Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

УДК 517.923

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Н. В. Жуковская, С. М. Ситник

Аннотация. Дано решение неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Римана — Лиувилля на полуоси в классе функций, представимых дробным интегралом, в терминах дробного аналога функции Грина. Построены дробные аналоги функции Грина в том случае, когда все корни характеристического многочлена различны, а также в случае, когда среди корней характеристического многочлена есть кратные. Сформулированы и доказаны теоремы разрешимости неоднородного дробно-дифференциального уравнения типа Эйлера на полуоси. Рассмотрены некоторые частные случаи и примеры.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14228

Ключевые слова: дробные интегралы Римана — Лиувилля, дробные производные Римана — Лиувилля, прямое и обратное преобразования Меллина, дробный аналог функции Грина.

1. Решение неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(0;+\infty)$

В работе используются общепринятые определения и обозначения из теории специальных функций и интегральных преобразований (см. [1–9]).

1.1. Дробный аналог функции Грина. На полуоси $(0;+\infty)$ рассмотрим неоднородное уравнение с конечным числом дробных производных Римана — Лиувилля порядка $\alpha+n$ [7, 10]:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{\alpha+k}\big(D_{0+}^{\alpha+k}y\big)(x)=f(x), \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, $\big(D_{0+}^{\alpha}y\big)(x)$ — дробная производная Римана — Лиувилля, определяемая формулой [7, 11, 12]

$$\big(D_{0+}^{\alpha}y\big)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Решение $y(x)$ будем искать в классе $I_{0+}^{\alpha}(L_1(0;+\infty))$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $L_1(0;+\infty)$. Обозначив $y=I_{0+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi\in L_1(0;+\infty)$, из (1) получим уравнение Эйлера

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{\alpha+k}\varphi^{(k)}=f(x). \tag{2}$$

Используя формулы для преобразования Меллина [3, 4, 7, 8, 11–13]

$$\mathbb{M}(t^{\alpha}\varphi(t)) = (\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha), \quad \mathbb{M}(t^{\alpha+1}\varphi'(t)) = -(s+\alpha)(\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha),$$

$$\mathbb{M}(t^{\alpha+2}\varphi''(t)) = (s+\alpha+1)(s+\alpha)(\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha), \ldots,$$

$$\mathbb{M}(t^{\alpha+n}\varphi^{(n)}(t)) = (-1)^n(s+\alpha+n-1)(s+\alpha+n-2)\ldots(s+\alpha)(\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha),$$

возьмем преобразование Меллина от обеих частей уравнения (2):

$$(\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha) = \frac{(\mathbb{M}f)(s)}{P(s)},$$

где

$$P(s) = (-1)^n a_n(s+\alpha+n-1)(s+\alpha+n-2)\ldots(s+\alpha) + \cdots - a_1(s+\alpha) + a_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^{\alpha}\varphi(x) &= \mathbb{M}^{-1}((\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha)) \\ &= \mathbb{M}^{-1}\left[\frac{(\mathbb{M}f)(s)}{P(s)}\right] = \mathbb{M}^{-1}[(\mathbb{M}G)(1-s)(\mathbb{M}f)(s)] = \int\limits_0^{\infty} G(t)f(xt)\,dt, \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$(\mathbb{M}G)(1-s) = \frac{1}{P(s)},$$

откуда находим

$$G(x) = \mathbb{M}^{-1}\left(\frac{1}{P(1-s)}\right) = \mathbb{M}^{-1}\left(\frac{1}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)}\right).$$

Здесь корни $s_1, s_2, \ldots, s_n$ необязательно различны.

Функцию $G(x)$ назовем *дробным аналогом функции Грина* для уравнения (1) [7, 14]. Если $\varphi(x) \in L_1(0;+\infty)$, то решение уравнения (1) получим в виде

$$y(x) = I^{\alpha}_{0+}\left(x^{-\alpha}\int\limits_0^{\infty} G(t)f(xt)\,dt\right). \qquad (4)$$

1.2. Решение уравнения типа Эйлера на полуоси $(0;+\infty)$ с помощью дробного аналога функции Грина. Выясним, при каких условиях формула (4) дает искомое решение уравнения (1).

Пусть все корни $s_1, s_2, \ldots, s_n$ многочлена $P(1-s)$ различны. Тогда

$$\mathbb{M}G(x) = \frac{1}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-s_n},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Несложно показать, что тогда

$$G(x) = \begin{cases} A_1x^{-s_1} + A_2x^{-s_2} + \cdots + A_nx^{-s_n}, & 0 < x < 1, \\ 0, \ \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases} \qquad (5)$$

Теорема 1. *Пусть все корни* $s_1, s_2, \dots, s_n$ *многочлена* $P(1-s)$ *различны, функция* f n *раз дифференцируема и* $f, f', \dots, f^{(n)} \in L_{1-\alpha,1}$. *Если* $\operatorname{Re} s_j < \alpha$ $\forall j = 1, \dots, n$, *то уравнение* (1) *имеет единственное решение*

$$y(x) = I^{\alpha}_{0+}\left(x^{-\alpha}\int\limits_0^{\infty} G(t) f(xt)\,dt\right),$$

где $G(t)$ *— дробный аналог функции Грина* (5).

Доказательство. 1. Покажем, что $x^{\alpha}\varphi(x)$ в (3) принадлежит $L_{1-\alpha,1}$. Пусть s_j — корень многочлена $P(1-s)$. Имеем

$$\int\limits_0^{\infty} x^{-\alpha}\,dx\left|\int\limits_0^1 \frac{1}{t^{s_j}} f(xt)\,dt\right| \le \int\limits_0^1 t^{-s_j}\,dt \int\limits_0^{\infty} x^{-\alpha}|f(xt)|\,dx =$$

(полагаем $xt = \tau,\ t\,dx = d\tau$)

$$= \int\limits_0^1 t^{\alpha-1-s_j}\,dt \int\limits_0^{\infty} \tau^{-\alpha}|f(\tau)|\,d\tau = \left(\frac{t^{\alpha-s_j}}{\alpha - s_j}\right)_{t=0}^{t=1} \|f\|_{L_{1-\alpha,1}} = \frac{1}{\alpha - s_j}\|f\|_{L_{1-\alpha,1}}$$

при $\operatorname{Re} s_j < \alpha$, откуда вытекает, что $x^{\alpha}\varphi(x) \in L_{1-\alpha,1}$.

2. Докажем, что $x^{\alpha}\varphi(x)$ дифференцируема. Пусть $\gamma = 1 - \alpha$. Покажем, что тогда интеграл

$$\int\limits_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt)\,dt$$

сходится равномерно на любом отрезке $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \in (0; +\infty)$. Действительно, сходимость равномерная, поскольку

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt)\,dt\right| \\
=&\left|\int\limits_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n})(xt)^{\gamma-1}(xt)^{1-\gamma} f'(xt)\,dt\right| \\
=&\left|\int\limits_0^1 x^{1-\gamma} t^{1-\gamma}(A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n})\{(xt)^{\gamma-1} f'(xt)\}\,dt\right| \\
\le& x^{1-\gamma}\int\limits_0^1 (A_1 t^{2-\gamma-s_1} + A_2 t^{2-\gamma-s_2} + \dots + A_n t^{2-\gamma-s_n})\,dt \int\limits_0^1 |f'(xt)|(xt)^{\gamma-1}\,dt \\
=& x^{1-\gamma}\left(A_1\frac{t^{3-\gamma-s_1}}{3-\gamma-s_1} + A_2\frac{t^{3-\gamma-s_2}}{3-\gamma-s_2} + \dots + A_n\frac{t^{3-\gamma-s_n}}{3-\gamma-s_n}\right)_{t=0}^{t=1}
\end{aligned}$$

$$\times \int\limits_0^1 |f'(xt)|(xt)^{\gamma-1}\,dt =$$

(полагаем $xt = \tau$)

$$
\begin{aligned}
&= x^{1-\gamma}\left(\frac{A_1}{3-\gamma-s_1}+\frac{A_2}{3-\gamma-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{3-\gamma-s_n}\right)\frac{1}{x}\int\limits_0^x |f'(\tau)|\tau^{\gamma-1}\,d\tau\\
&\le x^{-\gamma}\left(\frac{A_1}{3-\gamma-s_1}+\frac{A_2}{3-\gamma-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{3-\gamma-s_n}\right)\int\limits_0^\infty |f'(\tau)|\tau^{\gamma-1}\,d\tau\\
&= x^{-\gamma}\left(\frac{A_1}{3-\gamma-s_1}+\frac{A_2}{3-\gamma-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{3-\gamma-s_n}\right)\|f'\|_{L_{\gamma,1}}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, то

$$0 < \frac{1}{x^\gamma} < \frac{1}{\varepsilon_1{}^\gamma},$$

следовательно, по признаку Вейерштрасса интеграл

$$\int\limits_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \cdots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt)\,dt$$

сходится равномерно на любом отрезке $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \in (0; +\infty)$, т. е. $x^\alpha \varphi(x)$ дифференцируема.

3. Докажем, что $x^{\alpha+1}\varphi'(x) \in L_{\gamma,1}$. Имеем

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha\varphi(x)) = \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x) + x^\alpha\varphi'(x), \quad \varphi'(x) = x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}(x^\alpha\varphi(x)) - \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)\right),$$

$$
\begin{aligned}
x^{\alpha+1}\varphi'(x) &= x\frac{d}{dx}(x^\alpha\varphi(x)) - \alpha x^\alpha\varphi(x)\\
&= x\int\limits_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \cdots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt)\,dt\\
&\qquad - \alpha\int\limits_0^1 (A_1 t^{-s_1} + A_2 t^{-s_2} + \cdots + A_n t^{-s_n}) f(xt)\,dt.
\end{aligned}
$$

Положим

$$A(x) = \int\limits_0^1 (A_1 t^{-s_1} + A_2 t^{-s_2} + \cdots + A_n t^{-s_n}) f(xt)\,dt,$$

$$B(x) = x\int\limits_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \cdots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt)\,dt.$$

Так же, как в первом пункте доказательства теоремы 1, показывается, что $A(x) \in L_{\gamma,1}$.

Докажем, что $B(x) \in L_{\gamma,1}$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
B(x) &= x\int_0^1 (A_1t^{1-s_1} + A_2t^{1-s_2} + \dots + A_nt^{1-s_n})f'(xt)\,dt \\
&= x(A_1t^{1-s_1} + A_2t^{1-s_2} + \dots + A_nt^{1-s_n})\frac{f(xt)}{x}\bigg|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad - x\int_0^1 \frac{f(xt)}{x}[A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + \dots + A_n(1-s_n)t^{-s_n}]\,dt \\
&= (A_1t^{1-s_1} + A_2t^{1-s_2} + \dots + A_nt^{1-s_n})f(xt)\big|_{t=0}^{t=1} \\
&\quad - \int_0^1 [A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + \dots + A_n(1-s_n)t^{-s_n}]f(xt)\,dt \\
&= (A_1 + A_2 + \dots + A_n)f(x) \\
&\quad - \int_0^1 [A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + \dots + A_n(1-s_n)t^{-s_n}]f(xt)\,dt \in L_{\gamma,1}.
\end{aligned}
$$

Доказательство проводится так же, как и для $A(x)$. Здесь использовалась формула интегрирования по частям:

$$
u = A_1t^{1-s_1} + A_2t^{1-s_2} + \dots + A_nt^{1-s_n}, \quad dv = f'(xt)\,dt,
$$
$$
du = [A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + \dots + A_n(1-s_n)t^{-s_n}]\,dt, \quad v = \frac{1}{x}f(xt).
$$

4. Аналогично доказывается, что

$$
x^{\alpha+\nu}\varphi^{(\nu)}(x) \in L_{\gamma,1} \quad \forall \nu = 1, \dots, n.
$$

Теорема доказана.

Пусть среди корней многочлена $P(1-s)$ есть кратные. Без ограничения общности будем считать s_1 — корень кратности l_1, s_2 — корень кратности l_2, s_k — корень кратности l_k, причем $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathbb{M}G(x) &= \frac{1}{a_n(s-s_1)^{l_1}(s-s_2)^{l_2}\dots(s-s_k)^{l_k}} \\
&= \frac{A_{11}}{s-s_1} + \frac{A_{12}}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{A_{1l_1}}{(s-s_1)^{l_1}} \\
&\quad + \dots + \frac{A_{k1}}{s-s_k} + \frac{A_{k2}}{(s-s_k)^2} + \dots + \frac{A_{kl_k}}{(s-s_k)^{l_k}}.
\end{aligned}
$$

В этом случае дробный аналог функции Грина имеет вид

$$
G(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{m_j=1}^{l_j} A_{km}\frac{(-1)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}x^{-s_j}\ln^{m_j-1}x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases} \tag{6}
$$

Теорема 2. *Пусть среди корней многочлена $P(1-s)$ есть кратные, функция f n раз дифференцируема и $f, f', \dots, f^{(n)} \in L_{1-\alpha,1}$. Если $\operatorname{Re} s_j < \alpha$, где $j = 1, \dots, k$, то уравнение (1) имеет единственное решение*

$$y(x) = I^{\alpha}_{0+}\left(x^{-\alpha}\int\limits_0^{\infty} G(t)f(xt)\,dt\right),$$

где $G(t)$ — дробный аналог функции Грина (6).

Доказательство. Достаточно показать, что интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln^m t}{t^s} f(xt)\,dt \in L_{1-\alpha,1}(0;+\infty) \quad \forall m \in \mathbb{N},\ \forall s < \alpha.$$

Имеем

$$\left|\frac{\ln^m t}{t^s}\right| \le \frac{M}{t^{s+\varepsilon}} \tag{7}$$

при $t \to 0$, где $M > 0$ — постоянная, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое такое, что $s + \varepsilon < \alpha$. Тогда

$$\int\limits_0^{\infty} x^{-\alpha}\,dx \left|\int\limits_0^1 \frac{\ln^m t}{t^s} f(xt)\,dt\right| \le \int\limits_0^{\infty} x^{-\alpha}\,dx \int\limits_0^1 \frac{|\ln^m t|}{t^s}|f(xt)|\,dt$$

$$\le \int\limits_0^{\infty} x^{-\alpha}\,dx \int\limits_0^1 \frac{M}{t^{s+\varepsilon}}|f(xt)|\,dt \le \int\limits_0^1 \frac{M}{t^{s+\varepsilon}}\,dt \int\limits_0^{\infty} x^{-\alpha}|f(xt)|\,dx =$$

(полагаем $xt = \tau$)

$$= M\int\limits_0^1 t^{\alpha-1-s-\varepsilon}\,dt \int\limits_0^{\infty} \tau^{-\alpha}|f(\tau)|\,d\tau = \frac{M}{\alpha - s - \varepsilon}\cdot \|f\|_{L_{1-\alpha,1}}$$

при $s + \varepsilon < \alpha$. Отсюда следует, что $x^{\alpha}\varphi(x) \in L_{1-\alpha,1}$.

Утверждения о том, что $x^{\alpha+\nu}\varphi^{(\nu)}(x) \in L_{\gamma,1}$ $\forall \nu = 1, \dots, n$, доказываются с учетом (7) так же, как в теореме 1.

2. Уравнение типа Эйлера с двумя дробными производными Римана — Лиувилля

Рассмотрим неоднородное уравнение с двумя дробными производными Римана — Лиувилля порядка $\alpha + 1$ [7, 10]

$$x^{\alpha+1}\big(D^{\alpha+1}_{0+}y\big)(x) + \lambda x^{\alpha}\big(D^{\alpha}_{0+}y\big)(x) = f(x). \tag{8}$$

Потребуем, чтобы $f, f' \in L_{1-\alpha,1}$. Обозначив $y = I^{\alpha}_{0+}\varphi$, где $\varphi \in L_1(0;+\infty)$, из (8) получим уравнение Эйлера

$$x^{\alpha+1}\frac{d\varphi(x)}{dx} + \lambda x^{\alpha}\varphi(x) = f(x).$$

В этом случае многочлен $P(1-s) = s + \lambda - \alpha - 1$ имеет единственный корень $s = \alpha + 1 - \lambda$ и дробный аналог функции Грина имеет вид

$$G(x) = \begin{cases} x^{\lambda-\alpha-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Пусть $\lambda > 1$. Тогда выполнены условия теоремы 1 и уравнение (8) имеет единственное решение (4).

Пример 1. Рассмотрим на полуоси $(0;+\infty)$ неоднородное дифференциальное уравнение порядка $\frac{3}{2}$:

$$x^{\frac{3}{2}}\big(D_{0+}^{\frac{3}{2}}y\big)(x) + x^{\frac{1}{2}}\big(D_{0+}^{\frac{1}{2}}y\big)(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}. \tag{9}$$

Правая часть $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}$ принадлежит $L_{\frac{1}{2},1}$. Решение $y(x)$ будем искать в классе $I_{0+}^{\frac{1}{2}}(L_1(0;+\infty))$ функций, представимых дробным интегралом порядка $\frac{1}{2}$ с плотностью из $L_1(0;+\infty)$.

Обозначив $y = I_{0+}^{\frac{1}{2}}\varphi$, где $\varphi \in L_1(0;+\infty)$, из (9) получим уравнение

$$x^{\frac{3}{2}}\frac{d\varphi(x)}{dx} + x^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}. \tag{10}$$

Возьмем преобразование Меллина от обеих частей уравнения (10):

$$\mathbb{M}\left(\varphi\left(\frac{1}{2}+s\right)\right) = \frac{\mathbb{M}\big(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\big)}{\frac{1}{2}-s}.$$

Введем в рассмотрение дробный аналог функции Грина:

$$G(x) = \mathbb{M}^{-1}\left(\frac{1}{P(1-s)}\right) = \mathbb{M}^{-1}\left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right).$$

Тогда $\mathbb{M}G(x) = \frac{1}{s-\frac{1}{2}}$. Нетрудно показать, что

$$G(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$x^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = \int_0^\infty G(t)f(xt)\,dt = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\frac{(xt)^{\frac{1}{2}}}{1+(xt)^2}\,dt = x^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{dt}{1+(xt)^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}.$$

Итак,

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \quad y(x) = I_{0+}^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t\,dt}{t(x-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

(полагаем $t = x\tau$)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x\tau)\, d\tau}{\tau(1-\tau)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\, {}_4\mathrm{F}_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -x^2\right).$$

Заметим, что уравнение (9) можно решить без использования дробного аналога функции Грина на основе непосредственного вычисления интеграла Меллина — Барнса с помощью теоремы Слейтер [13].

Применим к обеим частям уравнения (9) прямое преобразование Меллина:

$$\mathbb{M}\big(x^{\frac{3}{2}}\big(D_{0+}^{\frac{3}{2}}y\big)(x) + x^{\frac{1}{2}}\big(D_{0+}^{\frac{1}{2}}y\big)(x)\big) = \mathbb{M}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\right).$$

Вычислим

$$\mathbb{M}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t^2} t^{s-1}\, dt = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)t^{\frac{1}{2}-s}}.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменной:

$$t = \sqrt{\tau}, \quad dt = \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)t^{\frac{1}{2}-s}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{\frac{s}{2}-\frac{3}{4}}\, d\tau}{1+\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}, \frac{3}{4}-\frac{s}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\right).$$

Далее,

$$\mathbb{M}(x^{\frac{3}{2}}\big(D_{0+}^{\frac{3}{2}}y\big)(x) + x^{\frac{1}{2}}\big(D_{0+}^{\frac{1}{2}}y)(x)\big) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}\left(\frac{1}{2}-s)(\mathbb{M}y\right)(s).$$

Итак,

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}\left(\frac{1}{2}-s\right)(\mathbb{M}y)(s) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\right),$$
$$(\mathbb{M}y)(s) = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\big)\Gamma\big(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1}{2}-s\big)}{\big(\frac{1}{2}-s\big)\Gamma(1-s)}.$$

Решение уравнения (9) задается интегралом Меллина — Барнса [13]:

$$y(x) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma\big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\big)\Gamma\big(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1}{2}-s\big)}{\big(\frac{1}{2}-s\big)\Gamma(1-s)} x^{-s}\, ds.$$

Вычислим его с помощью теории вычетов на основе теоремы Слейтер [13]:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=-\frac{1}{2}-2m} \frac{\Gamma\big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\big)\Gamma\big(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1}{2}-s\big)}{\big(\frac{1}{2}-s\big)\Gamma(1-s)} x^{-s}$$
$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!(2x)^{2m}}{(2m+1)(4m+1)!!} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\, {}_4\mathrm{F}_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -x^2\right).$$

3. Уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Римана — Лиувилля

Рассмотрим неоднородное уравнение с тремя дробными производными Римана — Лиувилля порядка $\alpha + 2$ [7, 10]:

$$x^{\alpha+2}(D_{0+}^{\alpha+2}y)(x) + \mu x^{\alpha+1}(D_{0+}^{\alpha+1}y)(x) + \lambda x^{\alpha}(D_{0+}^{\alpha}y)(x) = f(x). \tag{11}$$

Потребуем, чтобы $f, f', f'' \in L_{1-\alpha,1}$. Обозначив $y = I_{0+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi \in L_1(0;+\infty)$, из (11) получим уравнение Эйлера

$$x^{\alpha+2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \mu x^{\alpha+1}\frac{d\varphi(x)}{dx} + \lambda x^{\alpha}\varphi(x) = f(x). \tag{12}$$

Используя формулы для преобразования Меллина [13]

$$\mathbb{M}(t^{\alpha}\varphi(t)) = (\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha), \quad \mathbb{M}(t^{\alpha+1}\varphi'(t)) = -(s+\alpha)(\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha),$$
$$\mathbb{M}(t^{\alpha+2}\varphi''(t)) = (s+\alpha+1)(s+\alpha)(\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha),$$

возьмем преобразование Меллина от обеих частей уравнения (12):

$$(\mathbb{M}\varphi)(s+\alpha) = \frac{(\mathbb{M}f)(s)}{P(s)}.$$

Введем в рассмотрение дробный аналог функции Грина:

$$G(x) = \mathbb{M}^{-1}\left(\frac{1}{P(1-s)}\right) = \mathbb{M}^{-1}\left(\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\right).$$

Пусть $\operatorname{Re} s_1 < \alpha, \operatorname{Re} s_2 < \alpha$. Возможны следующие случаи.

1. Пусть s_1, s_2 — различные корни многочлена $P(1-s)$. Тогда

$$\mathbb{M}G(x) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right).$$

Несложно показать, что тогда

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{s_1-s_2}(x^{-s_1} - x^{-s_2}), & 0 < x < 1, \\ 0, & \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

2. Пусть s_1 — корень кратности 2 многочлена $P(1-s)$. Тогда

$$\mathbb{M}G(x) = \frac{1}{(s-s_1)^2}.$$

Несложно показать, что

$$G(x) = \begin{cases} x^{-s_1} - x^{-s_1}\ln x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \left[\begin{array}{l} x \le 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

В обоих случаях выполняются условия теоремы 1 и теоремы 2 соответственно и уравнение (11) имеет единственное решение (4).

Пример 2. Рассмотрим на полуоси $(0; +\infty)$ неоднородное дифференциальное уравнение порядка $\frac{5}{2}$:

$$\delta x^{\frac{5}{2}}\bigl(D_{0+}^{\frac{5}{2}}y\bigr)(x) + \mu x^{\frac{3}{2}}\bigl(D_{0+}^{\frac{3}{2}}y\bigr)(x) + \lambda x^{\frac{1}{2}}\bigl(D_{0+}^{\frac{1}{2}}y\bigr)(x) = f(x), \quad \delta \neq 0.$$

Здесь корни s_1 и s_2 многочлена $P(1-s)$ имеют вид

$$s_{1,2} = \frac{4\delta - \mu \pm \sqrt{\mathbb{D}}}{2\delta}, \quad \mathbb{D} = (4\delta - \mu)^2 - \delta(3\delta - 6\mu + 4\lambda).$$

Частное решение задается так:

$$y(x) = \int\limits_0^1 G(t) f(xt)\, dt.$$

Если $s_1 \neq s_2 \neq \frac{1}{2} - k$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$, то

$$\begin{aligned} G(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\delta}\, {}_2\Psi_3 &\left[\begin{matrix} (s_1 - \frac{1}{2}, 1), \quad (s_2 - \frac{1}{2}, 1) \\ \bigl(\frac{1}{2}, -1\bigr),\ \bigl(s_1 + \frac{1}{2}, 1\bigr),\ \bigl(s_2 + \frac{1}{2}, 1\bigr) \end{matrix} \ \Big|\, -x \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\mathbb{D}}} \left[\frac{\Gamma(s_1 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_1)} x^{-s_1} - \frac{\Gamma(s_2 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_2)} x^{-s_2} \right] \\ = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\delta\bigl(s_1 - \frac{1}{2}\bigr)\bigl(s_2 - \frac{1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{1}{2}\bigr)} &{}_3\mathrm{F}_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2},\ s_1 - \frac{1}{2},\ s_2 - \frac{1}{2} \\ s_1 + \frac{1}{2},\quad s_2 + \frac{1}{2} \end{matrix} \ \Big|\, x \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\mathbb{D}}} \left[\frac{\Gamma\bigl(s_1 - \frac{1}{2}\bigr)}{\Gamma(s_1)} x^{-s_1} - \frac{\Gamma\bigl(s_2 - \frac{1}{2}\bigr)}{\Gamma(s_2)} x^{-s_2} \right]. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что в теории дифференциальных уравнений дробного порядка существенную роль играют различные классы операторов преобразования (см. [15–18]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1.
2. *Debnath L., Bhatta D.* Integral transforms and their applications. Chapman&Hall, 2007.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974.
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1996.
5. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. New York: McGraw-Hill, 1953. V. I. (Reprinted: Krieger, 1981).
6. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag-Leffler functions: related topics and applications. Berlin: Springer-Verl., 2014.
7. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. (Math. Stud.; V. 204).
8. *Князев П. Н.* Интегральные преобразования. Минск: Высшая школа, 1969.
9. *Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W.* NIST handbook of mathematical functions. Cambridge, Camb. Univ. Press, 2010.
10. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999.
11. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

12. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives: theory and applications. New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1993.
13. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: Наука и техника, 1978.
14. *Miller K. S., Ross B.* Fractional Green's functions // Indian J. Pure Appl. Math. 1991, V. 22, N. 9. P. 763–767.
15. *Sitnik S. M.* Factorization and norm estimation in weighted Lebesgue spaces of Buschman–Erdelyi operators // Dokl. Sov. Acad. Sci. 1991. V. 320, N 6. P. 1326–1330.
16. *Sitnik S. M.* Transmutations and applications: a survey. preprint arXiv:1012.3741. 2010. 141 p.
17. *Sitnik S. M.* A short survey of recent results on Buschman–Erdelyi transmutations // J. Inequal. Special Functions. (Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions). 2017. V. 8, N 1. P. 140–157.
18. *Sitnik S. M.* Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // Analytic methods of analysis and differential equations: Amade 2012. (Ed. by M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin). Cambridge: Camb. Sci. Publ., 2013. P. 171–201.

Статья поступила 12 февраля 2018 г.

Жуковская Наталья Владимировна
Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, Минск 220030, Республика Беларусь
nata2105@tut.by

Ситник Сергей Михайлович
Белгородский гос. национальный исследовательский университет,
кафедра дифференциальных уравнений,
ул. Победы, 85, Белгород 308015
sitnik@bsu.edu.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

UDC 517.923

EULER TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

N. V. Zhukovskaya and S. M. Sitnik

Abstract: Using the direct and inverse Mellin transforms, we find a solution to the nonhomogeneous Euler-type differential equation with Riemann–Liouville fractional derivatives on the half-axis in the class of functions represented by the fractional integral in terms of the fractional analogue of the Green's function. Fractional analogues of the Green's function are constructed in the case when all roots of the characteristic polynomial are different and in the case when there are multiple roots of the characteristic polynomial. Theorems of solvability of the nonhomogeneous fractional differential equations of Euler type on the half-axis are stated and proved. Special cases and examples are considered.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14228

Keywords: fractional Riemann–Liouville integrals, Riemann–Liouville fractional derivatives, direct and inverse Mellin transforms, fractional analogue of Green's function.

REFERENCES

1. *Bateman H. and Erdelyi A.*, Higher Transcendental Functions, V. 1, McGraw–Hill, New York (1953).
2. *Debnath L. and Bhatta D.*, Integral Transforms and Their Applications, Chapman & Hall/CRC (2007).
3. *Ditkin V. A. and Prudnikov A. P.*, Integral Transforms and Operational Calculus [in Russian], Nauka, Moscow (1974).
4. *Dzhrbashyan M. M.*, Integral Transforms and Representations of Functions in Complex Region, Nauka, Moscow (1996).
5. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., and Tricomi F. G.*, Higher Transcendental Functions, I, McGraw–Hill, New York (1953); Reprinted: Krieger, Melbourne, FL (1981).
6. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., and Rogosin S. V.*, Mittag–Leffler Functions: Related Topics and Applications, Springer (2014).
7. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., and Trujillo J. J.*, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam (2006) (Math. Stud.; V. 204).
8. *Knyazev P. N.*, Integral Transforms, Vysheishaya Shkola, Minsk (1969).
9. *Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., and Clark C. W., eds.*, NIST Handbook of Mathematical Functions, Camb. Univ. Press, Cambridge (2010).
10. *Podlubny I.*, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego (1999).
11. *Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I.*, Fractional integrals and derivatives: theory and applications, Nauka i Tekhnika, Minsk (1987).
12. *Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I.*, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Sci. Publ., New York (1993).
13. *Marichev O. I.*, Method for Calculating Integrals of Special Functions, Nauka i Tekhnika, Minsk (1978).
14. *Miller K. S. and Ross B.*, "Fractional Green's functions," Indian J. Pure Appl. Math., **22**, No. 9, 763–767 (1991).

15. *Sitnik S. M.*, "Factorization and estimates of the norms of Buschman–Erdélyi operators in weighted Lebesgue spaces," Sov. Math., Dokl., **44**, No. 2, 641–646 (1992).

16. *Sitnik S. M.*, Transmutations and applications: a survey, arXiv:1012.3741, 141 p. (2010).

17. *Sitnik S. M.*, A short survey of recent results on Buschman–Erdelyi transmutations," J. Inequal. Spec. Funct., **8**, No. 1, 140–157 (2017).

18. *Sitnik S. M.*, "Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications," in: Analytic Methods Of Analysis and Differential Equations: Amade 2012 (M. V. Dubatovskaya, S. V. Rogosin, eds.), Camb. Sci. Publ., Cambridge, 2013, pp. 171–201.

Submitted February 12, 2018

Natalia V. Zhukovskaya
Belarusian State University
4 Nezavisimost' Avenue, Minsk 220030, Belarus
`nata2105@tut.by`

Sergey M. Sitnik
Belgorod State National Research Institute,
85 Pobeda Avenue, Belgorod 308015, Russia
`sitnik@bsu.edu.ru`