

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.К.АММОСОВА
(СВФУ)

УДК – 517.956, 519.833, 519.217
Per N НИОКТР АААА-А20-120050790005-9
Per N ИКРБС И223013000010-6

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор СВФУ
д-р биол. наук,
_____ А.Н. Николаев
«___» _____ 2023 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ
(заключительный)
№ FSRG-2020-0006

Руководитель НИР,
гл. научн. сотр., д-р физ.-мат. наук

подпись, дата

Н.П.Лазарев

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР, гл. научн. сотр., д-р физ.-мат. наук	_____	Н.П. Лазарев (введение, разделы 1–5, заключение)
	подпись, дата	
Исполнители темы		
Гл. научн. сотр.-директор, д-р физ.-мат. наук	_____	И.Е. Егоров (раздел 7)
	подпись, дата	
Вед. научн. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	М.С. Троева (введение, раздел 10, заключение)
	подпись, дата	
Вед. научн. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	В.Е. Федоров (раздел 8)
	подпись, дата	
Вед. научн. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	А.О. Иванова (введение, раздел 11, заключение)
	подпись, дата	
Ст. научн. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	С.В. Потапова (введение, раздел 12, заключение)
	подпись, дата	
Ст. научн. сотр., канд. физ.-мат. наук	_____	Е.С. Ефимова (раздел 7)
	подпись, дата	
Мл. научн. сотр.	_____	Н.А. Николаева (раздел 6)
	подпись, дата	
Мл. научн. сотр.	_____	А.И. Григорьева (раздел 9)
	подпись, дата	
Мл. научн. сотр.	_____	С.Д. Верховцев (раздел 5)
	подпись, дата	
Нормоконтролер	_____	Ф.С. Андросова
	подпись, дата	

РЕФЕРАТ

Отчет 77 с., 6 рис., 0 табл., 72 источника, 0 прил.

УСЛОВИЕ НЕПРОНИКАНИЯ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО, НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ГРАФЫ, СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА, ПРОИЗВОДНАЯ КАПУТО, ДРОБНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ЧАСТИЦЫ, ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА, СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ, АЛГОРИТМ ГАУССА-ЖОРДАНА, БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Объектом исследования являются неклассические краевые задачи для уравнений математической физики, нелинейные задачи для моделей композитных тел с трещинами; дробные кинетические уравнения; графы; бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

Целью работы: получение новых результатов в области краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений; развитие общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений; анализ нелинейных задач для моделей композитных тел с трещинами; исследование корректности для дробных кинетических уравнений переменного порядка; получение новых структурных свойств графов.

Методы, используемые в работе: современные методы теории дифференциальных уравнений, теории полугрупп линейных операторов, функционального анализа, вариационного исчисления, перераспределения эйлеровых вкладов, алгебры.

Результаты НИР: доказаны теоремы, обоснованы новые математические модели.

Область применения результатов НИР: Полученные результаты будут использованы для дальнейших исследований неклассических уравнений с частными производными, дискретных систем и их приложений.

Итоги внедрения результатов НИР: Результаты НИР включены в диссертационные работы исполнителей проекта, используются в преподавании специальных курсов для студентов и аспирантов математических направлений вузов. По результатам НИР опубликованы 18 научных статей, в том числе, в журналах первого и второго квартилей - 9, индексированы в Web of Science - 7, в SCOPUS - 16. Сделаны 12 научных докладов на международных конференциях.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 Оптимальные расположение и форма жесткого включения в контактной задаче для неоднородного двумерного тела	10
2 Задача о равновесии для термоупругой пластины Кирхгофа–Лява с наклонной трещиной	15
3 Задача о равновесии для термоупругой пластины Кирхгофа–Лява с отслоившимся плоским жестким включением	22
4 Оптимальное управление нагрузками для задачи о равновесии, описывающей точечный контакт упругого тела с элементом жесткости острой формы	29
5 Оптимальные расположение и форма жесткого включения в контактной задаче для неоднородного двумерного тела	35
6 Контактная задача для упругой пластины с плоским жестким включением.	43
7 О разрешимости первой краевой задачи для уравнения нечетного порядка с меняющимся направлением времени	46
8 Краевые задачи для уравнения Соболева высокого порядка смешанного типа	51
9 Задача Дирихле для уравнений составного типа высокого порядка с разрывными коэффициентами	56
10 О дробных кинетических уравнениях	59
11 Строение граней и 3-вершин в триангуляциях на поверхностях и в разреженных плоских графах	63
12 Об обобщении метода Гаусса–Жордана (Йордана) для решения однородных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений	65
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	70
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	72

ВВЕДЕНИЕ

Проект направлен на исследование новых актуальных задач теории неклассических дифференциальных уравнений, дискретных систем и их приложений.

Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений имеют приложения в трансзвуковой газовой динамике, в моделях вязкоупругости, электродинамики, и других прикладных задачах физики и, в частности, механики. Неклассическим уравнениям математической физики посвящена обширная научная литература. В частности, исследования разрешимости краевых задач для уравнений высокого порядка с меняющимся направлением времени, для уравнений смешанного типа высокого порядка и для уравнений соболевского типа были проведены во многих работах (см., например, [1–7] и ссылки в них). Одним из активно развивающихся направлений современной теории неклассических дифференциальных уравнений являются краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка. Интерес к исследованию этих краевых задач вызван тем, что дробные производные наиболее адекватно описывают реальные процессы с памятью и наследственными свойствами.

Различные виды краевых задач достаточно хорошо изучены для классических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами, для неклассических дифференциальных уравнений, а именно уравнений составного типа с разрывными коэффициентами, исследованы в значительно меньшей степени. Непосредственно такие уравнения возникают при моделировании продольных волн в стержнях, в теории длинных волн на воде, в теории волн в плазме. Разрешимость тех или иных краевых задач для подобных уравнений, но с гладкими коэффициентами, изучалась во многих работах. А так же, при моделировании различных процессов, протекающих в составных средах с различными характеристиками, часто возникают задачи, в которых на линии разрыва необходимо задавать некоторые условия сопряжения (склейки).

Краевые задачи с свободными границами в рамках нелинейных моделей с условиями типа Синьорини, представляют собой интерес как с точки зрения развития методов вариационного исчисления, так и в связи прикладными инженерными задачами. В изучении подобных задач, трудности могут быть обусловлены с нелинейностью граничных условий, негладкостью областей, а также с соотношениями, отражающими неоднородные свойства рассматриваемых тел. В настоящее время с помощью вариационного подхода исследованы различные задачи механики деформируемого твердого тела с краевыми условиями в виде неравенств см., например, [8–10].

Научный интерес представляет обоснование корректности и анализ математических моделей для нагруженных неоднородных тел с целью выявления качественных свойств решений, оптимальных геометрических и механических характеристик структурных элементов. Одним из важных вопросов, связанных с созданием армированных композитов, является исследование наилучшего расположения жестких компонентов, выбора их геометрических форм, а также оптимальных внешних нагрузок.

Заметим, что дробные дифференциальные уравнения стали популярным предметом исследований в связи с их широкой применимостью в разных областях естественных наук. Общую информацию по дробным дифференциальным уравнениям можно найти в работах [11–13]. Вывод кинетических уравнений для взаимодействующих частиц как динамического закона больших чисел для марковских моделей взаимодействующих частиц, по-видимому, был начат в [14] и далее развивался многими авторами в различных формах, см., например, [15–18]. В данной работе мы развиваем этот подход для полумарковских систем взаимодействующих частиц, моделируемых как случайные блуждания в непрерывном времени (CTRW) с неэкспоненциальными временами ожидания. Полученные новые кинетические уравнения оказываются дробными по времени уравнениями переменного порядка, зависящего от позиции. Результаты исследований корректности для дробных кинетических уравнений могут быть использованы для построения систем прямых и обратных дробных дифференциальных уравнений, связанных с дробными играми среднего поля. Игры среднего поля используются в моделировании проблем ценообразования на финансовых рынках, в теории распределения энергетических ресурсов и др.

Теория графов (бинарных отношений) находит приложения во многих областях дискретной математики, в структурной химии, генных и транспортных сетях и т.д.

В 1995 г. Августинович и Бородин получили следующее точное описание граней четырехангуляций с $\delta \geq 3$ на торе: $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 10)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 4, 4, 6)$, $(4, 4, 4, 4)$, которое также верно для ориентируемых поверхностей любого большего рода при условии, что четырехангуляция достаточно велика. Мы доказываем, что любая триангуляция с $\delta \geq 4$ на торе, а также любая достаточно большая триангуляция с $\delta \geq 4$ на любой ориентируемой поверхности большего рода, содержит грань одного из типов $(4, 4, \infty)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 7)$ или $(6, 6, 6)$, где все параметры неупрощаемы.

Из классической теоремы Лебега (1940) о строении младших граней в 3-многогранниках следует, что каждая плоская триангуляция с минимальной степенью не менее 4 содержит

3-грань, степени вершин которой мажорируются одной из следующих последовательностей: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 19)$, $(4, 6, 11)$, $(4, 7, 9)$, $(5, 5, 9)$, $(5, 6, 7)$. Нами доказано следующее точное описание граней в плоских триангуляциях с минимальной степенью не менее 4: $(4, 4, \infty)$, $(4, 6, 10)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 7)$.

Пусть $g(k, t)$ есть минимальное целое число такое, что каждый плоский граф с обхватом g не меньшим $g(k, t)$, минимальной степенью $\delta = 2$ и без $(k + 1)$ -цепей, состоящих их вершин степени 2, где $k \geq 1$, содержит 3-вершину с не менее чем t соседями степени 2, где $1 \leq t \leq 3$. Доказано, что $g(k, 1) = 3k + 4$, $g(k, 2) = 3k + 5$ и $g(k, 3) = 3k + 8$ для всех $k \geq 2$.

Применение бесконечных систем (БС) для решения различных практических задач имеет широкий спектр: задачи статической теории упругости, теория дифракции, теория электрических цепей, теория кибернетических систем, квантовой химии и т.д. Теория решения БС развита, в основном, для двух узких классов БС: регулярных и систем с разностными индексами, поэтому их практическое приложение в естествознании и технике сильно ограничивается недостаточной разработанностью теории БС. Данный проект направлен на разработку нового подхода исследования общих бесконечных систем.

Цель работы: получение новых результатов в области краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений с частными производными; развитие методологии исследования краевых задач для уравнений математической физики на основе развития общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений; анализ нелинейных задач для математических моделей композитных тел с включениями; исследование корректности для дробных кинетических уравнений переменного порядка; получение новых структурных свойств графов.

На данном этапе для реализации цели проекта выполнена следующая работа:

- Исследованы качественные свойства решений для нелинейных моделей однородных и композитных тел с трещинами. Доказаны теоремы о существовании решения задач о равновесии термоупругих пластин, о разрешимости задач оптимального управления геометрическими параметрами включений или же внешними нагрузками в нелинейных математических моделях, описывающих равновесие композитных тел.

- Исследовано существование решения задачи равновесия двумерного тела с трещиной и двумя жесткими включениями, соединенными шарнирным образом.

- Рассмотрена задача о равновесии пластины с плоским жестким включением, которое контактирует с недеформируемым телом на части внешней границы. Установлены существова-

ние и единственность решения задачи. Получена эквивалентная дифференциальная постановка.

- Исследована первая краевая задача для уравнения нечетного порядка с меняющимся направлением времени. С помощью нестационарного метода Галеркина и специальной регуляризации доказана обобщенная и регулярная разрешимость рассматриваемой краевой задачи. Также установлена оценка погрешности нестационарного метода Галеркина.

- Исследованы две краевые задачи для уравнения Соболева высокого порядка смешанного типа в цилиндрической области. С помощью методов регуляризации и Галеркина доказана регулярная разрешимость краевой задачи с локальными граничными условиями. Разрешимость второй краевой задачи с интегральным граничным условием сводится к разрешимости предыдущей задачи, но для интегрально-дифференциального уравнения. Регулярная разрешимость этой вспомогательной задачи доказывается методом последовательных приближений. Для обеих задач получена оценка сходимости приближенных решений.

- Исследуется разрешимость краевой задачи с данными Дирихле и дополнительными условиями сопряжения для дифференциальных уравнений составного типа высокого порядка.

- Построена аппроксимация случайным блужданием в непрерывном времени (CTRW) систем взаимодействующих в среднем поле частиц для случая неэкспоненциальных времен ожидания между скачками. Исследована корректность полученных новых кинетических уравнений с переменным дробным порядком и приведена вероятностная формула для их решений.

- Описание граней и 3-вершин в триангуляциях на поверхностях и в разреженных плоских графах.

- Обобщение классического метода Гаусса-Йордана для решения конечных систем на бесконечные неоднородные и однородные системы общего вида с бесконечным определителем отличным от нуля. Обобщение основывается на новой теории решения неоднородных бесконечных систем, предложенной нами, которая дает точное аналитическое решение в виде ряда. Показали, что применение редукции в узком смысле в случае однородных систем дает только тривиальное решение, поэтому, чтобы обобщить метод Гаусса-Йордана для решения бесконечных однородных систем, мы использовали метод редукции в широком смысле. Дается численное сравнение, которое показывает приемлемую точность.

Полученные фундаментальные результаты могут служить теоретической основой развития методов математического моделирования реальных процессов в экономике, экологии, строительстве и других областях, необходимых для решения проблем рационального природо-

пользования, прогнозирования экологических, биологических систем и др.

Достижение требуемого качества работ обеспечивается имеющимся научным заделом коллектива по теме проекта. При проведении исследований новых задач, поставленных в рамках проекта, использованы современные математические методы и результаты мировой науки в данной области, а также подходы, методы и результаты, полученные ранее исполнителями проекта.

1 Оптимальные расположение и форма жесткого включения в контактной задаче для неоднородного двумерного тела

В настоящем разделе рассматривается задача управления геометрической формой объектов математической модели, описывающей механический контакт композита с жестким препятствием. Соответствующая задача формулируется на двумерной липшицевой области и описывает равновесие композитного тела, состоящего из упругой матрицы и жесткого включения. На разных частях границы области накладываются условие непроникания в виде неравенства и условие заземления. Варьируя параметры, описывающие расположение и форму жесткого включения, приходим к соответствующему семейству задач. Для задачи оптимального управления функционал стоимости вводится произвольным непрерывным функционалом, определенным на пространстве решения, в то время как координаты расположения включения и параметр изменения его формы служат управлением. Множество, описывающее допустимые расположения и формы включения, предполагается компактным в \mathbb{R}^3 .

Доказано существование решения задачи оптимального управления геометрической формой и непрерывная зависимость решений в подходящем пространстве Соболева от параметров расположения и изменения формы включения. В рамках подходящих предложений найдены и сформулированы достаточные условия разрешимости задачи оптимального управления. Новизна полученных результатов по сравнению с предыдущими исследованиями, см. [19] по оптимальной форме жесткого включения состоит в ослаблении требований относительно регулярности границы. Более того, данный результат обобщает полученные ранее результаты [20], где рассмотрены только параметры расположения. постановка настоящей задачи также принимает во внимание зависимость внешних сил от параметров, определяющих положение и форму включения, тогда как в работе [20] рассматривалась только одно неизменное заданное значение функции внешних сил. Фактически мы принимаем и развиваем подход работы [20] для более общего случая. При этом устанавливаются достаточные условия разрешимости исследуемой задачи. Результаты опубликованы в [21].

Семейство вариационных задач

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_s$, $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$. Область Ω может быть односвязной. Предположим, что односвязная область ω лежит строго внутри Ω , т.е. $\bar{\omega} \subset \Omega$. Рассмотрим следующее семейство отображений $f_s : \omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \in [0, T]$

такое, что $f_0(\omega) = \omega$ и области $f_s(\omega) = \omega_s$ являются односвязными липшицевыми областями со свойством $\bar{\omega}_s \subset \Omega$ для всех $s \in [0, T]$. Кроме того, для семейства областей $\{\omega_s\}$, $s \in [0, T]$ удовлетворяет следующему предложению.

Предположение 1.1 Мы предполагаем, что для любых фиксированных значений $s \in [0, T]$ и $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что

$$\omega_t \subset \omega_s^\varepsilon \quad \text{для всех} \quad |t - s| < \delta, \quad (1.1)$$

где ω_s^ε определяется согласно следующему соотношению

$$\mathcal{O}^\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \text{dist}(x, \mathcal{O}) < \varepsilon\} \quad (1.2)$$

с произвольной подобластью $\mathcal{O} \subset \Omega$ и любым положительным числом ε .

Замечание 1.1 Можно заметить, что отображение, определяющее поворот ω на углы $2\pi s$ относительно произвольной неподвижной точки области ω , удовлетворяет (1.1).

Не нарушая общности предположим, что $(0, 0) \in \omega$. Для каждого (s, y) , $s \in [0, T]$, $y = (y_1, y_2) \in \Omega$, рассмотрим индуцированные области

$$\omega(s, y) = \{x = (x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) = (y_1, y_2) + (z_1, z_2), \quad \text{где} \quad (z_1, z_2) \in \omega_s\},$$

которые описывают преобразования геометрической формы и переносы исходной области ω . В дальнейшем мы будем рассматривать некоторый заданный компакт $\mathcal{A} \subset [0, T] \times \Omega \subset \mathbf{R}^3$ состоящий из всех (s, y) таких что

$$s \in [0, T], \quad y = (y_1, y_2) \in \Omega, \quad \text{и} \quad \overline{\omega(s, y)} \subset \Omega.$$

Множество \mathcal{A} определяет допустимые формы и расположения (параллельные переносы) одного встроенного жесткого включения. Обратите внимание, что для всех $(s, y) \in \mathcal{A}$ область $\Omega \setminus \overline{\omega(s, y)}$ имеет липшицевую границу.

В качестве наглядного примера, дающего подходящее множество \mathcal{A} , мы предлагаем следующее множество $\mathcal{A}_{ex} = [0, 1] \times [-l, l] \times [-l, l]$, with $0 < l < 2 - \sqrt{2}$, для квадратных областей $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$, $\omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ и области ω_s определяются поворотами ω на углы $2\pi s$

относительно центра квадратной подобласти ω .

Кроме того, мы предполагаем, что справедливо следующее предложение.

Предположение 1.2 Для любых $(s, y) \in \mathcal{A}$ и любой строго внутренней подобласти $D \subset \omega(s, y)$ найдется достаточно малое положительное число $\delta > 0$ такое что $D \subset \omega(\hat{s}, \hat{y}) \cap \omega(s, y)$ для всех $(\hat{s}, \hat{y}) \in \mathcal{A}$ такое что

$$\|(\hat{s}, \hat{y}) - (s, y)\|_{\mathbb{R}^3} < \delta.$$

Обозначим через $W = (w_1, w_2)$ вектор перемещений. Введем пространства Соболева

$$H^{1,0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\}, \quad H(\Omega) = H^{1,0}(\Omega)^2.$$

Введем тензоры, описывающие деформацию упругой части неоднородного тела

$$\varepsilon_{11}(W) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12}(W) = \varepsilon_{21}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{22}(W) = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}.$$

$$\sigma_{ij}(W) = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(W), \quad i, j = 1, 2,$$

где c_{ijkl} — заданный тензор упругости, предполагаемый симметричным и положительно определенным:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad c_{ijkl} = \text{const},$$

$$c_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c_0 |\xi|^2, \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const}, \quad c_0 > 0.$$

В соответствии с предположением об области Ω , ввиду неравенства Корна [9] выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) d\Omega \geq c \|W\|_{H(\Omega)}^2, \quad \forall W \in H(\Omega), \quad (1.3)$$

с постоянной $c > 0$ не зависящей от W .

Замечание 1.2 Неравенство (1.3) обеспечивает эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega)$ и полунормы, определяемой левой частью (1.3).

Для формулировки математической модели составного тела с жестким включением $\omega(s, y)$ воспользуемся понятием жесткого включения, которое, вообще говоря, может занимать произвольную подобласть $\mathcal{O} \subset \Omega$. В этом случае смещения в области \mathcal{O} должны иметь особую структуру $W|_{\mathcal{O}} = \rho$, где $\rho \in R(\mathcal{O})$ и $R(\mathcal{O})$ — пространство бесконечно малых жестких перемещений

на \mathcal{O}

$$R(\mathcal{O}) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x_1, x_2) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2);\$$

$$b, c_1, c_2 \in \mathbf{R}, (x_1, x_2) \in \mathcal{O}\},$$

см, [22].

Далее зафиксируем элемент $(s, y) \in \mathcal{A}$ и предположим, что область $\omega(s, y)$ соответствует объемному (объемному) жесткому включению, а область

$$\Omega \setminus \overline{\omega(s, y)},$$

соответствует упругой части тела. Условие Синьорини возможного механического контакта с недеформируемым препятствием записывается как

$$W\nu \leq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_s,$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичная внешняя нормаль к Γ . На внешней границе Γ_0 ставится однородное краевое условие Дирихле. Введем функционал энергии

$$\Pi(W, s, y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) d\Omega - \int_{\Omega} F(s, y) W d\Omega, \quad (1.4)$$

где $F(s, y) = (f_1(s, y), f_2(s, y)) \in C([0, T] \times \Omega; L_2(\Omega))^2$ — заданный вектор внешних сил.

Задачу о равновесии композитного тела можно сформулировать в виде следующей задачи минимизации.

$$\text{Найти } U = U(s, y) \in K(s, y),$$

$$\text{такое что } \Pi(U, s, y) = \inf_{W \in K(s, y)} \Pi(W, s, y), \quad (1.5)$$

где множество допустимых перемещений определяется следующим образом

$$K(s, y) = \{W \in H(\Omega) \mid W\nu \leq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_s,$$

$$W|_{\omega(s, y)} = \rho, \text{ где } \rho \in R(\omega(s, y))\}.$$

известно, что задача (1) имеет единственное решение $U(s, y) \in K(s, y)$, которое удовлетворяет

вариационному неравенству [9]

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(U(s, y)) \varepsilon_{ij}(W - U(s, y)) d\Omega \geq \int_{\Omega} F(s, y)(W - U(s, y)) d\Omega, \quad (1.6)$$

для всех $W \in K(s, y)$.

Задача оптимального управления

Определим функционал качества $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$ задачи оптимального управления с помощью следующего равенства $J_G(s, y) = G(U(s, y))$, где $U(s, y)$ — решение задачи (1) и $G : H(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ — произвольный непрерывный функционал.

В качестве примеров таких функционалов, имеющих физический смысл, можно привести функционал $G_1(W) = \|W - W_0\|_{H(\Omega)}$ характеризующий отклонение вектора перемещений от заданной функции W_0 . Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\text{Найти } (s^*, y^*) \in \mathcal{A} \text{ такое что } J_G(s^*, y^*) = \sup_{(s, y) \in \mathcal{A}} J_G(s, y). \quad (1.7)$$

Это означает, что мы хотим найти наилучшее расположение и форму включения, обеспечивающие максимальное значение функционала стоимости. Ниже приводится основной результат главы.

Теорема 1.1 *Существует решение задачи оптимального управления (1.7).*

Доказательство теоремы и полное содержание соответствующей статьи приведено в работе [21].

2 Задача о равновесии для термоупругой пластины Кирхгофа–Лява с наклонной трещиной

Нелинейные модели пластин Кирхгофа — Лява с условием типа Синьорини на поверхности трещин исследовались во многих работах (см., например, [8, 9, 23, 24]). Большинство этих работ посвящено вертикальным трещинам, определяемым цилиндрическими поверхностями, образующие которых перпендикулярны срединной плоскости пластины в исходном состоянии. Существует небольшое количество работ, посвященных упругим пластинам с наклонными трещинами, см., например, [25, 26]. Насколько известно авторам, до сих пор изучались только термоупругие пластины с вертикальными трещинами (см., например, [27, 28]). В базовой работе [27] для модели термоупругой пластины с вертикальной трещиной установлены разрешимость задачи, получены дополнительные соотношения на кривой трещины (индуцированные вариационной постановки), а также установлена дополнительная регулярность решения вблизи кривой трещины.

Сформулирована новая нелинейная модель, описывающая равновесие термоупругой пластины с наклонной трещиной. Учет температурных эффектов может сыграть существенную роль в прикладных задачах, возникающих при эксплуатации в условиях Крайнего Севера. При задании условия непроникания на трещине применен способ, соответствующий общему случаю наклонной трещины, которая описывается достаточно гладкой поверхностью [25]. Следует отметить, что в настоящей модели силы трения на берегах трещины не учитываются. Доказано существование решения соответствующей вариационной задачи. Результаты раздела опубликованы в [29].

Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная односвязная область в \mathbf{R}^2 с достаточно гладкой границей Γ . Введем трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ так, чтобы множество $\{\Omega\} \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$ было расположено в срединной плоскости пластины с постоянной толщиной $2h$.

Пусть поверхность трещины Ψ описывается уравнением $z = \Phi(x)$, $x \in \Omega_\Psi \subset \Omega$ (см. Рис. 1.). Здесь Ω_Ψ — ортогональная проекция поверхности трещины (т.е. графика $z = \Psi(x)$) на плоскость $z = 0$. Множество Ω_Ψ предполагается замкнутым в R^2 . Обозначим через

$$n(x) = (-\nabla\Psi(x), 1)/\sqrt{1 + |\nabla\Psi(x)|^2}$$

единичный вектор нормали к поверхности $z = \Psi(x)$, $x \in \Omega_\Psi$. Выбранное направление нормали $n(x)$ определяет как положительные, так и отрицательные грани трещины, которые обозначаются Ψ^+ , Ψ^- соответственно. Кривая Γ_c — пересечение поверхности трещины Ψ с плоскостью $z = 0$. Для упрощения дальнейших рассуждений предположим, что $|\nabla\Psi(x)| \neq 0$, $x \in \Omega_\Psi$.

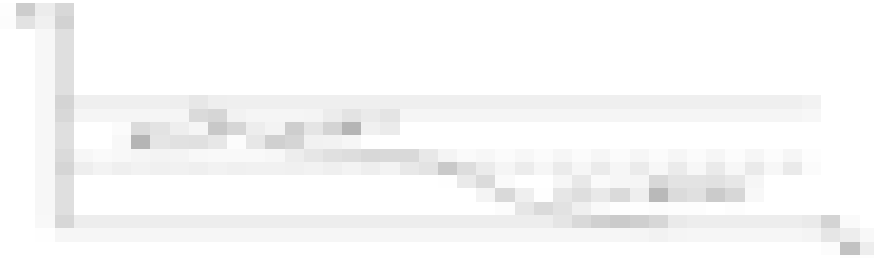


Рисунок 1 – Сечение пластины с наклонной трещиной

Проекцию Ω_Ψ поверхности Ψ можно представить как объединение двух множеств в соответствии с направлением оси z , а именно, $\Omega_\Psi = \Omega_\Psi^+ \cup \Omega_\Psi^-$. Обозначим через Ω_Ψ^+ часть проекции Ψ при условии, что эта часть получается при проектировании в направлении положительного направления оси z . Аналогично, введем Ω_Ψ^- . В частности, кривая Γ_c принадлежит как Ω_Ψ^+ , так и Ω_Ψ^- (см. Рис. 2.). Считаем, что направление нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ к кривой Γ_c в плоскости x лежит вне Ω_Ψ^- и внутри Ω_Ψ^+ . Пусть $x \in \Omega_\Psi$. Обозначим через $y = Px$ ортогональную проекцию (на плоскости $z = 0$) точки x на кривую Γ_c . Множества Ω_Ψ^\pm предполагаются достаточно малыми, а это означает, что значение $y = Px$ определяется однозначно для каждого фиксированного $x \in \Omega_\Psi^\pm$.



Рисунок 2 – Области Ω_Ψ^- и Ω_Ψ^+ , проекция $y = Px$ на кривую Γ_c

Напомним, что в теории пластин Кирхгофа–Лява горизонтальные перемещения линейно зависят от координаты z , т.е.

$$W(z) = W - z\nabla w, \quad |z| \leq h,$$

где $W = (w_1, w_2)$, w — горизонтальные и вертикальные смещения середины точек поверхности [30]. Через $\chi = (W, w)$ обозначим вектор перемещений, $\chi = \chi(x)$, $x \in \Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma_c}$. Поле температуры для пластины в данной модели обозначается через $\theta = \theta(t, x)$. Нам понадобится также следующее множество $Q_c = \Omega_c \times (0, T)$, $T > 0$. Тензор усилий в срединной плоскости имеет следующий вид $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$, $i, j = 1, 2$:

$$\sigma_{11} = \varepsilon_{11} + \kappa \varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = \varepsilon_{22} + \kappa \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{12} = (1 - \kappa) \varepsilon_{12},$$

$$\kappa = \text{const}, \quad 0 < \kappa < 1/2.$$

Здесь с помощью символов $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W)$ обозначены компоненты тензора деформаций пластины:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y.$$

В рамках теории Кирхгофа–Лява выразим перемещения пластины у берегов трещины Ψ^\pm и приведем нелокальное условие взаимного непроникания берегов трещины, использованное ранее в рамках упругой модели [25]. Зафиксируем значение $t \in (0, T)$. Пусть $(x, z) \in \Psi^+$, $x \in \Omega_\Psi^+$. Тогда вектор перемещений в точке (x, z) имеет вид

$$\chi^+(x, z) = (W^+(x) - \nabla w^+(x), w^+(x)), \quad x \in \Omega_\Psi^+, \quad z = \Phi(x). \quad (2.1)$$

Аналогично вектор перемещений имеет вид

$$\chi^-(x, z) = \left(W^-(y) - z \nabla w^-(y), w^-(y) + |x - y| \frac{\partial w^-(y)}{\partial \nu} \right), \quad (2.2)$$

$$y = Px$$

при условии, что $(x, z) \in \Psi^-$, $x \in \Omega_\Psi^+$. Формула (2.2) дает, что горизонтальные перемещения в точке $(x, z) \in \Psi^-$, $x \in \Omega_\Psi^+$ совпадают с горизонтальными смещениями в точке (y, z) , $y = Px$. Вертикальные перемещения в указанных точках разные, причем разница равна $|x - y| \partial w^-(y) / \partial \nu$.

Условие непроникания берегов трещины в точке $(x, z) \in \Psi$, $x \in \Omega_\Psi^+$ имеет следующий вид [25]:

$$(\chi^+(x, z) - \chi^-(x, z))n(x) \geq 0, \quad x \in \Omega_\Psi^+, \quad z = \Phi(x). \quad (2.3)$$

Вектор $\chi^\pm(x, z)$ можно подставить в (2.3) в соответствии с (2.1), (2.2). Отсюда следует

$$(\chi^+(x) - \chi^-(y))n(x) - (\chi_z^+(x) - \chi_z^-(y))n(x) \geq 0, \quad (2.4)$$

$$x \in \Omega_\Psi^+, \quad z = \Phi(x), \quad y = Px,$$

где

$$\chi^\pm(s) = (W^\pm(s), w^\pm(s)), \quad \chi_z^\pm(s) = \left(z \nabla w^\pm(s), |s - Ps| \frac{\partial w^\mp(Ps)}{\partial \nu^\pm} \right).$$

Мы использовали обозначения $\partial/\partial\nu^+ \equiv \partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\nu^- \equiv -\partial/\partial\nu$. Заметим, что $y = Py$ для $y \in \Gamma_c$.

Аналогично, имеет место условие непроникания типа (2.4) для точек $(x, z) \in \Psi^\pm$, $x \in \Omega_\Psi^\mp$.

Действительно, пусть $(x, z) \in \Psi^+$, $x \in \Omega_\Psi^-$. Тогда

$$\chi^+(x, z) = \left(W^+(y) - z \nabla w^+(y), w^+(y) - |x - y| \frac{\partial w^+(y)}{\partial \nu} \right), \quad (2.5)$$

$$x \in \Omega_\Psi^-, \quad z = \Phi(x), \quad y = Px.$$

Рассмотрим точку $(x, z) \in \Psi^-$, $x \in \Omega_\Psi^-$. Имеем

$$\chi^-(x, z) = (W^-(x) - z \nabla w^-(x), w^-(x)). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.6) в неравенстве непроникания

$$(\chi^+(x, z) - \chi^-(x, z))n(x) \geq 0, \quad x \in \Omega_\Psi^-, \quad z = \Phi(x),$$

легко вывести

$$(\chi^+(y) - \chi^-(x))n(x) - (\chi_z^+(y) - \chi_z^-(x))n(x) \geq 0, \quad (2.7)$$

$$x \in \Omega_\Psi^-, \quad z = \Phi(x), \quad y = Px.$$

Таким образом, условие взаимного непроникания берегов трещины описывается неравенствами (2.4), (2.7). Неравенства имеют нелокальный характер; в частности, они содержат значения функций как в точке x , так и в точке $y = Px$; причем последние значения (т.е. в точке $y = Px$) берутся на противоположных берегах трещины.

Важно отметить, что если поверхность $z = \Phi(x)$ преобразуется в вертикальную трещину, соответствующую цилиндру $x \in \Gamma_c$, $-\varepsilon \leq z \leq \varepsilon$, то условия (2.4), (2.7) переходят в хорошо

известное неравенство — условие непроникания для вертикальных трещин [8, 9]

$$[W(x)]\nu(x) \geq h \left| \left[\frac{\partial w(x)}{\partial \nu} \right] \right|, \quad x \in \Gamma_c. \quad (2.8)$$

Предположим, что начальное распределение температуры задано:

$$\theta = \theta_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.9)$$

На внешней границе пластины потребуем выполнение следующих условий:

$$\theta = w = \frac{\partial w}{\partial n} = W = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, T). \quad (2.10)$$

Введем пространство Соболева

$$\begin{aligned} H^{1,0}(\Omega_c) &= \left\{ v \in H^1(\Omega_c) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma \right\}, \\ H^{2,0}(\Omega_c) &= \left\{ v \in H^2(\Omega_c) \mid v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \right\}, \\ H(\Omega_c) &= H^{1,0}(\Omega_c)^2 \times H^{2,0}(\Omega_c). \end{aligned}$$

Введем множества

$$K = \{ \chi = (W, w) \in H(\Omega_c) \mid \chi \text{ удовлетворяет (2.3), (2.7) п.в. на } \gamma \},$$

$$\mathcal{K} = \{ \chi \in L^2(0, T; H(\Omega_c)) \mid \chi(t) \in K \text{ п. в. на } (0, T) \}$$

допустимых перемещений и билинейные формы

$$\begin{aligned} B(W, \widetilde{W}) &= \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\widetilde{W}) \rangle, \\ b(w, \widetilde{w}) &= \int_{\Omega_c} (w_{,11} \widetilde{w}_{,11} + w_{,22} \widetilde{w}_{,22} + \kappa w_{,11} \widetilde{w}_{,22} + \kappa w_{,22} \widetilde{w}_{,11} \\ &\quad + 2(1 - \kappa)w_{,12} \widetilde{w}_{,12}), \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ соответствует скалярному произведению в $L_2(\Omega_c)$ [9].

Нам понадобится пространство

$$\Xi = \{ \theta \in L^2(0, T; H^{1,0}(\Omega_c)) \mid \theta_t \in L^2(Q_c) \}$$

снабженное нормой

$$\|\theta\|_{\Xi}^2 = \|\theta\|_{L^2(0,T;H^{1,0}(\Omega_c))}^2 + \|\theta_t\|_{L^2(Q_c)}^2.$$

Введем также пространства $H = H^1(0, T; H(\Omega_c))$ и $U = \Xi \times H$. Потребуем, чтобы $\theta_0 \in H^{1,0}(\Omega_c)$. В соответствии со свойствами пространства Ξ , функция θ имеет след $t = 0$; в частности, $\theta(0) \in L^2(\Omega_c)$. Оператор следа, действующий из Ξ в $L^2(\Omega_c)$ непрерывен. Нетрудно показать, что следующее множество

$$S = \{(\theta, \chi) \in U \mid \theta(0) = \theta_0 \text{ в } \Omega_c, \quad \chi \in \mathcal{K}\}$$

является выпуклым в U . Рассмотрим следующий линейный и непрерывный оператор со значениями в сопряженном пространстве U^* $L : U \rightarrow U^*$, определенный по формуле

$$\begin{aligned} \{L(\theta, \chi), (\bar{\theta}, \bar{\chi})\} &= \int_{Q_c} \left(\theta_t + \delta^2 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} W - \Delta w) \right) \bar{\theta} \\ &+ \int_{Q_c} \nabla \theta \nabla \bar{\theta} + \int_0^T (B(W, \widetilde{W}) + b(w, \widetilde{w}) + \delta^2 \langle \theta, \Delta \widetilde{w} \rangle - \delta^2 \langle \theta, \operatorname{div} \widetilde{W} \rangle), \end{aligned}$$

где скобки $\{\cdot, \cdot\}$ означают двойственность между U и U^* , δ — коэффициент температурного расширения [27].

Предположим, что $f \in L^2(Q_c)$. Будем называть элемент $(\theta, \chi) \in U$ решением задачи равновесия термоупругой пластины с трещиной, если он удовлетворяет следующему неравенству

$$\{L(\theta, \chi), (\bar{\theta}, \bar{\chi}) - (\theta, \chi)\} \geq \int_{Q_c} f(\bar{\theta} - \theta), \quad (\theta, \chi) \in S \quad \forall (\bar{\theta}, \bar{\chi}) \in S. \quad (2.11)$$

Заметим, что оператор L является псевдомонотонным, однако он не обладает свойством коэрцитивности в пространстве U [27]. Можно доказать следующий результат.

Теорема 2.1 *Для достаточно малых δ , существует решение задачи (2.11).*

Доказательство этого утверждения повторяет шаги рассуждений, приведенных в [27]. Здесь целесообразно отметить, что отличие рассматриваемых множеств допустимых функций в [27] из K и \mathcal{K} этой статьи не вносит существенный вклад в ход рассуждений. Поскольку множество K является выпуклым и замкнутым в Ω_c [25].

Заметим, что подставив в (2.11) пробные функции вида $(\bar{\theta}, \bar{\chi})$, $\bar{\theta} = \theta + \tilde{\theta}$, $\tilde{\theta} \in C_0^\infty(\Omega_c \setminus \Omega_\Psi)$,

$\bar{\chi} = \chi + \tilde{\chi}$, $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\Omega_c \setminus \Omega_\Psi)$ получим, что имеют место следующие равенства

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} W - \Delta w) = f \quad \text{в } \Omega_c \setminus \Omega_\Psi, \quad (2.12)$$

$$-\sigma_{ij,j} + \theta_{,i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{в } \Omega_c \setminus \Omega_\Psi, \quad (2.13)$$

$$\Delta^2 w + \Delta \theta = 0 \quad \text{в } \Omega_c \setminus \Omega_\Psi. \quad (2.14)$$

3 Задача о равновесии для термоупругой пластины Кирхгофа-Лява с отслоившимся плоским жестким включением

В рамках моделей механики деформируемого твердого тела нелинейные ограничения типа Синьорини задают ограничения на перемещения с помощью подходящих граничных условий на контактирующих поверхностях двух независимых тел или на противоположных берегах трещины. Этот подход к математическому моделированию предполагает использование методов вариационных неравенств и активно развивается, см. [8, 9, 31, 32]. Среди нелинейных математических моделей такого вида изучен широкий круг различных задач для пластин Кирхгофа-Лява в рамках упругих определяющих соотношений, см. например, [31, 33]. Задачи для упругих пластин с жесткими включениями исследованы в [23, 34] и других работах.

В данном разделе мы уделяем внимание нелинейной модели термоупругой пластины. Новизна исследуемой задачи обеспечивается наличием отслоившегося плоского жесткого включения и учетом возможного механического контактного взаимодействия берегов трещины (силы трения не учитываются). Новая математическая модель, описывающая равновесие термоупругой пластины с трещиной на границе плоского жесткого включения, сформулирована в виде вариационной задачи. Доказана разрешимость соответствующих краевых задач в предположении, что положительный параметр, характеризующий тепловое расширение пластины, достаточно мал. В предположении, что решение вариационной задачи достаточно гладкое, находится эквивалентная дифференциальная постановка. Результаты раздела опубликованы в [35].

Вариационная постановка

Сформулируем задачу о равновесии термоупругой пластины, содержащей плоское жесткое включение. Рассмотрим случай отслоившегося включения, когда на заданном участке границы включения расположена трещина. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ . Предположим, что гладкая незамкнутая кривая γ лежит строго внутри Ω , т.е. $\bar{\gamma} \subset \Omega$. Дополнительно предположим, что γ может быть продолжена до Γ так, чтобы Ω разбивалась на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, где $meas(\Gamma \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$. Это предположение требуется для возможности применения неравенства Корна в нелипшицевой области $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$ [9]. В зависимости от направления нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ к γ выберем положительный γ^+ и отрицательный γ^- берега кривой γ . Скачок $[q]$ функции q на кривой γ находится по формуле $[q] = q|_{\gamma^+} - q|_{\gamma^-}$.

Для простоты предположим, что толщина пластины постоянная и равняется 2. Введем декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ так, чтобы множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset \mathbf{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины в исходном состоянии. Множество $\gamma \times [-1, 1]$ определяет цилиндрическую поверхность, которая соответствует плоскому жесткому включению. Сквозная трещина отслоения располагается на положительной стороне кривой γ^+ и описывается той же цилиндрической поверхностью $\gamma \times [-1, 1]$. Обозначим через $\chi = (W, w)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, где $W = (w_1, w_2)$ — перемещения вдоль плоскости $\{x_1, x_2\}$ и w — перемещения вдоль оси z (прогибы).

Температурное поле в срединной плоскости пластины обозначается через θ . Нам также понадобится следующее множество $Q_\gamma = \Omega_\gamma \times (0, T)$, $T > 0$. Тензоры деформации и интегральных напряжений обозначаются $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$, соответственно, [9]:

$$\sigma_{11} = \varepsilon_{11} + \kappa\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = \varepsilon_{22} + \kappa\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{12} = (1 - \kappa)\varepsilon_{12},$$

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2,$$

где $\kappa = \text{const}$, $0 < \kappa < 1/2$.

Наличие в пластине плоского жесткого включения моделируется с помощью ограничений на функции, описывающих перемещения χ на отрицательной стороне кривой γ . Для того, чтобы описать эти ограничения введем пространство перемещений жесткого тела, которое позволяет охарактеризовать свойства плоского жесткого включения:

$$R(\gamma) = \{\zeta(x) = (\rho, l) \mid \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2);$$

$$l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad x \in \gamma\},$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}$. Искомые функции должны удовлетворять следующему граничному условию, отражающему линейную структуру перемещений

$$\chi|_{\gamma^-} = \zeta, \quad \text{для некоторого } \zeta \in R(\gamma).$$

Кроме того, жесткие свойства плоского включения в пластине описываются следующими соотношениями (см. [33])

$$\frac{\partial w^-}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = a_2 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.1)$$

где

$$w^- = l = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \text{на } \gamma^-.$$

Для удобства расширим определение функций

$$l = l(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

на всю область Ω_γ тем же соотношением так, чтобы

$$\frac{\partial w^-}{\partial x_1} = \frac{\partial l}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = \frac{\partial l}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial w^-}{\partial \nu} = \frac{\partial l}{\partial \nu} \quad \text{на } \gamma.$$

Важно отметить, что эти условия (3.1) определяют постоянство углов нормальных волокон вдоль всего плоского включения. Эти дополнительные условия (3.1) определяют отличие рассматриваемой постановки задачи от тех постановок задач, связанных с пластинами с тонкими жесткими включениями, которые рассматривались в упругих случаях, например, в [36].

Для описания возможного контактного механического взаимодействия берегов трещины зададим условие взаимного непроникания противоположных берегов трещины [8, 9]

$$[W]\nu \geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right| \quad \text{на } \gamma^T = \gamma \times (0, T). \quad (3.2)$$

Отметим, что неравенство (3.2) написано для функций χ , заданных в области Q_γ . В случае, когда рассматриваемые функции определены в Ω_γ , заменим γ^T на γ и условие непроникания запишется в следующем виде:

$$[W]\nu \geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right| \quad \text{п.в. на } \gamma. \quad (3.3)$$

Пусть задано некоторое начальное распределение температуры:

$$\theta = \theta_0 \quad \text{при } t = 0 \quad \text{на } \Omega_\gamma. \quad (3.4)$$

На внешней границе пластины потребуем выполнения следующих условий:

$$\theta = w = \frac{\partial w}{\partial e} = W = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (3.5)$$

где e — внешняя нормаль к Γ . Введем пространства Соболева

$$\begin{aligned} H^{1,0}(\Omega_\gamma) &= \left\{ v \in H^1(\Omega_\gamma) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma \right\}, \\ H^{2,0}(\Omega_\gamma) &= \left\{ v \in H^2(\Omega_\gamma) \mid v = \frac{\partial v}{\partial e} = 0 \text{ на } \Gamma \right\}, \\ H(\Omega_\gamma) &= H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2 \times H^{2,0}(\Omega_\gamma). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие множества

$$K = \{ \chi = (W, w) \in H(\Omega_\gamma) \mid \chi|_{\gamma^-} \in R(\gamma), \chi \text{ удовлетворяет (3.1), (3.3) на } \gamma \},$$

$$H(\Omega_\gamma) = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2 \times H^{2,0}(\Omega_\gamma),$$

$$\mathcal{K} = \{ \chi \in L^2(0, T; H(\Omega_\gamma)) \mid \chi(t) \in K \text{ п.в. на } (0, T) \}$$

допустимых перемещений.

Введем следующие пространства для искомым функций и их компонент

$$\Xi = \{ \theta \in L^2(0, T; H^{1,0}(\Omega_\gamma)) \mid \theta_t \in L^2(Q_\gamma) \},$$

$$H = H^1(0, T; H(\Omega_\gamma)), \quad U = \Xi \times H,$$

где Ξ снабжено нормой $\|\theta\|_\Xi^2 = \|\theta\|_{L^2(0, T; H^{1,0}(\Omega_\gamma))}^2 + \|\theta_t\|_{L^2(Q_\gamma)}^2$. Предположим, что $\theta_0 \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$.

Свойства Ξ гарантируют, что произвольная функция $\theta \in \Xi$ имеет определенное значение следов при $t = 0$; в частности, $\theta(0) \in L^2(\Omega_\gamma)$. Оператор следа действует непрерывно из Ξ в $L^2(\Omega_\gamma)$.

Легко показать, что следующее множество

$$S = \{ (\theta, \chi) \in U \mid \theta(0) = \theta_0 \text{ в } \Omega_\gamma, \chi \in \mathcal{K} \}$$

выпукло в U . Рассмотрим следующий линейный и непрерывный оператор $L : U \rightarrow U^*$, со значениями в двойственном пространстве U^* , определенный по формуле

$$\{L(\theta, \chi), (\bar{\theta}, \bar{\chi})\} = \int_{Q_\gamma} \nabla \theta \nabla \bar{\theta} + \left(\theta_t + \delta^2 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} W - \Delta w) \right) \bar{\theta} + \int_0^T (B(W, \widetilde{W}) + b(w, \widetilde{w}) + \delta^2 \langle \theta, \Delta \widetilde{w} \rangle_{\Omega_\gamma} - \delta^2 \langle \theta, \operatorname{div} \widetilde{W} \rangle_{\Omega_\gamma}),$$

где скобки $\{\cdot, \cdot\}$ обозначают двойственность между U и U^* , скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_\gamma}$ обозначают скалярное произведение в $L^2(\Omega_\gamma)$, δ — положительный параметр, характеризующий тепловое расширение пластины [27].

Теперь мы можем сформулировать задачу. Предположим, что $f \in L^2(Q_\gamma)$. Элемент $(\theta, \chi) \in U$ называется решением задачи о равновесии термоупругой пластины с трещиной отслоения на границе плоского жесткого включения, если он удовлетворяет следующему вариационному неравенству

$$\{L(\theta, \chi), (\bar{\theta}, \bar{\chi}) - (\theta, \chi)\} \geq \int_{Q_\gamma} f(\bar{\theta} - \theta), \quad (\theta, \chi) \in S \quad \forall (\bar{\theta}, \bar{\chi}) \in S. \quad (3.6)$$

Обратите внимание, что L является псевдомонотонным, но не коэрцитивным в пространстве U [27]. Можно доказать следующий результат.

Теорема 3.1 *При достаточно малых δ задача (3.6) имеет решение.*

Доказательство этого утверждения повторяет этапы рассуждений, приведенных в [27]. Здесь целесообразно отметить, что различие между рассматриваемыми множествами допустимых функций в [27] из K и \mathcal{K} настоящей статьи не имеет существенного значения для хода рассуждений. Для установления разрешимости применяется метод Фаздо-Галеркина. Основное отличие от предыдущих работ [27, 28] состоит в доказательстве подходящих свойств множества \mathcal{K} , поскольку множество \mathcal{K} дополнительно содержит соотношения, отражающие связь с пространством $R(\gamma)$ и (3.1), характеризующие жесткие свойства плоского включения. А именно, мы можем доказать выпуклость и замкнутость K так же, как это было доказано в работе [33], где рассматривался случай упругой модели пластины Кирхгофа–Лява с плоским жестким включением. Рассуждая в русле рассуждений, приведенных в [27], мы доказываем разрешимость задачи (3.6).

Эквивалентная дифференциальная постановка

Предположим, что γ в дополнение к предыдущим предположениям удовлетворяет следующим условиям. Кривая γ может быть продолжена до гладкой замкнутой кривой Σ , ограничивающей простую связную область ω , которая лежит строго внутри Ω , т.е. $\omega \subset \Omega$ и $\omega \cap \Gamma = \emptyset$. Без ограничения общности можно считать, что ν обозначает внешнюю единичную нормаль на Σ . Как следствие, в соответствии с выбранным направлением нормали ν можно использовать следующие соответствующие обозначения Σ^+ , Σ^- и $[\cdot]$ для скачков функции на Σ .

В этом пункте мы выводим уравнения для описания квазистатического равновесия пластины и условия, которые выполняются на γ^T для решения (θ, χ) уравнения (3.6). Чтобы акцентировать внимание на качественных свойствах рассматриваемой модели, предположим, что параметр $\delta = 1$. Далее будем предполагать, что решение достаточно гладкое. Для наглядности далее величины W^t , w^t , θ^t будем обозначать через W , w , θ , указывая каждый раз значение переменной t , при которых выполняются соответствующие соотношения. Для применения формул Грина обе кривые Σ и Γ должны принадлежать классу $C^{1,1}$.

Подставив в (3.6) тестовые функции вида $(\bar{\theta}, \bar{\chi})$, $\bar{\theta} = \theta + \tilde{\theta}$, $\tilde{\theta} \in C_0^\infty(Q_\gamma)$, $\bar{\chi} = \chi + \tilde{\chi}$, $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(Q_\gamma)$, получим следующие равенства

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} W - \Delta w) = f \quad \text{в } Q_\gamma, \quad (3.7)$$

$$-\sigma_{ij,j} + \theta_{,i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{в } Q_\gamma, \quad (3.8)$$

$$\Delta^2 w + \Delta \theta = 0 \quad \text{в } Q_\gamma. \quad (3.9)$$

Далее нам понадобятся формулы Грина, справедливые для достаточно гладких функций u и v [9, 27]

$$b_\omega(u, v) = \left\langle M(u), \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\rangle_\Sigma - \langle G(u), v \rangle_\Sigma + \langle \Delta^2 u, v \rangle_\omega. \quad (3.10)$$

Здесь нижние индексы в скобках означают, что интегрирование ведется по области ω и границе Σ соответственно. Операторы на Σ в формуле (3.10) задаются соотношениями:

$$M(u) = \kappa \Delta u + (1 - \kappa) \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}, \quad G(u) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u + (1 - \kappa) \frac{\partial^3 u}{\partial \nu \partial \tau^2},$$

где $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$. Для функций вида $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, выполнены следующие формулы:

$$\langle \varphi, \nabla u \rangle_\omega = \langle \varphi \nu, u \rangle_\Sigma - \langle \operatorname{div} \varphi, u \rangle_\omega. \quad (3.11)$$

Учитывая (3.10), (3.11), а также аналогичные формулы, справедливые для Ω_γ , легко вывести следующие равенства, справедливые для области Ω_γ и гладких функций с нулевыми значениями на внешней границе Γ

$$\langle \varphi, \nabla u \rangle_{\Omega_\gamma} = -[\langle \varphi \nu, u \rangle_\gamma] - \langle \operatorname{div} \varphi, u \rangle_{\Omega_\gamma}, \quad (3.12)$$

$$\langle \sigma_{ij}(U), \varepsilon_{ij}(V) \rangle_{\Omega_\gamma} = -\langle \sigma_{ij,j}(U), v_i \rangle_{\Omega_\gamma} - \left[\langle \sigma_\nu(U), V\nu \rangle_\gamma + \langle \sigma_\tau(U), V\tau \rangle_\gamma \right], \quad (3.13)$$

где

$$\sigma_\nu(U) = \sigma_{ij}(U)\nu_i\nu_j, \quad \sigma_\tau(U) = (\sigma_\tau^1(U), \sigma_\tau^2(U)) = (\sigma_{1j}(U)\nu_j, \sigma_{2j}(U)\nu_j) - \sigma_\nu(U)\nu,$$

$$V\nu = v_i\nu_i, \quad V\tau = (V_\tau^1, V_\tau^2), \quad v_i = (V\nu)\nu_i + V_\tau^i, \quad i = 1, 2;$$

$$b_{\Omega_\gamma}(u, v) = -\left[\langle M(u), \frac{\partial v}{\partial \nu} \rangle_\gamma \right] + \left[\langle G(u), v \rangle_\gamma \right] + \langle \Delta^2 u, v \rangle_{\Omega_\gamma}. \quad (3.14)$$

Применяя (3.13), (3.14), доказывается следующая теорема, см. [35].

Теорема 3.2 *В предположении, что решение (θ, χ) достаточно гладкое, вариационная задача (3.6) эквивалентна краевой задаче, состоящей из уравнений (3.7)–(3.9), соотношения $\chi(t)|_{\gamma^-} \in R(\gamma)$ для $t \in (0, T)$, начальных и граничных условий (3.1), (3.2), (3.4), (3.5),*

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.15)$$

$$\int_\gamma \left\{ -[M(w)] \frac{\partial \tilde{l}}{\partial \nu} + [G(w)] \tilde{l} - [\sigma_\nu(W)] \tilde{\rho} \nu - [\sigma_\tau(W)] \tilde{\rho} \tau + \right. \\ \left. + \tilde{\rho} \nu [\theta] - \frac{\partial \tilde{l}}{\partial \nu} [\theta] \right\} = 0 \quad \forall (\tilde{\rho}, \tilde{l}) \in R(\gamma), \quad (3.16)$$

$$\sigma_\nu^+(W) - \theta^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+(W) = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.17)$$

$$G(w)^+ = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.18)$$

$$M^+(w) + \sigma_\nu^+(W) = M^+(w) + \theta^+ + \sigma_\nu^+(W) - \theta^+ \leq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (3.19)$$

$$(M^+(w) + \theta^+) \left(\frac{\partial w^+}{\partial \nu} - \frac{\partial l}{\partial \nu} \right) + (\sigma_\nu^+(W) - \theta^+) (W^+ \nu - \rho \nu) = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (3.20)$$

4 Оптимальное управление нагрузками для задачи о равновесии, описывающей точечный контакт упругого тела с элементом жесткости острой формы

В данном разделе мы уделяем внимание неклассической $2D$ математической модели, описывающей точечный контакт композитной конструкции с острой фигурной кромкой [37]. А именно, исследуется вариационная задача, описывающая равновесие композитного тела с тонким ребром жесткости в виде внешнего клина. Основная модель равновесия тела сформулирована с учетом условия непроникания в виде трех систем неравенств, где каждая система описывает три возможных случая деформации твердого тела. Особенность этой задачи состоит в невыпуклости множества допустимых функций. Несмотря на это, в основной задаче можно использовать методы вариационного исчисления, так как это невыпуклое множество является объединением трех выпуклых и замкнутых множеств. На основе этой модели формулируется задача оптимального управления, где управлением служат функции внешних нагрузок. Функционал стоимости задается с помощью произвольного слабо полунепрерывного сверху функционала, определенного на подходящем пространстве Соболева. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Кроме того, для последовательности решений, соответствующей максимизирующей последовательности функций нагрузки, доказана сильная сходимость в соответствующем пространстве Соболева. Доказательства полученных результатов см. в [38].

Задача о равновесии упругой пластины с тонким ребром жесткости

Представим базовую математическую модель, описывающую контактную задачу для упругого тела, содержащего на внешней границе тонкое ребро жесткости [37]. Такая конфигурация может описывать тела, покрытые специальными ребрами жесткости. Рассмотрим ограниченную односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, которая состоит из двух кривых $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$. Предположим, что кривая, состоящая из двух отрезков

$$\gamma = \left([0, 1] \times \{0\}\right) \cup \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, \quad x_2 = \alpha x_1\}, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

— является частью Γ_2 такой, что $\gamma \subset \text{int}(\Gamma_2)$ (см. Рис. 3).

Для дальнейшего построения пространства жестких перемещений область Ω считается частью плоского клина, продолжающего стороны γ . Будем считать, что тонким жестким ребром (или включением) является γ , а жестким препятствием — другой клин, расположенный на

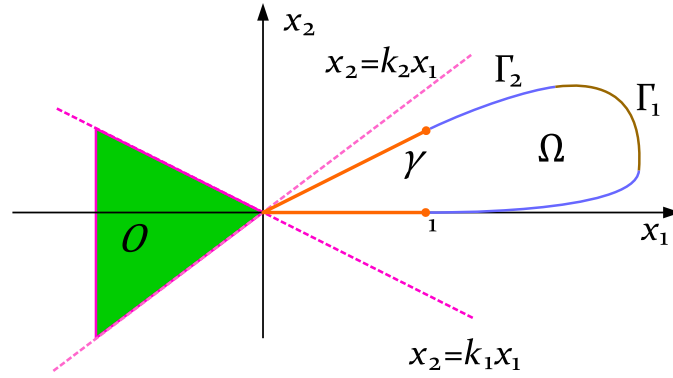


Рисунок 3 – Геометрия задачи для композитного тела с тонким ребром жесткости

плоскости.

$$O = \{-\infty < x_1 \leq 0, \quad k_2 x_1 \leq x_2 \leq k_1 x_1\}, \quad -\infty < k_1 < 0 < \alpha \leq k_2 < \infty.$$

Обозначим через $W = (w_1, w_2)$ вектор перемещений. Предположим, что тело закреплено на части Γ_1 границы, т.е.

$$W = (0, 0) \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \quad (4.1)$$

Введем пространства Соболева

$$H_{\Gamma_1}^{1,0}(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\}, \quad H(\Omega) = H_{\Gamma_1}^{1,0}(\Omega)^2.$$

Вспоминаем тензоры деформации и напряжения, описывающие деформацию тела для двумерной теории упругости

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad \sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i, j = 1, 2, \quad (4.2)$$

где запятая в первой формуле в (4.2) обозначает соответствующую производную; предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Тензор упругих коэффициентов задается элементами c_{ijkl} , которые предполагаются симметричными и положительно определенными:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),$$

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Известное неравенство Корна имеет следующий вид:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) \geq c \|W\|_{H(\Omega)}^2, \quad \forall W \in H(\Omega), \quad (4.3)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от W [9].

Замечание 4.1 Неравенство (4.3) обеспечивает эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega)$ и полунормы, определяемой левой частью (4.3).

Пространство инфинитезимальных жестких перемещений $R(\gamma)$ определяется в соответствии со следующими соотношениями [8]:

$$R(Z) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2); b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in Z\}. \quad (4.4)$$

Здесь Z — некоторое подмножество $\bar{\Omega}$, слагаемое $c = (c_1, c_2)$ соответствует параллельному переносу, в то время как член $b(x_2, -x_1)$ описывает линейризованный поворот.

Чтобы дать вариационную формулировку, описывающую состояние равновесия тела с тонким ребром жесткости γ , введем функционал энергии

$$\Pi(F, W) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) - \int_{\Omega} FW,$$

где вектор $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ описывает внешние силы, действующие на тело, $FW = f_i w_i$.

Неравенство Корна (4.3) гарантирует коэрцитивность для функционала энергии $\Pi(F, W)$.

Множество допустимых перемещений для этой задачи задается объединением $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ следующих выпуклых и замкнутых множеств

$$K_1 = \{W \in H(\Omega) \mid W|_{\gamma} = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma), \quad b \geq -\frac{1}{\alpha}, \quad c_1 \geq 0\};$$

$$K_2 = \{W \in H(\Omega) \mid W|_{\gamma} = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),$$

$$b_{min} \leq b \leq -k_1 \quad c_1 \leq 0, \quad c_2 \geq k_1 c_1\},$$

где $b_{min} = \frac{\alpha - k_1}{1 + \alpha k_1}$ если $1 + \alpha k_1 < 0$, в противном случае $b_{min} = -\infty$;

$$K_3 = \{W \in H(\Omega) \mid W|_{\gamma} = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),$$

$$b \geq \frac{\alpha - k_2}{1 + \alpha k_2}, \quad c_1 \leq 0, \quad c_2 \leq k_2 c_1 \}.$$

Следует отметить, что ограничения на b и (c_1, c_2) , заданные в наборе $K_1 \cup K_2 \cup K_3$, достаточны, но не являются необходимыми для непроникания между препятствием и композитным телом. Также заметим, что множество $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ не является выпуклым, контрпример приведен в [37].

Рассмотрим следующую базовую задачу для математической модели, описывающей неклассический контакт специального композитного тела с недеформируемым препятствием острой формы:

$$\text{найти } U_F \in K_1 \cup K_2 \cup K_3 \quad \text{такое что} \quad \Pi(F, U_F) = \inf_{W \in K_1 \cup K_2 \cup K_3} \Pi(F, W). \quad (4.5)$$

Наряду с основной задачей (4.5) рассмотрим следующие три вспомогательные задачи:

$$\text{найти } U_l \in K_l \quad \text{такое что} \quad \Pi(F, U_l) = \inf_{W \in K_l} \Pi(F, W), \quad l = 1, 2, 3. \quad (4.6)$$

Каждая вспомогательная задача эквивалентна следующему вариационному неравенству

$$U_l \in K_l, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_l) \varepsilon_{ij}(W - U_l) \geq \int_{\Omega} F(W - U_l) \quad \forall W \in K_l, \quad l = 1, 2, 3.$$

Известно, что искомая функция U_F от (4.5) существует и может быть найдена как функция, доставляющая минимум по трем оптимальным значениям, т.е.

$$\Pi(F, U_F) = \min\{\Pi(F, U_1), \Pi(F, U_2), \Pi(F, U_3)\}, \quad (4.7)$$

где U_l , $l = 1, 2, 3$, являются решениями соответствующих задач (4.6) [37].

Задача оптимального управления

Наряду с основной задачей о равновесии (4.5) мы рассмотрим семейство задач о равновесии для множества \mathcal{F} функций F , описывающих внешние нагрузки. Мы предполагаем, что \mathcal{F} — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество в $L^2(\Omega)^2$. Заметим, что данные свойства \mathcal{F} гарантируют слабую замкнутость \mathcal{F} . Для постановки задачи оптимального управления рассмотрим слабо полунепрерывный сверху функционал $G : H(\Omega) \rightarrow R$, например, можно выбрать функционал G_1 с ясным физическим смыслом $G_1(W) = \|W - W_0\|_{L^2(\Omega)^2}$, характери-

зующий отклонение вектора перемещений от заданной функции W_0 . В качестве следующего примера можно рассмотреть функционал $G_2(W) = c_1$ (или $G_2(W) = c_2$), отражающий положение вершины клина. Другой тип возможных функционалов может быть связан с уменьшением нежелательных напряжений, например, мы можем иметь дело с интегралами

$$G_3^i = - \left| \int_{V_i} \sigma_{kl}(W) \right| \quad \text{с фиксированным } k, l \in \{1, 2\}, \quad i = 1, 2,$$

по окрестностям $V_1 = V_1(1, 0)$, $V_2 = V_2(1, \alpha)$ точек $(1, 0)$, $(1, \alpha)$, где ребра жесткости имеют концевые точки.

Определим функционал стоимости $J_G : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ следующим равенством

$$J_G(F) = G(U_F), \quad \text{где } F \in \mathcal{F}$$

служит контролем. Следует отметить, что одной из интересных особенностей этой задачи является определение положения острой кромки для равновесного состояния равновесия композитного тела. С учетом отмеченных особенностей сформулируем следующую задачу оптимального управления:

$$\text{найти } F^* \in \mathcal{F} \quad \text{такое что} \quad J_G(F^*) = \sup_{F \in \mathcal{F}} J_G(F). \quad (4.8)$$

Теорема 4.1 *Существует решение задачи оптимального управления (4.8).*

Пусть $\{F_n\}$ — максимизирующая последовательность. В силу ограниченности и слабой замкнутости множества \mathcal{F} можно выделить сходящуюся подпоследовательность (по-прежнему обозначаемую тем же индексом) $\{F_n\}$ такую, что

$$F_n \rightarrow F^* \quad \text{в } L^2(\Omega)^2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad F^* \in \mathcal{F}.$$

Поскольку каждой F_n , $n \in \mathbf{N}$, соответствует решение U_{F_n} , которое далее мы обозначаем через U_n , существует хотя бы одна подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$ такое, что $F_{n_k} \rightarrow F^*$ и его соответствующие решения удовлетворяют $U_{n_k} \in K_l$ для всех $k \in \mathbf{N}$, где l выбранное число из множества $\{1, 2, 3\}$. Фиксируем выбранное значение l . Так как в противном случае последовательность $\{F_n\}$ не сходится к F^* при $n \rightarrow \infty$. Теперь рассмотрим для $\{U_{n_k}\} \subset K_l$ следующие неравенства с $k \in \mathbf{N}$ и фиксированным значением l

$$U_{n_k} \in K_l, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_{n_k}) \varepsilon_{ij}(W - U_{n_k}) \geq \int_{\Omega} F_{n_k}(W - U_{n_k}) \quad \forall W \in K_l. \quad (4.9)$$

После подстановки $W = 0$ можно получить

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_{n_k}) \varepsilon_{ij}(U_{n_k}) \leq \int_{\Omega} F_{n_k} U_{n_k} \leq \|F_{n_k}\|_{L^2(\Omega)^2} \|U_{n_k}\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

Поскольку множество \mathcal{F} ограничено, последние неравенства вместе с (4.3) дают следующую равномерную оценку

$$\|U_{n_k}\|_{H(\Omega)} \leq C.$$

Следовательно, мы можем выделить подпоследовательность $\{U_{n_k}\}$ (по-прежнему обозначаемую тем же индексом), слабо сходящуюся к некоторому U^* в $H(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$. Заметим, что K_l слабо замкнуто, так как оно выпукло и замкнуто. Это означает, что $U^* \in K_l$. В силу теорем вложения мы получаем $U_{n_k} \rightarrow U^*$ сильно в $L^2(\Omega)^2$ при $k \rightarrow \infty$.

Теперь приступим к анализу (4.9) при произвольном фиксированном $W \in K_l$. Имея в виду соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F_{n_k} U_{n_k} = \int_{\Omega} F^* U^*,$$

слабую полунепрерывность билинейной формы

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W),$$

можно обосновать предельный переход при $k \rightarrow \infty$ в (4.9). В результате мы имеем

$$U_{n_k} \in K_l, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U^*) \varepsilon_{ij}(W - U^*) \geq \int_{\Omega} F^*(W - U^*) \quad \forall W \in K_l. \quad (4.10)$$

Ввиду произвольности $W \in K_l$ в вариационном неравенстве (4.10) получаем, что $U^* = U_{F^*}$.

Наконец, учитывая слабую сходимости $\{F_{n_k}\}$ и слабую полунепрерывность сверху функционала G , получаем

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} J_G(F) = \limsup_{n \rightarrow \infty} J_G(F_{n_k}) \leq J_G(F^*) = G(U_{F^*}) \leq \sup_{F \in \mathcal{F}} J_G(F).$$

Теорема 4.2 *Подпоследовательность решений $\{U_{n_k}\}$, выбранная при доказательстве теоремы (4.1), сходится к U^* сильно в $H(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$*

5 Оптимальные расположение и форма жесткого включения в контактной задаче для неоднородного двумерного тела

Существуют многочисленные исследования, связанные с задачами, описывающими контакт упругих тел с жесткими или упругими препятствиями, см., например, [39, 40]. Обзор контактных задач проведен например в [8, 9, 41]. Классическое граничное условие типа Синьорини предполагает достаточную регулярность соответствующего участка границы тела. Отметим работу [42], в которой впервые предложены и исследованы задачи со свободной границей для упругих тел с жестким включением, контактирующим с внешним жестким недеформируемым штампом.

В данном разделе уделяется внимание вариационным задачам, описывающим точечный контакт композитных объектов, имеющих острые клиновидные края. А именно, исследуются математические модели, описывающие равновесие упругих тел, содержащих жесткое включение в виде внешнего клина. В отличие от работы [42], предложен класс нелинейных контактных задач, в которых условия непроникания могут быть записаны для одной точки, расположенной на острой кромке. Исследуемые контактные задачи формулируются в виде задач минимизации функционала энергии над множествами допустимых перемещений. Доказано существование решения основной вариационной задачи (не менее одного и не более трех решений). Для трех вспомогательных задач каждое множество допустимых перемещений выпукло и замкнуто, а функционал энергии является коэрцитивным, строго выпуклым и слабо полунепрерывным снизу на подходящем пространстве Соболева. Эти свойства позволяют установить существование и единственность решения каждой вспомогательной задачи минимизации на выпуклых множествах. Вопрос о единственности решения задачи минимизации функционала энергии на невыпуклом множестве, являющемся объединением трех выпуклых множеств остается открытым. Для вспомогательных вариационных задач, сформулированных над отдельными множествами, получены эквивалентные дифференциальные условия. Результаты опубликованы в [37].

Тонкое жесткое включение на внешней кромке

Сформулируем контактную задачу для упругого тела, содержащего тонкое жесткое включение на внешней границе. Такая конфигурация может описывать тела, скрепленные ребрами жесткости. Рассмотрим ограниченную односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, которая состоит из двух кривых $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$. Предположим, что кривая,

состоящая из двух отрезков

$$\gamma = [0, 1] \times \{0\} \cup \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, \quad x_2 = \alpha x_1\}, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

является частью Γ_2 , так что $\gamma \subset \text{int}(\Gamma_2)$ (см. Рис. 4). Область Ω считается частью плоского клина, продолжающего стороны γ . Будем считать, что тонкое жесткое включение задается γ , а жесткое препятствие — другим плоским клином

$$O = \{-\infty < x_1 \leq 0, \quad k_2 x_1 \leq x_2 \leq k_1 x_1\}, \quad -\infty < k_1 < 0 < \alpha \leq k_2 < \infty.$$

Обозначим через $W = (w_1, w_2)$ вектор перемещений. Предположим, что тело закреплено на

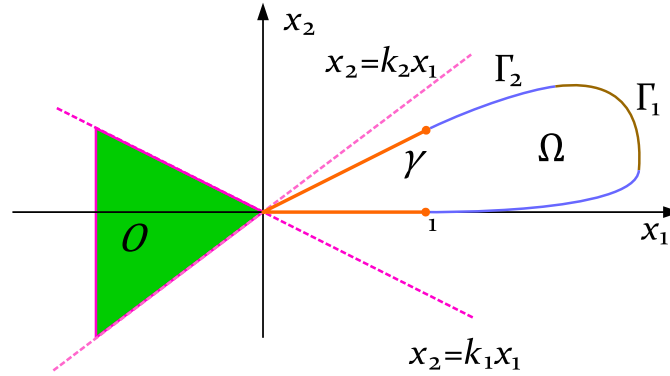


Рисунок 4 – Геометрия задачи для композитного тела с тонким жестким включением

части Γ_1 границы, т.е.

$$W = (0, 0) \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \quad (5.1)$$

Введем пространство Соболева

$$H_{\Gamma_1}^{1,0}(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\}, \quad H(\Omega) = H_{\Gamma_1}^{1,0}(\Omega)^2.$$

В соответствии с теорией упругости выпишем тензоры деформации и напряжения

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad \sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i, j = 1, 2, \quad (5.2)$$

где запятые в первой формуле (5.2) обозначают хорошо известное соглашение для производных, предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Тензор коэффициентов упругости задается элементами c_{ijkl} , которые предполагаются симметричными и положительно опреде-

ленными

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),$$

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Известное неравенство Корна имеет следующий вид:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) \geq c\|W\|_{H(\Omega)}^2, \quad \forall W \in H(\Omega), \quad (5.3)$$

где константа $c > 0$ не зависит от W . Чтобы дать вариационную формулировку, описывающую состояние равновесия тела с жестким включением γ , введем функционал энергии

$$\Pi(W) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) - \int_{\Omega} FW,$$

где вектор $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ описывает воздействие внешних сил, $FW = f_i w_i$. Неравенство Корна (5.3) обеспечивает коэрцитивность функционала Π .

Приведем аргументы, обосновывающие условия непроникания между жестким включением γ и жестким препятствием O для заданной геометрической конфигурации. Здесь следует отметить, что наши рассуждения основываются на допущении о бесконечно малых перемещениях в рамках линейной теории упругости. Считаем, что тело в недеформированном состоянии лежит перед препятствием клиновидной формы O (см. Рис. 4). Пространство бесконечно малых жестких перемещений $R(\gamma)$ определяется в соответствии со следующими соотношениями [8]:

$$R(Z) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2); b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in Z\}, \quad (5.4)$$

где Z — некоторое подмножество множества $\bar{\Omega}$. Точки, лежащие на γ , в результате деформации не должны проникать за пределы неподвижной границы препятствия O , это условие запишем в виде

$$x + \rho(x) \notin \text{int}(O) \quad \text{для} \quad x \in \gamma. \quad (5.5)$$

В соответствии с (5.4) точки $x = (x_1, x_2) \in \gamma$ жесткого включения перемещаются в точки со следующими координатами

$$x + \rho(x) = (x_1 + bx_2 + c_1, x_2 - bx_1 + c_2), \quad x_2 \in \{0, \alpha x_1\}, \quad x_1 \in [0, 1]. \quad (5.6)$$

Здесь $c = (c_1, c_2)$ подразумевает параллельный перенос, тогда как член $b(x_2, -x_1)$ описывает линеаризованный поворот против часовой стрелки вокруг точки $x + c$.

При $c_1 \geq 0$ условие (5.5) выполняется с учетом (5.6) и равенств для координат удовлетворяющих $x_2 = 0$ и $x_2 = \alpha x_1$, как только имеет место

$$x_1 \geq 0, \quad x_1 + b\alpha x_1 \geq 0 \quad \text{для всех } x_1 \in [0, 1],$$

которое, очевидно, справедливо при $b \geq -1/\alpha$. Действительно, это обеспечивает неотрицательность первой компоненты $x_1 + \rho_1(x)$ для $x \in \gamma$, таким образом, мы имеем сдвиг γ вправо от O . Поэтому в случае $c_1 \geq 0$ соответствующее множество допустимых перемещений принимает следующий вид

$$K_1 = \{W \in H(\Omega) \mid W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma), \quad b \geq -\frac{1}{\alpha}, \quad c_1 \geq 0\}.$$

Для $c_1 \leq 0$ следует различать два случая в зависимости от параметров c_2 и b . Первый случай соответствует конфигурации, когда после деформации включение смещается над препятствием O . Значения $b > 0$ описывают вращение по часовой стрелке. Поэтому, из (5.5) и (5.6) при $x_2 = 0$ имеем условие

$$-bx_1 + c_2 \geq k_1(x_1 + c_1) \quad \text{для всех } x_1 \in [0, 1]. \quad (5.7)$$

Положив $x_1 = 0$, получим $c_2 \geq k_1 c_1$. Предполагая, что $c_2 \geq k_1 c_1$ выполнено, мы обнаруживаем, что (5.7) верно для всех $0 \leq b \leq -k_1$, поскольку $k_1 < 0$. Для ограничения возможных поворотов включения против часовой стрелки ($b \leq 0$) следует рассматривать угол, лежащий в верхней полуплоскости между прямолинейными линиями $x_2 = k_1 x_1$ и $x_2 = \alpha x_1$. Если угол острый, т.е. $1 + \alpha k_1 < 0$, то необходимо выполнение условий (5.5) и (5.6) при $x_2 = \alpha x_1$

$$k_1(x_1 + b\alpha x_1) \leq \alpha x_1 - x_1 b \quad \text{для всех } x_1 \in [0, 1],$$

которое выполняется при

$$b \geq \frac{\alpha - k_1}{1 + \alpha k_1}, \quad \text{где } \frac{\alpha - k_1}{1 + \alpha k_1} < 0.$$

Для прямого или тупого угла допустим произвольный b , так как в этом случае включение поворачивается на угол не превышающий $\pi/2$. В результате имеем следующее допустимое мно-

жество

$$K_2 = \{W \in H(\Omega) \mid W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),$$

$$b_{min} \leq b \leq -k_1 \quad c_1 \leq 0, \quad c_2 \geq k_1 c_1 \},$$

где $b_{min} = \frac{\alpha - k_1}{1 + \alpha k_1}$ if $1 + \alpha k_1 < 0$, в противном случае $b_{min} = -\infty$.

Второй случай, когда выполняется (5.5) при $c_1 \leq 0$ соответствует смещению включения γ ниже препятствия O после деформации. При вращении против часовой стрелки должно выполняться условие непроникания для кривой $x_2 = \alpha x_1$

$$\alpha x_1 - b x_1 + c_2 \leq k_2(x_1 + b \alpha x_1 + c_1) \quad \text{для всех } x_1 \in [0, 1]. \quad (5.8)$$

При $x_1 = 0$, следует, что $c_2 \leq k_2 c_1$. Тогда (5.8) верно для b такого, что

$$\alpha x_1 - b x_1 \leq k_2(x_1 + b \alpha x_1) \quad \text{для всех } x_1 \in [0, 1],$$

ограничения на b примут вид

$$\frac{\alpha - k_2}{1 + \alpha k_2} \leq b, \quad \text{где } \frac{\alpha - k_2}{1 + \alpha k_2} < 0$$

поскольку $k_2 \geq \alpha$. Вращая по часовой стрелке, для каждого положительного b выполняется

$$-b x_1 + c_2 \leq k_2(x_1 + c_1) \quad \text{для всех } x_1 \in [0, 1].$$

В этом случае допустимое множество определяется выражением

$$K_3 = \{W \in H(\Omega) \mid W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),$$

$$b \geq \frac{\alpha - k_2}{1 + \alpha k_2}, \quad c_1 \leq 0, \quad c_2 \leq k_2 c_1 \}.$$

Рассмотрим задачу минимизации:

$$\text{найти } U \in K_1 \cup K_2 \cup K_3 \quad \text{такое что} \quad \Pi(U) = \inf_{W \in K_1 \cup K_2 \cup K_3} \Pi(W). \quad (5.9)$$

Очевидно, что каждое из множеств K_i , $i = 1, 2, 3$ выпукло и замкнуто [43]. В то же время

можно заметить, что объединение $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ замкнуто, но не выпукло.

Невыпуклость допустимого множества не позволяет применять стандартные методы вариационного исчисления. Доказательство следующей теоремы существования, основано на разбиении на выпуклые множества [37].

Теорема 5.1 *Существует не менее одного и не более трех решений U вариационной задачи (5.9) над невыпуклым множеством $K_1 \cup K_2 \cup K_3$.*

Доказательство приведено в [37]. Можно заметить, что решение (5.9) может быть не единственным, например, когда $\Pi(U_1) = \Pi(U_2) < \Pi(U_3)$ при $U_1 \neq U_2$.

Выясним некоторые качественные свойства вспомогательных следующих задач

$$\text{найти } U_i \in K_i \text{ такие что } \Pi(U_i) = \inf_{W \in K_i} \Pi(W), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.10)$$

В предположении дополнительной регулярности решений U_i , $i = 1, 2, 3$, из (5.10) можно получить эквивалентные дифференциальные соотношения. Сначала отметим, что дифференцируемость по Гато $\Pi(W)$ обеспечивает эквивалентность каждой задачи (5.10) одному из следующих вариационных неравенств

$$U_l \in K_l, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_l) \varepsilon_{ij}(W - U_l) \geq \int_{\Omega} F(W - U_l) \quad \forall W \in K_l, \quad l = 1, 2, 3.$$

Например, подробно рассмотрим задачу, соответствующую вариационному неравенству для множества K_2

$$U_2 \in K_2, \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(U_2) \varepsilon_{ij}(W - U_2) \geq \int_{\Omega} F(W - U_2) \quad \forall W \in K_2. \quad (5.11)$$

Предполагая достаточную гладкость решения $U_2 \in K_2$ получим следующую эквивалентную постановку (5.12)–(5.15)

$$-\sigma_{ij,j}(U_2) = F_i \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2; \quad (5.12)$$

$$\sigma_{\tau}(U_2) = 0, \quad \sigma_{\nu}(U_2) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \setminus \gamma; \quad (5.13)$$

$$\int_{\gamma} (\sigma_{\nu}(U_2) \rho^2 \nu + \sigma_{\tau}(U_2) \rho^2 \tau) = 0; \quad (5.14)$$

где $\rho^2 = U_2$ п.в. на γ .

$$\int_{\gamma} (\sigma_{\nu}(U_2)\rho\nu + \sigma_{\tau}(U_2)\rho\tau) \geq 0, \quad (5.15)$$

для всех ρ описанных в рамках множества K_2 . В предыдущих формулах использованы следующие обозначения

$$\sigma_{\nu}(V) = \sigma_{ij}(V)\nu_i\nu_j, \quad \sigma_{\tau}(V) = (\sigma_{\tau}^1(V), \sigma_{\tau}^2(V)) = (\sigma_{1j}(V)\nu_j, \sigma_{2j}(V)\nu_j) - \sigma_{\nu}(V)\nu,$$

$$\bar{V}\nu = \bar{v}_i\nu_i, \quad \bar{V}\tau = (\bar{V}_{\tau}^1, \bar{V}_{\tau}^2), \quad \bar{v}_i = (\bar{V}\nu)\nu_i + \bar{V}_{\tau}^i, \quad i = 1, 2,$$

а $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — нормаль к Γ .

Аналогично рассмотрены также случаи объемного клиновидного жесткого включения и случай шарнирно соединенных двух тонких включений [37].

Случай препятствия с тупым углом и тела с острой фигурной кромкой

Предположим, что вблизи точки контакта часть границы препятствия O состоит из двух прямолинейных линий, заданных уравнениями $x_2 = k_2x_1$, $x_2 = k_1x_1$, $k_2 \leq 0$, $k_1 \geq 0$, составляющий тупой угол такой, как показано на рисунке 5.

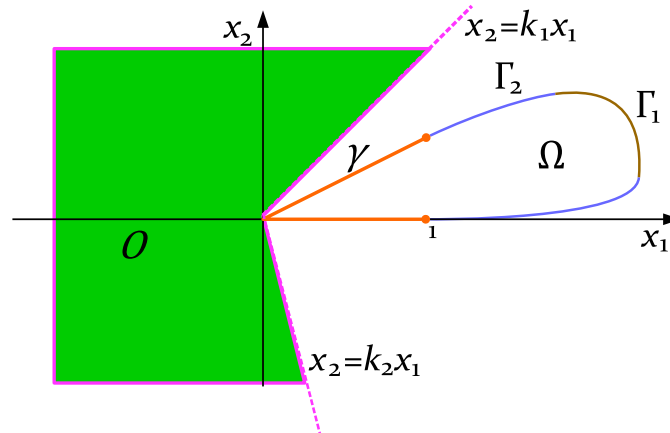


Рисунок 5 – Геометрия композитного тела и жесткого препятствия с тупым углом

В этом случае потребуем выполнения следующих соотношений согласно (5.5) и (5.6) при $x_2 = 0$

$$k_2(x_1 + c_1) \leq (-bx_1 + c_2) \quad \text{для всех } x_1 \in [0, 1], \quad (5.16)$$

и при $x_2 = \alpha x_1$

$$k_1(x_1 + b\alpha x_1 + c_1) \geq \alpha x_1 - bx_1 + c_2 \quad \text{для всех } x_1 \in [0, 1]. \quad (5.17)$$

Положив в двух последних неравенствах $x_1 = 0$, получим

$$k_2 c_1 \leq c_2 \leq k_1 c_1. \quad (5.18)$$

Можно заметить, что последнее неравенство выполняется только при неотрицательных значениях c_1 . Предполагая, что (5.18) выполнено, неравенство (5.16) верно для $b \leq -k_2$. Так же как (5.17) имеет место, когда

$$b \geq \frac{\alpha - k_1}{1 + k_1 \alpha}.$$

В рамках предыдущего рассмотрения в разделе 1 для коэффициента α , удовлетворяющего условию $0 < \alpha < k_1$, задача минимизации имеет следующий вид:

$$\text{найти } \hat{U} \in \hat{K} \text{ такое что } \Pi(\hat{U}) = \inf_{W \in \hat{K}} \Pi(W),$$

над множеством допустимых перемещений

$$\hat{K} = \{W \in H(\Omega) \mid W|_\gamma = \rho, \quad \rho(x) \in R(\gamma),$$

$$\frac{\alpha - k_1}{1 + k_1 \alpha} \leq b \leq -k_2, \quad c_1 \geq 0, \quad k_2 c_1 \leq c_2 \leq k_1 c_1 \}.$$

Можно обосновать, что последняя задача имеет единственное решение \hat{U} , так как множество \hat{K} выпукло.

6 Контактная задача для упругой пластины с плоским жестким включением.

Исследуется задача равновесия пластины под действием внешних сил. Предполагается, что пластина содержит плоское жесткое включение, которое контактирует с недеформируемым телом на части внешней границы. Задача ставится в виде вариационного неравенства. Установлены существование и единственность решения задачи. В предположении достаточной гладкости решения найдена дифференциальная постановка задачи. Обоснована эквивалентность двух постановок: дифференциальной и вариационной.

Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве R^2 с гладкой границей Γ , единичную внешнюю нормаль к которой обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Будем считать, что Γ состоит из гладких кривых γ и Γ_0 , $\gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, $meas \Gamma_0 > 0$, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ (рис. 6). Кривая γ_2 соответствует плоскому жесткому включению. Считаем, что γ контактирует на границе с недеформируемым телом.

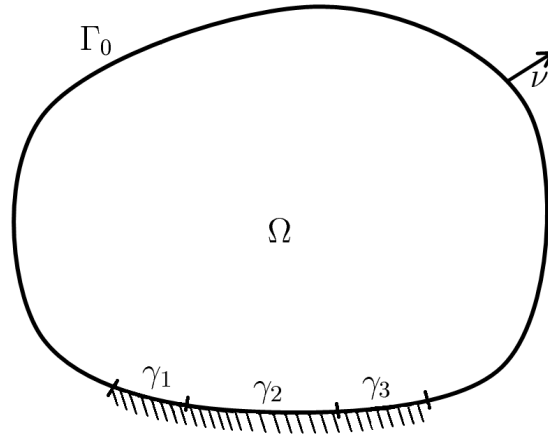


Рисунок 6 – Геометрия контактной задачи

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ – тензор модулей упругости, который обладает свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L_{loc}^{\infty}(R^2), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = const > 0.$$

Аналогичным условиям удовлетворяет и тензор $D = \{d_{ijkl}\}$. Всюду в работе все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Введем пространство функций, заданных на γ :

$$R(\gamma) = \{\zeta(x) = (\rho, l) \mid \rho(x) = b(-x_2, x_1) + (c_1, c_2);$$

$$l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, x \in \gamma\},$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 = const; x = (x_1, x_2)$.

В рассматриваемой ситуации дифференциальная постановка задачи равновесия будет следующей. Найти функции $W = (w_1, w_2), w, (\rho^0, l^0) \in R(\gamma), \sigma = \{\sigma_{ij}\}, m = \{m_{ij}\}, i, j = 1, 2$, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = F, \quad \sigma = A\varepsilon(W) \quad \text{в } \Omega, \quad (6.1)$$

$$-\nabla\nabla m = f, \quad m = -D\nabla\nabla w \quad \text{в } \Omega, \quad (6.2)$$

$$w_1 = w_2 = w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (6.3)$$

$$-W\nu \geq \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \quad \text{на } \gamma, \quad \sigma_\tau = 0, \quad t_\nu = 0, \quad -\sigma_\nu \geq |m_\nu| \quad \text{на } \gamma_1 \text{ и } \gamma_3, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = a_1^0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = a_2^0, \quad W = \rho^0, \quad w = l^0 \quad \text{на } \gamma_2, \quad (6.5)$$

$$\int_{\gamma_1} (\sigma_\nu W_\nu + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_2} (\sigma_\nu \cdot W - t_\nu w + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) + \int_{\gamma_3} (\sigma_\nu W_\nu + m_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu}) = 0, \quad (6.6)$$

$$\int_{\gamma_2} (\sigma_\nu \cdot U - t_\nu u + m_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu}) \geq 0, \quad \forall (U, u) \in K_0, \quad (6.7)$$

где $l^0 = a_0^0 + a_1^0x_1 + a_2^0x_2$. Квадратные скобки $[v] = v^+ - v^-$ означают скачок функции v на γ , где v^\pm соответствуют значениям функции v на положительном и отрицательном берегах кривой γ по отношению к нормали ν ; $F = (f_1, f_2)$; $f_1, f_2, f \in L^2(\Omega)$ - заданные внешние силы. Индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующим координатам: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. При этом используются следующие обозначения: $\sigma = \{\sigma_{ij}\}, m = \{m_{ij}\}$ - тензоры усилий и моментов, $\varepsilon(W) = \{\varepsilon_{ij}(W)\}$ - тензор малых деформаций, $i, j = 1, 2$; W, w - горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной поверхности пластины соответственно; $m_\nu(w) = m_\nu$ - изгибающий момент, $t_\nu(m) = t_\nu$ - перерезывающая сила;

$$\operatorname{div}\sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j}), \quad \nabla\nabla m = m_{ij,ij}, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2), \quad W_\nu = W \cdot \nu,$$

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j), \quad \nabla\nabla w = \{w_{,ij}\}_{i,j=1}^2, \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right),$$

$$m_\nu = -m_{ij}\nu_j\nu_i, \quad t_\nu = -m_{ij,k}\tau_k\tau_j\nu_i - m_{ij,j}\nu_j, \quad (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1) \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Множество допустимых перемещений K_0 , которое является выпуклым и замкнутым, определяется следующим образом:

$$K_0 = \{(W, w) \in H_{\Gamma_0}(\Omega) \mid -W\nu \geq \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| \text{ на } \gamma, \quad W = \rho,$$

$$w = l, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = a_2 \text{ на } \gamma_2; \quad (\rho, l) \in R(\gamma); \quad a_1, a_2 = \text{const}\},$$

где

$$H_{\Gamma_0}(\Omega) = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_0}^2(\Omega),$$

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{W \in H^1(\Omega) \mid W = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$H_{\Gamma_0}^2(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_0\}.$$

Приведем вариационную формулировку задачи (6.1)-(6.7). Введем в рассмотрение функционал энергии

$$\Pi_c(W, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(W)\varepsilon(W) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} m(w)\nabla\nabla w - \int_{\Omega} FW - \int_{\Omega} fw$$

и рассмотрим задачу минимизации: найти $(W, w) \in K_0$ такое, что

$$\Pi_c(W, w) = \inf_{K_0} \Pi_c. \quad (6.8)$$

Теорема 6.1 *Задача (6.8) имеет единственное решение $(W, w) \in K_0$, удовлетворяющее вариационному неравенству*

$$\int_{\Omega} \sigma(W)\varepsilon(\bar{W} - W) - \int_{\Omega} m(w)(\nabla\nabla\bar{w} - \nabla\nabla w) \geq \int_{\Omega} F(\bar{W} - W) + \int_{\Omega} f(\bar{w} - w) \quad \forall (\bar{W}, \bar{w}) \in K_0. \quad (6.9)$$

Теорема 6.2 *Формулировки (6.1)-(6.7) и (6.9) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

7 О разрешимости первой краевой задачи для уравнения нечетного порядка с меняющимся направлением времени

Ключевые слова: уравнение с меняющимся направлением времени, первая краевая задача, нестационарный метод Галеркина, приближенные решения, неравенство, оценка.

Исследования разрешимости краевых задач для неклассических уравнений математической физики высокого порядка с меняющимся направлением времени были проведены во многих работах [44–54].

В настоящей работе с помощью нестационарного метода Галеркина и специальной регуляризации рассматривается обобщенная и регулярная разрешимость первой краевой задачи для уравнения нечетного порядка с меняющимся направлением времени.

Пусть Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей γ , $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $\Gamma = \gamma \times (0, T)$.

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x, t) D_t^i u - \Delta u + c(x)u = f(x, t). \quad (7.1)$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (7.1) непрерывно дифференцируемы в \bar{Q} . Введем обозначения для множеств на основаниях цилиндра:

$$S_0^\pm = \{(x, 0) : (-1)^s k_{2s+1}(x, 0) \geq 0, x \in \Omega\},$$

$$S_T^\pm = \{(x, T) : (-1)^s k_{2s+1}(x, T) \geq 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (7.1) в области Q такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \quad (7.2)$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}; \quad D_t^s u|_{S_0^+} = 0; \quad D_t^j u|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}, \quad D_t^s u|_{S_T^-} = 0. \quad (7.3)$$

Для доказательства существования обобщенного решения знакоопределенность функций $k(x, 0)$, $k(x, T)$ не требуется. Также существование обобщенного решения будет доказано в новом определении [55, 56].

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ - анизотропное пространство Соболева с нормой [57, 58].

$$\|u\|_{m,s}^2 = \int_Q \left[\sum_{i=1}^n (D_{x_i}^m u)^2 + (D_t^s u)^2 + u^2 \right] dQ.$$

Через C_L обозначим класс функций из $W_2^{2,2s+1}(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (7.2), (7.3). В [47] доказано следующее утверждение.

Лемма 7.1 [4] Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и выполнено условие

$$(-1)^s [2k_{2s} - (1 + 2s)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $u(x, t) \in C_L$ справедливо неравенство

$$(Lu, u) \geq C_1 \|u\|_{1,s}^2, \quad C_1 > 0.$$

Из леммы 7.1 следует, что при выполнении условия леммы регулярное решение краевой задачи (7.1)-(7.3) единственно.

Введем обозначения: $k_0(x) = (-1)^s k_{2s+1}(x, 0)$, $k_T(x) = (-1)^s k_{2s+1}(x, T)$. Определим положительную и отрицательную срезающие функции

$$k_0^+(x) = \begin{cases} k_0(x), & \text{если } k_0(x) > 0, \\ 0, & \text{если } k_0(x) \leq 0, \end{cases}$$

$k_0^-(x) = k_0(x) - k_0^+(x)$. Аналогичным образом определяются функции $k_T^+(x)$, $k_T^-(x)$.

Пусть $\overset{\circ}{W}_2^{1,s}(Q)$ есть замыкание C_L по норме пространства $W_2^{1,s}(Q)$.

Определение. Функцию $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,s}(Q)$ назовем обобщенным решением краевой задачи (7.1)-(7.3), если найдутся функции $\chi_0(x)$, $\chi_T(x)$ из пространства $L_2(\Omega)$ такие, что для любой функции $w(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,s}(Q)$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[(-1)^{s+1} k_{2s+1} D_t^s u D_t^{s+1} w + (-1)^s (k_{2s} - k_{2s+1,t}(s+1)) D_t^s u D_t^s w + \sum_{i=1}^n u_{x_i} w_{x_i} + cuw + \right] dQ + \dots \\ & = \int_Q f w dQ - \int_{\Omega_T^+} \sqrt{|k_T(x)|} \chi_T(x) D_t^s w(x, T) dx - \int_{\Omega_0^-} \sqrt{|k_0(x)|} \chi_0(x) D_t^s w(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Обобщенная разрешимость краевой задачи

Теорема 7.1 Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и выполнено условие

$$(-1)^s [2k_{2s} - (1 + 2s)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0, \quad f \in L_2(Q).$$

Тогда существует обобщенное решение $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,s}(Q)$ краевой задачи (7.1)-(7.3).

Для доказательства теоремы 7.1 будем использовать нестационарный метод Галеркина с привлечением метода эллиптической и параболической регуляризации [55].

Регуляризованная краевая задача. Найти решение уравнения

$$L_\varepsilon v \equiv \varepsilon(-1)^{s+1} D_t^{2s+2} v + Lv = f(x, t), \quad (7.4)$$

в области Q такое, что

$$v|_\Gamma = 0, \quad (7.5)$$

$$D_t^i v|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}, \quad (-\varepsilon D_t^{s+1} v + k_0^+ D_t^s v)|_{t=0} = 0, \quad (7.6)$$

$$D_t^j v|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}, \quad (-\varepsilon D_t^{s+1} v + k_T^- D_t^s v)|_{t=T} = 0. \quad (7.7)$$

Для $\varepsilon > 0$ положим $L_\varepsilon u = \varepsilon(-1)^{s+1} D_t^{2s+2} u + Lu$. В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются решением спектральной задачи

$$-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad x \in \Omega,$$

$$\varphi_k|_\Gamma = 0$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ и $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Пусть $(u, v)_0 = \int_\Omega u(x)v(x)dx$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Приближенные решения $u^{N,\varepsilon}(x, t)$ краевой задачи (7.4)-(7.7) будем искать в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x, t) \equiv v(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^{N,\varepsilon}(t) \varphi_k(x),$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решения следующей краевой задачи для системы обычно-

венных дифференциальных уравнений

$$(L_\varepsilon v, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad l = \overline{1, N}, \quad (7.8)$$

$$D_t^i c_l^{N, \varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}, \quad (-\varepsilon D_t^{s+1} c_l^{N, \varepsilon} + \sum_{k=1}^N a_{kl} D_t^s c_k^{N, \varepsilon})|_{t=0} = 0, \quad (7.9)$$

$$D_t^j c_l^{N, \varepsilon}|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}, \quad (-\varepsilon D_t^{s+1} c_l^{N, \varepsilon} + \sum_{k=1}^N b_{kl} D_t^s c_k^{N, \varepsilon})|_{t=T} = 0. \quad (7.10)$$

где

$$a_{kl} = \int_{\Omega} k_0^+(x) \varphi_k \varphi_l dx,$$

$$b_{kl} = \int_{\Omega} k_T^-(x) \varphi_k \varphi_l dx.$$

Однозначная разрешимость краевой задачи (7.8)-(7.10) следует из единственности решения данной краевой задачи.

Регулярная разрешимость краевой задачи

Далее рассмотрим случай $(-1)^s k_{2s+1}(x, 0) > 0$, $(-1)^s k_{2s+1}(x, T) < 0$. В этом случае краевые условия (7.9), (7.10) будут иметь вид:

$$D_t^i c_l^{N, \varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s}, \quad D_t^j c_l^{N, \varepsilon}|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s}. \quad (7.11)$$

В работе [47] с помощью стационарного метода Галеркина исследована разрешимость краевой задачи (7.1)-(7.3) в случае

$$(-1)^s k_{2s+1}(x, 0) > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x, T) < 0,$$

и получена оценка погрешности метода Галеркина для этого случая. В работе [52] для этой задачи с помощью стационарного метода Галеркина доказана однозначная регулярная разрешимость в весовом пространстве Соболева в случае

$$(-1)^s k_{2s+1}(x, 0) \leq 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x, T) \geq 0,$$

и также получена оценка погрешности метода Галеркина.

В данной работе с помощью нестационарного метода Галеркина и метода регуляризации

доказана однозначная регулярная разрешимость краевой задачи (7.1)-(7.3) в случае

$$(-1)^s k_{2s+1}(x, 0) > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x, T) < 0.$$

Здесь в отличие от работы [47] для приближенных решений получены глобальные априорные оценки по всей области Q . На основании этих оценок получена оценка погрешности нестационарного метода Галеркина.

Как вытекает из рассуждений в доказательстве теоремы, имеет место лемма.

Лемма 7.2 Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой и выполнено условие

$$(-1)^s [2k_{2s} - (1 + 2s)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0.$$

Тогда справедлива оценка

$$(L_\varepsilon v, v) \geq \tilde{C}_1 \|v\|_{1,s}^2 + \varepsilon \|D_t^{s+1} v\|^2, \quad \tilde{C}_1 > 0. \quad (7.12)$$

Доказательство леммы 7.2 проводится аналогично доказательству теоремы 7.1.

Теорема 7.2 Пусть выполнены условия леммы 7.2, а также

$$(-1)^s [2k_{2s} + k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0, \quad f(x, t) \in W_2^{0,1}(Q),$$

$$(-1)^s k_{2s+1}(x, 0) > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x, T) < 0, \quad x \in \Omega.$$

$f(x, 0) = 0, \quad f(x, T) = 0$ для почти всех x из Ω .

Тогда краевая задача (7.1)-(7.3) имеет единственное решение $u(x, t)$ из $W_2^{2,2s+1}(Q)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{2,2s+1} \leq C_3 \|f\|_{0,1}, \quad C_3 > 0. \quad (7.13)$$

Теорема 7.3 Пусть выполнены все условия теоремы 7.2. Тогда для приближенных решений $u^{N,\varepsilon}(x, t)$ справедлива оценка

$$\|u - u^{N,\varepsilon}\|_{1,s} \leq C_4 \|f\|_{0,1} (\sqrt{\varepsilon} + \lambda_{N+1}^{-1/2}), \quad C_4 > 0, \quad (7.14)$$

где $u(x, t)$ - точное решение краевой задачи (7.1)-(7.3).

8 Краевые задачи для уравнения Соболева высокого порядка смешанного типа

Краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка рассматривались в работах [47, 49, 59]. С другой стороны, многие авторы изучали уравнения соболевского типа [5, 60, 61]. Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости двух краевых задач для уравнения Соболева высокого порядка смешанного типа.

Пусть Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей S . Положим $Q = \Omega \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$, $T = \text{const} > 0$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \leq t \leq T$.

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s} k_i(x, t) D_t^i u - (\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta) \Delta u + c(x)u = f(x, t), \quad (8.1)$$

где α, β - положительные постоянные, $s \geq 1$ - натуральное число.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (8.1) достаточно гладкие. Введем множества $\Omega_0^\pm = \{(x, 0) : (-1)^{s-1} k_{2s}(x, 0) \geq 0, x \in \Omega\}$, $\Omega_T^\pm = \{(x, T) : (-1)^{s-1} k_{2s}(x, T) \geq 0, x \in \Omega\}$.

Краевая задача I. Найти решение уравнения (8.1) в Q , такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad (8.2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (8.3)$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, s-1}; \quad D_t^s u|_{\Omega_0^+} = 0;$$

$$D_t^j u|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{s+1, 2s-1}; \quad D_t^s u|_{\Omega_T^-} = 0. \quad (8.4)$$

Краевая задача II. Найти решение уравнения (8.1) в Q , такое, что выполняются условия (8.2), (8.4) и

$$u(x, 0) = \int_0^T N(\tau) u(x, \tau) d\tau, \quad (8.5)$$

где $N(t) \in L_2(0, T)$ известная функция, $N_0 = \int_0^T N(\tau) d\tau$, $N_1 = (1 - N_0)^{-1}$.

Отметим, что эти задачи при $s = 1$, $\alpha = \beta = 1$ рассмотрены в работе [62].

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ - анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{m,s}^2 = \int_Q \left[\sum_{|\alpha| \leq m} (D_x^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2 \right] dQ$$

с $\|u\|_{m,m} = \|u\|_m$ for $u \in W_2^{m,m}(Q) = W_2^m(Q)$.

Пусть скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$: $(u, v)_0 = \int_\Omega u(x)v(x)dx$, $\forall u, v \in L_2(\Omega)$ и $(u, v) = \int_0^T (u, v)_0 dt$ для $u, v \in L_2(Q)$, $\|u\|^2 = (u, u)$.

Разрешимость краевой задачи I

Введем класс функций

$$C_L = \{u(x, t) \in W_2^{2,2s}(Q) : u_{tx_i x_j} \in L_2(Q), i, j = \overline{1, n} \text{ и выполнены условия (8.2)-(8.4)} \}.$$

Интегрированием по частям, доказывается следующее утверждение.

Лемма 8.1 Пусть $c(x) \geq d_0$ для достаточно большого числа $d_0 > 0$, и выполнены следующие условия:

$$(-1)^{s-1} [2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \geq \delta > 0, \quad (-1)^{s-1} k_{2s}(x, T) > 0.$$

Тогда существует число $\lambda > 0$, такое, что для любых функций $u(x, t) \in C_L$ справедливо следующее неравенство:

$$(Lu, e^{-2\lambda t} u_t) \geq C_1 \left[\|u\|_{1,s}^2 + \int_Q \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 dQ \right], \quad C_1 = const > 0.$$

Из Леммы 8.1 следует единственность регулярного решения краевой задачи (8.1)-(8.4).

Пусть функции $\varphi_k(x)$ являются решениями спектральной задачи

$$-\Delta \varphi = \lambda \varphi, \quad x \in \Omega, \quad \varphi|_S = 0.$$

Функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, и соответствующие им собственные значения удовлетворяют условиям: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ и $\lambda_k \rightarrow +\infty$ для $k \rightarrow \infty$. Определим $L_\varepsilon u = (-1)^s \varepsilon D_t^{2s+1} u + Lu$ для $0 < \varepsilon \leq 1$.

Приближенное решение имеет вид

$$u^{N,\varepsilon}(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^{N,\varepsilon}(t) \varphi_k(x), \quad N \geq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решения следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad (8.6)$$

$$D_t^i c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, s}; \quad D_t^j c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0, \quad j = \overline{s+1, 2s}. \quad (8.7)$$

Используя Лемму 8.1, нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 8.2 Пусть выполнены условия Леммы 8.1 и

$$(-1)^{s-1} k_{2s}(x, 0) > 0, \quad f(x, t) \in L_2(Q)$$

. Тогда для приближенного решения справедлива следующая оценка:

$$\varepsilon \|D_t^{s+1} u^{N,\varepsilon}\|^2 + \|u^{N,\varepsilon}\|_{1,s}^2 + \sum_{i=1}^n \|u_{tx_i}^{N,\varepsilon}\|^2 \leq C_2 \|f\|^2,$$

где $C_2 = \text{const} > 0$ не зависит от $N, \varepsilon, f(x, t)$.

Из Леммы 8.2 следует однозначная разрешимость краевой задачи (8.6), (8.7).

Мы доказываем априорные оценки для приближенного решения $u^{N,\varepsilon}(x, t)$, используя теоремы вложения и теоремы о следах. Из этих оценок следует существование регулярного решения краевой задачи (8.1)-(8.4).

Теорема 8.1 Пусть $c(x) \geq d_0$ для достаточно большого числа $d_0 > 0$ и

$$(-1)^{s-1} [2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \geq \delta > 0, \quad (-1)^{s-1} [2k_{2s-1} + k_{2s,t}] \geq \delta > 0,$$

$$(-1)^{s-1} k_{2s}(x, 0) > 0, \quad (-1)^{s-1} k_{2s}(x, T) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in W_2^{0,1}(Q)$, такой, что $f(x, 0) = 0$ п.в. в Ω , краевая задача (8.1)-(8.4) имеет единственное решение $u(x, t) \in C_L$, и справедлива следующая априорная оценка:

$$\|u\|_{2,2s}^2 + \|\Delta u_t\|^2 \leq C_3 \|f\|_{0,1}^2, \quad C_3 = \text{const} > 0. \quad (8.8)$$

Используя априорные оценки для $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ и (8.8), получаем оценку погрешности метода Галеркина.

Теорема 8.2 Пусть выполнены все условия Теоремы 8.1. Тогда справедлива следующая оценка погрешности:

$$\|u - u^{N,\varepsilon}\|_{1,s}^2 \leq C_4 \|f\|_{0,1} (\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-1/2}),$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (8.1)-(8.4), и положительная постоянная C_4 не зависит от $N, \varepsilon, f(x,t)$.

Разрешимость краевой задачи II

Введем пространство

$$W_L = \{u(x,t) \in W_2^{2,2s}(Q) : u_{tx_i x_j} \in L_2(Q), \quad i, j = \overline{1, n}\}$$

с нормой

$$\|u\|_L = \|u\|_{2,2s} + \|\Delta u_t\|.$$

Предположим, что функция $u(x,t) \in W_L$ является решением краевой задачи (8.1), (8.2), (8.4), (8.5). Тогда функция

$$v(x,t) = u(x,t) - \int_0^t N(\tau) u(x,\tau) d\tau$$

будет решением следующей задачи.

Вспомогательная краевая задача. Найти решение уравнения

$$Lv = F(x,v) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{8.9}$$

такое, что выполнены краевые условия (8.2)-(8.4), где

$$F(x,v) = N_1 \int_0^t N(\tau) [\Delta v(x,\tau) - c(x)v(x,\tau)] d\tau.$$

Отметим, что вспомогательная краевая задача (8.9), (8.2)-(8.4) с $N(t) \equiv 0$ является задачей (8.1)-(8.4). Следовательно, в силу теоремы 8.1, имеет единственное решение $v_0 \in W_L$ и справед-

лива априорная оценка:

$$\|v_0\|_L \leq C_0 \|f\|_{0,1}, \quad C_0 = \text{const} > 0.$$

Для любой функции $v(x, t) \in W_L$ справедливо неравенство:

$$\|F(x, v)\| \leq C_5 |N_1| T^{1/2} \|N\|_{L_2(0,T)} \|v\|_L.$$

Выбирая функцию $v_0(x, t)$ в качестве начального приближения, методом последовательных приближений доказывается регулярная разрешимость вспомогательной краевой задачи (8.9), (8.2)-(8.4).

Теорема 8.3 Пусть выполнены все условия Теоремы 8.1, в том числе для функции $f(x, t)$, и

$$q = C_0 C_5 |N_1| T^{1/2} \|N\|_{L_2(0,T)} < 1.$$

Тогда краевая задача (8.9), (8.2)-(8.4) имеет единственное решение $v(x, t) \in W_L$ и имеет место оценка сходимости:

$$\|v - v_m\|_L \leq C_0 \frac{2+q}{1-q} \|f\|_{0,1} q^m,$$

где $v_m(x, t)$ приближение с номером m .

Пусть $v(x, t)$ является решением краевой задачи (8.9), (8.2)-(8.4) в W_L , гарантированное Теоремой 8.3. Положим

$$u(x, t) = v(x, t) + N_1 \int_0^T N(\tau) v(x, \tau) d\tau,$$

$$u_m(x, t) = v_m(x, t) + N_1 \int_0^T N(\tau) v_m(x, \tau) d\tau.$$

Тогда нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 8.4 Пусть выполнены все условия Теоремы 8.3 и $T^{1/2} \|N\|_{L_2(0,T)} < 1$. Тогда краевая задача (8.1), (8.2), (8.4), (8.5) имеет единственное решение $u(x, t) \in W_L$ и имеет место оценка сходимости: $\|u - u_m\|_L \leq C_0 \frac{2+q}{1-q} (1 + |N_1| T^{1/2} \|N\|_{L_2(0,T)}) \|f\|_{0,1} q^m$.

9 Задача Дирихле для уравнений составного типа высокого порядка с разрывными коэффициентами

Пусть x есть точка отрезка $[-1, 1]$ оси Ox , t есть точка отрезка $[0, T]$, $0 < T < \infty$, Q_1 , Q_2 и Q есть цилиндры $(-1, 0) \times (0, T)$, $(0, 1) \times (0, T)$ и $(-1, 1) \times (0, T)$, соответственно, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ — функции, определенные при $(x, t) \in \bar{Q}$, $h(x)$, $a(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in [-1, 1]$, $t \in (0, T)$ и, быть может, имеющие разрыв 1-го рода при $x = 0$, α , β — заданные действительные числа.

Краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$D_t [(-1)^p D_t^{2p+1} u - h(x)u_{xx}] + a(x)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (9.1)$$

($p \geq 1$ —целое, $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (9.2)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, p, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (9.3)$$

$$D_t^k u(x, t)|_{t=T} = 0, \quad k = 0, \dots, p, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (9.4)$$

а также условия сопряжения

$$u(-0, t) = \alpha u(+0, t), \quad u_x(+0, t) = \beta u_x(-0, t), \quad t \in (0, T). \quad (9.5)$$

Далее определим необходимые функциональные пространства V_1 , V_2 и V :

$$V_i = \{v(x, t) : \int_{Q_i} (v^2 + v_{xxt}^2 + (D_t^{2p+2} v)^2) dx dt < +\infty\}, \quad i = 1, 2,$$

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_1, \quad v(x, t) \in V_2\}$$

(все производные понимаются как обобщенные производные по С.Л. Соболеву). Норму в этих

пространства зададим равенствами

$$\|v\|_{V_i} = \left\{ \int_{Q_i} (v^2 + v_{xxt}^2 + (D_t^{2p+2}v)^2) dxdt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_V = \|v\|_{V_1} + \|v\|_{V_2}.$$

Очевидно, что пространства V_1 , V_2 и V с этими нормами будут банаховыми пространствами.

Пусть

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ \lim_{x \rightarrow -0} h(x) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} h(x), & \text{при } x \in (0, 1], \\ \lim_{x \rightarrow +0} h(x) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$a_1(x) = \begin{cases} a(x) & \text{при } x \in [-1, 0), \\ \lim_{x \rightarrow -0} a(x) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$a_2(x) = \begin{cases} a(x) & \text{при } x \in (0, 1], \\ \lim_{x \rightarrow +0} a(x) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

и

$$h_{01} = \max_{x \in [-1, 0]} |h'_1(x)|, \quad h_{02} = \max_{x \in [0, 1]} |h'_2(x)|.$$

Заметим, что для функций $u(x, t) \in V_1$ и $u(x, t) \in V_2$ справедливы неравенства

$$\int_{Q_i} u_t^2 dxdt \leq \left(\frac{T}{\pi}\right)^{2p} \int_{Q_i} (D_t^{p+1}u)^2 dxdt, \quad i = 1, 2 \quad (9.6)$$

при условии, что $D_t^k u(x, t)|_{t=0} = 0$, $k = 0, \dots, p$.

Исследуем вопрос о единственности решений краевой задачи (9.2)–(9.5).

Теорема 9.1 Пусть

$$\alpha\beta h(-0)h(+0) > 0, \quad (9.7)$$

$$h_1(x) \in C^1([-1, 0]), \quad h_2(x) \in C^1([0, 1]), \quad a_1(x) \in C^2([-1, 0]), \quad a_2(x) \in C^2([0, 1]), \quad (9.8)$$

$$c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad t \in (0, T),$$

$$a''(x) + 2c(x, t) \leq 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (9.9)$$

$$a'(-0) \geq 0, \quad a'(0) \leq 0, \quad (9.10)$$

$$h(+0)a(-0) = h(-0)a(+0). \quad (9.11)$$

Пусть также существует число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$2\delta_0^2 a(x) - h_{01}^2 \geq 0, \quad x \in [-1, 0), \quad (9.12)$$

$$2\delta_0^2 a(x) - h_{02}^2 \geq 0, \quad x \in (0, 1],$$

$$\delta_0^2 T^{2p} \leq 2\pi^{2p}. \quad (9.13)$$

Тогда краевая задача (9.2)–(9.5) может иметь не более одного решения в пространстве V .

Пусть

$$\alpha_1 = \frac{\alpha a(+0)}{a(-0)}, \quad \beta_1 = \frac{\beta a(-0)}{a(+0)}.$$

Теорема 9.2 Пусть выполняются условия (9.7)–(9.13) и условия

$$c(x, t) \in C^1([-1, 0)) \cup C^1((0, 1]), \quad c(-0, t) = c(+0, t), \quad 0 \leq c_x(x, t) \leq c_0, \quad (9.14)$$

$$c_x(+0, t) \geq 0, \quad c_x(-0, t) \leq 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad t \in (0, T).$$

Пусть также существует число $\delta_1 > 0$ такое, что

$$2\delta_1^2 a(x) \geq h_{01}^2 + c_0^2, \quad (9.15)$$

$$2\delta_1^2 a(x) \geq h_{02}^2 + c_0^2, \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T),$$

$$f(-1, t) = f(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (9.16)$$

$$\alpha_1 \beta_1 f_x(-0, t) f(+0, t) = f(-0, t) f_x(+0, t) = 0, \quad t \in (0, T).$$

Тогда краевая задача (9.2)–(9.5) имеет решение, принадлежащее пространству V , для любой функции $f(x, t)$, $f_{xx}(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$.

10 О дробных кинетических уравнениях

В данном разделе развита идея аппроксимации немарковским случайным блужданием в непрерывном времени (CTRW) систем взаимодействующих частиц, которая приводит к общему классу дробных кинетических мерозначных эволюций с переменным порядком. Доказана корректность полученных новых уравнений и приводится вероятностная формула их решений. Для простоты рассматривается только дробные версии взаимодействующих диффузий. Полученные результаты опубликованы в работе (см. [63]).

Как подчеркивалось в [64], стандартный диффузионный процесс, описываемый уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad (10.1)$$

с положительной непрерывной функцией $a(x)$, может быть получен как предел соответствующих случайных блужданий. Эти допредельные случайные блуждания могут быть самыми разными. Например, аппроксимирующие случайные блуждания в непрерывном времени могут быть выбраны как скачкообразные процессы с генераторами

$$L_h f(x) = \frac{1}{2h^2}[f(x + h\sqrt{a(x)}) + f(x - h\sqrt{a(x)}) - 2f(x)],$$

или как скачкообразные процессы с генераторами

$$\tilde{L}_h f(x) = \frac{a(x)}{2h^2}[f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)].$$

Действительно, операторы L_h и \tilde{L}_h стремятся к $(1/2)a(x)(d^2/dx^2)$ при $h \rightarrow 0$, а также и процессы прыжкового типа, порожденные операторами L_h и \tilde{L}_h сходятся к диффузии, порожденной оператором $(1/2)a(x)(d^2/dx^2)$. В первом приближении коэффициент диффузии $a(x)$ отвечает за размер скачков (с постоянной интенсивностью), а во втором - за интенсивность скачков (с постоянными размерами). «Грубый» диффузионный предел разницы не чувствует. Ситуация меняется, если мы моделируем приближения через случайные блуждания в непрерывном времени (CTRW) с неэкспоненциальными временами ожидания. Если мы будем считать, что коэффициент диффузии отвечает за размеры скачков и брать времена ожидания из области притяжения α -устойчивого закона с постоянной интенсивностью α , то стандартное масштабирование приводит (в пределе малых скачков и больших интенсивностей) к наиболее стандартному

дробному уравнению диффузии

$$D_{0+*}^\alpha u(t, x) = \frac{1}{2} a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad (10.2)$$

где D_{0+*}^α – так называемая дробная производная Капуто-Джрбашяна.

Если мы будем использовать аппроксимации случайными блужданиями в непрерывном времени (CTRW) с фиксированными размерами скачков и использовать $a(x)$ для (различения) интенсивностей в разных точках, то мы получим в пределе уравнение с переменной дробной производной, зависящей от позиции:

$$D_{0+*}^{\alpha a(x)} u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x). \quad (10.3)$$

Конечно, для любого разложения коэффициента диффузии в виде произведения $b(x)c(x)$ с положительными функциями $b(x), c(x)$ можно использовать $b(x)$ как функцию, отвечающую за интенсивность скачков и $c(x)$ как функцию, отвечающую за разброс скачков. В этом случае мы получаем в пределе уравнение

$$D_{0+*}^{\alpha b(x)} u(t, x) = \frac{1}{2} c(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x). \quad (10.4)$$

В [64] дан строгий вывод уравнений типа (10.4). В настоящей работе, следуя той же идее разделения коэффициентов диффузии на части, соответствующие временам и размерам скачков, мы выводим дробные кинетические уравнения переменного порядка, описывающие пределы масштабирования аппроксимируемых случайными блужданиями в непрерывном времени (CTRW) систем взаимодействующих диффузий.

Кинетические уравнения - это мерозначные уравнения, выражающие предел динамического закона больших чисел (LLN) марковских систем взаимодействующих частиц, когда число частиц стремится к бесконечности. Получающиеся в результате нелинейные мерозначные эволюции могут быть вероятностно интерпретированы как нелинейные марковские процессы, см. [65]. В случае конечного пространства состояний множество вероятностных мер совпадает с симплексом Σ_n последовательностей неотрицательных чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$ так, что $\sum_j x_j = 1$, где n может быть любым натуральным числом. В дискретном случае кинетические уравнения, описывающие предел динамического закона больших чисел (ЗБЧ) марковских систем взаимодействующих частиц, когда число частиц стремится к бесконечности, представляют

с собой ОДУ вида

$$\dot{x} = xQ(x) \iff \dot{x}_i = \sum_k x_k Q_{ki}(x) \text{ для всех } i, \quad (10.5)$$

где Q — стохастическая или колмогоровская Q -матрица (т.е. она имеет неотрицательные недиагональные элементы, а сумма элементов в каждой строке равна нулю), непрерывно липшицево зависящая от x .

Функции $F(t, x) = F(X_t(x))$, где $X_t(x)$ обозначает решение уравнения (10.5) с начальным условием x , удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = (x, Q(x) \nabla F(t, x)) = \sum_{k,i} x_k Q_{ki}(x) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x_i}. \quad (10.6)$$

В более общем виде (см. [65]) для системы взаимодействующих в среднем поле частиц, заданной семейством операторов A_μ , которые являются генераторами марковских процессов в некотором евклидовом пространстве \mathbf{R}^d , зависящими от вероятностных мер μ на \mathbf{R}^d в качестве параметров и имеющими общую существенную область определения, естественный предел масштабирования такой системы при стремлении числа частиц к бесконечности (динамический закон больших чисел) описывается кинетическими уравнениями в слабой форме

$$(f, \dot{\mu}_t) = (A_{\mu_t} f, \mu_t), \quad (10.7)$$

где f — произвольная функция из общей существенной области определения операторов A_μ .

Обобщением уравнения (10.6) является дифференциальное уравнение в вариационных производных:

$$\frac{\partial F(t, \mu)}{\partial t} = \int_{\mathbf{R}^d} \left(A_\mu \frac{\delta F(t, \mu)}{\delta \mu(\cdot)} \right) (z) \mu(dz). \quad (10.8)$$

Можно различать случаи эволюции с сохранением числа частиц и изменением числа частиц. Второй случай возникает при изучении чисто скачкообразных процессов и рассматривался в [66]. В данной работе мы имеем дело с первым случаем.

При обобщении стандартных случайных блужданий на более общие случайные блуждания в непрерывном времени (CTRW), характеризующиеся тем свойством, что случайные моменты времени между скачками не экспоненциальны, а вероятности хвоста уменьшаются как степенная функция, их пределы становятся немарковскими процессами, описываемыми дробными эволюциями.

В работе [63] построена аппроксимация случайным блужданием в непрерывном времени (STRW) систем взаимодействующих в среднем поле частиц для случая неэкспоненциальных времен ожидания между скачками. Показано, что соответствующее предельное уравнение для систем взаимодействующих в среднем поле частиц в \mathbf{R}^d с сохранением числа частиц записывается в виде уравнения

$$D_{t-\star}^{(\alpha, \mu)} F(s, \mu) = \int_{\mathbf{R}^d} \left(A_\mu \frac{\delta F(s, \mu)}{\delta \mu(\cdot)} \right) (z) \mu(dz), \quad (10.9)$$

где A_μ — семейство генераторов феллеровских процессов в \mathbf{R}^d , зависящих от $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$. Для наглядности мы рассмотрим только случай диффузионных операторов A_μ .

Доказана корректность построенного нового кинетического уравнения с переменным дробным порядком и приведена вероятностная формула для решений (см. разделы 4-7 в [63]).

11 Стрoение граней и 3-вершин в триангуляциях на поверхностях и в разреженных плоских графах

(1) Степень $d(x)$ вершины или грани x в графе G на плоскости или другой ориентируемой поверхности есть число инцидентных x ребер. Грань $f = v_1 \dots v_{d(f)}$ имеет тип (k_1, k_2, \dots) , если $d(v_i) \leq k_i$ для любого i при $1 \leq i \leq d(f)$. Через δ обозначим минимальную степень вершин в G .

В 1989 г. Бородин доказал, что любой плоский граф с $\delta = 5$ содержит $(5, 5, 7)$ -грань или $(5, 6, 6)$ -грань, где все параметры неулчшаемы, подтвердив тем самым гипотезу Коцига 1963 г. о весе грани в плоских триангуляциях с $\delta = 5$, а также гипотезу Грюнбаума 1975 г. о циклической связности 5-связных плоских графов. Недавно мы доказали, что любая триангуляция с $\delta \geq 5$ на торе содержит грань одного из типов $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 7)$ или $(6, 6, 6)$, причем это описание точное.

Из классической теоремы Лебега 1940 г. следует, что любая плоская триангуляция с $\delta \geq 4$ содержит грань типа $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 19)$, $(4, 6, 11)$, $(4, 7, 9)$, $(5, 5, 9)$ или $(5, 6, 7)$.

В 1999 г. Йендрoль дал аналогичное описание: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 13)$, $(4, 6, 17)$, $(4, 7, 8)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$, и предположил, что имеет место описание $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 10)$, $(4, 6, 15)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$. В 2002 г. данное Лебегом описание было усилено О.В. Бородиным до $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 17)$, $(4, 6, 11)$, $(4, 7, 8)$, $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 6)$.

В 2014 г. Бородин и Иванова получили следующее точное описание, которое, в частности, опровергает предположение Йендрoля: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 11)$, $(4, 6, 10)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$.

Из теоремы Лебега 1940 г. следует, что любая плоская четырехангуляция с $\delta \geq 3$ содержит грань одного из типов $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 11)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 4, 4, 5)$. Недавно Бородин и Иванова улчшили это описание до $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 9)$, $(3, 3, 5, 6)$, $(3, 4, 4, 5)$, где все параметры за возможным исключением 9 являются точными, а 9 не может опуститься ниже 8.

В 1995 г. Августинович и Бородин получили следующее точное описание граней четырехангуляций с $\delta \geq 3$ на торе: $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 10)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 4, 4, 6)$, $(4, 4, 4, 4)$, которое также верно для ориентируемых поверхностей любого большего рода при условии, что четырехангуляция достаточно велика.

Доказано, что любая триангуляция с $\delta \geq 4$ на торе, а также любая достаточно большая триангуляция с $\delta \geq 4$ на любой ориентируемой поверхности большего рода, содержит грань одного из типов $(4, 4, \infty)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 7)$ или $(6, 6, 6)$, где все параметры неулчшаемы.

(2) Из классической теоремы Лебега (1940) о строении младших граней в 3-многогранниках следует, что каждая плоская триангуляция с минимальной степенью не менее 4 содержит 3-грань, степени вершин которой мажорируются одной из следующих последовательностей: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 19)$, $(4, 6, 11)$, $(4, 7, 9)$, $(5, 5, 9)$, $(5, 6, 7)$. В 1999 г. Йендроль дал следующее описание граней: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 13)$, $(4, 6, 17)$, $(4, 7, 8)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$. Также Йендроль (1999) предположил, что существует грань одного из следующих типов: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 10)$, $(4, 6, 15)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$.

В 2002 г. описание Лебега было усилено Бородиным до следующего: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 17)$, $(4, 6, 11)$, $(4, 7, 8)$, $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 6)$. В 2014 г. Бородин и Иванова получили следующее точное описание, которое в частности опровергает упомянутое выше предположение Йендроля: $(4, 4, \infty)$, $(4, 5, 11)$, $(4, 6, 10)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 7)$, $(5, 6, 6)$.

Доказано следующее точное описание граней в плоских триангуляциях с минимальной степенью не менее 4: $(4, 4, \infty)$, $(4, 6, 10)$, $(4, 7, 7)$, $(5, 5, 8)$, $(5, 6, 7)$.

(3) Пусть $g(k, t)$ есть минимальное целое число такое, что каждый плоский граф с обхватом g не меньшим $g(k, t)$, минимальной степенью $\delta = 2$ и без $(k + 1)$ -цепей, состоящих их вершин степени 2, где $k \geq 1$, содержит 3-вершину с не менее чем t соседями степени 2, где $1 \leq t \leq 3$.

В 2015 г. Йендроль и Мацекова доказали, что $g(1, 1) \leq 7$. Позже Худак и др. установили, что $g(1, 3) = 10$; Йендроль, Мацекова, Монтасьер и Сотак доказали, что $g(1, 1) \geq 7$, $g(1, 2) = 8$ и $g(2, 2) \geq 11$, а Бородин и Иванова недавно доказали, что $g(2, 2) = 11$ и $g(2, 3) = 14$. Таким образом, величина $g(k, t)$ известна для $k = 1$ и всех t .

Доказано, что $g(k, 1) = 3k + 4$, $g(k, 2) = 3k + 5$ и $g(k, 3) = 3k + 8$ для всех $k \geq 2$.

Теорема 12.1 *Общая неоднородная бесконечная система (12.1) с отличным от нуля бесконечным определителем совместна тогда и только тогда, когда существует ее строго частное решение.*

Теорема 12.2 *Пусть гауссова система (12.2) совместна, тогда ее строго частное решение x_j имеет вид*

$$x_j = B(j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p, j+p}}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (12.3)$$

где $A_p(j)$ – рекуррентно определяются соотношением:

$$A_p(j) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p-1-k} a_{j+k, j+p}}{a_{j+k, j+k}} A_k(j), \quad A_0(j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots \quad (12.4)$$

Чаще всего совместность системы (12.1) заранее неизвестна. В таком случае как использовать решение (12.3)? Если удастся найти сумму ряда (12.3), то, подставляя ее в исходную гауссову систему (12.2), убеждаемся, что она является решением или нет. Как поступить, если не удастся доказать сходимости ряда (12.3) или не удастся найти сумму ряда (12.3) аналитическим способом? Для ответа на данный вопрос был предложен следующий численный алгоритм решения исходной общей системы (12.1) с применением ряда (12.3) [71, 72].

Вычисление ряда (12.3) с использованием рекуррентной формулы (12.4) осуществляется таким образом: для каждого j при $n \rightarrow \infty$ вычисляем абсолютное значение разности последних двух членов суммы

$$x_j^n = B_{n-j}(j) = \sum_{p=0}^{n-j-1} (-1)^p A_p(j) \frac{b_{j+p}}{a_{j+p, j+p}}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.5)$$

следя за этой разностью, и если это значение не превышает заданной точности ε , мы останавливаем вычисления (при некотором $n = N_j$). Естественно, для каждого j существует свое N_j , а это в свою очередь позволяет следить за невязкой, т.е. за разницей между левой и правой частями системы (12.1) для найденных значений x_j для каждого j . Если эти невязки стремятся к нулю при увеличении n , то полученные числа x_j будут приближенными решениями системы (12.1) с гарантированной точностью в случае достаточно быстрой сходимости ряда (12.3), тем самым быстрой сходимости редукции.

Дадим некоторое пояснение вышесказанному. Здесь описан алгоритм опознавания совместности или несовместности исходной бесконечной системы. Если заранее известно, что за-

данная система совместна, то ее аналитическое решение задано в виде сходящегося ряда (12.3) и на его вычислении не останавливаемся, это дело техники.

Если числовая последовательность x_j^n сходится при увеличении n , то это говорит о том, что простая редукция имеет предел, т.е. сходится. Здесь необходимо помнить о том, что на самом деле формула (12.5) дает точное решение урезанной конечной системы n -го порядка для каждого n в единой записи. Но сходимость редукции еще не говорит о том, что редукция сходится именно к решению гауссовой бесконечной системы (12.2) [71]. Кстати, если она сходится, то она сходится непременно к значению, определяемому формулой Крамера для соответствующего j , но оно может и не быть решением исходной системы [71]. Для того чтобы показать, что простая редукция сходится к решению системы (12.2) необходимо следить за невязкой.

Следовательно, сначала убеждаемся в том, что редукция сходится или нет. Если она не сходится, то по теореме 5 система несовместна. Очевидно, из формулы (12.5) следует

$$|x_j^n - x_j^{n+1}| = \left| A_{n+1-j}(j) \frac{b_{n+1}}{a_{n+1,n+1}} \right|.$$

Если теперь предположить, что правая часть последнего выражения стремится к нулю при увеличении n (т.е. она становится меньше заданного ξ), то это значит: во-первых, числовая последовательность x_j^n имеет предел по критерию сходимости Коши, во вторых, необходимое условие сходимости числового ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_p(j) \frac{b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}$$

выполняется. Теперь проверяем невязку, а это возможно, поскольку порядок урезанной системы вычисления для каждого неизвестного x_j свое: $n = N_j$. Если невязка не уменьшается, то система не имеет решения, если уменьшается при увеличении n , то существует строго частное решение (12.3). Если взять за $n = \max_j N_j$, то неравенство $|x_j^n - x_j^{n+1}| < \xi$ будет выполняться для всех j . Следовательно получим гарантированную точность ξ .

Таким образом, если ряд в выражении (12.5) сходится и невязка системы (12.1) стремится к нулю при увеличении n , то исходная общая система (12.1) совместна и мы получим ее приближенное численное решение с заданной точностью при достаточно быстрой сходимости ряда (12.5), т.е. – простой редукции. Если ряд (12.5) расходится, т.е. редукция не сходится или она сходится, но указанная невязка не стремится к нулю при увеличении n , то исходная общая

бесконечная система (12.1) не является совместной, т.е. не имеет решения.

Рассуждения, приведенные выше, позволяют обобщить метод Гаусса-Йордана на бесконечные системы. Первое действие совпадает с классическим методом Гаусса-Йордана. Поэтому, разделяя первое уравнение системы (12.1) на $a_{1,1}$, получим

$$x_1 + a_{1,2}^{(0)}x_2 + a_{1,3}^{(0)}x_3 + \dots + a_{1,n}^{(0)}x_n + \dots = b_1^{(0)}, \quad (12.6)$$

где $a_{1,j}^{(0)} = \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}$, $b_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{1,1}}$, $j = 2, 3, \dots$

Вычтем из второго уравнения системы (12.1) уравнение (12.6) умноженное на $a_{2,1}$ и результат разделим на $a_{2,2}^{(1)}$

$$x_2 + a_{2,3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2,n}^{(1)}x_n + \dots = b_2^{(1)}, \quad (12.7)$$

где $a_{2,j}^{(1)} = \frac{a_{2,j} - a_{1,j}^{(0)}a_{2,1}}{a_{2,2}^{(1)}}$, $b_2^{(1)} = \frac{b_2 - b_1^{(0)}a_{2,1}}{a_{2,2}^{(1)}}$, $j = 2, 3, \dots, N$. Насчет числа N пояснение дадим ниже.

Теперь, исключим $a_{1,2}^{(0)}x_2$ из уравнения (12.6). Для этого умножим уравнение (12.7) на $a_{1,2}^{(0)}$ и вычтем из уравнения (12.6)

$$x_1 + a_{1,3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1,n}^{(1)}x_n + \dots = b_1^{(1)}, \quad (12.8)$$

Аналогично, приведём третье уравнение системы (12.1) к виду

$$x_3 + a_{3,4}^{(2)}x_4 + \dots + a_{3,n}^{(2)}x_n + \dots = b_3^{(2)}, \quad (12.9)$$

Из уравнения (12.8) исключим $a_{1,3}^{(1)}x_3$. Умножим уравнение (12.9) на $a_{1,3}^{(1)}$ и вычтем из уравнения (12.8), имеем

$$x_1 + a_{1,4}^{(2)}x_4 + \dots + a_{1,n}^{(2)}x_n + \dots = b_1^{(2)},$$

Повторяя данный процесс k_1 раз, получим

$$x_1 + \dots + a_{1,k_1+2}^{(k_1)}x_{k_1+2} + \dots + a_{1,n}^{(k_1)}x_n + \dots = b_1^{(k_1)}. \quad (12.10)$$

При этом следим за разностью $\Delta_1^{k_1} = |b_1^{(k_1)} - b_1^{(k_1-1)}|$. При выполнении для некоторого $k_1 = N$ неравенства $\Delta_1^{k_1} < \varepsilon$ для заданного ε за предполагаемое приближенное решение \tilde{x}_1 можно взять

$$\tilde{x}_1 = b_1^{(k_1)},$$

отбрасывая все члены ряда в (12.10), содержащие неизвестные $x_{k_1+2}, x_{k_1+3}, \dots$, и так далее в соответствии с методом простой редукции. Если убеждаемся, что при увеличении k_1 разность $\Delta_1^{k_1}$ не уменьшается, то процесс останавливаем, поскольку исходная бесконечная система не является совместной.

Для получения предполагаемого решения x_2 , повторяя указанный процесс для уравнения (12.7), получим

$$\tilde{x}_2 = b_2^{(k_2)}.$$

Аналогично, повторяя данный процесс последовательно для x_3, x_4, \dots, x_n , получим первые n предполагаемых приближенных решений системы (12.1)

$$\tilde{x}_j = b_j^{(k_j)}, \quad k_j = N_j, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (12.11)$$

Для того, чтобы убедиться, что числа (12.11) действительно являются приближенными решениями системы (12.1), подставляем их в левую часть системы (12.1) и вычисляем невязки, т.е. разность левых и правых частей системы (12.1). Если эти невязки стремятся к нулю при увеличении n , то эти числа действительно являются приближенными решениями, в противном случае система не совместна.

Таким образом, мы дали краткое описание обобщения метода Гаусса-Йордана для решения неоднородной бесконечной системы (12.1), применяя метод редукции в узком смысле (метод простой редукции). Однако, если мы этим алгоритмом решим систему (12.1) в однородном случае ($b_j \equiv 0$), то получим только тривиальное решение, что видно из (12.11). Это результат применения метода редукции в узком смысле. Поэтому возникает необходимость применения **редукции в широком смысле**, т.е. в усеченной системе от (12.1) число неизвестных больше, чем число уравнений. Фактически это означает, что усеченная система имеет вырожденную матрицу. Этим отличается, главным образом, решение однородной бесконечной системы от неоднородной. Сначала рассмотрим случай, когда в усеченной системе число неизвестных больше на одно, чем число уравнений. Полагая $x_1 = 1$ и переводя члены $a_{j,1}$ в правую часть в системе (12.1), получим неоднородную систему, которую можно уже решить методом простой редукции с применением метода Гаусса-Йордана для неоднородной системы, описанного выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в рамках проекта результаты имеют теоретический характер и расширяют класс ранее изученных краевых задач для нелинейных неклассических уравнений и дискретных систем. Исследуемые в рамках проекта задачи и результаты являются принципиально новыми. Выводы и положения основываются на строгих математических доказательствах. Для исследования поставленных задач были использованы методы: современные методы теории дифференциальных уравнений, теории полугрупп линейных операторов, функционального анализа, вариационного исчисления, перераспределения эйлеровых вкладов (зарядов), алгебры, а также разработанные авторами подходы и методы.

Правильность выбора методов и подходов в исследованиях подтверждается полученными новыми результатами и улучшениями существующих результатов.

- Доказаны теоремы о качественных свойствах решений для нелинейных моделей однородных и композитных тел с трещинами.
- Доказаны теоремы о разрешимости задач оптимального управления расположением и формой жестких включений в нелинейных математических моделях, описывающих равновесие композитных тел.
- Доказаны теоремы о разрешимости задач оптимального управления внешними нагрузками для нелинейной математической модели, описывающей контакт композитного тела.
- Доказано существование решения задачи равновесия двумерного тела с трещиной и двумя жесткими включениями, соединенными шарнирным образом.
- Обоснована однозначная разрешимость контактной задачи для упругой пластины с плоским жестким включением. Получена ее эквивалентная дифференциальная постановка.
- Доказаны теоремы обобщенной и регулярной разрешимости первой краевой задачи для уравнения нечетного порядка с меняющимся направлением времени. Для рассматриваемой краевой задачи получена оценка погрешности нестационарного метода Галеркина.
- Доказаны теоремы регулярной разрешимости двух локальных краевых задач для уравнения Соболева высокого порядка смешанного типа. Для обеих задач получена оценка сходимости приближенных решений к точным решениям.
- Доказана разрешимость краевой задачи с данными Дирихле и дополнительными условиями сопряжения для дифференциальных уравнений составного типа высокого порядка.

- Построена аппроксимация случайным блужданием в непрерывном времени (CTRW) систем взаимодействующих в среднем поле частиц для случая неэкспоненциальных времен ожидания между скачками. Доказана корректность полученных новых кинетических уравнений с переменным дробным порядком и приведена вероятностная формула для их решений.

- Доказано точное описание граней триангуляций на торе и на любой ориентируемой поверхности большего рода. Доказано точное описание граней в плоских триангуляциях с минимальной степенью 2. Даны конструкции, доказывающие точности описаний. Найдены значения обхвата разреженного плоского графа с 3-вершинами с минимальным числом 2-вершин в графах без длинных цепей из 2-вершин.

- Обобщен классический метод Гаусса-Йордана для решения конечных систем на бесконечные неоднородные и однородные системы общего вида с бесконечным определителем отличным от нуля. Показано, что применение редукции в узком смысле в случае однородных систем дает только тривиальное решение, поэтому, чтобы обобщить метод Гаусса-Йордана для решения бесконечных однородных систем, мы использовали метод редукции в широком смысле.

Полученные в рамках данного проекта результаты будут использованы для развития дальнейших исследований и внесут существенный вклад в развитие теории неклассических уравнений с частными производными, в теории дробных дифференциальных уравнений, в разработке теории бесконечных алгебраических систем, теории графов.

Результаты могут быть применены для исследования математических моделей в статистических и динамических задачах теории упругости твердых тел, вязкоупругости, электродинамики, физики полупроводников, механики полимеров и других процессов современной физики, а также в развитии теории дробных игр среднего поля.

Результаты, полученные в области теории графов, будут использованы для получения новых структурных свойств разреженных плоских графов.

Результаты НИР используются в образовательном процессе: в подготовке и защите выпускных квалификационных работ студентов, магистрантов, а также кандидатских диссертаций аспирантов по научной специальности 1.1.2 - дифференциальные уравнения и математическая физика.

По результатам НИР опубликованы 18 научных статей, в т.ч., в журналах первого и второго квартилей - 9, индексированы в Web of Science - 7, в SCOPUS - 16. Сделаны 12 научных докладов на международных конференциях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Vragov V.N., Kozhanov A.I., Pyatkov S.G. and Glazatov S.N. On the theory of nonclassical equations of mathematical physics // Conditionally well-posed problems. Moscow, Utrecht: TVP/TSP. 1993. P.299-321.
- 2 Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.
- 3 Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
- 4 Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
- 5 Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. - Utrecht - Boston - Köln - Tokyo: VSP, 2003.
- 6 Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP. Utrecht, 1999.
- 7 Demidenko G. V., Upsenskii S. V. Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative. New York: CRC Press. 2003 .
- 8 Khludnev A. M. Elasticity problems in nonsmooth domains. Fizmatlit, Moscow, 2010.
- 9 Khludnev A. M., Kovtunenkov V. A. Analysis of cracks in solids. WIT-Press, Southampton, Boston, 2000.
- 10 Khludnev A., Esposito A. C., Faella L. Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions // J. Optim. Theory Appl. 2020. V. 184, N. 1. P. 293–314.
- 11 Baleanu D., Diethelm K., Scalas E. and Trujillo J. J. Fractional calculus: Models and numerical methods: Second edition. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. vol. 5, World Scientific Publishing, Singapore, 2017.
- 12 Kiryakova V. Generalized fractional calculus and applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 301. Longman Scientific, Harlow. Copublished in the United States with John Wiley and Sons, New York, 1994.

- 13 Podlubny I. Fractional differential equations, An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Mathematics in Science and Engineering **198**, Academic Press, Inc., San Diego, 1999.
- 14 Leontovich M. A. Main equations of the kinetic theory from the point of view of random processes // J. Exp. Theoret. Phys., 1935, vol. 5, pp. 211–231.
- 15 Belavkin V.P., Kolokoltsov V.N. On general kinetic equation for many particle systems with interaction, fragmentation and coagulation. Proc. Royal Society London A, 2003, vol. 459 (2031), pp. 717–748.
- 16 Belavkin V.P., Maslov V.P. The Method of uniphormization in the theory of nonlinear Hamiltonian systems of the type of Vlasov and Hartry // Theor. Math. Phys., 1977, vol. 33 (1), pp. 17–31.
- 17 Kac M. Probability and Related Topics in Physical Science. Interscience Publishers, 1959.
- 18 Maslov V.P., Tariverdiev S.E. Asymptotics of the Kolmogorov-Feller equation for a system of a large number of particles // J. Math. Sci., 1983, vol. 23 (5), pp. 2553–2579.
- 19 Khludnev A., Negri M. Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks // Z. Angew. Math. und Phys. 2013. V. 64, N 1. P. 179–191.
- 20 Lazarev N., Rudoy E. Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies // J. Comput. Appl. Math. 2022. V. 403, N. 113710.
- 21 Lazarev N. P., Sharin E. F., Semenova G. M., Fedotov E. D. Optimal location and shape of a rigid inclusion in a contact problem for inhomogeneous two-dimensional body // Siberian Electronic Mathematical Reports 2022. V. 19, N. 2. P. 627–638.
- 22 Khludnev A.M., Novotny A.A., Sokolowski J., Zochowski A. Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2009. V.57, N 10. P. 1718-1732.
- 23 Shcherbakov V.V. Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N. 3. N 71.
- 24 Lazarev N. P., Rudoy E. M. Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge // Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97, N. 9. P. 1120–1127.

- 25 Khludnev A.M. Equilibrium problem of an elastic plate with an oblique crack // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1997. V. 38, N. 5. P. 757–761.
- 26 Lazarev N.P., Neustroeva N.V., Nikolaeva N.A. Optimal control of tilt angles in equilibrium problems for the Timoshenko plate with a oblique crack // Sib. Electron. Math. Rep. 2015. V. 12, P. 300–308.
- 27 Khludnev A. M. The equilibrium problem for a thermoelastic plate with a crack // Sib. Math. J. 1996. V. 37, N. 2. P. 394–404.
- 28 Lazarev N.P. Equilibrium problem for an thermoelastic Kirchhoff-Love plate with a nonpenetration condition for known configurations of crack edges. // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17, P. 2096–2104.
- 29 Lazarev N. Solvability of an equilibrium problem for a thermoelastic Kirchhoff–Love plate with an oblique crack // Mathematical Notes of NEFU 2022, V. 29, N. 2. P. 31–42 .
- 30 Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
- 31 Rudoy E.M., Shcherbakov V.V. First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // Applied Mathematics and Optimization 2021. V. 84, P. 2775–2802.
- 32 Lazarev N., Everstov V. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2019. V. 99, N. 3. e201800268.
- 33 Lazarev N. P., Semenova G. M., Romanova N. A. On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff-Love plate with a crack // J. Sib. Fed. Univ. - Math. Phys. 2021. V. 14, N. 1. P. 28–41.
- 34 Lazarev N. P., Popova T. S., Rogerson G. A. Optimal control of the radius of a rigid circular inclusion in inhomogeneous two-dimensional bodies with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2018. V. 69, N. 3. 53 <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0949-2> .
- 35 Lazarev N.P. Equilibrium problem for a thermoelastic Kirchhoff-Love plate with a delaminated flat rigid inclusion // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 2022. V. 380. N 20210363.

- 36 Khludnev A. M. Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate // *Mechanics of Solids* 2010. V. 45, N. 5. P. 733–742.
- 37 Lazarev N.P., Kovtunenکو V.A. Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions // *Mathematics* 2022. V. 10, N. 2. P. 250.
- 38 Lazarev N., Semenova G. Optimal control of loads for an equilibrium problem describing a point contact of an elastic body with a sharp-shaped stiffener // *Z. Angew. Math. Phys.* 2022, V. 73, N. 5. P. 202 .
- 39 Fichera G. Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints. In: *Handbook der Physik, Band 6a/2; Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, USA, 1972.*
- 40 Rademacher A., Rosin K. Adaptive optimal control of Signorini’s problem // *Comput. Optim. Appl.* 2018. V. 70, P. 531–569.
- 41 Khludnev A.M., Sokolowski J. *Modelling and Control in Solid Mechanics.* Birkhauser, Basel-Boston-Berlin, 1997.
- 42 Khludnev A. Contact problems for elastic bodies with rigid inclusions // *Q. Appl. Math.* 2012. V. 70, N. 2. P. 269–284.
- 43 Khludnev A.M. Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions // *Eur. J. Mech. A. Solids.* 2010. V. 29, N. 3. P. 392–399.
- 44 Егоров И.Е. О первой краевой задаче для одного неклассического уравнения// *Мат. заметки.* 1987. Т. 42, № 3. С. 403-411.
- 45 Егоров И.Е. О краевой задаче E для одного класса эллиптико-параболических уравнений // *Применение методов функционального анализа в уравнениях математической физики.* Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН СССР, 1987. С. 78-84.
- 46 Егоров И.Е. Краевые задачи для уравнений высокого порядка и с меняющимся направлением времени // *Докл. АН СССР,* 1988. Т. 303, N 6. С. 1301-1304.
- 47 Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. - Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН. - 1995. - С. 3-133.
- 48 Egorov I.E. On one boundary value problem for an equation with varying time direction // *Мат. заметки ЯГУ.* 1998. Т. 5, вып. 2. С. 77-84.

- 49 Чуешев А.В. Разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: НГУ, 2001.
- 50 Федоров В. Е. Нелокальная краевая задача для уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 2. С. 111–116.
- 51 Львов А.П. Нелокальные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / Диссертация ... канд. физ.-мат. наук. – Якутск: ЯГУ, 2006.
- 52 Ефимова Е.С. Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, Вып. 2. С. 32–38.
- 53 Egorov I. E., Fedorov V. E., Tikhonova I. M., Efimova E. S. The Galerkin method for nonclassical equations of mathematical physics // AIP Conference Proceedings. **1907**, 020011 (2017).
- 54 Fedorov V. E. Error estimate of the nonstationary Galerkin method for a higher order equation with changing time direction // AIP Conference Proceedings. **1907**, 030010 (2017).
- 55 Артюшин А.Н. О регулярной разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением эволюции в весовых пространствах Соболева // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16, С. 2003–2012.
- 56 Artyushin A.N., A Boundary value problem for a mixed type equation in a cylindrical domain, Siberian Math. J., 60:2 (2019), 209–222. MR3951147.
- 57 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736.
- 58 Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- 59 Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. - Новосибирск: Наука, 1978. С. 5-13.
- 60 Demidenko G.V. and Uspenskii S.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect Highest-Order Derivative. New York, Basel: Marcel Dekker, 2003.
- 61 Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов Н.Д., Пятнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

- 62 Fedorov V.E. Boundary value problems for a third order equation of mixed-composite type // IOP Conf. Series: Journal of Physics Conf. Series. **1666**,012055 (2020).
- 63 Kolokoltsov, V.N., Troeva, M.S. Fractional Kinetic Equations // Math Notes, 2022, vol. 112, pp. 561–575.
- 64 Kolokoltsov V.N. CTRW approximations for fractional equations with variable order. 2022. arXiv:2203.04897v1 [math.PR].
- 65 Kolokoltsov V.N. Nonlinear Markov processes and kinetic equations. Cambridge Tracts in Mathematics 182, Cambridge Univ. Press. 2010. .
- 66 Kolokoltsov, V.N., Troeva, M.S. A New Approach to Fractional Kinetic Evolutions // Fractal and Fractional, 2022, vol. 6 (2), pp. 1–49.
- 67 Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: ГИТТЛ, 1952.
- 68 Каган В. Ф. Основания теории определителей. – Киев: Гос. изд-во Украины, 1922.
- 69 Федоров Ф. М., Иванова О. Ф. Павлов Н. Н. Сходимость метода редукции и совместность бесконечных систем // Вестник СВФУ им. М. К. Аммосова, – 2014. – Т. 11, № 2. – С. 14-21.
- 70 Федоров Ф. М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, вып. 1. – С. 133-140.
- 71 Иванова О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М. О главных и строго частных решениях бесконечных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 3. С. 351–362.
- 72 Иванова О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М. Решение задачи об изгибе пластинки с заделанными краями путем сведения к бесконечным системам уравнений // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, N 2. С. 328–335.