Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

УДК 517.518.85

О СВОЙСТВЕ ФУНКЦИИ МОДУЛЬ ЧИСЛА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УЗЛАХ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПО ЛАГРАНЖУ

В. Б. Хохолов

Аннотация. Рассматриваются интерполяционные процессы Лагранжа по следующим матрицам узлов интерполирования: матрица по корням многочлена Чебышева I-го рода; матрица по корням многочлена Лежандра; расширенная матрица по корням многочлена Лежандра. Для этих матриц доказаны равномерная сходимость процесса Лагранжа при интерполировании функции модуль числа. Получены оценки порядка сходимости для каждой из этих матриц узлов. Для улучшения качества сходимости к матрице по корням Лежандра в качестве узлов были добавлены и концы отрезка. При этом для функции модуль числа порядок сходимости процесса Лагранжа не меняется, а лишь улучшается примерно в 8 раз. Для сравнения приводится отрицательный результат и по матрице равноотстоящих узлов.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14230

Ключевые слова: модуль числа, интерполяция, постоянная Лебега, многочлены Чебышева и Лежандра, расширенная матрица.

Для интерполяции функции матрица равноотстоящих узлов широко применяется на практике ввиду своей простоты. Но если учесть отрицательный результат академика С. Н. Бернштейна [1, 2] и его обобщения [3, 4], то теоретическое значение матрицы равноотстоящих узлов невелико. Для улучшения сходимости приходится рассматривать и другие матрицы узлов интерполирования [5–11], для которых возможно выписать явные формулы для интерполяционного многочлена Лагранжа.

Пусть $P_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлены Якоби, ортогональные на $[-1,1]$ с весом $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha,\beta > -1$; $x_{n,k}$ — корни многочленов, перенумерованные справа налево: $x_{n,k+1} < x_{n,k}$, $k = 0,1,2,\dots,n$; $\theta_{n,k} = \arccos x_{n,k}$. Для любой непрерывной функции $f(x)$, $x \in [-1,1]$, т. е. $f(x) \in C[-1,1]$, рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k}) l_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k}) \frac{P_n(x)}{P_n'(x_{n,k})(x - x_{n,k})}.$$

Пусть $f(t) = |t|$. Введем функцию

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \le x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Рассмотрим $L_n(\varphi, x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа по корням многочлена Лагранжа для функции $\varphi(x)$. Пусть $m = [\frac{n}{2}]$ — целая часть числа $\frac{n}{2}$. Из следующих свойств интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$\sum_{k=1}^{n} l_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} x_{n,k} l_{n,k}(x) = x,$$

и того, что $x_{n,k} \geq 0$ при $k = 0, 1, 3, \ldots, m$ и $x_{n,k} < 0$ при $k = m+1, m+2, \ldots, n$, следует

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$|L_n(\varphi, x) - \varphi(x)| = \begin{cases} \left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} x_{n,k} \frac{P_n(x)}{P_n'(x_{n,k})(x - x_{n,k})} \right| & \text{при } x \geq 0, \\ \left| \sum\limits_{k=1}^{m} x_{n,k} \frac{P_n(x)}{P_n'(x_{n,k}) \cdot (x - x_{n,k})} \right| & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

1. Интерполирования по матрице равноотстоящих узлов. Матрица равноотстоящих узлов $x_{n,k} = -1 + \frac{2k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Постоянная Лебега интерполяционного процесса Лагранжа по равноотстоящим узлам растет со скоростью геометрической прогрессии [2, 13], поэтому справедлива

Теорема 1 (С. Н. Бернштейн [1]). *Интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$, построенный для функции $|x|$ по равноотстоящим узлам отрезка $[-1, 1]$, не стремится с возрастанием n к $|x|$ ни в одной точке отрезка $[-1, 1]$, отличной от -1, 0 и $+1$.*

2. Интерполирование по узлам Чебышева. *Многочленами Чебышева 1-го рода* называют функции $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$. Они имеют нули в точках

$$x_{n,k} = \cos\theta_{n,k}, \quad \theta_{n,k} = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad x = \cos t.$$

Для любой функции $f(x) \in C[-1; 1]$ определим *интерполяционный многочлен по корням многочлена Чебышева*:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k}) \frac{T_n(x)}{T_n'(x_{n,k})(x - x_{n,k})} \\ = \frac{\cos(n \cdot t)}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\cos\theta_{n,k}) \frac{(-1)^{k-1} \sin\theta_{n,k}}{\cos t - \cos\theta_{n,k}} \quad (1)$$

Постоянная Лебега интерполяционного процесса Лагранжа по узлам Чебышева имеет известную оценку [12, 13]:

$$\lambda_n \leq 8 + \frac{4}{\pi} \ln n.$$

Теорема 2. *Для интерполяционного многочлена Лагранжа по узлам Чебышева (1) справедлива оценка*

$$|L_n(|t|,x)-|x|| \sim \frac{|T_n(x)|}{n}.$$

Доказательство следует из леммы, свойств многочлена Чебышева [12, 14] и оценки

$$|L_n(|t|,x)-|x|| \sim \frac{|\cos(n\cdot t)|}{n}\begin{cases} \left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}(-1)^k\sin\theta_{n,k}\right| & \text{при } 0\le t\le \frac{\pi}{2},\\ \left|\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^k\cdot\sin\theta_{n,k}\right| & \text{при } \frac{\pi}{2}< t\le \pi \end{cases} = \frac{|T_n(x)|}{n\cdot\cos\frac{\pi}{2n}}.$$

3. Интерполирование по матрице Лежандра. Пусть

$$P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x)$$

— многочлен Лежандра степени n. Для любой функции $f(x)\in C[-1;1]$ определим *интерполяционный многочлен Лагранжа*

$$L_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})l_{n,k}(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})\frac{P_n(x)}{P_n'(x_{n,k})(x-x_{n,k})} \tag{2}$$

Обозначим через $L_n(x)$ функцию Лебега интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$L_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|l_{n,k}(x)|.$$

Справедлива следующая оценка функции Лебега.

Теорема 3 (Г. И. Натансон [5]). *Имеет место неравенство*

$$L_n(x)-1\sim |P_n(x)|\sqrt{n}(1+\sqrt[4]{1-x^2}\ln n).$$

В работе [5] приводится оценка для узлов Якоби ($\alpha,\beta>-\frac{1}{2}$), здесь взят случай для многочленов Лежандра, т. е. $\alpha=\beta=0$.

Теорема 4. *Для интерполяционного многочлена Лагранжа по узлам Лежандра (2) справедлива оценка*

$$|L_n(|t|,x)-|x|| \sim \frac{|P_n(x)|}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство. Воспользуемся леммой и оценками [12, 5]:

$$|P_n'(x_{n,k})|\sim k^{-\frac{3}{2}}n^2,\quad 0<\theta_{n,k}\le \pi/2,$$

$$|P_n'(x_{n,k})|\sim (n+1-k)^{-\frac{3}{2}}n^2,\quad \pi/2\le\theta,$$

$$|L_n(\varphi,x)-\varphi(x)| = |P_n(x)|\cdot\begin{cases}\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{A_{n,k}}{P_n'(x_{n,k})}\right| & \text{при } x\geq 0,\\ \left|\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{A_{n,k}}{P_n'(x_{n,k})}\right| & \text{при } x<0.\end{cases}$$

где

$$A_{n,k}=\frac{x_{n,k}}{x-x_{n,k}}.$$

При $x\geq 0$ и $k=m+1,m+2,\dots,n$ будет $x_{n,k}<0$, поэтому $|A_{n,k}|\leq 1$, при $x<0$ и $k=1,2,\dots,m$ имеем $x_{n,k}>0$, поэтому $|A_{n,k}|\leq 1$. В итоге

$$|L_n(\varphi,x)-\varphi(x)|\sim|P_n(x)|\cdot\begin{cases}\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{1}{P_n'(x_{n,k})}\right|\\ \left|\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{P_n(x_{n,k})}\right|\end{cases}$$

$$\sim\frac{|P_n(x)|}{n^2}\cdot\begin{cases}\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}(-1)^k\cdot(n-k)^{\frac{3}{2}}\right|\\ \left|\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^k k^{\frac{3}{2}}\right|\end{cases}\sim\frac{|P_n(x)|}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k^{\frac{3}{2}}\right|\sim\frac{|P_n(x)|}{\sqrt{n}},$$

что и требовалось доказать.

4. Интерполирование по расширенной матрице Лежандра. Положим $Q_n(x)=(1-x^2)P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n. Обозначим нули многочлена $Q_n(x)$ через $x_{n,k}$:

$$x_{n,k}=\begin{cases}1 & \text{при } k=0,\\ P_n(x_{n,k}), & \text{при } k=1,2,3\dots,n,\\ -1 & \text{при } k=n+1;\end{cases}$$

Многочлен влияния $l_{n,k}(x)$ в этом случае имеет вид

$$l_{n,k}(x)=\frac{Q_n(x)}{Q_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}=\begin{cases}\frac{(1+x)P_n(x)}{2} & \text{при } k=0,\\ \frac{(1-x^2)P_n(x)}{(1-x_{n,k}^2)P_n'(x_{n,k})(x-x_{k,n})} & \text{при } k=1,2,3,\dots,n,\\ \frac{(1-x)P_n(x)}{2\cdot(-1)^n} & \text{при } k=n+1,\end{cases}$$

Для любой функции $f(t)\in C[-1;1]$ и для любого $n\in\mathbb{N}$ определим интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам многочлена $Q_n(x)$:

$$LQ_n(f,t)=\sum_{k=0}^{n+1}f(x_{n,k})l_{n,k}(x)=f(1)\frac{(1+t)P_n(t)}{2}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}f(x_{n,k})\frac{(1-t^2)P_n(t)}{(1-x_{n,k}^2)P_n'(x_{n,k})(t-x_{n,k})}+f(-1)\frac{(1-t)P_n(t)}{2(-1)^n}. \quad (3)$$

Теорема 5 [15]. *Для постоянной Лебега λ_n процесса (3) справедливо*

$$\lambda_n=O(\ln n).$$

Теорема 6. *Для интерполяционного многочлена Лагранжа* (3) *справедлива оценка*

$$|LQ_n(|t|,x)-|x||\sim\frac{(1-x^2)|P_{n-2}(x)|}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство следует из леммы, свойств многочлена Лежандра [12, 14] и оценки

$$|LQ_n(\varphi,x)-\varphi(x)|\sim(1-x^2)|P_{n-2}(x)|\left|\sum_{k=[\frac{n}{2}]}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right|\sim\frac{(1-x^2)|P_{n-2}(x)|}{\sqrt{n}}.$$

Замечание. Порядок сходимости к функции $|x|$ такой же, как по узлам Лежандра, но при этом скорость сходимости улучшается примерно в 8 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн С. Н.* Quelques remarques sur l'interpolation // Communications de la Société mathématique de Kharkow. 2-ée série. 1916. V. 15, N 2. P. 49–61.
2. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.: Гостехиздат, 1949.
3. *Runck P. O.* Über Konvergenzfragen bei Polynominterpolation mit aquidistanten Knoten. I–II. J. Reine angew. Math. 1961. Bd 208, Heft 1–2. S. 51–69; 1962. Bd 210, Heft 3–4. S. 175-204.
4. *Рабкин Е. Л., Шапиро Е. П.* Об одном расходящемся интерполяционном процессе. Изв. вузов. Математика. 1971. № 8. С. 103–110.
5. *Натансон Г. И.* Двусторонняя оценка функции Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами Якоби // Изв. вузов. Математика. 1967. № 11. С. 67–74.
6. *Агаханов С. А.* Оценка функции Лебега для интерполяционного процесса по корням полиномов Якоби. Изв. вузов. Математика. 1967. № 11. С. 3–6.
7. *Привалов А. А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа. Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228–243.
8. *Привалов А. А.* Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа. Изв. вузов. Математика. 1986. № 5. С. 49–59.
9. *Хохолов В. Б.* Сравнение признаков равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа по матрицам Якоби на $[-1;1]$ (статья). Деп. в ВИНИТИ 29.12.85. N8972-В. 40 с.
10. *Хохолов В. Б.* Равномерная сходимость интерполяционных процессов Лагранжа // Динамика систем управления и вычислительные процессы. Межвуз. сб. науч. тр. Якутск, 1991. (Отв. редактор Хохолов В. Б.). С. 52–64.
11. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск, Вышэйшая школа, 1968.
12. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. Изд. 2-е, доп. М.: Наука, 1979.
13. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.
14. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
15. *Хохолов В. Б., Кириллина А. А.* Об одной постоянной Лебега // Тез. докл. на VII республ. научно-практической конф. молодых ученых и специалистов. Якутск, 1988. С. 47.

Статья поступила 16 апреля 2018 г.

Хохолов Валерий Брониславович
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Белинского, 58, Якутск 677000
`matematinformat5@rambler.ru`

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

UDC 517.518.85

ABOUT THE ABSOLUTE VALUE FUNCTION WITH DIFFERENT NODES OF LAGRANGE INTERPOLATION

V. B. Khokholov

Abstract: Lagrange interpolation processes are considered for the following matrixes of interpolation nodes: the matrix of Chebyshev polynomial roots of the 1st kind, the matrix of Legendre polynomials roots, and the extended matrix of Legendre polynomials roots.

For these matrixes the uniform convergence of Lagrange process of interpolation for the absolute value function proved. Also, we receive estimates on the order of convergence for each of these matrixes. To ensure the quality of convergence, the endpoints of the segment were added as nodes to the matrix of Legendre roots. However, for the absolute value function the order of convergence of the Legendre process does not change, but improves by approximately 8 times. For comparison, the negative result of equidistant nodes is taken.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14230

Keywords: modulus of a number, interpolation, Lebesgue constant, Chebyshev and Legendre polynomials, extended matrix.

REFERENCES

1. *Bernstein S. N.*, “Certain remarks about interpolation [in French],” Charǐkov, Comm. Soc. Math., 2, 49–61 (1916).

2. *Natanson G. I.*, The Constructive Theory of Functions [in Russian], Gostekhizdat, Moscow (1949).

3. *Runck P. O.*, “Über Konvergenzfragen bei Polynominterpolation mit äquidistanten Knoten. I–II,” J. Reine Angew. Math., **208**, 51–69 (1961); **210**, 175–204 (1962).

4. *Rabkin E. L. and Shapiro E. P.*, “A divergent process of interpolation [in Russian],” Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 8, 103–110 (1971).

5. *Natanson G. I.*, “Estimate of lower and upper bounds for Lebesgue function of Lagrange interpolation processes with Jacobi nodes [in Russian],” Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 11, 67–74 (1967).

6. *Agahanov S. A.*, “Assessment of Lebesgue function for interpolation process in roots of Jacobi polynomials [in Russian],” Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 11, 3–6 (1967).

7. *Privalov A. A.*, “About uniform convergence of Lagrange interpolation processes,” Math. Notes, **39**, No. 2, 228–243 (1986).

8. *Privalov A. A.*, “Criterion of uniform convergence of Lagrange interpolation processes [in Russian],” Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., No. 5, 49–59 (1986).

9. *Khokholov V. B.*, “Comparison of tests of convergence of Lagrange interpolation processes in Jacobi matrixes on $[-1;1]$ [in Russian],” Dep. VINITI 29.12.85, No. 8972, 40 p.

10. *Khokholov V. B.*, “Uniform convergence of Lagrange interpolation processes [in Russian],” in: Dynamics of Control Systems and Evaluation Processes, Mezhvuz. Sb. Nauch. Trudov, Yakutsk, 1991, pp. 52–64.

11. *Turetsky A. H.*, Interpolation Theory in Problems [in Russian], Vysheyshaya Shkola, Minsk (1968).
12. *Suetin P. K.*, Classical Orthogonal Polynomials [in Russian], Nauka, Moscow (1979).
13. *Daugavet I. K.*, Introduction to the Theory of Approximation of Functions [in Russian], Izdat. Leningr. Univ., Leningrad (1977).
14. *Szegö G.*, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., New York (1959).
15. *Khokholov V. B. and Kirillina A. A.*, "About one constant of Lebesgue [in Russian]," in: Tez. Dokl. VII Resp. Nauch.-Prakt. Konf. Molodykh Uchyonykh i Spetsialistov, Yakutsk, 1988, pp. 47.

Submitted April 16, 2018

Valery B. Khokholov
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677000, Russia
matematinformat5@rambler.ru