A имеет собственные числа λ_i с кратностью ν_i ($i = \overline{1,\dots,k}$) и*

вектор -функция $v(t)$ является решением однородной системы (5.1).

Тогда каждая компонента вектора $v(t)$ (в любом фиксированном базисе) имеет вид

$$v_j(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=0}^{\nu_i - 1} c_{isj} t^{\alpha s} E_{\alpha,1}^{(s)}(t^\alpha \lambda_i), \quad j = \overline{1, \ldots, m}. \tag{5.8}$$

Заметим, что в силу равенства $E_{1,1}^{(s)}(z) = e^z$ представление (5.8) при $\alpha = 1$ совпадает с классическим представлением решения однородной системы $du/dt = Au$, $E_1(tA) = exp(tA)$ [70–73].

Разрешимость краевой задачи.

Далее предположим, что матрица A не имеет собственных значений на лучах $|arg(z)| = \pi\alpha/2$. Введем множества

$$C_\alpha^- = \{z : \pi\alpha/2 < |arg(z)| \leq \pi\}, \quad C_\alpha^+ = \{z : |arg(z)| < \pi\alpha/2\}.$$

Обозначим через λ_j^-, $j = \overline{1, \ldots, p}$ собственные значения матрицы A с кратностью ν_j^-, лежащие в множестве C_α^-, а через λ_j^+, $j = \overline{1, \ldots, q}$ собственные значения с кратностью ν_j^+, лежащие в множестве C_α^+. При этом будем считать, что

$$\mu^- = \sum_{k=1}^{p} \nu_k^- \leq m, \quad m - \mu^- = \sum_{k=1}^{q} \nu_k^+.$$

В силу формулы

$$\frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha z} \left[E_{\alpha,\beta-1}(z) + (1-\beta) E_{\alpha,\beta}(z) \right]$$

можно установить представление

$$E_{\alpha,1}^{(k)}(z) = (\alpha z)^{-k} \sum_{j=1}^{k} a_{-(k-j)}^k E_{\alpha,-(k-j)}(z),$$

в котором коэффициенты определяются из рекуррентных формул

$$a_0^1 = 1, \quad a_{-(k-1)}^k = a_{-(k-2)}^{k-1}, \quad k \geq 2,$$

$$a_{-(k-j)}^k = a_{-(k-1-j)}^{k-1} + [k + 1 - j - (k-1)\alpha] a_{-(k-j)}^{k-1}, \quad j = \overline{2, k-1},$$

$$a_0^k = a_0^{k-1}[1-(k-1)\alpha], \quad k \geq 2.$$

Тогда на основании (5.8) решения однородной системы

$$\partial_{0t}^{\alpha} v = Av, \quad t > 0 \tag{5.9}$$

можно записать в виде

$$v(t) = v^-(t) + v^+(t) \tag{5.10}$$

где j-компонента вектора $v^-(t)$, $v^+(t)$ соответственно имеют вид

$$v_j^-(t) = \sum_{i=1}^{p} \left[c_{i0j}^- E_{\alpha,1}(t^\alpha \lambda_i^-) + \sum_{s=1}^{\nu_i^- - 1} \sum_{l=1}^{s} c_{isj}^- a_{-(s-l)}^s (\alpha \lambda_i^-)^{-s} E_{\alpha,-(s-l)}(t^\alpha \lambda_i^-) \right], \tag{5.11}$$

$$v_j^+(t) = \sum_{i=1}^{q} \left[c_{i0j}^+ E_{\alpha,1}(t^\alpha \lambda_i^+) + \sum_{s=1}^{\nu_i^+ - 1} \sum_{l=1}^{s} c_{isj}^+ a_{-(s-l)}^s (\alpha \lambda_i^+)^{-s} E_{\alpha,-(s-l)}(t^\alpha \lambda_i^+) \right]. \tag{5.12}$$

Пусть E^--инвариантное подпространство оператора A, отвечающее собственным значениям $\lambda_1^-, \ldots, \lambda_p^-$, причем $dimE^- = \mu^-$.

Лемма 5.3 *Решение системы (5.9) является ограниченным при $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда $v(0) \in E^-$.*

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $v^-(t)$ из (5.10) при $t \geq 0$. Тогда функция $v_j(t)$ в силу (5.4),(5.11) будет ограниченной при $\mu \leq |arg(\lambda_i^-)| \leq \pi$. Пусть имеет место $\pi\alpha/2 < |arg(\lambda_i^-)| < \mu < \pi\alpha$. Тогда справедливо неравенство $cos\left(arg(\lambda_i^-/\alpha)\right) < 0$. Стало быть, в силу представления (5.8), функция $v_j^-(t)$ будет ограниченной при $t \geq 0$. Так как $\lambda_i^+ \in C_\alpha^+$ справедливо неравенство $|arg(\lambda_i^+/\alpha)| < \pi/2$, т.е. $cos\left(arg(\lambda_i^+/\alpha)\right) > 0$. Тогда в представлении (5.12) функции $E_{\alpha,1}(t^\alpha \lambda_i^+)$, $E_{\alpha,-(s-l)}(t^\alpha \lambda_i^+)$, являются неограниченными при $t \to \infty$, на основании (5.3).

С другой стороны, из ограниченности $v(t)$ и $v^-(t)$ следует, что вектор-функция $v^+(t)$ должна быть ограниченной при $t \geq 0$. Стало быть

$$c_{isj}^+ = 0, \quad i = \overline{1,q}, \quad s = \overline{1, \nu_i^+ - 1}, \quad j = \overline{1,m},$$

следовательно, $v^+(t) = 0$ при $t \geq 0$, т.е. $v(0) \in E^-$. Обратное утверждение очевидно. Лемма 3 доказана.

Из леммы 5.3 следует, что общая формула ограниченных на полуоси решений однородной системы (5.9) имеет вид

$$v(t) = E_\alpha\left(t^\alpha A\right)\sum_{k=1}^{\mu^-} c_k \nu_k, \tag{5.13}$$

где $\nu_1, \ldots, \nu_{\mu^-}$-базис в пространстве E^-.

Следовательно, для однозначной разрешимости краевой задачи

$$\partial_{0t}^\alpha v = Av,\ t > 0,\ Bv|_{t=0} = \psi,\ \sup_{t>0}|v(t)| < \infty, \tag{5.14}$$

необходимо, чтобы число граничных условий равнялось μ^-, т.е. матрица B имела размеры $\mu^- \times m$ и неизвестные постоянные $c_1, \ldots, c_{\mu^-}$ из (5.13) Находятся как решение линейной алгебраической системы $B(\nu_1, \ldots, \nu_\mu)C = \psi$, поэтому условие однозначной разрешимости краевой задачи (5.14) имеет вид [4]

$$det\ B(\nu_1, \ldots, \nu_{\mu^-}) \neq 0. \tag{5.15}$$

В дальнейшем будем считать, что собственные значения λ_j^- принадлежат множеству

$$C_{\alpha,\mu} = \{z :\ \mu \leq |argz| \leq \pi\} \subseteq C_\alpha^-.$$

Пусть P_- проектор на инвариантное пространство E^-. Далее, предполагаем что для вектор-функции $f(t)$ существует $\mathcal{D}_{0t}^{1-\alpha} f$ при $t > 0$ и

$$P_- f = f,\ f_j(t) \in L_1(R_+^1),\ \sup_{t>0} t^{1-\alpha}|f_j(t)| < \infty,\ j = \overline{1, \mu^-}. \tag{5.16}$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$u_0(t) = \int_0^t G(t-s)g(s)ds,$$

где $(t) = E_\alpha\left(t^\alpha A\right)$ при $t > 0$ и $g(t) = \mathcal{D}_{0t}^{1-\alpha} f$.

Теперь интегрируя по частям, получаем равенство

$$u_0(t) = -\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} G(t-s)\mathcal{I}_{0s}^{1-\alpha} f ds + \mathcal{I}_{0t}^{1-\alpha} f.$$

Тогда в силу равенства

$$\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha}\left[E_{\alpha,\alpha+\beta-1}(z) + (1-\beta)E_{\alpha,\beta+\alpha}(z)\right]$$

и (5.4),(5.11) для $u_0(t)$ справедлива оценка

$$|u_{0j}(t)| \leq C_1 \left[\sum_{k=1}^{\mu^-}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}ds}{1+(t-s)^\alpha}\int_0^s \frac{|f_k(\tau)|d\tau}{(s-\tau)^\alpha} + \sup_{\tau>0}\tau^{1-\alpha}|f_j(\tau)|\right]$$

$$\leq C_2\left[\sum_{k=1}^{\mu^-}\int_0^t |f_k(\tau)|d\tau + \sup_{\tau>0}\tau^{1-\alpha}|f_j(\tau)|\right],\ C_1>0, C_2>0,\ j=\overline{1,\mu^-}.$$

Таким образом, вектор-функция $u_0(t)$ будет ограниченным решением неоднородной системы (5.1). Тогда для изучения краевой задачи (5.1),(5.2) достаточно изучить однозначную разрешимость краевой задачи (5.14) при $\psi = \phi$.

Итак доказана

Теорема 5.2 *Пусть $\lambda_j^- \in C^-_{\alpha,\mu}$, $j = \overline{1,\mu^-}$. Краевая задача (5.1),(5.2) имеет единственное ограниченное решение при вектор-функции $f(t)$ такой, что выполнены условия (5.16) и любом векторе ϕ тогда и только тогда, когда для граничной $\mu^- \times m$ матрицы B выполнено условие (5.15).*

6 Краевые задачи для уравнения Соболевского типа высокого порядка с меняющимся направлением времени

Параболические уравнения с меняющимся направлением времени исследовались в [2]. Краевые задачи для уравнений высокого порядка с меняющимся направлением времени изучались в [74, 75]. С другой стороны, многие авторы рассматривали уравнения соболевского типа [5–7]. Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости двух краевых задач для уравнения соболевского типа высокого порядка с меняющимся направлением времени.

Пусть Ω есть ограниченная область в R^n с гладкой границей S. Положим $Q = \Omega \times (0,T), S_T = S \times (0,T), T = const > 0; \quad \Omega_t = \Omega \times \{t\}, 0 \le t \le T.$

В цилиндрической области Q, рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u - (\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta)\Delta u + c(x)u = f(x,t), \tag{6.1}$$

где α, β - положительные постоянные, $s \ge 0$ - целое число. Предполагается, что коэффициенты уравнения (6.1) достаточно гладкие. Введем множества

$$\Omega_0^{\pm} = \{(x,0): \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,0) \gtrless 0 \quad x \in \Omega\},$$

$$\Omega_T^{\pm} = \{(x,T): \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \gtrless 0 \quad x \in \Omega\}.$$

<u>Краевая задача I.</u> Найти решение уравнения (6.1) в Q, такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{6.2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{6.3}$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, s-1}; \quad D_t^s u|_{\overline{\Omega}_0^+} = 0;$$

$$D_t^j u|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{s+1, 2s}; \quad D_t^s u|_{\overline{\Omega}_T^-} = 0. \tag{6.4}$$

<u>Краевая задача II.</u> Найти решение уравнения (6.1), такое, что выполнены условия (6.2),

(6.4) и

$$u(x,0) = \int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau, \tag{6.5}$$

где $N(t) \in L_2(0,T)$ известная функция.

В случае, когда $s = 0, \quad \alpha = \beta = 1$ Краевая задача I была рассмотрена в [76]. В том же случае Краевая задача II была рассмотрена в [77].

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ анизотропное пространство Соболева с нормой

$$||u||_{m,s}^2 = \int\limits_Q \left[\sum_{|\alpha| \le m} (D_x^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2 \right] dQ,$$

где $||u||_{m,m} = ||u||_m$ для $u \in W_2^{m,m}(Q) = W_2^m(Q)$.

Положим

$$(u,v)_0 = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall u,v \in L_2(\Omega),$$

скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$, также $(u,v) = \int\limits_0^T (u,v)_0 dt$ для $u,v \in L_2(Q)$, $||u||^2 = (u,u)$.

Разрешимость краевой задачи I

Введем класс функций

$$C_L = \{u(x,t) \in W_2^{2,2s+1}(Q): \quad u_{x_i x_j t} \in L_2(Q), \quad i,j = \overline{1,n};$$

и выполнены условия (6.2)-(6.4) }.

Интегрированием по частям, доказывается следующее утверждение.

Лемма 6.1 *Пусть $c(x) \ge d_0$ для достаточно большого числа $d_0 > 0$, и выполнены следующие условия:*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1,t}] \ge \delta > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) > 0.$$

Тогда для всех функций $u(x,t) \in C_L$ выполняется неравенство:

$$(Lu,u) \ge C_1 \|u\|_{1,s}^2, \quad C_1 = const > 0.$$

Из Леммы 6.1 следует единственность регулярного решения краевой задачи (6.1)-(6.4).

Пусть функции $\varphi_k(x)$ являются решениями спектральной задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in \Omega; \quad \varphi|_S = 0.$$

Функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, и соответствующие им собственные значения удовлетворяют условиям: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots, \lambda_k \to +\infty$ для $k \to \infty$. Определим $L_\varepsilon u = (-1)^{s+1}\varepsilon D_t^{2s+2}u + Lu$ для $0 < \varepsilon \leq 1$.

Приближенное решение имеет вид

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \geq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решения следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad l = \overline{1,N}; \tag{6.6}$$

$$D_t^i c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0,s}; \quad D_t^j c_k^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{s+1, 2s+1}. \tag{6.7}$$

Из Леммы 6.1 следует утверждение.

Лемма 6.2 *Пусть выполнены условия 6.1 и $f \in L_2(Q)$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\varepsilon\|D_t^{s+1}u^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u^{N,\varepsilon}\|_{1,s}^2 \leq C_2\|f\|^2, \tag{6.8}$$

где положительная постоянная C_2 не зависит от $N, \varepsilon, f(x,t)$.

Из оценки (6.8) следует однозначная разрешимость краевой задачи (6.6), (6.7).

Мы доказываем априорные оценки для приближенного решения $u^{N,\varepsilon}(x,t)$, используя теоремы вложения и теоремы о следах. Из этой оценки следует регулярная разрешимость краевой задачи (6.1)-(6.4).

Теорема 6.1 *Пусть $c(x) \geq d_0$ для достаточно большого числа $d_0 > 0$ и*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0, \quad (-1)^s[2k_{2s} + k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0,$$

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q)$, такой, что $f(x,0) = 0$ п.в. в Ω, краевая задача (6.1)-(6.4) *имеет единственное решение в C_L, и справедлива априорная оценка:*

$$||u||^2_{2,2s+1} + ||\Delta u_t||^2 \leq C_3||f||^2_{0,1}, \quad C_3 = const > 0. \tag{6.9}$$

Используя априорные оценки для $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ и (6.9), получаем оценку сходимости приближенных решений.

Теорема 6.2 *Пусть выполнены все условия Теоремы 6.1. Тогда справедлива следующая оценка погрешности:*

$$\|u - u^{N,\varepsilon}\|_{1,s} \leq C_4\|f\|_{0,1}(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}),$$

где $u(x,t)$ точное решение краевой задачи (6.1)-(6.4)*, и положительная постоянная C_4 не зависит от $N, \varepsilon, f(x,t)$.*

Разрешимость краевой задачи II

Введем пространство

$$W_L = \{u(x,t) \in W_2^{2,2s+1}(Q) : u_{x_i x_j t} \in L_2(Q), \quad i,j = \overline{1,n}\}$$

с нормой

$$||u||^2_L = ||u||^2_{2,2s+1} + ||\Delta u_t||^2.$$

Пусть функция $u(x,t) \in W_L$ является решением краевой задачи (6.1), (6.2), (6.4), (6.5). Тогда функция

$$v(x,t) = u(x,t) - \int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau$$

будет решением следующей задачи.

Вспомогательная краевая задача. Найти решение уравнения

$$Lv = F(x,v) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{6.10}$$

такое, что выполнены граничные условия (6.2)-(6.4), где

$$F(x,v) = N_1 \int\limits_0^T N(\tau)[\beta\Delta v(x,\tau) - c(x)v(x,\tau)]d\tau,$$

$$N_1 = (1 - N_0)^{-1}, \quad N_0 = \int\limits_0^T N(\tau)d\tau.$$

По Теореме 6.1, задача (6.10), (6.2)-(6.4) с $N(t) \equiv 0$ имеет единственное решение $v_0(x,t) \in W_L$ и справедлива следующая априорная оценка:

$$||v_0||_L \leq C_0||f||_{0,1}, \quad C_0 = const > 0.$$

Для всех функций $v(x,t) \in W_L$ верна оценка:

$$||F(x,v)|| \leq C_5|N_1|T^{1/2}||N||_{L_2(0,T)}||v||_L.$$

Выбирая функцию $v_0(x,t)$ в качестве начального приближения, методом последовательных приближений доказывается разрешимость вспомогательной краевой задачи.

Теорема 6.3 *Пусть выполнены все условия Теоремы 6.1 и*

$$q = C_0C_5|N_1|T^{1/2}||N||_{L_2(0,T)} < 1.$$

Тогда краевая задача (6.10), (6.2)-(6.4) *имеет единственное решение* $v(x,t) \in W_L$ *и имеет место оценка сходимости:*

$$||v - v_m||_L \leq C_0\frac{2+q}{1-q}||f||_{0,1}q^m,$$

где $v_m(x,t) \in W_L$ *является приближением с номером* m.

Пусть $v(x,t)$ является решением краевой задачи (6.10), (6.2)-(6.4) в W_L, гарантированное Теоремой 6.3. Обозначим

$$u(x,t) = v(x,t) + N_1\int\limits_0^T N(\tau)v(x,\tau)d\tau,$$

$$u_m(x,t) = v_m(x,t) + N_1\int\limits_0^T N(\tau)v_m(x,\tau)d\tau.$$

Тогда получаем следующее утверждение.

Теорема 6.4 *Пусть выполнены все условия Теоремы 6.3 и*

$$T^{1/2}||N||_{L_2(0,T)} < 1.$$

Тогда краевая задача (6.1), (6.2), (6.4), (6.5) *имеет единственное решение* $u(x,t) \in W_L$ *и справедлива оценка сходимости:*

$$||u - u_m||_L \leq C_0 \frac{2+q}{1-q}(1 + |N_1|T^{1/2}||N||_{L_2(0,T)})||f||_{0,1}q^m.$$

7 Краевые задачи с интегральным граничным условием для вырождающегося уравнения четного порядка

Неклассическим уравнениям математической физики посвящена обширная научная литература. В частности, уравнения четного порядка смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа исследовались в работах [74, 75, 78]. В данной работе расссматриваются постановки двух краевых задач с интегральным граничным условием по времени для более узкого класса уравнений, когда коэффициент при старшей производной по времени не меняет знака, но может равняться нулю в некоторых точках. При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказана регулярная разрешимость этих задач, а также получены оценки сходимости приближенных решений к точным решениям задач.

Пусть Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей S, $Q = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, для $0 \le t \le T$, $T = const > 0$.

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s} k_i(t) D_t^i u - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x) u_{x_i}) + c(x)u = f(x,t). \tag{7.1}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (7.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$ и

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \nu|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall \xi \in R^n, \quad \nu > 0.$$

Пусть $N(t) \in L_2(0,T)$ - заданная функция, $N_0 = \int\limits_0^T N(\tau)d\tau$, $N_1 = (1 - N_0)^{-1}$.

Краевая задача I. Найти решение уравнения (7.1) in Q, такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{7.2}$$

$$u(x,0) = \int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau, \tag{7.3}$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1,s}; \quad D_t^j u|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{1,s-1}. \tag{7.4}$$

Краевая задача II. Найти решение уравнения (7.1) в Q, такое, что выполнены условия (7.2), (7.3) и

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1,s-1}; \quad D_t^j u|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{0,s-1}. \tag{7.5}$$

Разрешимость вспомогательной краевой задачи

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ - анизотропное пространство Соболева с нормой

$$||u||_{m,s}^2 = \int\limits_Q [\sum_{|\alpha|\le m} (D_x^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2] dQ.$$

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Предположим, что функция $u(x,t) \in W_2^{2,2s}(Q)$ является решением краевой задачи (7.1)-(7.4). Тогда функция

$$v(x,t) = u(x,t) - \int\limits_0^T N(\tau) u(x,\tau) d\tau$$

будет решением следующей краевой задачи.

<u>Вспомогательная краевая задача.</u> Найти решение $v(x,t)$ уравнения

$$Lv = F(x,v) + f(x,t), \tag{7.6}$$

такое, что для него выполнены условия (7.2) и

$$D_t^i v|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0,s}; \quad D_t^j v|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{1, s-1}, \tag{7.7}$$

где

$$F(x,v) = N_1 \int\limits_0^T N(\tau) M v(x,\tau) d\tau,$$

$$Mv(x,\tau) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}) - c(x) v(x,\tau).$$

При $N(t) \equiv 0$ в работе [74] доказано, что при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения (7.1) краевая задача (7.6), (7.2), (7.7) имеет единственное решение $v_0(x,t)$ в $W_2^{2,2s}(Q)$, и

$$||v_0||_{2,2s} \le C_0 ||f||_{0,1}, \quad C_0 = const > 0. \tag{7.8}$$

Для любой функции $v \in W_2^{2,2s}(Q)$ нетрудно получить неравенство

$$||F(x,v)|| \le C_1 |N_1| T^{1/2} ||N||_{L_2(0,T)} ||v||_{2,2s},$$

где $C_1 = const > 0$ зависит только от $c(x)$, $a_{ij}(x)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Выбирая функцию $v_0(x,t)$ в качестве начального приближения, методом последовательных приближений доказывается следующее утверждение.

Теорема 7.1 *Пусть $c(x) \geq d_0$ для достаточно большого числа $d_0 > 0$, и выполнены следующие условия: $q = C_0 C_1 |N_1| T^{1/2} ||N||_{L_2(0,T)} < 1$,*

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \geq \delta > 0, \;\; (-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + k_{2s,t}] \geq \delta > 0,$$

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(t) \geq 0, \;\; (-1)^{s-1}k_{2s}(0) > 0, \;\; (-1)^{s-1}k_{2s}(T) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q)$, такой, что $f(x,T) = 0$ п.в. в Ω, вспомогательная задача (7.6), (7.7), (7.2) имеет единственное решение $v(x,t)$ in $W_2^{2,2s}(Q)$, и справедлива оценка сходимости

$$||v - v_m||_{2,2s} \leq C_0 \frac{2+q}{1-q} ||f||_{0,1} q^m,$$

где v_m есть m-ое приближение к функции $v(x,t)$.

Разрешимость нелокальных краевых задач

Положим $u_m(x,t) = v_m(x,t) + N_1 \int\limits_0^T N(\tau) v_m(x,\tau) d\tau$. Тогда нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 7.2 *Пусть выполнены все условия Теоремы 7.1. Тогда краевая задача (7.1) - (7.4) имеет единственное решение $u(x,t)$ в $W_2^{2,2s}(Q)$, и справедлива оценка сходимости:*

$$||u - u_m||_{2,2s} \leq C_0 \frac{2+q}{1-q} (1 + |N_1| T^{1/2} ||N||_{L_2(0,T)}) ||f||_{0,1} q^m. \tag{7.9}$$

Разрешимость краевой задачи (7.1) - (7.3), (7.5) доказывается аналогичным образом. Сначала рассматривается вспомогательная краевая задача для уравнения (7.6) с краевыми условиями (7.2) и

$$D_t^i v|_{t=0, t=T} = 0, \;\; i = \overline{0, s-1}. \tag{7.10}$$

При $N(t) \equiv 0$ разрешимость краевой задачи (7.6), (7.2), (7.10) в пространстве $W_2^{2,2s}(Q)$ доказана в работе [79], при этом для ее решения $v_0(x,t)$ справедлива оценка (7.8). Далее все рассуждения повторяются, как в первой задаче. В конечном итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 7.3 *Пусть* $c(x) \geq d_0$ *для достаточно большого числа* $d_0 > 0$, *и выполнены следующие условия:*

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \geq \delta > 0, \quad (-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + k_{2s,t}] \geq \delta > 0,$$

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(t) \leq 0, \quad (-1)^{s-1}k_{2s}(0) < 0, \quad (-1)^{s-1}k_{2s}(T) < 0,$$

$$q < 1, \quad f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q).$$

Тогда краевая задача (7.1) - (7.3), (7.5) *имеет единственное решение* $u(x,t)$ *in* $W_2^{2,2s}(Q)$, *и справедлива оценка сходимости* (7.9).

8 Системы абстрактных спаренных прямых и обратных уравнений и их дробных аналогов в дуальных банаховых тройках и на многообразиях

В данном разделе мы исследуем класс абстрактных нелинейных дробных псевдодифференциальных уравнений в банаховых пространствах, который включает в себя как уравнения типа Маккина-Власова, описывающие нелинейные марковские процессы, так и уравнения стохастического управления Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса, таким образом, допускающие единый анализ этих уравнений. Рассматривая эти уравнения как эволюционирующие в дуальных банаховых тройках, мы можем непосредственно преобразовать свойства одного типа уравнений в свойства уравнений другого типа, что приводит к эффективной теории спаренных систем прямых и обратных уравнений (прямая эволюция Маккина-Власова и обратная эволюция Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса). Такие системы занимают центральное место в современной теории игр среднего поля. Разработанная абстрактная теория позволяет нам включать в наш анализ нелинейные дробные уравнения и спаренные системы прямых и обратных уравнений на многообразиях.

В работе [80] была показана корректность в классе мягких решений следующей нелинейной задачи Коши

$$\dot{b}(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), \alpha), \quad b(a) = Y, \quad t \geq a, \tag{8.1}$$

и ее дробного аналога

$$D^{\beta}_{a+*}b(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), \alpha), \quad b(a) = Y, \quad t \geq a. \tag{8.2}$$

Здесь A, $D_1, \cdots, D_n$ – неограниченные линейные операторы в банаховом пространстве B, $D = (D_1, \cdots, D_n)$, α – параметр из другого банахова пространства B^{par} и H – непрерывное отображение $\mathbf{R} \times B \times B^n \times B^{par} \to B$, D^{β}_{a+*} – дробная производная Капуто-Джрбашяна (КД) порядка $\beta \in (0, 1)$:

$$D^{\beta}_{a+*}b(t) = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_0^{t-a} \frac{b(t-z) - b(t)}{z^{1+\beta}} dz + \frac{b(t) - b(a)}{\Gamma(1-\beta)(t-a)^{\beta}}; \tag{8.3}$$

Мягкие решения дробных нелинейных уравнений основаны на интегральном представлении Золотарева для функций Миттаг-Леффлера.

Также в [80] доказана локальная корректность для уравнений с упреждающей зависи-

мостью от неизвестных для достаточно малых $T-a$:

$$\dot{b}(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), u(t, b(.))), \quad b(a) = Y, \quad t \in [a, T], \tag{8.4}$$

$$D^{\beta}_{a+*}b(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), u(t, b(.))), \quad b(a) = Y, \quad t \in [a, T], \tag{8.5}$$

где A, $D_1, \cdots, D_n$, H определяются как в (8.1) и (8.2), и u – это непрерывное отображение $\mathbf{R} \times C([a, T], B_1) \to B^{par}$, которое является липшицевым по второму аргументу, так что

$$\|u(t, b(.)) - u(t, \tilde{b}(.))\|_{par} \leq L_u \|b(.) - \tilde{b}(.)\|_{C([a,T],B_1)}. \tag{8.6}$$

В [80] построена система абстрактных спаренных прямых и обратных уравнений

$$\begin{cases} \dot{b}(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), u(t, f(t), D^b f(t))), \quad b(a) = Y, \quad t \in [a, T], \\ \dot{f}(t) = -A^b f(t) + H^b(t, f(t), D^b f(t), b_{\geq t}), \quad f(T) = Z, \quad t \in [a, T]. \end{cases} \tag{8.7}$$

и дробная версия этой системы

$$\begin{cases} D^{\beta}_{a+*}b(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), u(t, f(t), D^b f(t))), \quad b(a) = Y, \quad t \in [a, T], \\ D^{\beta}_{T-*}f(t) = -A^b f(t) + H^b(t, f(t), D^b f(t), b_{\geq t}), \quad f(T) = Z, \quad t \in [a, T]. \end{cases} \tag{8.8}$$

и получены результаты по их корректности. Обозначение $b_{\geq t}$ указывает на предположение, что $H^b(t, .)$ зависит только от будущих значений $\{b(s), s \in [t, T]\}$ кривых $b(.) \in C([a, T], B)$.

В данном разделе мы определяем абстрактную модель для системы спаренных прямых и обратных уравнений и их дробных аналогов, рассматривая эти уравнения как развивающиеся в дуальных банаховых тройках. Получены результаты о локальной корректности для дробной системы спаренных прямых и обратных уравнений, состоящей из прямого уравнения Маккина-Власова и обратного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для $t \in [a, T]$.

А также используя разработанный абстрактный подход доказаны результаты корректности для нелинейных дробных уравнений и дробной системы спаренных прямых и обратных уравнений на многообразиях.

Приведем некоторые вспомогательные сведения и результаты, используемые в работе.

Через $E_\beta(x)$ мы обозначим стандартную функцию Миттаг-Леффлера индекса β:

$$E_\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\beta k + 1)}.$$

Наиболее удобной для наших целей формулой для функции Миттаг-Леффлера является ее интегральное представление (формула Золотарева, или формула Золотарева-Полларда)

$$E_\beta(s) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{sx} x^{-1-1/\beta} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx, \tag{8.9}$$

где

$$G_\beta(t, x) = \frac{1}{\pi} Re \int_0^\infty \exp\left\{ipx - tp^\beta e^{i\pi\beta/2}\right\} dp$$

– ядро теплопроводности (решение с начальным условием Дирака) уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, x) = -\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} G(t, x),$$

или, в вероятностной терминологии, плотность вероятности перехода устойчивого субординатора Леви индекса β. Удобство этой формулы связано с тем, что она позволяет определить $E_\beta(A)$ для оператора A всякий раз, когда A порождает полугруппу, так что e^{At} корректно определена.

Из (8.9) следует, что

$$E'_\beta(s) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{sx} x^{-1/\beta} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx, \tag{8.10}$$

так что интеграл справа является конечным.

Для банахова пространства B и $\tau < t$ мы обозначим $C([\tau, t], B)$ банахово пространство непрерывных функций $f : [\tau, t] \to B$ с нормой

$$\|f\|_{C([\tau,t],B)} = \sup_{s \in [\tau,t]} \|f(s)\|_B,$$

и $C_Y([\tau, t], B)$ его замкнутое подмножество, состоящее из функций f таких, что $f(\tau) = Y$, которое является полным метрическим пространством при индуцированной топологии.

Пусть $C_Y([\tau, t], M)$ обозначает выпуклое подмножество $C_Y([\tau, t], B)$ функций со значениями в M, где M – замкнутое выпуклое подмножество из B.

Приведем следующую теорему, которая является версией принципа неподвижной точки,

специально разработанной для использования в нелинейных диффузионных и дробных уравнениях (см. Теорему 2.1.3 из [81]).

Теорема 8.1 *Предположим, что для любого $Y \in M$, $\alpha \in B^{par}$, где B^{par} – другое банахово пространство, задано отображение $\Phi_{Y,\alpha} : C([\tau,T],M) \to C_Y([\tau,T],M)$ для некоторых $T > \tau$ такое, что*

$$\begin{aligned} &\|[\Phi_{Y,\alpha}(\mu^1_\cdot)](t) - [\Phi_{Y,\alpha}(\mu^2_\cdot)](t)\| \le L(Y)\int_\tau^t (t-s)^{-\omega}\|\mu^1_\cdot - \mu^2_\cdot\|_{C([\tau,s],B)}\,ds, \\ &\|[\Phi_{Y_1,\alpha_1}(\mu_\cdot)](t) - [\Phi_{Y_2,\alpha_2}(\mu_\cdot)](t)\| \le \varkappa\|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1\|\alpha_1 - \alpha_2\|, \end{aligned} \tag{8.11}$$

для всех $t \in [\tau,T]$, $\mu, \mu^1, \mu^2 \in C([\tau,T],M)$, $Y_1, Y_2 \in M$, $\alpha_1, \alpha_2 \in B^{par}$, некоторых констант $\varkappa, \varkappa_1 \ge 0$, $\omega \in [0,1)$, и непрерывной функции L на M.

Тогда для любых $Y \in M$, $\alpha \in B^{par}$ отображение $\Phi_{Y,\alpha}$ имеет единственную неподвижную точку $\mu_{\cdot,\tau}(Y,\alpha)$ в $C_Y([\tau,T],M)$. Более того, если $\omega > 0$, тогда для всех $t \in [\tau,T]$

$$\|\mu_{t,\tau}(Y,\alpha) - Y\| \le E_{1-\omega}(L(Y)\Gamma(1-\omega)(t-\tau)^{1-\omega})\|[\Phi_{Y,\alpha}(Y)](t) - Y\|, \tag{8.12}$$

и неподвижные точки $\mu_{\cdot,\tau}(Y_1,\alpha_1)$ и $\mu_{\cdot,\tau}(Y_2,\alpha_2)$ с различными начальными данными Y_1, Y_2 и параметрами α_1, α_2 удовлетворяют оценке (для любого $j = 1,2$)

$$\|\mu_{t,\tau}(Y_1,\alpha_1) - \mu_{t,\tau}(Y_2,\alpha_2)\| \le (\varkappa\|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1\|\alpha_1 - \alpha_2\|)E_{1-\omega}(L(Y_j)\Gamma(1-\omega)(t-\tau)^{1-\omega}). \tag{8.13}$$

Если $\omega = 0$, эти оценки упрощаются

$$\|\mu_{t,\tau}(Y,\alpha) - Y\| \le e^{(t-\tau)L(Y)}\|[\Phi_{Y,\alpha}(Y)](t) - Y\|, \tag{8.14}$$

$$\|\mu_{t,\tau}(Y_1,\alpha_1) - \mu_{t,\tau}(Y_2,\alpha_2)\| \le (\varkappa\|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1\|\alpha_1 - \alpha_2\|)\exp\{(t-\tau)\min(L(Y_1),L(Y_2))\}. \tag{8.15}$$

Здесь $\Phi_{Y,\alpha}(Y)$ означает применение отображения $\Phi_{Y,\alpha}$ к функции тождественно равной Y.

Далее приведем основные понятия и результаты, полученные в разделах 4-7 работы [80], используемые в данной работе.

Для двух банаховых пространств B, C обозначим $\mathcal{L}(B,C)$ банахово пространство ограниченных линейных операторов $B \to C$ с обычной операторной нормой, обозначенной $\|.\|_{B\to C}$.

Последовательности вложенных банаховых пространств $B_2 \subset B_1 \subset B$ с нормами, обозначенными $\|.\|_2, \|.\|_1, \|.\|$, соответственно, будем называть *банаховой тройкой* (вложенных пространств) или *банаховой башней порядка* 3, если нормы упорядочены $\|.\|_2 \geq \|.\|_1 \geq \|.\|$, и B_2 плотно в B_1 в топологии B_1, тогда как B_1 плотно в B в топологии B. Следующие условия будут играть ключевую роль в данной работе.

Условия А. (i) Пусть $B_2 \subset B_1 \subset B$ – банахова тройка с нормами, обозначаемыми $\|.\|_2, \|.\|_1, \|.\|$, соответственно, и пусть

$$D_i \in \mathcal{L}(B_1, B) \cap \mathcal{L}(B_2, B_1), \quad i = 1, \cdots, n.$$

Без ограничения общности, мы предполагаем, что нормы всех D_j ограничены 1 как в $\mathcal{L}(B_1, B)$, так и в $\mathcal{L}(B_2, B_1)$ (что обычно имеет место в приложениях ниже).

(ii) Пусть $A \in \mathcal{L}(B_2, B)$ и A порождают сильно непрерывную полугруппу e^{At} как в B, так и в B_1, так что

$$\|e^{At}\|_{B \to B} \leq M e^{mt}, \quad \|e^{At}\|_{B_1 \to B_1} \leq M_1 e^{tm_1}, \tag{8.16}$$

с некоторыми неотрицательными константами M, m, M_1, m_1, и B_2 является инвариантной существенной областью определения оператора A для этой полугруппы в B.

(iii) Пусть B^{par} – другое банахово пространство (параметров) с нормой, обозначаемой $\|.\|_{par}$ и $H : \mathbf{R} \times B \times B^n \times B^{par} \to B$ – непрерывное отображение, липшицево в том смысле, что

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \alpha) - H(t, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n, \alpha)\|$$

$$\leq L_H \sum_{j=0}^{n} \|b_j - \tilde{b}_j\| (1 + L'_H \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|), \tag{8.17}$$

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \alpha) - H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \tilde{\alpha})\| \leq L_H^{par} \|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{par} (1 + \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|), \tag{8.18}$$

и имеет линейный рост

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \alpha)\| \leq L_H (1 + \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|), \tag{8.19}$$

с некоторыми константами L_H, L'_H, L_H^{par}.

Важным предположением является следующее свойство сглаживания полугруппы e^{At}:

при $t > 0$ она переводит B в B_1 и

$$\|e^{At}\|_{B\to B_1} \le \varkappa t^{-\omega}, \quad t \in (0,1], \tag{8.20}$$

с некоторыми константами $\varkappa > 0$ и $\omega \in (0,1)$. Иногда используется аналогичное условие для пары B_1, B_2:

$$\|e^{At}\|_{B_1\to B_2} \le \varkappa_1 t^{-\omega}, \quad t \in (0,1]. \tag{8.21}$$

Так называемая мягкая форма задачи Коши (8.1) представляет собой интегральное уравнение

$$b(t) = e^{A(t-a)}Y + \int_a^t e^{A(t-s)} H(s, b(s), Db(s), \alpha)\, ds, \quad t \ge a. \tag{8.22}$$

Хорошо известно (см., например, [81]) и легко увидеть, что если $b(t)$ является классическим решением уравнения (8.1), то она также решает уравнение (8.22) (т.е. $b(.)$ это непрерывное отображение $[a,\infty)$ в B_1, удовлетворяющее уравнению (8.22)), так что единственность решения уравнения (8.1) следует из единственности для уравнения (8.22).

Справедлива следующая теорема о корректности уравнения (8.22) (см. [80], Теорема 4.1).

Теорема 8.2 *Пусть выполнены условия A и свойство гладкости* (8.20)*. Тогда уравнение* (8.22) *корректно в B_1, то есть для любого $Y \in B_1$, $\alpha \in B^{par}$ существует его единственное глобальное решение $b(t) = b(t; Y, \alpha) \in B_1$, которая липшиц-непрерывно зависит от начальных данных Y и параметра α. В частности,*

$$\sup_{t\in[a,T]} \|b(t;Y,\alpha) - b(t;\tilde{Y},\tilde{\alpha})\|_1 \le K\left(\|\alpha-\tilde{\alpha}\|_{par}(1+\|Y\|_1) + \|Y-\tilde{Y}\|_1\right), \tag{8.23}$$

с постоянной K, зависящей от $t-a$ и всех констант, входящих в условия теоремы.

Для случая уравнения (8.2) мягкая форма представляет собой интегральное уравнение

$$b(t) = E_\beta(A(t-a)^\beta)Y + \beta\int_a^t (t-s)^{\beta-1} E'_\beta(A(t-s)^\beta) H(s, b(s), Db(s), \alpha)\, ds, \tag{8.24}$$

где $E_\beta(A)$ определяется формулой (8.9). Таким образом, более явно это уравнение записывается в следующем виде

$$b(t) = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{A(t-a)^\beta x} Y x^{-1-1/\beta} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx$$

$$+\int_a^t (t-s)^{\beta-1}\int_0^\infty e^{A(t-s)^\beta x}x^{-1/\beta}G_\beta(1,x^{-1/\beta})\,dxH(s,b(s),Db(s),\alpha)\,ds. \tag{8.25}$$

Справедлива следующая теорема (см. [80], Теорема 4.2).

Теорема 8.3 *Пусть выполнены условия A и свойство гладкости* (8.20)*. Тогда уравнение* (8.24) *корректно в B_1, то есть для любого $Y \in B_1$, $\alpha \in B^{par}$ существует его единственное глобальное решение $b(t) = b(t;Y,\alpha) \in B_1$, которая липшиц-непрерывно зависит от начальных данных Y и параметра α, так что выполняется* (8.23)*.*

Для уравнений (8.4) и (8.5) с упреждающей зависимостью от неизвестных доказана локальная корректность, т.е. для достаточно малых $T-a$. Доказательство основывается на мягких решениях и на том факте, что любое решение (8.4) является неподвижной точкой отображения

$$[\Phi_Y(b(.))](t) = e^{A(t-a)}Y + \int_a^t e^{A(t-s)}H(s,b(s),Db(s),u(s,b(.)))\,ds, \tag{8.26}$$

и любое решение уравнения (8.5) является неподвижной точкой отображения

$$[\Phi_Y(b(.))](t) = E_\beta(A(t-a)^\beta)Y + \beta\int_a^t (t-s)^{\beta-1}E'_\beta(A(t-s)^\beta)H(s,b(s),Db(s),u(s,b(.)))\,ds. \tag{8.27}$$

Справедлива следующая теорема (см. [80], Теорема 5.1).

Теорема 8.4 *Пусть выполнены условия A, свойство сглаживания* (8.20) *и оценка Липшица* (8.6)*. Тогда для любого $r > 0$ существует T_0 такое, что уравнения* (8.4) *и* (8.5) *имеют единственные мягкие решения $b(t) = b(t;Y)$ (то есть они являются неподвижными точками* (8.26) *и* (8.27)*, соответственно) для всех $T < T_0$ и Y таких, что $\|Y\|_1 \le r$, и это решение липшиц-непрерывно зависит от Y внутри шара $\|Y\|_1 \le r$.*

Для представления спаренной системы прямых и обратных уравнений необходимо ввести условия A как для прямого, так и для обратного уравнений и определить механизм спаривания (интерпретируемый в приложениях как элемент управления), включая соответствующие свойства пространства параметров. Версия условий A для системы прямых и обратных уравнений выглядит следующим образом.

Условия AFB. (i) Пусть $B_2 \subset B_1 \subset B$ и $B_{2b} \subset B_{1b} \subset B_b$ – две банаховы тройки (индекс 'b' от слова 'backward'), с нормами во второй тройке, обозначаемыми через $\|.\|_{2b}$, $\|.\|_{1b}$ и $\|.\|_b$. Пусть $D = (D_1, \cdots, D_n)$ и $D^b = (D_{1b}, \cdots, D_{nb})$ – операторы, удовлетворяющие п. (i) условий A,

для троек $B_2 \subset B_1 \subset B$ и $B_{2b} \subset B_{1b} \subset B_b$, соответственно.

(ii) Пусть A и A^b – операторы со свойствами, описанными в п. (ii) условий A для троек $B_2 \subset B_1 \subset B$ и $B_{2b} \subset B_{1b} \subset B_b$, соответственно.

(iii) Пусть B^{con} – другое банахово пространство (управляющих функций) с нормой $\|.\|_{con}$. Пусть $H : \mathbf{R} \times B \times B^n \times B^{con} \to B$ – непрерывное отображение, которое является липшицевым в том смысле, что

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, u) - H(t, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n, u)\| \leq L_H \sum_{j=0}^{n} \|b_j - \tilde{b}_j\|(1 + L'_H \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|), \tag{8.28}$$

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, u) - H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \tilde{u})\| \leq L_H^{par} \|u - \tilde{u}\|_{con}(1 + L'_H \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|). \tag{8.29}$$

Пусть $H^b : \mathbf{R} \times B_b \times (B_b)^n \times C([a, T], B) \to B_b$ – непрерывное отображение, которое является липшицевым в том смысле, что

$$\begin{aligned} &\|H^b(t, f_0, f_1, \cdots, f_n, b(.)) - H^b(t, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_n, b(.))\|_b \\ &\leq L_H^b \sum_{j=0}^{n} \|f_j - \tilde{f}_j\|_b(1 + (L_H^b)' \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|_b), \end{aligned} \tag{8.30}$$

$$\begin{aligned} &\|H^b(t, f_0, f_1, \cdots, f_n, b(.)) - H^b(t, f_0, f_1, \cdots, f_n, \tilde{b}(.))\|_b \\ &\leq L_H^b \|b(.) - \tilde{b}(.)\|_{C([a,T],B)}(1 + (L_H^b)' \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_b). \end{aligned} \tag{8.31}$$

Наконец, пусть H и H^b имеют линейный рост (в смысле условия (8.19)).

(iv) Пусть $u : \mathbf{R} \times B_b \times (B_b)^n \to B^{con}$ – непрерывная функция, которая липшицева в том смысле, что

$$\|u(t, f_0, f_1, \cdots, f_n) - u(t, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_n)\|_{con} \leq L_u \sum_{j=0}^{n} \|f_j - \tilde{f}_j\|_b, \tag{8.32}$$

с постоянной L_u.

Анализ системы (8.7) основан на ее сведении к единому упреждающему уравнению типа (8.4). А именно, по Теореме 8.2 для заданной кривой $b(.) \in C_Y([a, T], B)$ и $Z \in B_{1b}$ существует единственное мягкое решение $f(t) = f(t; Z, b(.)) \in C([a, T], B_{1b})$ второго уравнения системы (8.7) . Подставляя это решение в первое уравнение системы (8.7), получается уравнение

$$\dot{b}(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), u(t, f(t; Z, b(.)), D^b f(t; Z, b(.)))), \quad t \in [a, T]. \tag{8.33}$$

Это уравнение типа (8.4).

Справедлива следующая теорема (см. [80], Теорема 6.1).

Теорема 8.5 *Пусть выполнены условия AFB и свойство сглаживания* (8.20) *для* A *и* A^b*. Тогда для любого* $Y \in B_1$*,* $Z \in B_{1b}$ *существует* T_0 *такое, что система прямого и обратного уравнений* (8.7) *имеет единственное мягкое решение* $(b(t), f(t))$ *для всех* $T < T_0$*, которое локально липшицево зависит от* Y*,* Z*, то есть когда* Y *и* Z *взяты из ограниченных множеств.*

При тех же предположениях (AFB) из теоремы 8.3 можно заключить, что для заданной кривой $b(.) \in C_Y([a,T],B)$ и $Z \in B_{1b}$ существует единственное мягкое решение $f(t) = f(t;Z,b(.)) \in C([a,T],B_{1b})$ второго уравнения системы (8.8). Подставляя это решение в первое уравнение системы (8.8), получается уравнение

$$D^{\beta}_{a+*}b(t) = Ab(t) + H(t,b(t),Db(t),u(t,f(t;Z,b(.)),D^b f(t;Z,b(.)))), \quad t \in [a,T], \tag{8.34}$$

которое имеет тип (8.5).

Аналогично Теореме 8.5 справедлив следующий результат (см. [80], Теорема 7.1).

Теорема 8.6 *Пусть выполнены условия AFB и свойство сглаживания* (8.20) *для* A *и* A^b*. Тогда для любого* $Y \in B_1$*,* $Z \in B_{1b}$ *существует* T_0 *такое, что система прямого и обратного уравнений* (8.8) *имеет единственное мягкое решение* $(b(t), f(t))$ *для всех* $T < T_0$*, которое локально липшицево зависит от* Y *и* Z*.*

Дуальные банаховы тройки и связанные с ними нелинейные уравнения

В приложениях две банаховы тройки, участвующие в условиях AFB, обычно связаны дуальностью, а операторы A, A^b дуальны, что позволяет вывести требуемые свойства A^b из соответствующих свойств A.

Удобно ввести необходимые понятия в абстрактной постановке. Следуя [81], будем называть пару банаховых пространств (B,C) *дуальной парой*, если каждое из этих пространств является замкнутым подпространством дуального пространства к другому пространству, которое разделяет точки последнего. Конечно, если B' является банаховым дуальным к B, то и (B,B') и (B',B) являются дуальными парами. Но наше симметричное понятие включает также пары типа $(C_\infty(\mathbf{R}^d), L_1(\mathbf{R}^d))$, которые имеют решающее значение для нашего настоящего обсуждения. Дуальность – это билинейная форма $(B,C) \to \mathbf{R}$, которую всегда будем обозначать

через (b,c), $b \in B, c \in C$. Напомним, что требование, чтобы B было подмножеством дуального к C, означает следующую формулу для нормы:

$$\|b\|_B = \sup_{\|c\|\le 1} |(b,c)|.$$

Скажем, что банахова тройка $B_2 \subset B_1 \subset B$ *порождается* векторнозначным оператором $D = (D_1, \cdots, D_n)$, если

$$\|b\|_1 = \|b\| + \sum_{j=1}^{n} \|D_j b\|, \quad \|b\|_2 = \|b\|_1 + \sum_{i\le j} \|D_i D_j b\|. \tag{8.35}$$

Пусть две банаховы тройки $B_2 \subset B_1 \subset B$ и $B_{2b} \subset B_{1b} \subset B_b$ (с нормами второй, обозначенными $\|.\|_{2b}$, $\|.\|_{1b}$ и $\|.\|_b$) порождаются операторами $D = (D_1, \cdots, D_n)$ и $D^b = (D_1^b, \cdots, D_n^b)$ соответственно. Скажем, что тройки *дуальные*, если (B, B_b) образует дуальную пару, а операторы D_j и $-D_j^b$ дуальны в том смысле, что

$$(D_j b, f) = -(b, D_j^b f), \quad b \in B_1,\ f \in B_{1b},\ j = 1, \cdots, n.$$

Упрощая обозначения, мы будем писать D также вместо D^b, так что предыдущее уравнение принимает вид $(D_j b, f) = -(b, D_j f)$. Будем говорить, что дуальные тройки порождаются оператором D. Конечно, во всех приложениях и D, и D^b являются градиентами, так что эти обозначения вполне естественны.

При изучении дуальности полезно работать с двумя версиями свойства сглаживания (8.20). А именно, пусть банахова тройка $B_2 \subset B_1 \subset B$ *порождается* оператором $D = (D_1, \cdots, D_n)$ и A порождает сильно непрерывную полугруппу e^{At} в B. Скажем, что полугруппа e^{At} *сглаживающая справа первого порядка*, если выполняется свойство (8.20). Поскольку тройка порождается оператором D, это равносильно оценке

$$\|D_j e^{At} b\| \le \varkappa t^{-\omega} \|b\|, \quad j = 1, \cdots, n, \quad t \in (0, 1], \tag{8.36}$$

для всех $b \in B$ (возможно, с другой константой $\varkappa$ по сравнению с (8.20), но с тем же ω). Скажем, что полугруппа e^{At} *сглаживающая слева первого порядка*, если операторы $e^{At} D_j$, определенные

на B_1, могут быть расширены до ограниченных операторов в B для любого $t > 0$, так что

$$\|e^{At} D_j b\| \leq \varkappa t^{-\omega} \|b\|, \quad j = 1, \cdots, n, \quad t \in (0, 1], \tag{8.37}$$

для всех $b \in B$.

Для банаховой тройки, порожденной оператором D, скажем, что полугруппа e^{At} *сглаживающая справа второго порядка*, если выполнена оценка

$$\|D_j e^{At} b\|_1 \leq \varkappa t^{-\omega} \|b\|_1, \quad j = 1, \cdots, n, \quad t \in (0, 1], \tag{8.38}$$

и является *сглаживающей слева второго порядка*, если выполнена оценка

$$\|e^{At} D_j b\|_1 \leq \varkappa t^{-\omega} \|b\|_1, \quad j = 1, \cdots, n, \quad t \in (0, 1]. \tag{8.39}$$

Доказан следующий результат, предоставляющий некоторые связи между различными свойствами сглаживания (доказательство см. в работе [80], Теорема 8.1).

Теорема 8.7 *Пусть две банаховы тройки $B_2 \subset B_1 \subset B$ и $B_{2b} \subset B_{1b} \subset B_b$, порожденные оператором $D = (D_1, \cdots, D_n)$, дуальны. Пусть операторы*

$$A \in \mathcal{L}(B_2, B), \quad A^b \in \mathcal{L}(B_{2b}, B_b)$$

дуальны, $A^b = A^*$, в том смысле, что

$$(Ab, f) = (b, A^* f), \quad b \in B_2,\ f \in B_{2b},$$

и пусть A и $A^b = A^*$ порождают сильно непрерывные полугруппы e^{At} в B и $e^{A^* t}$ в B_b с существенными областями определения операторов A и A^*, содержащимися в B_1 и B_{1b}, соответственно.

(i) Если полугруппа e^{At} является сглаживающей справа первого порядка (соответственно слева), то полугруппа $e^{A^* t}$ является сглаживающей слева первого порядка (соответственно справа) с тем же параметром ω, и наоборот.

(ii) Если коммутаторы $[D_j, e^{At}]$ продолжаются до равномерно ограниченных (по $t \in [0, T]$ для любого T) операторов в B, то

(a) e^{At} является ограниченной полугруппой в B_1 (т.е. вторая оценка (8.16) следует из первой);

(б) e^{At} является сглаживающей справа первого порядка тогда и только тогда, когда она является сглаживающей слева первого порядка.

(iii) Коммутаторы $[D_j, e^{At}]$ продолжаются до равномерно ограниченных операторов в B тогда и только тогда, когда $[D_j, e^{A^*t}]$ продолжаются до равномерно ограниченных операторов в B_b.

(iv) Если полугруппа e^{A^*t} сглаживающая слева первого порядка, то e^{At} сглаживающая слева второго порядка.

(v) Если коммутаторы $[D_j, e^{At}]$ продолжаются до равномерно ограниченных (по $t \in [0, T]$ для любого T) операторов в B_1, то

(a) e^{At} является ограниченной полугруппой в B_2;

(b) e^{At} является сглаживающей справа второго порядка тогда и только тогда, когда она сглаживающая слева второго порядка.

Для дуальных банаховых троек и дуальных генераторов мы можем переформулировать Теоремы 8.5 и 8.6 почти без каких-либо дополнительных предположений относительно A^*. Следующий результат является прямым следствием Теорем 8.5, 8.6 и 8.7.

Теорема 8.8 *Пусть две банаховы тройки $B_2 \subset B_1 \subset B$ и $B_{2b} \subset B_{1b} \subset B_b$, порожденные оператором $D = (D_1, \cdots, D_n)$, дуальны. Пусть операторы*

$$A \in \mathcal{L}(B_2, B), \quad A^b \in \mathcal{L}(B_{2b}, B_b)$$

являются дуальными, $A^b = A^*$ в том смысле, что

$$(Ab, f) = (b, A^* f), \quad b \in B_2,\ f \in B_{2b},$$

и пусть A и $A^b = A^*$ порождают сильно непрерывные полугруппы e^{At} в B и e^{A^*t} в B_b с существенными областями определения операторов A и A^*, содержащимися в B_1 и B_{1b}, соответственно. Кроме того, A является сглаживающим первого порядка справа или слева, а операторы $[e^{At}, D_j]$ продолжаются до равномерно ограниченных операторов $B \to B$. Пусть выполнены предположения (iii) и (iv) условий AFB относительно H, H^b, и. Тогда для любых $Y \in B_1$, $Z \in B_{1b}$ существует T_0 такое, что системы прямых и обратных уравнений (8.7) и

(8.8) *с* $A^b = A^*$ *имеют единственные мягкие решения для всех* $T < T_0$.

Определим абстрактную модель для более конкретной системы прямого и обратного уравнений, состоящей из спаренных уравнений Маккина-Власова (прямое уравнение) и Гамильтона-Якоби-Беллмана (обратное уравнение) для $t \in [a, T]$:

$$\begin{cases} D^{\beta}_{a+*} b(t,x) = A^* b(t,x) + \sum_{j=1}^{d} h_j(t, b(t,.), u(t,x, \frac{\partial f}{\partial x}(t,x))) \frac{\partial b}{\partial x_j}(t,x), \quad b(a,.) = Y, \\ D^{\beta}_{T-*} f(t,x) = -Af(t,x) + H(t,x, \frac{\partial f}{\partial x}(t,x), b_{\geq t}), \quad f(T,.) = Z. \end{cases} \tag{8.40}$$

Здесь дуальными банаховыми тройками являются $W_2(\mathbf{R}^d) \subset W_1(\mathbf{R}^d) \subset L_1(\mathbf{R}^d)$ для первого (прямого) уравнения и $C^2_\infty(\mathbf{R}^d) \subset C^1_\infty(\mathbf{R}^d) \subset C_\infty(\mathbf{R}^d)$ для второго (обратного) уравнения, обе порождаются оператором производной $D = \partial/\partial x$. Соответствующие нормы были определены в [80] (см. конец Раздела 4). Вместо банахова пространства B^{con} из условий AFB берется подмножество U-значных функций в банаховом пространстве непрерывных функций на R^d, где U – компактное подмножество евклидова пространства. Примеры генераторов A, удовлетворяющих требованиям Теоремы 8.8, которые обеспечивают условия локальной корректности для системы (8.40), приведены в [80] (см. конец Раздела 4).

Дробные уравнения Маккина-Власова и Гамильтона-Якоби-Беллмана на многообразиях

Обозначим через

$$\Delta_{LB}\phi = div\,(\nabla\phi) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{\det g}\, g^{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \tag{8.41}$$

оператор Лапласа-Бельтрами на компактном римановом многообразии (M, g) размерности N, с римановой метрикой, заданной матрицей $g = (g_{jk}(x))$ и ее обратной матрицей $G = (g^{jk}(x))$. Пусть $K(t, x, y)$ – соответствующее ядро теплопроводности, то есть $K(t, x, y)$ является решением уравнения теплопроводности $(\partial K/\partial t) = \Delta_{LB} K$ как функция от $(t > 0, x \in M)$ и имеет начальное условие Дирака $K(0, x, y) = \delta_y(x)$. Хорошо известно (см., например, [82–84]), что задача Коши для этого уравнения теплопроводности корректна в M и разрешающие операторы

$$S_t f(x) = e^{t\Delta_{LB}} f(x) = \int_M K(t, x, y) f(y)\, dv(y), \tag{8.42}$$

где $dv(y)$ – риманов объем на M, образуют сильно непрерывную полугруппу сжатий (марков-

скую полугруппу броуновского движения в M) в пространстве $C(M)$ ограниченных непрерывных функций на M, снабженном sup-нормой.

Обозначим через $C^1(M)$ пространство непрерывно дифференцируемых функций на M с нормой

$$\|f\|_{C^1(M)} = \|f\|_{C(M)} + \sup_x \|\nabla f(x)\|_x, \tag{8.43}$$

где в локальных координатах

$$\|\nabla f(x)\|_x^2 = (\nabla f(x), G(x)\nabla f(x)) = \sum_{jk} g^{jk}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \tag{8.44}$$

и обозначим через $C^2(M)$ пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на M, снабженное нормой

$$\|f\|_{C^2(M)} = \|f\|_{C^1(M)} + \sup_x \|\nabla^2 f(x)\|_x, \tag{8.45}$$

где в локальных координатах

$$\|\nabla^2 f(x)\|_x^2 = \sum_{jk} g^{jk}(x) g^{im}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m}. \tag{8.46}$$

Градиент $\nabla f(x)$ является элементом кокасательного пространства T^*M_x к M в точке x, и $\nabla^2 f$ является тензором типа $(0,2)$. Формулы (8.44) и (8.46) представляют собой стандартный подъем римановой метрики до метрики на тензорах.

Двойственные банаховы тройки, используемые для анализа уравнений на многообразиях, являются естественными аналогами троек, используемых для уравнений в $\mathbf{R}^d$. А именно, это тройка $C^2(M) \subset C^1(M) \subset C(M)$ (с введенными выше нормами) и тройка функциональных пространств Соболева $W_2(M) \subset W_1(M) \subset L_1(M)$ с нормами

$$\|f\|_{L_1(M)} = \int_M |f(x)|\, dv(x), \quad \|f\|_{W_1(M)} = \|f\|_{L_1(M)} + \int_M \|\nabla f(x)\|_x\, dv(x),$$

$$\|f\|_{W_2(M)} = \|f\|_{W_1(M)} + \int_M \|\nabla^2 f(x)\|_x\, dv(x).$$

Известно, что пространство $C^2(M)$ является инвариантной существенной областью определения для полугруппы S_t в $C(M)$. Кроме того, эта полугруппа S_t сильно непрерывна как полугруппа в $L_1(M)$ (на самом деле, во всех $L_p(M)$, $p \geq 1$; см. [82] и цитируемую там литературу).

Ключевые свойства сглаживания и сохранения гладкости этой полугруппы, необходимые для нашей теории, доказаны в следующем результате (доказательство см. в работе [80], Теорема 9.1).

Теорема 8.9 *(i) Операторы S_t являются сглаживающими справа и слева:*

$$\|\nabla S_t f\|_{C(M)} \leq Ct^{-1/2}\|f\|_{C(M)}, \quad \|S_t \nabla f\|_{C(M)} \leq Ct^{-1/2}\|f\|_{C(M)}, \tag{8.47}$$

с постоянной C, равномерно для любого компактного интервала времени.

(ii) Операторы S_t сохраняют гладкость:

$$\|S_t f\|_{C^1(M)} \leq C\|f\|_{C^1(M)}, \tag{8.48}$$

с постоянной C, равномерно для любого компактного интервала времени.

(iii) Коммутаторы $[\nabla, S_t]$ продолжаются до ограниченных операторов в $C(M)$ равномерно для любого компактного интервала времени.

Следующий результат является прямым следствием теорем 8.9 и 8.7, а также хорошо известного факта, что оператор Δ_{LB} самодуальный относительно спаривания, задаваемого интегрированием относительно меры объема dv на M.

Теорема 8.10 *Сглаживающие свойства операторов S_t выполняются и в интегральных нормах, т.е.*

$$\|\nabla S_t f\|_{L_1(M)} \leq Ct^{-1/2}\|f\|_{L_1(M)}, \quad \|S_t \nabla f\|_{L_1(M)} \leq Ct^{-1/2}\|f\|_{L_1(M)}, \tag{8.49}$$

$$\|S_t f\|_{W_1(M)} \leq C\|f\|_{W_1(M)}, \tag{8.50}$$

и коммутаторы $[\nabla, S_t]$ продолжаются до ограниченных операторов в $L_1(M)$ равномерно для любого компактного интервала времени.

Для стохастического управления диффузиями на (M, g) с фиксированной частью второго порядка Δ_{LB} в случае, когда управление осуществляется только через снос (управление сносом броуновского движения на M), соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана – это следующее уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \Delta_{LB} f(t,x) + H(x, \nabla f(t,x)), \tag{8.51}$$

где гамильтониан $H(x,p)$, $x \in M, p \in T^*M_x$ – функция на кокасательном расслоении T^*M вида

$$H(x,p) = \sup_{u \in U}[(g(x,u),p) + J(x,u)], \tag{8.52}$$

где U – компактное множество возможных управлений, а J, g – непрерывная функция и непрерывное векторное поле, зависящие от u как от параметра. В случае стохастических игр двух игроков с нулевой суммой с так называемым условием Айзекса функция Гамильтона принимает вид

$$H(x,p) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in V}[(g(x,u,v),p) + J(x,u,v)] = \inf_{v \in V} \sup_{u \in U}[(g(x,u,v),p) + J(x,u,v)]. \tag{8.53}$$

Возможность поменять местами sup и inf здесь называется условием Айзекса. Это выполняется, в частности, когда управление двух игроков может быть разделено в том смысле, что гамильтониан принимает вид

$$H(x,p) = \sup_{u \in U}[(g_1(x,u),p) + J_1(x,u)] + \inf_{v \in V}[(g_2(x,v),p) + J_2(x,v)] + J_0(x). \tag{8.54}$$

Дробная версия уравнения (8.51) – это дробное уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$D^{\beta}_{a+*} f(t,x) = \Delta_{LB} f(t,x) + H(x, \nabla f(t,x)) \tag{8.55}$$

(дробная производная действует на переменную t, а ∇ и Δ_{LB} действуют на переменную $x \in M$), которое описывает функции затрат для масштабируемых случайных блужданий в непрерывном времени с пространственным движением, управляемым оператором Δ_{LB} (см. [85]).

Уравнение Маккина-Власова на M, описывающее нелинейную диффузию на M (с оператором Δ_{LB} в качестве главной части и нелинейным сносом h), представляет собой уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \Delta_{LB} f(t,x) + (h(x, f(t,.)), \nabla f(t,x)), \tag{8.56}$$

где h отображает пары $(x, f(t,.))$ в элементы касательного пространства T_xM к M в x (так что спаривание $(h(x, f(t,.)), \nabla f(t,x))$ дает корректно определенную функцию на M). Таким образом, h можно рассматривать как векторное поле на M, зависящее от f как от параметра.

Зависимость h от f через некоторые интегралы, т.е.

$$h(x, f(t,.)) = h(x, \int_M r(y) f(t,y)\, dv(y)), \tag{8.57}$$

где r – некоторая ограниченная функция на M, типична для приложений.

Дробная версия уравнения (8.56) – это, конечно, уравнение

$$D^{\beta}_{a+*} f(t,x) = \Delta_{LB} f(t,x) + (h(x, f(t,.)), \nabla f(t,x)). \tag{8.58}$$

Следующие результаты являются прямым следствием Теорем 8.9, 8.10, 8.2 и 8.3.

Теорема 8.11 *(i) Пусть $H(x,p)$ – непрерывная функция на кокасательном расслоении T^*M компактного риманова многообразию (M,g) такая, что*

$$|H(x,p_1) - H(x,p_2)| \le L_H \|p_1 - p_2\|_x \tag{8.59}$$

для всех x с постоянной L_H. Тогда для любого $Y \in C^1(M)$ существуют единственное мягкое решение задачи Коши для уравнения (8.51) и единственное решение задачи Коши для уравнения (8.55) с начальным условием $f(0,.) = Y$. Эти решения являются непрерывными по Липшицу функциями от начальных данных в норме $C^1(M)$.

(ii) Пусть $h(x, f(t,.))$ – равномерно ограниченное и непрерывное векторное поле на M, липшиц-непрерывно зависящее от f в норме пространства $L_1(M)$:

$$\|h(x, f_1(t,.)) - h(x, f_2(t,.))\|_x \le L_h \|f_1(t,.) - f_2(t,.)\|_{L_1(M)}, \tag{8.60}$$

для всех $x \in M$ с константой L_h. Тогда для любого $Y \in W_1(M)$ существуют единственное мягкое решение задачи Коши для уравнения (8.56) и единственное решение задачи Коши для уравнения (8.58) с начальным условием $f(0,.) = Y$. Эти решения являются непрерывными по Липшицу функциями от начальных данных в норме пространства $W_1(M)$.

Дробные системы прямых и обратных уравнений на многообразиях

Проанализируем аналог системы (8.40) на многообразиях с генератором $A = \Delta_{LB}$:

$$\begin{cases} D^{\beta}_{a+*} b(t,x) = \Delta_{LB} b(t,x) + (h(t,x,b(t,.),u(t,x,\nabla f(t,x)))\nabla b(t,x), \quad b(a,.) = Y, \\ D^{\beta}_{T-*} f(t,x) = -\Delta_{LB} f(t,x) + H(t,x,\nabla f(t,x), b_{\ge t}), \quad f(T,.) = Z. \end{cases} \tag{8.61}$$

Следующий результат является следствием Теорем 8.8, 8.9 и 8.10.

Теорема 8.12 *Пусть U – компакт в евклидовом пространстве, а $u(t,x,p) \in U$ – непрерывная функция тройки $t \in \mathbf{R}$, $x \in M$, $p \in T^*M_x$, которая является липшиц-непрерывной по последнему аргументу:*

$$|u(t,x,p) - u(t,x,\tilde{p})| \leq L_u \|p - \tilde{p}\|_x. \tag{8.62}$$

Пусть $h : \mathbf{R} \times M \times L_1(M) \times U \to TM$ – непрерывное отображение такое, что $h(t,x,b(t,.),u) \in TM_x$ для всех x, f, u, которое является липшицевым в том смысле, что

$$\|h(t,x,b(t,.),u) - h(t,x,\tilde{b}(t,.),\tilde{u})\|_x \leq L_h \|b(t,.) - \tilde{b}(t,.)\|_{L_1(M)} + L_{hu}|u - \tilde{u}|. \tag{8.63}$$

Пусть $H(t,x,p,b_{\geq t})$ – непрерывная функция с аргументами $t \in \mathbf{R}, x \in M, p \in T^*M_x, b(.) \in C([a,T], L_1(M))$, которая липшицева в том смысле, что

$$|H(t,x,p,b_{\geq t}) - H(t,x,\tilde{p},b_{\geq t})| \leq L_H \|p - \tilde{p}\|_x, \tag{8.64}$$

$$|H(t,x,p,b_{\geq t}) - H(t,x,p,\tilde{b}_{\geq t})| \leq L_H \|b_{\geq t} - \tilde{b}_{\geq t}\|_{C([a,T],L_1(M))}(1 + \|p\|_x). \tag{8.65}$$

Тогда для всех Y, Z существует T_0 такое, что система прямого и обратного уравнений (8.61) *имеет единственное решение для всех $T \leq T_0$.*

9 Описание граней триангулиций на торе

Степень $d(x)$ вершины или грани x в графе G есть число инцидентных ребер. Грань $f = v_1 \dots v_{d(f)}$ плоском графе или торе G имеет тип $(k_1, k_2, \dots)$, если $d(v_i) \leq k_i$ для каждого i. Через δ обозначим минимальную вершинную степень графа/тора G.

В 1989 Бородин подтвердил гипотезу Коцига 1963 года о том, что каждый граф с минимальной степенью $\delta = 5$ содержит грань типа $(5, 5, 7)$ или $(5, 6, 6)$, где все параметры точны.

Из классической теоремы Лебега (1940) следует, что каждая плоская триангуляция с $\delta \geq 3$ содержит грань одного из типов: $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 11)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 4, 4, 5)$. Недавно мы улучшили этот результат следующим образом: "$(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 9)$, $(3, 3, 5, 6)$, $(3, 4, 4, 5)$", где все параметры, возможно исключая 9 являются неулучшаемыми, а 9 не может быть понижено ниже 8.

В 1995 Августинович и Бородин доказали, что каждая триангуляция тора с $\delta \geq 3$ содержит грань одного из следующих типов: $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 10)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 4, 4, 6)$, $(4, 4, 4, 4)$, где все параметры неулучшаемы.

Доказано, что любая триангуляция с минимальной степенью 5 на торе содержит грань, у которой степени инцидентных вершин мажорируются одной из троек (5,5,8), (5,6,7) или (6,6,6), причем ни один из параметров этого описания не допускает улучшения. Даны конструкции, доказывающие точность описания.

10 О численных методах решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

Сущность нашего подхода решения общих бесконечных систем заключается в следующем. Предполагается, что бесконечная матрица A системы

$$\left.\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n + ... = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n + ... = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n + ... = b_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}, \tag{10.1}$$

имеет бесконечный ранг, для этого достаточно, чтобы ее бесконечный определитель был отличен от нуля [86]. В этом случае при определенных дополнительных условиях матрица A системы (10.1) разлагается в виде произведения нижней треугольной матрицы B на верхнюю треугольную матрицу C, т. е. $A = BC$ [87], причем, элементы главных диагоналей этих матриц отличны от нуля. Если принять элементы главной диагонали матрицы B равным единице, то получим обобщение алгоритма Гаусса для бесконечных систем [87]. Следовательно, решение общей бесконечной системы (10.1) сводится к эквивалентной, так называемой *гауссовой системе*:

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_{j,j+p}x_{j+p} = f_j, \quad j = 1, 2, 3, ... , \tag{10.2}$$

где $c_{j,j+p}$ – элементы матрицы C, а f_j – элементы матрицы $B^{-1}b$, b – столбец свободных членов системы (10.1).

Отметим, что если все элементы главных диагоналей нижней и верхней треугольных бесконечных матриц отличны от нуля, то эти матрицы нами называются просто *треугольной* и *гауссовой матрицами* соответственно. Если бесконечная система имеет гауссову матрицу, то говорят, что система задана в *гауссовой форме* или просто она называется *гауссовой системой.*

Систему (10.2) решаем методом простой редукции, т. е. оставляем n уравнений с n неизвестными. Затем аналитически точно решаем урезанную систему, причем решение записано в единой записи, независимо от порядка n урезанной системы. Если это решение в пределе при $n \to \infty$ стремится к решению гауссовой системы (10.2), то получим, так называемое, *строго частное решение* системы (10.1). Единственность решения системы (10.1) устанавливается ис-

следованием гауссовой системы (10.2) в однородном случае ($f_j = 0$). Так как в этом случае метод простой индукции дает только тривиальное решение, то применяем метод редукции в широком смысле, т. е. оставляем $n-1$ уравнений с n неизвестными. Таким образом, полагаем, что каждая усеченная система имеет определитель равный нулю, т. е. для каждого n $|A'_n| = 0$, где A'_n матрица урезанной системы. Особенность в данном случае заключается в том, что бесконечный определитель системы $|A| \neq 0$ [88]. Строго частное решение системы (10.1) – это ее точное аналитическое решение, если оно существует, записанное в виде ряда. Как ряд, это решение может сходится очень быстро или наоборот – очень медленно. В последнем случае необходимо попытаться решить исходную бесконечную систему другим методом, например, методом Гаусса-Жордана. Данная работа посвящена обобщению метода Гаусса-Жордана на бесконечные системы.

Примеры решения бесконечных систем

Пример 1. Рассмотрим следующую бесконечную систему, приведенную в работе [89] как пример приближенного решения регулярной системы с помощью лимитант:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{(2j+1-2i)(2j-1-2i)} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., \tag{10.3}$$

где $b_1 = -1, b_j = 0, j = 2, 3, ...$

Как показано в [89] система, (10.3) является регулярной и потому имеет главное решение, которое можно найти методом последовательных приближений, исходя из нулевых начальных значений. Но в [86] показано, что главное решение, если оно существует, является строго частным решением, которое можно найти методом простой редукции, решая каждую усеченную систему аналитически точно.

В [89] приведена только приближенная оценка компонентов решения системы (10.3), полученная методом лимитант:

$$1.211 \leq x_1 \leq 1.331; \quad 0.538 \leq x_2 \leq 0.726 \quad 0.346 \leq x_3 \leq 0.592;$$

$$0.231 \leq x_4 \leq 0.534; \quad 0.135 \leq x_5 \leq 0.506; \quad 0 \leq x_i \leq 0.492\,(i = 6, 7, ...).$$

На самом деле, система (10.3) относится к особым бесконечным системам, так *называемым квазиоднородным бесконечным системам*, начало исследования которых, заложено в [90].

В системе (10.3) только одно уравнение, а именно, первое уравнение является неоднородным, а остальные составляют однородную бесконечную систему. Но, известно [91, 92], что однородная бесконечная система может иметь нетривиальные решения, даже если ее бесконечный определитель отличен от нуля. Это обстоятельство и является спецификой этой системы. В [90] было замечено, что ряд (2.7) сходится сравнительно медленно в силу своей особенности, тем самым, показывая, что метод простой редукции сходится медленно. Вместе с тем, появилась возможность решать данную систему (10.3) различными способами и сравнить их, что и сделано.

Эта возможность связана с алгоритмом, описанным в разделах 3 и 4. Действительно, любой сходящийся метод решения укороченной системы можно модифицировать для решения бесконечных систем, аналогично разделу 4, т.е. – обобщению модифицированного метода Гаусса-Жордана на бесконечные системы.

Бесконечную систему (10.3) будем решать пятью способами: 1) методом последовательных приближений; 2) итерационным методом Зейделя; 3) точным аналитическим методом Гаусса (строго частное решение);4) методом Гаусса-Жордана; 5) методом, использующим нетривиальное решение соответствующей однородной бесконечной системы.

п.1. Метод последовательных приближений. Как уже упомянуто, система (10.3) – регулярна и потому имеет решение, т.е. она – совместна и к этому решению сходится метод последовательных приближений [89]. Данная система решается как общая бесконечная система, не используя ее регулярности, причем, применяя метод последовательных приближений. Знание регулярности системы существенно упрощает процесс счета, поскольку редукция сходится, причем сходится именно к решению регулярной системы. В нашем случае необходимо следить за процессом сходимости редукции, а также следить за сходимостью редуцированных решений к решению исходной бесконечной системы.

Решим систему (10.3) методом последовательных приближений при заданных ε, следя за неравенством $|\overset{n+1}{x}_j - \overset{n}{x}_j \leq \varepsilon|$, выполнение которых гарантирует сходимость метода редукции. В противном случае исходная бесконечная система не имеет решения. Следя за невязкой, как это описано в разделах 3 или 4, получаем ее приближенное решение или показываем, что она не имеет решения.

Результаты расчетов первых десяти, двадцати и тридцати решений методом последовательных приближений для различных ε приведены в таблице 1.

Три вида решений для каждой заданной точности в таблице 1 указывает применение

Таблица 1 – Результаты расчетов методом последовательных приближений

ε	x_0	x_1	...	x_9	...	x_{19}	...	x_{29}
10^{-5}	1.27227	0.63516	...	0.23269	...		...	
10^{-5}	1.27243	0.63540	...	0.23326	...	0.15958	...	
10^{-5}	1.27251	0.63553	...	0.23357	...	0.16003	...	0.12827
10^{-6}	1.27294	0.63616	...	0.22321	...		...	
10^{-6}	1.27298	0.63624	...	0.23524	...	0.16243	...	
10^{-6}	1.27301	0.63628	...	0.23534	...	0.16257	...	0.13140
10^{-7}	1.27314	0.63648	...	0.23581	...		...	
10^{-7}	1.27316	0.63650	...	0.23587	...	0.16332	...	
10^{-7}	1.27317	0.63651	...	0.23589	...	0.16336	...	0.13237

редукции до выполнения заданной точности редукции для получения первых n решений. Например, для точности $\varepsilon = 10^{-5}$ при получении первых десяти решений ($n = 10$) потребовалось 3360 уравнений и 101 итераций для последней системы, время счета 8104 сек.; эти данные для различных ε соответственно имеют значение: $\varepsilon = 10^{-6}$ – 4007 ур. и 89 итераций, время счета 12078 сек.; $\varepsilon = 10^{-7}$ – 4448 ур. и 83 итераций; время счета 14849 сек.

Таблица показывает, что редукция, как и ожидалось, сходится медленно. Время счета указывает на то, что сам метод последовательных приближений также сходится очень медленно, практически сведя его эффективность к нулю. Заметим, что по причине медленной сходимости редукции и особенно самого метода последовательных приближений авторы [89] в то время не могли получить решение системы (10.3). Поэтому, по видимому, они прибегли к методу лимитант. В таблице 2 приведены невязки первого уравнения для первых десяти, двадцати и тридцати решений. Отсюда видно, что невязка стремится к нулю, т.е., приведенные в таблице 1 числа составляют приближенное решение системы (10.3).

Таблица 2 – Невязки первого уравнения методом последовательных приближений

n	10	20	30
10^{-5}	-0.0039	-0.0013	-0.0007
10^{-6}	-0.0040	-0.0014	-0.0007
10^{-7}	-0.0040	-0.0014	-0.0007

п.2. Итерационный метод Зейделя. Поскольку система (10.3) – совместна, то по теореме 6 она имеет строго частное решение. Следовательно, применяя метод простой редукции и решая усеченную систему любым сходящимся методом, например, методом Зейделя, получается решение системы (10.3).

Результаты расчетов первых десяти, двадцати и тридцати решений методом Зейделя для различных ε даны в следующей таблице 3, невязка для первого уравнения – в таблице 4,

которые показывают, что получено приближенное решение с достаточной точности.

Таблица 3 – Результаты расчетов методом Зейделя

ε	x_0	x_1	...	x_9	...	x_{19}	...	x_{29}
10^{-5}	1.27231	0.63522	...	0.23283	...		...	
10^{-5}	1.27245	0.63544	...	0.23336	...	0.15973	...	
10^{-5}	1.27253	0.63556	...	0.23364	...	0.16013	...	0.12839
10^{-6}	1.27294	0.63617	...	0.22324	...		...	
10^{-6}	1.27299	0.63625	...	0.23527	...	0.16246	...	
10^{-6}	1.27301	0.63628	...	0.23535	...	0.16258	...	0.13142
10^{-7}	1.27315	0.63648	...	0.22400	...		...	
10^{-7}	1.27316	0.63650	...	0.23587	...	0.16332	...	
10^{-7}	1.27317	0.63651	...	0.23589	...	0.16336	...	0.13238

Для точности $\varepsilon = 10^{-5}$ и $n = 10$ (десяти решений) потребовалось 3441 уравнений и 81 итераций для последней системы, время счета 8163 сек.; эти же данные для других случаев: $\varepsilon = 10^{-6}$ – 4059 ур. и 73 итераций, время счета 12100 сек. и для $\varepsilon = 10^{-7}$ – 4450 ур. и 68 итераций; время счета 15047 сек.

Таблица 4 – Невязка для первого уравнения методом Зейделя

n	10	20	30
10^{-5}	-0.0033	-0.0012	-0.0006
10^{-6}	-0.0034	-0.0013	-0.0007
10^{-7}	-0.0035	-0.0013	-0.0007

п.3. Точный аналитический метод Гаусса (строго частное решение)Результаты расчетов первых десяти, двадцати и тридцати решений строго частных решений для различных ε даны в таблице 5, а невязка для первого уравнения – в таблице 6. Они показывают, что получено приемлемое решение.

Таблица 5 – Результаты расчетов аналитическим методом Гаусса (строго частное решение)

ε	x_0	x_1	...	x_9	...	x_{19}	...	x_{29}
10^{-5}	1.27146	0.63440	...	0.23252	...	0.15919	...	0.12763
10^{-6}	1.27268	0.63592	...	0.23504	...	0.16236	...	0.13129
10^{-7}	1.27306	0.63640	...	0.23580	...	0.16330	...	0.13235

Для $\varepsilon = 10^{-5}$, $n = 10$ потребовалось 327 уравнений, время счета <1 сек.; для $\varepsilon = 10^{-6}$ – 1055, время счета 5 сек.; для $\varepsilon = 10^{-7}$ – 3376; время счета 146 сек.

Таблица 6 – Невязка для первого уравнения аналитическим методом Гаусса (строго частное решение)

n	10	20	30
10^{-5}	-0.0029	-0.0007	-0.0001
10^{-6}	-0.0033	-0.0011	-0.0005
10^{-7}	-0.0034	-0.0012	-0.0007

п.4. Метод Гаусса-Жордана. Результаты расчетов первых десяти, двадцати и тридцати решений методом Гаусса-Жордана для различных ε и невязка даны в таблицах 7 и 8, которые показывают, что получено приближенное решение с достаточной точностью.

Таблица 7 – Результаты расчетов методом Гаусса-Жордана

ε	x_0	x_1	...	x_9	...	x_{19}	...	x_{29}
10^{-5}	1.27146	0.63445	...	0.23281	...	0.15973	...	0.12841
10^{-6}	1.27268	0.63593	...	0.23509	...	0.16246	...	0.13142
10^{-7}	1.27306	0.63640	...	0.23581	...	0.16332	...	0.13238

Для $\varepsilon = 10^{-5}$, $n = 10$ потребовался 337 уравнений, время счета <1 сек.; для $\varepsilon = 10^{-6}$ – 1061, время счета 4 сек.; для $\varepsilon = 10^{-7}$ – (1784) 3351 время счета 159 сек.

Таблица 8 – Невязка для первого уравнения методом Гаусса-Жордана

n	10	20	30
10^{-5}	-0.0034	-0.0008	-0.0001
10^{-6}	-0.0038	-0.0012	-0.0006
10^{-7}	-0.0040	-0.0013	-0.0007

п.5. Метод, использующий нетривиальное решение. Решение задачи найдём в два этапа. На первом этапе решаем однородную систему, полученную отбрасыванием первого уравнения. Результаты расчетов первых тридцати нетривиальных решений однородной системы для $n = 3297$ даны в следующей таблице 9:

Таблица 9 – Результаты расчетов первых тридцати нетривиальных решений ОС

x_0	x_1	x_2	...	x_9	...	x_{19}	...	x_{29}
1.00000	0.49992	0.37489	...	0.18522	...	0.12821	...	0.10386

На втором этапе решаем неоднородную систему (10.3), подставляя решение полученной однородной системы (таблица 9) в левую часть первого уравнения исходной системы и разделяя решения однородной системы на его значение (таблица 9). Результаты расчета приведены в таблице 10.

Таблица 10 – Результаты расчетов методом нетривиальных решений

x_0	x_1	x_2	...	x_9	...	x_{19}	...	x_{29}
1.27314	0.63647	0.47728	...	0.23581	...	0.16324	...	0.13222

В таблице 11 даны сравнение всех пяти методов для $\varepsilon = 10^{-7}$. Из таблицы видно, что результаты расчетов практически совпадают, но время расчетов значительно разнятся.

Таблица 11 – Сравнение результатов расчета

Метод	x_0	x_1	...	x_9	...	x_{19}	...	x_{29}	t, сек.
МПП	1.27317	0.63651	...	0.23589	...	0.16336	...	0.13237	14849
МЗ	1.27317	0.63651	...	0.23589	...	0.16336	...	0.13238	15047
СЧР	1.27306	0.63640	...	0.23580	...	0.16330	...	0.13235	146
МГЖ	1.27306	0.63640	...	0.23581	...	0.16332	...	0.13238	159
МНР	1.27314	0.63617	...	0.23581	...	0.16321	...	0.13222	247

В таблице 11 в первой строке приведены результаты метода последовательных приближений; во 2 – метод Зейделя; 3 – строго частное решение; 4 – метод Гаусса-Жордана; 5 – метод нетривиальных решений.

Основной целью данной работы является демонстрация принципиальной возможности обобщения численных методов решения на бесконечные системы. Но это обобщение предусматривает применение простой редукции.А данное обстоятельство в свою очередь значительно увеличивает время счета, особенно для итерационного метода, что и показывают приведенные выше расчеты. Чтобы адекватно оценить качество и время счета по предложенным методам проведены решения при одинаковых условиях с равным порядком системы и с одинаковой точностью.

Сначала методом Гаусса-Жордана решаем исходную бесконечную систему (10.3) по алгоритму, описанному в разделе 4 с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ с тем, чтобы получить максимальный порядок редукции. Для получения первых десяти решений с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ редукции, потребовалось 3351 уравнений и время счета составило 126 сек. Исходную систему (10.3) с порядком 3351 решаем методами последовательных приближений и Зейделя. Методом строго частного решения решаем исходную бесконечную систему (10.3) по алгоритму, описанному в разделе 3 с той же точностью, что и для метода Гаусса-Жордана.

Результаты расчетов первых тридцати решений методами Гаусса-Жордана (Г-Ж), строго частного решения (СЧР), последовательных приближений (МПП) и метода Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ приведены в таблице 12. Результаты методов последовательных приближений и Зейделя совпали.

Таблица 12 – Результаты расчетов первых тридцати решений

	x_0	x_1	x_2	...	x_9	...	x_{19}	...	x_{29}
МГЖ	1.27306	0.63640	0.47722	...	0.23581	...	0.16332	...	0.13238
СЧР	1.27306	0.63640	0.47722	...	0.23580	...	0.16330	...	0.13235
МПП	1.27314	0.63647	0.47728	...	0.34791	...	0.16322	...	0.13221

Для вычисления строго частного решения потребовалось 3297 уравнений и время счета составило 169 сек. Для метода простой итерации с 3351 уравнениями потребовалось 8529 итераций, а времени счета – 564 сек., а для метода Зейделя с таким же порядком системы 3351 потребовалось 4898 итераций и времени счета – 463 сек., хотя, как указано выше, результаты расчетов совпали. Необходимо заметить, что методами СЧР и Г-Ж использовались алгоритмы разделов 3 и 4, а методами МПП и МЗ решалась система с конкретным порядком 3351 время счетов все равно значительно расходится.

Пример 3. Рассмотрим мультипликативную бесконечную систему уравнений из примера работы [93]:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= (x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + ...) + \frac{1}{2}, \\
x_1 &= \frac{1}{2}(x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + ...) + \frac{1}{3}, \\
x_2 &= \frac{1}{3}(x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + ...) + \frac{1}{4}, \\
&.....
\end{aligned}
$$

Точное решение данной системы имеет вид [93]:

$$x_j = \frac{6}{(6-\pi^2)(j+1)} + \frac{1}{j+2}.$$

Результаты расчетов первых десяти неизвестных при помощи получения строго частного решения и метода Гаусса-Жордана совпали. Сравнение с точным решением дано в следующей таблице 13

Таблица 13 – Сравнение результатов расчета с точным решением

	x_0	x_1	x_2	x_4	x_5	...	x_9
МГЖ	-1.05084	-0.44215	-0.18778	-0.14357	-0.11569	...	-0.06424
СЧР	-1.05055	-0.44194	-0.18764	-0.14344	-0.11557	...	-0.06415

Пример 4. Рассмотрим систему уравнений из примера работы [94] с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & . \\ 1 & 2^2 & 1 & 0 & . \\ 0 & 1 & 2^3 & 1 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

а за правую часть примем неограниченную последовательность:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \\ . \end{pmatrix}$$

В работе [94] при некоторых ограничительных условиях (матрица системы строго доминирующий, а правая часть ограничена в совокупности) найдены достаточные условия, гарантирующие существование и единственность ограниченного решения. Вместе с тем, не указано, как решать такие бесконечные системы. В данной работе сделана попытка решить данную систему, изложенными выше методами.

Результаты расчетов первых десяти неизвестных методом строго частного решения, методом Гаусса-Жордана, методом последовательных приближений и методом Зейделя совпали. Для расчетов была принята точность $\varepsilon = 10^{-7}$ (таблица 14).

Таблица 14 – Результаты расчетов первых десяти неизвестных при различных значениях b

b	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...	x_9
0,9	0.45502	0.08996	0.08512	0.03905	0.01901	0.00887	...	0.00038
1	0.44344	0.11312	0.10409	0.05418	0.02909	0.01505	...	0.00097
1.1	0.43217	0.13566	0.12521	0.07269	0.04272	0.02428	...	0.00230

Полное совпадение результатов для различных методов гарантирует, что приведенные в таблице результаты являются приближенными решениями исходной бесконечной системы с заданной точностью.

Все расчеты проводились на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q9400 @2.66GHz.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в рамках проекта результаты имеют теоретический характер и расширяют класс ранее изученных краевых задач для нелинейных неклассических уравнений. Исследуемые в рамках проекта задачи и результаты являются принципиально новыми. Выводы и положения основываются на строгих математических доказательствах. Для исследования поставленных краевых задачи были использованы методы: современные методы теории дифференциальных уравнений, теории полугрупп линейных операторов, функционального анализа, вариационного исчисления, перераспределения эйлеровых вкладов, алгебры, а также разработанные авторами подходы и методы.

Правильность выбора методов и подходов в исследованиях подтверждается полученными новыми результатами и улучшениями существующих результатов.

1. Доказаны теоремы о сходимости решений задач, описывающих равновесие упругих пластин с соединенными плоскими жесткими включениями, к решению задачи для пластины с соединенными жесткими объемными включениями при стремлении коэффициента жесткости к бесконечности.

2. Доказана теорема о разрешимости задачи оптимального управления для двумерной модели композитного тела, в которой управление задается количеством тонких жестких тонких прямолинейных отрезков.

3. Доказана теорема о разрешимости задачи оптимального управления координатами точки шарнирного соединения включений в рамках модели пластины Тимошенко с тонкими жесткими включениями.

4. Обоснована возможность предельного перехода по параметру жесткости упругого включения в задаче о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, с тонким жестким и упругим включением.

5. Доказана однозначная разрешимость краевой задачи на полуоси для системы дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и постоянными коэффициентами в классе ограниченных функций. Получены условия типа Лопатинского для граничных матриц, при которых краевая задача будет однозначно разрешима в классе ограниченных и абсолютно непрерывных вектор-функций.

6. Доказаны теоремы регулярной разрешимости двух краевых задач для уравнения вы-

сокого порядка соболевского типа с меняющимся направлением времени. Для обеих задач получена оценка сходимости приближенных решений.

7. Доказаны теоремы разрешимости двух краевых задач с интегральным граничным условием для вырождающегося уравнения четного порядка. Доказательство основано на сведении к соответствующим задачам с локальными граничными условиями для интегрально-дифференциального уравнения. Разрешимость полученных вспомогательных краевых задач доказывается методом последовательных приближений. Получены оценки сходимости приближенных решений к точным.

8. Доказано, что любая триангуляция с минимальной степенью 5 на торе содержит грань, у которой степени инцидентных вершин мажорируются одной из троек (5,5,8), (5,6,7) или (6,6,6), причем ни один из параметров этого описания не допускает улучшения..

9. Построена абстрактная модель для системы спаренных прямых и обратных уравнений и их дробных аналогов, рассматривая эти уравнения как развивающиеся в дуальных банаховых тройках. Доказана локальная корректность для дробной системы спаренных прямых и обратных уравнений, состоящей из прямого уравнения Маккина-Власова и обратного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для $t \in [a, T]$.

10. Доказана корректность в классе мягких решений для нелинейных дробных уравнений Маккина-Власова и дробных уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана на многообразиях, а также для дробной системы спаренных прямых и обратных уравнений на многообразиях.

11. Разработан численный метод решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Сперва формально обобщен метод Гаусса-Жордана на бесконечные системы. Показано, что на основе такого алгоритма можно формально обобщить и другие численные методы, например, метод последовательных приближений или итерационный метод Зейделя. Затем на примерах конкретных совместных бесконечных систем проверена работоспособность указанных методов. Дается численное сравнение этих методов.

Полученные в рамках данного проекта результаты будут использованы для развития дальнейших исследований и внесут существенный вклад в развитие теории неклассических уравнений с частными производными, в разработке теории бесконечных алгебраических систем, теории графов.

Результаты могут быть применены для исследования математических моделей в статистических и динамических задачах теории упругости твердых тел, вязкоупругости, элек-

тродинамики, физики полупроводников, механики полимеров и других процессов современной физики, а также в развитии теории дробных игр среднего поля.

Результаты, полученные в области теории графов, будут использованы для получения новых структурных свойств разреженных плоских графов.

Результаты НИР по данной проблематике используются в образовательном процессе ФГАОУ ВО “Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.Аммосова” (СВФУ): в подготовке и защите выпускных квалификационных работ студентов, магистрантов, а также кандидатских диссертаций аспирантов по научной специальности 1.1.2 - дифференциальные уравнения и математическая физика.

По результатам НИР опубликованы и приняты к опубликованию 12 научных статей, в т.ч. индексированы в Web of Science - 7, в SCOPUS - 8. Сделаны 7 научных докладов на международных конференциях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Vragov V.N., Kozhanov A.I., Pyatkov S.G. and Glazatov S.N. On the theory of nonclassical equations of mathematical physics // Conditionally well-posed problems. Moscow, Utrecht: TVP/TSP. 1993. P.299-321.

2 Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.

3 Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

4 Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

5 Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. - Utrecht - Boston - Köln - Tokyo: VSP, 2003.

6 Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP. Utrecht, 1999.

7 Demidenko G. V., Upsenskii S. V. Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative. New York: CRC Press. 2003 .

8 Khludnev A.M., Kovtunenko V.A. Analysis of Cracks in solids. Boston; Southampton: WIT-Press, 2000.

9 Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

10 Khludnev A., Esposito A. C., Faella L. Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions // J. Optim. Theory Appl. 2020. V. 184, N. 1. P. 293–314.

11 Lazarev N. Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff-Love plate with two hinged rigid inclusions // Bound. Value Probl. 2021, V. 2021, N. 1, 88.

12 Khludnev A. M., Kovtunenko V. A. Analysis of cracks in solids. WIT-Press, Southampton, Boston, 2000.

13 Faella L., Khludnev A. Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies // Math. Method. Appl. Sci. 2016. V. 39, N. 12. P. 3381–3390.

14 Khludnev A.M., Faella L., Popova T.S.Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N. 4, P. 737–750.

15 Shcherbakov V.V. Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N. 3. N 71.

16 Itou H., Kovtunenko V. A., Rajagopal K. R. Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration // Math. Mech. Solids 2017. V. 22, N. 6. P. 1334–1346.

17 Lazarev N. P., Rudoy E. M. Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge // Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97, N. 9. P. 1120–1127.

18 Khludnev A. M. Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate // Mechanics of Solids 2010. V. 45, N. 5. P. 733–742.

19 Khludnev A.M. On bending an elastic plate with a delaminated thin rigid inclusion // J. Appl. Indust. Math. 2011. V. 5, N. 4. P. 582–594.

20 Khludnev A. Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates // European Journal of Mechanics - A/Solids. 2012. V. 32, P. 69–75.

21 Rudoy E. M. Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body // Angew. Math. Phys. 2015. V. 66, N. 4. P. 1923–1937.

22 Неустроева Н.В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. XII, N 4 (40). С.92-105.

23 Lazarev N. Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff-Love plate // Bound. Value Probl. 2015. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0437-y.

24 Khludnev A.M., Shcherbakov V.V. Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler-Bernoulli inclusions // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N. 11. P. 2180–2195.

25 Lazarev N.P., Semenova G.M., Romanova N.A. On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate with a crack // Journal of Siberian Federal University - Mathematics and Physics 2021. V. 14, N. 1. P. 28–41.

26 Kazarinov N.A., Rudoy E.M., Slesarenko V.Y., Shcherbakov V.V. Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion // Computational Mathematics and Mathematical Physics 2018. V. 58, N. 5. P. 761–774.

27 Rudoy E.M., Lazarev N.P. Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018 V. 334, P. 18–26.

28 Khludnev A., Leugering G. On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // Math. Method. Appl. Sci. 2010. V. 33, N. 16. P. 1955–1967.

29 Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, N. 9. P. 716–730.

30 Lazarev N. P., Rudoy E. M. Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge // Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97, N. 9. P. 1120–1127.

31 Khludnev A.M. Inverse problems for elastic body with closely located thin inclusions // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019. V. 70, N. 5. art. no. 134.

32 Leugering G., Sokolowski J., Zochowski A. Control of crack propagation by shape-topological optimization // Discret. Contin. Dyn. S - Series A. 2015. V. 35, N. 6. P. 2625–2657.

33 Kovtunenko V. A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model // SIAM J. Control Optim. 2016. V. 54, N. 3. P. 1329–1351.

34 Lazarev N. P., Popova T. S., Rogerson G. A. Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2018. V. 69, N. 3. 53 https://doi.org/10.1007/s00033-018-0949-2 .

35 Lazarev N., Everstov V. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2019. V. 99, N. 3. e201800268.

36 Lazarev N., Romanova N., Semenova G. Optimal location of a thin rigid inclusion for a problem describing equilibrium of a composite Timoshenko plate with a crack // Journal of Inequalities and Applications. 2020. V. 2020, N. 1. art. no 29.

37 Rudoy E.M., Shcherbakov V.V. First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // Applied Mathematics and Optimization 2021. V. 84, P. 2775–2802.

38 Khludnev A.M., Itou H. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2016. V. 39, N. 17. P. 4980–4993.

39 Lazarev N. P., Itou H., Neustroeva N. V. Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle // Jpn. J. Ind. Appl. Math. 2016. V. 33, N. 1. P. 63–80.

40 Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наукова думка, 1973.

41 Lazarev N.P. An iterative penalty method for a nonlinear problem of equilibrium of a Timoshenko-type plate with a crack // Numerical Analysis and Applications 2011. V. 4, N. 4. P. 309–318.

42 Lazarev N., Semenova G., Romanova N. Problem of the optimal amount of rigid thin segments for an equilibrium model of a two-dimensional body with a crack // Journal of Mathematical Control Science and Applications 2021. V. 7, N.1 P. 1120–1127.

43 Dal Corso F., Bigoni D., Gei M. The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part I. Full-field solution and asymptotics // J. Mech. Phys. Solids. 2008. V. 56, N. 3. P. 815–838.

44 Il'ina I. I., Sil'vestrov V. V. The problem of a thin interfacial inclusion detached from the medium along one side // Mech. Solids. 2005. V. 40, N. 3. P. 123–133.

45 Rudoy E.M. The Griffith formula and Cherepanov-Rice integral for a plate with a rigid inclusion and a crack // J. Math. Sci. 2012. V. 186, N. 3. P. 511–529.

46 Khludnev A. M. Elasticity problems in nonsmooth domains. Fizmatlit, Moscow, 2010.

47 Lazarev N.P. Equilibrium problem for a Timoshenko plate with an oblique crack // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2013. V. 54, P. 662–671.

48 Popova T., Rogerson G. A. On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material. // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N. 4, N 105.

49 Khludnev A.M., Novotny A.A., Sokołowski J., Zochowski A. Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions // J. Mech. Phys. Solids. 2009. V. 57, N. 10. P. 1718–1732.

50 Khludnev A. M., Leugering G. R. On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20, N. 5. P. 495–511.

51 Khludnev A.M. Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies // Arch. Appl. Mech. 2013. V. 83. N. 10. P. 1493–1509.

52 Khludnev A., Negri M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, N. 5. P. 341–354.

53 Khludnev A. M., Popova T. S. Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Q. Appl. Math. 2016. V. 74, N. 4. P. 705–718.

54 Lazarev N., Semenova G. On the connection between two equilibrium problems for cracked bodies in the cases of thin and volume rigid inclusions // Boundary Value Problems 2019. N. 1, *N* 87.

55 Khludnev A.M. Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions // Eur. J. Mech. A. Solids. 2010. V. 29, N. 3. P. 392–399.

56 Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.

57 Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго–пластического разрушения. М.: Наука, 1974.

58 Lazarev N. P. Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack. // Z. Angew. Math. Mech. 2016 V. 96, N. 4. P. 509–518.

59 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

60 Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

61 Oldham K.B. and Spanier J. The Fractional Calculus, Academic Press, New York, NY, USA, 1974.

62 Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987.

63 Podlubny I. Fractional Differential Equations, Academic press, San Diego, (1999).

64 Мамчуев М.О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с част-ными производными дробного порядка. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН,2013. – 200 с.

65 Caputo, M. 1966. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Annali Geofis., 19, 383–393.

66 Марзан С.А. Нелинейное дифференциальное уравнение дробного порядка с дробной производной Капуто в пространстве непрерывных функций // Труды Института Математики НАН Беларуси. Минск. 2004. Т.12 №2. С.99-103.

67 Kilbas A.A., Marzan S.A. (2004). Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative. Fractional Calculus and Applied Analysis (FCAA).

68 Kilbas A.A. New trends on fractional integral and differential equations, Труды геометрического семинара, Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 147, no. 1, Kazan University, Kazan, 2005, 72–106.

69 Gomoyunov, M.I. (2020). On representation formulas for solutions of linear differential equations with Caputo fractional derivatives. Fractional Calculus and Applied Analysis, 23(4), 1141-1160.

70 Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / И. Г. Петровский ; под редакцией А. Д. Мышкиса, О. А. Олейник. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 208 с.

71 Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.

72 Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970. 720 с.

73 Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

74 Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. - Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН. - 1995. - С. 3-133.

75 Чуешев А.В. Разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: НГУ, 2001.

76 Егоров И.Е., Ефимова Е.С. Краевая задача для уравнения третьего порядка, не разрешенного относительно старшей производной// Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 4. С. 28-36. DOI.10.25587/SVFU.2018.4.11314.

77 Fedorov V.E., Efimova E.S. Nonlocal boundary value problems for a third order equation of a composite type // AIP Conference Proceedings. Proceedings of the 9-th International Conference on Mathematical Modeling: Dedicated to the 75th Anniversary of Professor V.N. Vragov (ICMM 2020) **2328**, 020009 (2021).

78 Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешано-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. - Новосибирск: Наука, 1978. С. 5-13.

79 Fedorov V.E. Estimate of convergence rate of the Galerkin method for a nonclassical equation of mathematical physics // AIP Conference Proceedings. **2041**, 050007 (2018).

80 Kolokoltsov V. N., Troeva M. Abstract McKean Vlasov and Hamilton Jacobi Bellman Equations, Their Fractional Versions and Related Forward Backward Systems on Riemannian Manifolds. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2021, vol. 315, pp. 118—139.

81 Kolokoltsov V. N. Differential Equations on Measures and Functional Spaces. Birkhauser, Cham, Switzerland, 2019.

82 Applebaum D., Brockway R.Sh. L_2 properties of Lévy generators on compact Riemannian manifolds. J. Theor Probab., 2020. arXiv:1907.11123v2 [math.PR].

83 Grigor'yan A. Heat Kernel and Analysis on Manifolds. AMS/IP studies in Advanced Mathematics 47, AMS, Providence, 2009. .

84 Davies E.B. Pointwise bounds on the space and time derivatives of the heat kernels. J. Operator Theory, 1989, vol. 21, pp. 367–378.

85 Kolokoltsov V. N., Veretennikova M. Fractional Hamilton Jacobi Bellman equations for scaled limits of controlled Continuous Time Random Walks. Communications in Applied and Industrial Mathematics, 2014, vol. 6 (1), e-484.

86 Каган В. Ф. Основания теории определителей. – Киев: Гос. изд-во Украины, 1922.

87 Федоров Ф. М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, вып. 1. – С. 133-140.

88 Папков С. О. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы // Динамические системы. – 2010. – Вып. 28. – С. 89-98.

89 Л. В. Канторович, В. И. Крылов Приближенные методы высшего анализа. – М.: ГИТТЛ, 1952.

90 Fedorov F.M., Pavlov N.N., Ivanova O.F. and Potapova S.V. Quasihomogeneous Infinite Systems of Linear Algebraic Equations//IOP Conf. Series: Journal of Physics:Conf. Series 1141(2018) 012105 doi:10.1088/1742-6596/1141/1/012105 .

91 Фельд Я.Н. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах // Докл. АН СССР, 1955. Т. 102, № 2. С. 257–260.

92 Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских ленточных решетках // Журн. техн. физики, 1962, 32, № 4. С. 381-394.

93 Круковский Б.В. Исследования системы линейных урвнений с бесконечным числом неизвестных специального вида // Тр. Технол. ин-та силикатов. Киев. 1951. № 3. С. 238-257.

94 Shivakumar P.N., Wong R. Linear equations in infinite matrices // Linear Algebra and its Applicftions. 1973. V.7, pp. 53-62.