Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

УДК 517.9

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

З. К. Фаязова

Аннотация. Ранее была рассмотрена задача: на части границы области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ находится нагреватель, имеющий регулируемую температуру. Требуется найти такой режим работы нагревателя, чтобы средняя температура в некоторой подобласти D области Ω принимала заданное значение.

В данной работе рассматривается аналогичная задача граничного управления связанная с псевдопараболическим уравнением на отрезке. На части границы рассматриваемого отрезка задается значение решения, которое содержит параметр управления. Ограничение для допустимого управления задано в таком виде, что среднее значение решения в некоторой части рассматриваемого отрезка принимает заданное значение. Решается вспомогательная задача методом разделения переменных. Искомая задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Методом преобразования Лапласа доказываются теоремы о существовании и единственности допустимого управления.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14229

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, граничное управление, параметр управления, интегральное уравнение Вольтерра, преобразование Лапласа.

0. Введение

В работе исследуется задача граничного управления с интегральным ограничением, связанная с псевдопараболическим уравнением. В ограниченной области $-\pi < x < \pi$, $0 < t < T$ рассматривается уравнение

$$u_t = u_{txx} + u_{xx}, \quad (x,t) \in \Pi = \{0 < t < T,\ -\pi < x < \pi\} \tag{1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u|_{x=-\pi} = \mu(t), \quad u|_{x=\pi} = 0. \tag{3}$$

Задача. *Найти* $\mu(t)$ *из условия*

$$\int\limits_{-\pi}^{0} u(t,x)dx = \theta(t), \tag{4}$$

где $\mu(t)$ *удовлетворяет условию* $\mu(0) = 0$, *а также выполняется ограничение*

$$|\mu(t)| \leq 1. \tag{5}$$

Уравнение (1) можно рассмотреть как одну из моделей теории несжимаемых простых жидкостей с затухающей памятью (по этому поводу см. [1]). Неустойчивость, единственность и существование решения некоторых классических краевых задач для данного уравнения рассмотрены в работе [2]. Задачи импульсного управления для некоторых систем с распределенными параметрами рассматривались в [3–7].

Отметим, что проблема управления системами с распределенными параметрами, эволюция которых моделируется с помощью дифференциальных уравнений с частными производными, изложена в монографии [8].

В последние годы интерес к изучению систем с распределенными параметрами заметно возрос, в связи с чем следует отметить работы В. А. Ильина и Е. И. Моисеева, в которых подробно исследованы вопросы граничного управления различными системами, описываемыми волновым уравнением (см. [9, 10]). Из результатов, относящихся к проблеме управления процессами, описываемыми уравнениями параболического типа, и, в частности, процессом теплообмена, можно отметить работы [11–14].

В данной работе доказано, что решение рассматриваемой задачи существует и единственно.

Определение 1. Управление $\mu(t)$ называется *допустимым*, если μ — кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$|\mu(t)| \le 1.$$

Для формулировки основного результата работы понадобятся свойства собственных значений и собственных функций следующей спектральной задачи. Рассмотрим задачу нахождения собственных значений оператора второго порядка

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

с граничными условиями

$$X(-\pi) = X(\pi) = 0.$$

Данная задача является задачей Штурма — Луивилля, и ее решение известно [15]:

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n(x+\pi)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Основной результат

Утверждение 1. *Решение задачи* (1)–(3) *представимо в виде*

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{1+\lambda_n}\sin\frac{n(x+\pi)}{2}\mu(t) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{(1+\lambda_n)^2}\int\limits_0^t e^{\left(-\frac{\lambda_n(t-\tau)}{1+\lambda_n}\right)}\mu(\tau)\sin\frac{n(x+\pi)}{2}\,d\tau. \quad (6)$$

Для доказательства данного утверждения достаточно искать решение задачи методом разделения переменных и применять некоторые элементарные преобразования.

Интегрируя равенство (6) по переменной x от 0 до π и учитывая условие (4), после несложных преобразований имеем

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{1+\lambda_n}\mu(t)+\int\limits_0^t\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n)^2}e^{(-\frac{\lambda_n(t-\tau)}{1+\lambda_n})}\sin^2\frac{n\pi}{4}\mu(\tau)\,d\tau=\theta(t),$$

или

$$\mu(t)+\alpha\int\limits_0^t K(t-\tau)\mu(\tau)\,d\tau=\alpha\theta(t), \tag{7}$$

где

$$\alpha=\frac{\operatorname{sh}(2\pi)}{\operatorname{ch}(2\pi)-1},\quad K(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n)^2}e^{(-\frac{\lambda_n t}{1+\lambda_n})}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$$

По определению преобразования Лапласа имеем

$$\widetilde{\mu}(p)=\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}\mu(t)\,dt. \tag{8}$$

Применяя преобразование Лапласа к последнему интегральному уравнению Вольтерра второго рода и учитывая свойства преобразования свертки, получим

$$\alpha\tilde{\theta}(p)\ =\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}\,dt\alpha\int\limits_0^t K(t-s)\mu(s)\,ds+\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}\mu(t)\,dt=\widetilde{\mu}(p)+\alpha\widetilde{K}(p)\widetilde{\mu}(p).$$

Следовательно,

$$\widetilde{\mu}(p)=\frac{\alpha\tilde{\theta}(p)}{1+\alpha\widetilde{K}(p)}. \tag{9}$$

Отсюда получаем (при некотором $a>0$)

$$\mu(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\alpha\tilde{\theta}(p)}{\alpha\widetilde{K}(p)+1}e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{\alpha\theta}(a+i\xi)}{\alpha\widetilde{K}(a+i\xi)+1}e^{(a+i\xi)t}\,d\xi. \tag{10}$$

Так как

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-t\mu}e^{-pt}dt=\frac{1}{p+\mu},$$

то

$$\widetilde{K}(p)=\int\limits_0^{\infty}K(t)e^{-pt}\,dt=\int\limits_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n)^2}e^{-\frac{\lambda_n}{(1+\lambda_n)}t}\sin^2\frac{n\pi}{4}e^{-pt}\,dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n)^2}\frac{1}{p+q_n}\sin^2\frac{n\pi}{4},$$

здесь $q_n = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}$,

$$K(a+i\xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n)^2}\frac{1}{a+i\xi+q_n}\sin^2\frac{n\pi}{4}$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n)^2}\frac{a+q_n}{(a+q_n)^2+\xi^2}\sin^2\frac{n\pi}{4}$$
$$+ i\xi\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n)^2}\frac{1}{(a+q_n)^2+\xi^2}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$$

Тогда

$$\operatorname{Im}(\alpha\widetilde{K}(a+i\xi)+1) = -i\xi\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\lambda_n)^2}\frac{1}{(a+q_n)^2+\xi^2}\sin^2\frac{n\pi}{4}$$

Заметим, что для q_n, ξ и $a>0$ верно неравенство

$$(a+q_n)^2+\xi^2 \le [1+(a+q_n)^2](1+\xi^2).$$

Нетрудно доказать, что

$$|\operatorname{Im}(\alpha\widetilde{K}(a+i\xi)+1)| \ge \frac{|\xi|}{1+\xi^2}\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{(1+\lambda_n)^2((a+q_n)^2+1)}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{(1+\lambda_n)^2((a+q_n)^2+1)}$ сходится,

$$|\operatorname{Im}(\alpha\widetilde{K}(a+i\xi)+1)| \ge \widetilde{C}_{1a}\frac{|\xi|}{1+\xi^2},$$

где

$$\widetilde{C}_{1a} = \alpha\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{(1+\lambda_n)^2((a+q_n)^2+1)}.$$

Аналогично

$$|1+\alpha\operatorname{Re}\widetilde{K}(a+i\xi)| = \left|1+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+q_n}{(a+q_n)^2+\xi^2}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{(1+\lambda_n)^2}\frac{2}{\pi}\right|$$
$$\ge \alpha\frac{1}{1+\xi^2}\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+q_n}{(a+q_n)^2+1}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{(1+\lambda_n)^2} = \frac{1}{1+\xi^2}\widetilde{C}_{2a}.$$

Суммируя полученные неравенства для $1+\alpha\widetilde{K}(a+i\xi)$, приходим к оценке

$$|1+\alpha\widetilde{K}(a+i\xi)| \ge \frac{C_a}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Пусть образ заданной функции $\theta(t)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\theta}(i\xi)|\sqrt{1+\xi^2}d\xi < +\infty. \tag{11}$$

Тогда предельным переходом при $a\to 0$ из (9) можно получить равенство

$$\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\theta}(i\xi)}{1+\alpha\widetilde{K}(i\xi)}e^{i\xi t}\,d\xi.$$

Теорема 1. *Пусть $\theta \in W_2^2(-\infty,+\infty)$ и $\theta(t)=0$ при $t\le 0$. Тогда выполняется условие* (11).

Доказательство. Проинтегрируем по частям в интеграле, отображающем образ заданной функции $\theta(t)$:

$$\tilde\theta(a+i\xi)=\int\limits_0^\infty e^{-(a+i\xi t)}\theta(t)\,dt=\frac{e^{-(a+i\xi)t}}{-a-i\xi}\theta(t)\Big|_{t=0}^{t=\infty}+\frac{1}{a+i\xi}\int\limits_0^\infty e^{-(a+i\xi)t}\theta'(t)\,dt.$$

Используя полученное неравенство и умножая на соответствующий коэффициент, получим

$$(a+i\xi)\tilde\theta(a+i\xi)=\int\limits_0^\infty e^{-(a+i\xi)t}\theta'(t)\,dt.$$

Отсюда при $a\to 0$ имеем

$$i\xi\tilde\theta(i\xi)=\int\limits_0^\infty e^{-i\xi t}\theta'(t)\,dt.$$

Аналогично

$$(i\xi)^2\tilde\theta(i\xi)=\int\limits_0^\infty e^{-i\xi t}\theta''(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^\infty|\tilde\theta(i\xi)|^2(1+\xi^2)^2\,d\xi\le C\|\theta\|^2_{W_2^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tilde\theta(i\xi)|\sqrt{1+\xi^2}\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\tilde\theta(i\xi)|(1+\xi^2)}{\sqrt{1+\xi^2}}\,d\xi$$

$$\le\left(\int\limits_{-\infty}^\infty|\tilde\theta(i\xi)|^2(1+\xi^2)^2\,d\xi\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{1+\xi^2}\right)^{1/2}\le C_1\|\theta\|^2_{W_2^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Существует постоянная $M>0$ такая, что при выполнении условий*

$$\|\theta\|^2_{W_2^2(\mathbb{R}_+)}\le M$$

и $\theta(0)=\theta'(0)=0$ допустимое управление существует и единственно.

Доказательство. Согласно вышеизложенному

$$|\mu(t)|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\tilde\theta(i\xi)|}{|\widetilde{K_0}(i\xi)|}\,d\xi\le\frac{1}{2\pi C_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tilde\theta(i\xi)|\sqrt{1+\xi^2}\,d\xi.$$

Поэтому

$$|\mu(t)| \leq \frac{1}{2\pi C_0} C_1 \|\theta\|^2_{W_2^2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{C_1}{2\pi C_0} M = 1.$$

В качестве M мы взяли

$$M = \frac{2\pi C_0}{C_1}.$$

Теорема доказана.

Автор приносит благодарность академику Ш. А. Алимову за внимание, проявленное к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coleman B. D., Noll W.* An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics // Arch. Rational Mech. Anal. 1960. V. 6. P. 355–370.
2. *Bernard D. Coleman R., Duffin J., Mizel V. J.* Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. V. 19, N 2. P. 100–116.
3. *Ляшко С. И.* О разрешимости псевдопараболических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1985. № 9. С. 71–72.
4. *Ляшко С. И., Маньковский А. А.* Оптимальное импульсное управление системой с распределенными параметрами гиперболического типа // Докл. АН УССР. 1983. №4. С. 69–71.
5. *Ляшко С. И., Маньковский А. А.* Одновременная оптимизация моментов и интенсивностей импульсов в задачах управления для параболических уравнений // Кибернетика. 1983. № 3. С. 81–82.
6. *White L. W.* Point control; approximations of parabolic parabolic problems and pseudo-parabolic problems // Appl. Anal. 1981. V. 12. P. 251–263.
7. *Lions J.-L.* Contrôle optimal de systémes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1968.
8. *Fursikov A. V.* Feedback stabilization for 2D-seen equations: additional remarks // Control and estimation of distributed parameter systems. Intern. Ser. Numer. Math. Basel: Birkhäuser, 2002. V. 143. P. 169–187.
9. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1670–1686.
10. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, вып. 6. С. 89–114.
11. *Fattorini H. O.* Time and norm optimal control for linear parabolic equations: necessary and sufficient conditions // Control and estimation of distributed parameter system. Intern. Ser. Numer. Math. 2002. V. 143. P. 151–168.
12. *Barbu V., Râşcanu A., Tessitore G.* Carleman estimates and controllability of linear stochastic heat equation // Appl. Math. Optim. 2003. V. 47. N 2. P. 97–120.
13. *Albeverio S., Alimov Sh.* On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process // Appl. Math. Optim. 2008. V. 57. N 1. P. 58–68.
14. *Алимов Ш. А.* О задаче оптимального управления связанной с теплообменом // Докл. АН РУз. 2006. № 1. С. ??–??.
15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 19 февраля 2018 г.

Фаязова Зарина Кудратиллоевна
Ташкентский гос. технический университет,
кафедра высшей математики
ул. Университетская, 2, Ташкент 100174, Узбекистан
z.fayazova@yahoo.com

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

UDC 517.9

BOUNDARY CONTROL FOR A PSEUDO–PARABOLIC EQUATION

Z. K. Fayazova

Abstract: Previously, a mathematical model for the following problem was considered. On a part of the border of the region $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ there is a heater with controlled temperature. It is required to find such a mode of its operation that the average temperature in some subregion D of Ω reaches some given value.

In this paper, we consider a similar boundary control problem associated with a pseudo-parabolic equation on a segment. On the part of the border of the considered segment, the value of the solution with control parameter is given. Restrictions on the control are given in such a way that the average value of the solution in some part of the considered segment gets a given value. The auxiliary problem is solved by the method of separation of variables, while the problem in consideration is reduced to the Volterra integral equation of the second kind. By Laplace transform method, the existence and uniqueness theorems for admissible control are proved.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14229

Keywords: pseudo-parabolic equation, boundary control, control parameter, Volterra integral equation, Laplace transform.

REFERENCES

1. *Coleman B. D. and Noll W.*, “An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics,” Arch. Ration. Mech. Anal., **6**, 355–370 (1960).

2. *Coleman B. D., Duffin R. J., and Mizel V. J.*, “Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation on a strip,” Arch. Ration. Mech. Anal., **19**, No. 2, 100–116 (1965).

3. *Lyashko S. I.*, “On solvability of pseudoparabolic equations,” Sov. Math., **29**, No. 9, 99–101 (1985).

4. *Lyashko S. I. and Mankovskii A. A.*, “Optimum pulse control for a distributed parameter system of hyperbolic type,” Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR, Ser. A 1983, No. 4, 69–71 (1983).

5. *Lyashko S. I. and Mankovskii A. A.*, “Simultaneous optimization of momentum moments and pulse intensities in control problems for parabolic equations,” Kibernetika, No. 3, 81–82 (1983).

6. *White L. W.*, “Point control; approximations of parabolic parabolic problems and pseudo-parabolic problems,” Appl. Anal., **12**, 251–263 (1981).

7. *Lions J. L.*, Contrôle optimal de Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles, Dunod Gauthier-Villars, Paris (1968).

8. *Fursikov A. V.*, Feedback Stabilization for 2D-seen Equations: Additional Remarks, Control and Estimation of Distributed Parameter Systems, pp. 169–187, Birkhäuser, Basel (2002) (Int. Ser. Numer. Math.; V. 143).

9. *Il’in V. A.*, “Boundary control by the oscillation process at two ends in terms of the generalized solution of the wave equation with finite energy,” Differ. Equ., **36**, No. 11, 1513–1528 (2000).

10. *Il’in V. A. and Moiseev V. I.*, “Optimization of boundary controls of string vibration,” Russ. Math. Surv., **60**, No. 6, 89–114 (2005).

11. *Fattorini H. O.*, "Time and norm optimal control for linear parabolic equations: necessary and sufficient conditions," in: Control and Estimation of Distributed Parameter System, pp. 151–168 (2002) (Int. Ser. Numer. Math.; V. 143).
12. *Barbu V., Râşcanu A., and Tessitore G.*, "Carleman estimates and controllability of linear stochastic heat equation," Appl. Math. Optim., **47**, No. 2, 97–120 (2003).
13. *Albeverio S. and Alimov Sh.*, "On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process," Appl. Math. Optim., **57**, No. 1, 58–68 (2008).
14. *Alimov Sh.*, "On the time optimal control problem associated with heat exchange [in Russian]," Dokl. Uzbek Akad. Nauk, **1**, (2006).
15. *Tikhonov A. N. and Samarskii A. A.*, Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1966).

Submitted February 19, 2018

Zarina K. Fayazova
Tashkent State Technical University,
2 Universitetskaya Street, Tashkent 100174, Uzbekistan
`z.fayazova@yahoo.com`