Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

УДК 513.83

АБСОЛЮТНЫЕ σ–РЕТРАКТЫ И ТЕОРЕМА ЛУЗИНА

П. В. Черников

Аннотация. Устанавливаются некоторые свойства абсолютных σ-ретрактов. Приводится обобщение классической теоремы Лузина об аппроксимации измеримых отображений непрерывными отображениями, а именно установлено следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть Y — полное сепарабельное метрическое пространство и Y является абсолютным σ-ретрактом, X — нормальное пространство, A — замкнутое подмножество X, $\mu \geq 0$ — мера Радона на A, $f : A \to Y$ — μ-измеримое отображение. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такое замкнутое подмножество A_ε множества A, что $\mu(A \backslash A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, и такое непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in A_\varepsilon$.*

Отметим, что связное сепарабельное $ANR(\mathfrak{M})$-пространство принадлежит $AR_\sigma(\mathfrak{M})$.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14231

Ключевые слова: абсолютный σ-ретракт, теорема Лузина.

В [1] определяется понятие абсолютного σ-стационарного пространства в классе $\mathfrak{M}$ всех метрических пространств. Приведем соответствующие определения.

Замкнутое подмножество A метрического пространства X называется *σ-стационарным подмножеством* X, если существует такая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнутых подмножеств множества A, что $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, причем каждое A_n является ретрактом X.

Метрическое пространство Y называется *абсолютным σ-стационарным пространством*, если всякое замкнутое подмножество A любого метрического пространства X, гомеоморфное Y, является σ-стационарным подмножеством в X.

Совокупность всех абсолютных σ-стационарных пространств обозначим через $S(\mathfrak{M})$.

В [2] приводится следующее обобщение классической теоремы Лузина об аппроксимации измеримых функций непрерывными функциями.

Теорема 1. *Пусть Y — полное сепарабельное метрическое пространство и Y принадлежит $S(\mathfrak{M})$, X — нормальное пространство, A — компактное подмножество X, $\mu \geq 0$ — мера Радона на A, $f : A \to Y$ — μ-измеримое отображение.*

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такое компактное подмножество A_ε множества A, что $\mu(A \backslash A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, и такое непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in A_\varepsilon$.

В [3] приводится такое обобщение теоремы Лузина.

Теорема 2. *Пусть Y — полное сепарабельное связное метрическое пространство и Y принадлежит $ANR(\mathfrak{M})$, X — нормальное пространство, A — компактное подмножество X, $\mu \geq 0$ — мера Радона на A, $f : A \to Y$ — μ-измеримое отображение. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такое компактное подмножество A_ε множества A, что $\mu(A \backslash A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, и такое непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in A_\varepsilon$.*

Здесь через $ANR(\mathfrak{M})$ обозначен класс всех метрических абсолютных окрестностных ретрактов [4]; класс всех компактных метрических абсолютных (окрестностных) ретрактов обозначают через $A(N)R$ [4].

Отметим, что теорема 2 не следует из теоремы 1, так как существует двумерный связный ANR-компакт X', не представимый в виде объединения конечного или счетного числа AR-компактов [4, с. 178].

Теорема 1 не следует из теоремы 2, так как, например, гребенка

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ x = 0, 1/n,\ n = 1, 2, \ldots\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$$

принадлежит $S(\mathfrak{M})$, но $\Gamma \notin ANR$.

В [5] в классе $\mathfrak{M}$ определяется понятие абсолютного σ-ретракта. Сформулируем соответствующие определения.

Замкнутое подмножество A метрического пространства X называется *σ-ретрактом* X, если A представимо в виде объединения счетного числа своих замкнутых подмножеств A_n, $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, причем для всякого номера n существует такое непрерывное отображение $r_n : X \to A$, что $r_n(x) = x$ для всех $x \in A_n$.

Метрическое пространство Y называется *абсолютным σ-ретрактом*, если всякое замкнутое подмножество A любого метрического пространства X, гомеоморфное Y, является σ-ретрактом X.

Совокупность всех абсолютных σ-ретрактов обозначим через $AR_\sigma(\mathfrak{M})$. Очевидно, что $S(\mathfrak{M}) \subset AR_\sigma(\mathfrak{M})$. Будет показано, что это включение строгое.

Мерой Радона на топологическом пространстве M будем называть конечную регулярную борелевскую меру.

Далее покажем, что верно такое обобщение теоремы Лузина.

Теорема 3. *Пусть Y — полное сепарабельное метрическое пространство и Y принадлежит $AR_\sigma(\mathfrak{M})$, X — нормальное пространство, A — замкнутое подмножество X, $\mu \geq 0$ — мера Радона на A, $f : A \to Y$ — μ-измеримое отображение. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такое замкнутое подмножество A_ε множества A, что $\mu(A \backslash A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, и такое непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in A_\varepsilon$.*

Очевидно, что теорема 1 следует из теоремы 3. Будет установлено, что теорема 2 также следует из теоремы 3. При этом требование компактности множества A в X можно заменить требованием замкнутости A в X.

Приведем пример компактного связного множества на плоскости $\mathbb{R}^2$, которое не принадлежит классу $AR_\sigma(\mathfrak{M})$.

Пример. Обозначим через C замыкание в плоскости $\mathbb{R}^2$ графика функции $y = \sin\frac{1}{x}$, где $0 < x \leq 1$. Покажем, что $C \notin AR_\sigma(\mathfrak{M})$. Допустим противное. Тогда $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \subset A_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$, где A_n — замкнутое подмножество компакта C, причем для всякого $n \geq 1$ существует такое непрерывное отображение $r_n : \mathbb{R}^2 \to C$, что $r_n(x) = x$ для всех $x \in A_n$. Так как при непрерывном отображении компоненты линейной связности переходят в компоненты линейной связности, для каждого $n \geq 1$ имеем

$$r_n(\mathbb{R}^2) \subset C_0 \text{ или } r_n(\mathbb{R}^2) \subset C_1,$$

где

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\},$$
$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x},\ 0 < x \leq 1\right\}.$$

Найдется номер n_0, для которого

$$A_{n_0} \cap C_0 \neq \varnothing \quad \text{и} \quad A_{n_0} \cap C_1 \neq \varnothing.$$

Значит, $r_{n_0}(\mathbb{R}^2) \cap C_0 \neq \varnothing$, $r_{n_0}(\mathbb{R}^2) \cap C_1 \neq \varnothing$; противоречие. Таким образом, $C \notin AR_\sigma(\mathfrak{M})$.

Лемма 1. *Для того чтобы метрическое пространство Y было абсолютным σ-ретрактом, необходимо и достаточно, чтобы Y было гомеоморфно σ-ретракту A выпуклого множества S некоторого нормированного пространства.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1 из [4, с. 95].

Лемма 2. *Для того чтобы метрическое пространство Y было абсолютным σ-ретрактом, необходимо и достаточно, чтобы для всякого непрерывного отображения $f : A \to Y$ замкнутого подмножества A любого метрического пространства X в Y существовали последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнутых подмножеств множества A такая, что*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A, A_n \subset A_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и последовательность таких непрерывных отображений $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f_n : X \to Y$, что $f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Необходимость. Пусть φ-вложение Куратовского метрического пространства Y в банахово пространство $B(Y)$, $Y' = \varphi(Y)$. Множество Y' замкнуто в своей выпуклой оболочке S. По теореме Дугунджи [4] для отображения φf :

$A \to Y'$ существует такое непрерывное отображение $g : X \to S$, что $g|A = \varphi f$. Имеем

$$Y' = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n \subset B_{n+1},\ n = 1, 2, \dots ,$$

где B_n является замкнутым подмножеством Y' и для всякого номера n существует такое непрерывное отображение $r_n : S \to Y'$, что $r_n(x) = x$ для всех $x \in B_n$. Положим

$$A_n = f^{-1}(\varphi^{-1}(B_n)), \quad f_n = \varphi^{-1} r_n g.$$

Множества A_n замкнуты в A, $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, $f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A_n$.

Достаточность. Пусть φ — вложение Куратовского пространства Y в банахово пространство $B(Y)$, $Y' = \varphi(Y)$. Множество Y' замкнуто в своей выпуклой оболочке S. Рассмотрим отображение $\varphi^{-1} : Y' \to Y$. По условию существуют последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ замкнутых подмножеств множества Y' такая, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = Y', \quad A_n \subset A_{n+1},\ n = 1, 2, \dots ,$$

и последовательность таких непрерывных отображений $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : S \to Y$, что $f_n(x) = \varphi^{-1}(x)$ для всех $x \in A_n$, $n = 1, 2, \dots$. Положим

$$r_n = \varphi f_n, \quad r_n : S \to Y'.$$

Если $x \in A_n$, то $r_n(x) = x$. Таким образом, Y' — σ-ретракт S. По лемме 1 $Y \in AR_\sigma(\mathfrak{M})$.

Лемма доказана.

Далее потребуется хорошо известная

Лемма 3. *Если P — локально компактный связный полиэдр, то*

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad P_k \subset P_{k+1},\ k = 1, 2, \dots ,$$

где P_k — компактный стягиваемый полиэдр.

Следующая лемма обобщает лемму 2 из [6].

Лемма 4. *Если связное сепарабельное метрическое пространство Y принадлежит $ANR(\mathfrak{M})$, то $Y \in AR_\sigma(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Так как метрическое пространство Y связно, сепарабельно и принадлежит $ANR(\mathfrak{M})$, существует связный локальный компактный полиэдр P, гомотопически эквивалентный Y [7]. Пусть $\varphi : Y \to P$, $\psi : P \to Y$ — такие непрерывные отображения, что $\psi\varphi \simeq \mathrm{id}_Y$. Пусть $f : A \to Y$ — непрерывное отображение замкнутого подмножества A метрического пространства X в Y. Рассмотрим отображение $\varphi f : A \to P$. Согласно лемме 3 имеем

$P \in AR_\sigma(\mathfrak{M})$. По лемме 2 существует последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ замкнутых подмножеств A такая, что $A = \bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, и существует такая последовательность непрерывных отображений $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n : X \to P$, что $f_n(x) = \varphi f(x)$ для всех $x \in A_n$, $n = 1, 2, \dots$. Имеем

$$\psi f_n|A_n = \psi\varphi f|A_n \simeq f|A_n.$$

По теореме Борсука о продолжении гомотопии существует такое непрерывное отображение $f'_n : X \to Y$, что $f'_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда по лемме 2 $Y \in AR_\sigma(\mathfrak{M})$.

Лемма доказана.

С учетом леммы 4 получаем $X' \in AR_\sigma(\mathfrak{M}) \setminus S(\mathfrak{M})$.

Лемма 5. *Пусть Y — полное сепарабельное метрическое пространство и Y принадлежит $AR_\sigma(\mathfrak{M})$, X – нормальное пространство, $f : A \to Y$ — непрерывное отображение замкнутого подмножества A пространства X в Y. Тогда существуют последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ замкнутых подмножеств множества A такая, что $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n = A, A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, и последовательность таких непрерывных отображений $\{f_n\}_{n=1}^\infty, f_n : X \to Y$, что $f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A_n$, $n = 1, 2, \dots$.*

Доказательство. Пусть φ — гомеоморфное отображение пространства Y на некоторое замкнутое подмножество Y' пространства $\mathbb{R}^\omega$ [8]. Для отображения $\varphi f : A \to Y'$ существует такое непрерывное отображение $g : X \to \mathbb{R}^\omega$, что $g|A = \varphi f$. Имеем

$$Y' = \bigcup_{n=1}^\infty B_n, \quad B_n \subset B_{n+1},\ n = 1, 2, \dots ,$$

где B_n является замкнутым подмножеством Y' и для всякого номера n существует такое непрерывное отображение $r_n : \mathbb{R}^\omega \to Y'$, что $r_n(x) = x$ для всех $x \in B_n$. Положим

$$A_n = f^{-1}(\varphi^{-1}(B_n)), \quad f_n = \varphi^{-1} r_n g.$$

Множества A_n замкнуты в A, $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n = A$, $f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A_n$.

Лемма доказана.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 в [3] используются результаты теории l_2-многообразий. В данном далее доказательстве теоремы 3, обобщающей теорему 2, результаты теории l_2-многообразий не используются.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме Лузина о C-свойстве существует такое замкнутое подмножество $A_{\varepsilon/2}$ множества A, что $\mu(A \setminus A_{\varepsilon/2}) \le \varepsilon/2$ и сужение отображения f на множество $A_{\varepsilon/2}$ непрерывно.

Положим $g = f|A_{\varepsilon/2}$, $g : A_{\varepsilon/2} \to Y$. Метрическое пространство Y полно, сепарабельно и принадлежит $AR_\sigma(\mathfrak{M})$. По лемме 5 существуют такая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ замкнутых подмножеств множества $A_{\varepsilon/2}$, что

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n = A_{\varepsilon/2}, \quad A_n \subset A_{n+1},\ n = 1, 2, \dots ,$$

и такая последовательность непрерывных отображений $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n : X \to Y$, что $f_n(x) = g(x)$ для всех $x \in A_n$, $n \geq 1$. Найдется номер n_0, для которого $\mu(A_{\varepsilon/2} \setminus A_{n_0}) \leq \varepsilon/2$. Положим $A_\varepsilon = A_{n_0}$, $f_\varepsilon = f_{n_0}$. Тогда $\mu(A \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in A_\varepsilon$.

Теорема доказана.

Отметим, что гребенка Γ принадлежит $AR_\sigma(\mathfrak{M})$, но $\Gamma \notin ANR$.

Лемма 6. *Пусть Y — сепарабельное метрическое пространство и Y принадлежит $AR_\sigma(\mathfrak{M})$, X — совершенно нормальное пространство, $f : A \to Y$ — непрерывное отображение замкнутого подмножества A пространства X в Y. Тогда существуют последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ замкнутых подмножеств множества A такая, что*

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n = A, \quad A_n \subset A_{n+1},\ n = 1, 2, \dots ,$$

и последовательность таких непрерывных отображений $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n : X \to Y$, что $f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Пусть φ — гомеоморфное отображение Y на некоторое подмножество Y' пространства $\mathbb{R}^\omega$. Для отображения $\varphi f : A \to Y'$ существует такое непрерывное отображение $g : X \to \mathbb{R}^\omega$, что $g|A = \varphi f$. Множество $Y' \times \{0\}$ замкнуто в метрическом пространстве

$$M_0 = \mathbb{R}^\omega \times I \setminus (\mathbb{R}^\omega \times \{0\} \setminus Y' \times \{0\}).$$

По теореме Веденисова найдется такая непрерывная функция $\alpha : X \to I$, что $A = \alpha^{-1}(0)$. Положим

$$G(x) = (g(x), \alpha(x)),\ x \in X; \quad G : X \to M_0.$$

Пусть $\psi(x) = (x, 0)$, $x \in Y'$. Имеем

$$Y' \times \{0\} = \bigcup_{n=1}^\infty B_n, \quad B_n \subset B_{n+1},\ n = 1, 2, \dots ,$$

где B_n является замкнутым подмножеством множества $Y' \times \{0\}$ и для всякого номера n существует такое непрерывное отображение $r_n : M_0 \to Y' \times \{0\}$, что $r_n(x) = x$ для всех $x \in B_n$. Положим

$$A_n = G^{-1}(B_n), \quad f_n = \varphi^{-1}\psi^{-1} r_n G.$$

Множества A_n замкнуты в A, $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n = A$, $f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in A_n$. Лемма доказана.

Приведем еще один вариант теоремы Лузина.

Теорема 4. *Пусть Y — сепарабельное метрическое пространство и Y принадлежит $AR_\sigma(\mathfrak{M})$, X — совершенно нормальное пространство, A — замкнутое подмножество X, $\mu \geq 0$ — мера Радона на A, $f : A \to Y$ — μ-измеримое отображение. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такое замкнутое подмножество A_ε множества A, что $\mu(A \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, и такое непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in A_\varepsilon$.*

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3 с использованием леммы 6.

Из теоремы 4 и леммы 4 вытекает

Теорема 5. *Пусть Y — сепарабельное связное метрическое пространство и Y принадлежит $ANR(\mathfrak{M})$, X — совершенно нормальное пространство, A — замкнутое подмножество X, $\mu \geq 0$ — мера Радона на A, $f : A \to Y$ — μ-измеримое отображение. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такое замкнутое подмножество A_ε множества A, что $\mu(A \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, и такое непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in A_\varepsilon$.*

Подобные вопросы рассматриваются в [9].

Заключение. Возникает вопрос: почему мы обобщаем теорему Лузина на случай, когда отображения принимают значения, в частности, в $ANR(\mathfrak{M})$-пространстве Y? Как прийти к такой постановке задачи? Классическая теорема Лузина была доказана в случае, когда $Y = [0, 1]$. С помощью леммы 3 ее легко обобщить на случай, когда $Y = P$, где P — локально компактный связный полиэдр. Теперь уже естественно перейти к $ANR(\mathfrak{M})$-пространствам.

Какую трудность мы при этом преодолеваем (на наш взгляд)? Если бы всякое связное (сепарабельное) $ANR(\mathfrak{M})$-пространство принадлежало классу $S(\mathfrak{M})$, то тогда такое обобщение было бы легко получить (как в случае $Y = P$). Но связный ANR-компакт X' не принадлежит $S(\mathfrak{M})$. Эту трудность мы и преодолеваем, введя понятие $AR_\sigma(\mathfrak{M})$-пространства и показав, что всякое связное сепарабельное $ANR(\mathfrak{M})$-пространство Y принадлежит $AR_\sigma(\mathfrak{M})$ (лемма 4).

Теорема Лузина встречается в обширной классической литературе (см., например, [10–16]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черников П. В.* О продолжении отображений со значениями в метрическом пространстве. II. М., 1979. Деп. в ВИНИТИ, № 2851–79. Аннот.: Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 4. С. 231.
2. *Черников П. В.* О продолжении отображений со значениями в метрическом пространстве. IV. М., 1981. Деп. в ВИНИТИ, № 5654–81. Аннот.: Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 4. С. 214.
3. *Черников П. В.* К теореме Н.Н. Лузина // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 212–215.
4. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.
5. *Черников П. В.* Метрические пространства и продолжение отображений // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 6. С. 210–215.
6. *Черников П. В.* Аппроксимация измеримых отображений и ретракты. М., 1989. Деп. в ВИНИТИ, № 1585–В89. Аннот.: Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 3. С. 213–214.

7. *Milnor J. W.* On spaces having the homotopy type of a CW–complex // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 90, N 2. P. 272–280.
8. *Федорчук В. В., Чигогидзе А. Ч.* Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М.: Наука, 1992.
9. *Черников П. В.* О пространствах, близких к абсолютным ретрактам // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 89–91.
10. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963.
11. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973.
12. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
13. *Меньшов Д. Е.* О рядах Фурье непрерывных функций // Уч. зап. Моск. ун-та. 1951. Т. 4, вып. 148. С. 108–132.
14. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
15. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1.
16. *Филиппов В. В.* О теореме Лузина и правых частях дифференциальных включений // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 1. С. 93–98.

Статья поступила 10 марта 2018 г.

Черников Павел Васильевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, 630090, Новосибирск

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

UDC 513.83

ABSOLUTE σ–RETRACTS AND LUZIN'S THEOREM

P. V. Chernikov

Abstract: We prove some properties of absolute σ-retracts. The generalization of the classical Luzin theorem about approximation of a measurable mapping by continuous mappings is given. Namely, we prove the following statement:

Theorem. *Let Y be a complete separable metric space in $AR_\sigma(\mathfrak{M})$, where $AR_\sigma(\mathfrak{M})$ is the whole complex of all absolute σ-retracts. Suppose that X is a normal space, A is a closed subset in X, $\mu \geq 0$ is the Radon measure on A, and $f : A \to Y$ is a μ-measurable mapping. Given $\varepsilon > 0$, there exist a closed subset A_ε of A such that $\mu(A \backslash A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ and a continuous mapping $f_\varepsilon : X \to Y$ such that $f_\varepsilon(x) = f(x)$ for all $x \in A_\varepsilon$.*

Note that a connected separable $ANR(\mathfrak{M})$-space belongs to $AR_\sigma(\mathfrak{M})$.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14231

Keywords: absolute σ-retract, Luzin's theorem.

REFERENCES

1. *Chernikov P. V.*, "On the continuation of mappings with values in metric spaces. Part II [in Russian]," Sib. Mat. Zh., **21**, No. 4, 231 (1980).
2. *Chernikov P. V.*, "On the continuation of mappings with values in metric spaces. Part IV [in Russian]," Sib. Mat. Zh., **23**, No. 4, 214 (1982).
3. *Chernikov P. V.*, "On the N. N. Luzin theorem," Sib. Math. J., **33**, No. 1, 174–176 (1992).
4. *Borsuk K.*, Theory of Retracts [in Russian], Mir, Moscow (1971).
5. *Chernikov P. V.*, "Metric spaces and extensions of mappings," Sib. Math. J., **27**, 958–962 (1986).
6. *Chernikov P. V.*, "Approximation of measurable maps and retracts [in Russian]," Sib. Mat. Zh., **31**, No. 3, 213–214 (1990).
7. *Milnor J. W.*, "On spaces having the homotopy type of a CW-complex," Trans. Amer. Math. Soc., **90**, No. 2, 272–280 (1959).
8. *Fedorchuk V. V. and Chigogidze A. Ch.*, Absolute Retracts and Infinite-Dimensional Manifolds [in Russian], Nauka, Moscow (1992).
9. *Chernikov P. V.*, "Spaces that are close to absolute retracts," Math. Notes, **38**, 562–563 (1985).
10. *Viner N.*, Fourier Integral and Its Applications [in Russian], Fizmatgiz, Moscow (1963).
11. *Vulikh B. Z.*, Brief Course of Theory of Functions of Real Variables [in Russian], Nauka, Moscow (1973).
12. *Kirillov A. A. and Gvishiani A. D.*, Theorems and Problems of Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1979).
13. *Men'shov D. E.*, "On Fourier series of continuous functions [in Russian]," Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ., **4**, No. 148, 108–132 (1951).
14. *Natanson I. P.*, Theory of Functions of Real Variables [in Russian], Nauka, Moscow (1974).
15. *Schwartz L.*, Analysis [in Russian], Vol. 1, Mir, Moscow (1972).

16. *Filippov V. V.*, "Luzin theorem and right-hand sides of differential inclusions," Math. Notes, **37**, No. 1, 53–56 (1985).

Submitted March 10, 2018

Pavel V. Chernikov
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia