Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

УДК 517.946

НАЧАЛЬНО–КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА С ДВУМЯ РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. И. Григорьева

Аннотация. Изучается разрешимость начально-краевой задачи с условиями сопряжения для двух неклассических дифференциальных уравнений составного типа. Описывается случай, когда коэффициенты каждого рассматриваемого уравнения имеют разрыв 1-го рода в точке нуль. Область исследований задана в виде полосы ввиду наличия точки разрыва, состоящей из двух подобластей. Таким образом, исследуемые уравнения рассматриваются в двух различных областях. Для доказательства существования и единственности регулярных решений (которые имеют все обобщенные производные, входящие в уравнения) начально-краевой задачи используется метод продолжения по параметру, имеющий широкое применение в теории краевых задач. С помощью принципа максимума устанавливается наличие всех необходимых априорных оценок для решений изучаемой задачи.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14227

Ключевые слова: уравнения составного типа, начально-краевые задачи, разрывные коэффициенты, задача сопряжения, регулярные решения, существование и единственность, априорные оценки.

1. Постановка задач

Пусть x — точка отрезка $[-1,1]$ оси Ox, t — точка отрезка $[0,T]$, $0 < T < \infty$, Q_1, Q_2 и Q — цилиндры $(-1,0)\times(0,T)$, $(0,1)\times(0,T)$ и $(-1,1)\times(0,T)$ соответственно, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — функции, определенные при $(x,t)\in\overline{Q}$, $g(x)$, $h(x)$ — заданные функции, определенные при $x\in[-1,1]$ и, быть может, имеющие разрыв 1-го рода при $x=0$, a и b — заданные действительные числа.

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_t - g(x)u_{xx}) + h(x)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{tt} - g(x)u_{xx}) + h(x)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{2}$$

Эти уравнения относятся к уравнениям соболевского типа, которые иначе называют также *уравнениями составного типа*. Подобные уравнения достаточно хорошо изучены, можно отметить работы [1–6]. Для уравнений (1) и (2) исследуется разрешимость начально-краевой задачи с условиями сопряжения.

Задачи сопряжения или обобщенные задачи дифракции для классических и неклассических дифференциальных уравнений рассмотрены во многих работах. Отметим, что задачи с условиями сопряжения (склейки) естественным образом возникают в исследованиях, связанных с уравнениями смешанного типа, уравнениями с меняющимся направлением эволюции [7–21]. В том числе достаточно исследований и для уравнений соболевского типа с коэффициентом, который может иметь некоторый разрыв [22–38]. В настоящей работе заданы уравнения составного типа с двумя коэффициентами, которые могут иметь разрыв 1-го рода. Ранее задачи сопряжения для таких уравнений не изучались.

Задача сопряжения I. *Найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндрах* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия*

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1). \tag{4}$$

$$u(-0,t) = au(+0,t), \quad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$u_x(+0,t) = bu_x(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{6}$$

Задача сопряжения II. *Найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндрах* Q_1 *и* Q_2 *решением уравнения* (2) *и такую, что для нее выполняются условия* (3)–(6) *и*

$$u_{ttt}(x,0) = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1). \tag{7}$$

Определим пространства V_1 и V_2:

$$V_1 = \left\{ v(x,t) : \int\limits_{Q_i} \left(v^2 + v_{ttt}^2 + v_{xxtt}^2\right) dxdt < +\infty \right\}, \quad i = 1,2,$$

$$V_2 = \left\{ v(x,t) : \int\limits_{Q_i} \left(v^2 + v_{tttt}^2 + v_{xxtt}^2\right) dxdt < +\infty \right\}, \quad i = 1,2;$$

норму в этих пространствах зададим равенствами

$$\|v\|_{V_1} = \left\{ \int\limits_{Q_i} \left(v^2 + v_{ttt}^2 + v_{xxtt}^2\right) dxdt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1,2,$$

$$\|v\|_{V_1} = \left\{ \int\limits_{Q_i} \left(v^2 + v_{tttt}^2 + v_{xxtt}^2\right) dxdt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1,2.$$

2. Единственность решений задач сопряжения I и II

Теорема 1. *Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$ и выполняются условия*

$$h(x) \in C^2(\bar{Q}), \quad h(x) \geq h_0 > 0, \quad h''(x) \leq 0, \quad x \in [-1,1], \tag{8}$$

$$h'(-0) \geq 0, \quad h'(+0) \leq 0, \tag{9}$$

$$g(x) \in C^2(\bar{Q}), \quad g(x) \geq g_0 > 0, \quad g''(x) \leq 0, \quad x \in [-1,1], \tag{10}$$

$$g'(-0) \geq 0, \quad g'(+0) \leq 0, \tag{11}$$

$$h(-0)g(+0) = g(-0)h(+0), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} c(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \quad c(x,t) \leq 0, \quad c_t(x,t) \leq 0, \quad c_{tt}(x,t) \geq 0, \\ x \in (-1,0) \cup (0,1), \quad t \in (0,T). \end{gathered} \tag{13}$$

Тогда задача сопряжения I *не может иметь более одного решения в пространстве* V_1.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи сопряжения I из пространства V_1, и пусть $f(x,t) \equiv 0$. Умножим (1) на функцию u_{tt} в Q_1, а затем на функцию γu_{tt} в Q_2 ($\gamma = \frac{a}{b}$), проинтегрируем и сложим полученные равенства:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} u_{tt}^2(x,t)\,dx + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} u_{tt}^2(x,t)\,dx + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} h(x)u_{x\tau}^2\,dxd\tau \\ + \gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} h(x)u_{x\tau}^2\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} g'(-0)u_{\tau\tau}^2(-0,\tau)d\tau - \frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{t} g'(+0)u_{\tau\tau}^2(-0,\tau)d\tau \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} g''(x)u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau - \frac{\gamma}{2}\gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} g''(x)u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \int\limits_{-1}^{0} h'(x)u_x(x,t)u_t(x,t)\,dx \\ + \gamma\int\limits_{0}^{1} h'(x)u_x(x,t)u_t(x,t)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} h(x)u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\,dx \\ + \gamma\int\limits_{0}^{1} h(x)u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} h'(-0)u_\tau^2(-0,\tau)d\tau \\ - \frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{t} h'(+0)u_\tau^2(-0,\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} h''(x)u_\tau^2\,dxd\tau \\ - \frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} h''(x)u_\tau^2\,dxd\tau - \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} c(x,\tau)u_\tau^2\,dxd\tau \\ - \gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} c(x,\tau)u_\tau^2\,dxd\tau - \int\limits_{-1}^{0} c(x,t)u(x,t)u_t(x,t)\,dx \end{gathered}$$

$$
-\gamma\int\limits_0^1 c(x,t)u(x,t)u_t(x,t)\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 c_t(x,t)u^2(x,t)\,dx
-\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^1 c_t(x,t)u^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 c_{\tau\tau}(x,\tau)u^2\,dxd\tau
+\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_{\tau\tau}(x,\tau)u^2\,dxd\tau=0. \quad (14)
$$

Отсюда следует, что функция $u(x,t)$ будет тождественно нулевой в области $\overline{Q}$. Это и означает единственность задачи сопряжения I.

Теорема 2. *Пусть $a\neq 0$, $b\neq 0$ и выполняются условия* (12),

$$
h(x)\in C^1(\bar{Q}),\quad h(x)\geq h_0>0,\quad h'(x)\leq 0,\quad x\in[-1,1], \quad (15)
$$

$$
g(x)\in C^1(\bar{Q}),\quad g(x)\geq g_0>0,\quad g'(x)\leq 0,\quad x\in[-1,1], \quad (16)
$$

$$
\begin{gathered}
c(x,t)\in C^3(\bar{Q}),\quad c(x,t)\leq 0,\quad c_t(x,t)\geq 0,\quad c_{tt}(x,t)\geq 0,\\
c_{ttt}(x,t)\leq 0,\quad x\in(-1,0)\cup(0,1),\quad t\in(0,T).
\end{gathered} \quad (17)
$$

Тогда задача сопряжения II *не может иметь более одного решения в пространстве V_2.*

Доказательство. Предположив, что $u(x,t)$ является решением задачи сопряжения II из пространства V_2, и, полагая $f(x,t)=0$, умножим уравнение (2) на функцию u_{ttt} в области Q_1 и на функцию γu_{ttt} в области Q_2. В итоге получим равенство, аналогичное равенству (14), откуда, применяя условия теоремы, придем к выводу, что функция $u(x,t)$ будет тождественно равна нулю.

3. Существование решений задач сопряжения I и II

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (8)–(13). *Тогда для любой функции $f(x,t)\in L_2(Q)$ задача сопряжения* I *имеет решение, принадлежащее пространству V_1.*

Доказательство. Представим $u(x,t)$ в виде

$$
u(x,t)=\begin{cases} v(x,t), & (x,t)\in Q_1,\\ w(x,t), & (x,t)\in Q_2.\end{cases} \quad (18)
$$

Пусть

$$
v(x,t)=\tilde{v}(x,t)+(x+1)aw(+0,t),\quad w(x,t)=\widetilde{w}(x,t)+(x-1)bv_x(-0,t).
$$

Положим

$$
v_0(x,t)=(x+1)aw(+0,t),\quad w_0(x,t)=(x-1)bv_x(+0,t).
$$

Тогда получим следующую задачу: найти решения $\tilde{v}(x,t)$ и $\widetilde{w}(x,t)$ уравнений

$$
\tilde{v}_{ttt}(x,t)-g(x)\tilde{v}_{xxtt}(x,t)+h(x)\tilde{v}_{xx}(x,t)-\frac{ab(x+1)}{1+ab}\tilde{v}_{xttt}(-0,t)
$$

$$+\frac{a(x+1)}{1+ab}\widetilde{w}_{ttt}(+0,t)+c(x,t)\biggl(\tilde{v}(x,t)+\frac{a(x+1)}{1+ab}\widetilde{w}(+0,t)$$
$$-\frac{ab(x+1)}{1+ab}\tilde{v}_x(-0,t)\biggr)=f(x,t)\quad \text{при } (x,t)\in Q_1, \tag{19}$$

$$\widetilde{w}_{ttt}(x,t)-g(x)\tilde{v}_{xxtt}(x,t)+h(x)\widetilde{w}_{xx}(x,t)+\frac{a(x-1)}{1+ab}\tilde{v}_{xttt}(-0,t)$$
$$+\frac{ab(x-1)}{1+ab}\widetilde{w}_{ttt}(+0,t)+c(x,t)\biggl(\widetilde{w}(x,t)+\frac{ab(x-1)}{1+ab}\widetilde{w}(+0,t)$$
$$+\frac{a(x-1)}{1+ab}\tilde{v}_x(-0,t)\biggr)=f(x,t)\quad \text{при } (x,t)\in Q_2 \tag{20}$$

в областях Q_1 и Q_2 соответственно, для которых выполняются условия

$$\tilde{v}(-1,t)=\tilde{v}(-0,t)=0,\quad t\in(0,T), \tag{21}$$
$$\widetilde{w}(1,t)=\widetilde{w}_x(+0,t)=0,\quad t\in(0,T), \tag{22}$$
$$\tilde{v}(x,0)=\tilde{v}(x,T)=0,\quad x\in(-1,0), \tag{23}$$
$$\widetilde{w}(x,0)=\widetilde{w}(x,T)=0,\quad x\in(-1,0). \tag{24}$$

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть $\lambda\in[0,1]$. Необходимо найти решение $\tilde{v}(x,t)\in V_1(Q_1)$, $\widetilde{w}(x,t)\in V_1(Q_2)$ уравнений

$$\tilde{v}_{ttt}(x,t)-g(x)\tilde{v}_{xxtt}(x,t)+h(x)\tilde{v}_{xx}(x,t)-\frac{\lambda^2ab(x+1)}{1+\lambda^2ab}\tilde{v}_{xttt}(-0,t)$$
$$+\frac{\lambda a(x+1)}{1+\lambda^2ab}\widetilde{w}_{ttt}(+0,t)+c(x,t)\biggl(\tilde{v}(x,t)+\frac{\lambda a(x+1)}{1+\lambda^2ab}\widetilde{w}(+0,t)$$
$$-\frac{\lambda^2ab(x+1)}{1+\lambda^2ab}\tilde{v}_x(-0,t)\biggr)=f(x,t)\quad \text{при } (x,t)\in Q_1, \tag{25}$$

$$\widetilde{w}_{ttt}(x,t)-g(x)\tilde{v}_{xxtt}(x,t)+h(x)\widetilde{w}_{xx}(x,t)+\frac{\lambda a(x-1)}{1+\lambda^2ab}\tilde{v}_{xttt}(-0,t)$$
$$+\frac{\lambda^2ab(x-1)}{1+\lambda^2ab}\widetilde{w}_{ttt}(+0,t)+c(x,t)\biggl(\widetilde{w}(x,t)+\frac{\lambda^2ab(x-1)}{1+\lambda^2ab}\widetilde{w}(+0,t)$$
$$+\frac{\lambda a(x-1)}{1+\lambda^2ab}\tilde{v}_x(-0,t)\biggr)=f(x,t)\quad \text{при } (x,t)\in Q_2 \tag{26}$$

такие, что для них выполняются условия (21)–(24).

При $\lambda=0$ данная задача разрешима. Докажем наличие для функций $\tilde{v}(x,t)$ и $\widetilde{w}(x,t)$ «хороших» априорных оценок.

Определим функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$:

$$v(x,t)=\tilde{v}(x,t)+\frac{\lambda a(x+1)}{1+\lambda^2ab}\widetilde{w}(+0,t)-\frac{\lambda^2ab(x+1)}{1+\lambda^2ab}\tilde{v}_x(-0,t),$$

$$w(x,t)=\widetilde{w}(x,t)+\frac{\lambda b(x-1)}{1+\lambda^2ab}\tilde{v}(-0,t)+\frac{\lambda^2ab(x-1)}{1+\lambda^2ab}\widetilde{w}_x(+0,t).$$

Для функций $v(x,t)$и $w(x,t)$ выполняются уравнения

$$v_{ttt} - g(x)v_{xxtt} + h(x)v_{xx} + c(x,t)v = f(x,t), \tag{27}$$

$$w_{ttt} - g(x)v_{xxtt} + h(x)w_{xx} + c(x,t)w = f(x,t) \tag{28}$$

в областях Q_1 и Q_2 соответственно и выполняются условия

$$v(-0,t) = \lambda a w(+0,t), \quad t \in (0,T), \tag{29}$$

$$w_x(+0,t) = \lambda b v_x(-0,t), \quad t \in (0,T), \tag{30}$$

(21)–(24). Умножим уравнение (27) на функцию $v_{tt}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_1, затем умножим уравнение (28) на функцию $\gamma w_{tt}(x,t)$, где $\gamma = \frac{a}{b}$, и проинтегрируем по области Q_2. Сложив оба выражения, придем к равенству

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} v_{tt}^2(x,t)\,dx + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} w_{tt}^2(x,t)\,dx + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} g(x)v_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau$$
$$+\gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} g(x)w_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} g'(-0)v_{\tau\tau}^2(-0,\tau)d\tau$$
$$-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} g'(+0)w_{\tau\tau}^2(+0,\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} g''(x)v_{\tau\tau}^2\,dxd\tau$$
$$-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} g''(x)w_{\tau\tau}^2\,dxd\tau + \int\limits_{-1}^{0} h'(x)v_x(x,t)v_t(x,t)\,dx$$
$$+\gamma\int\limits_{0}^{1} h'(x)w_x(x,t)w_t(x,t)\,dx + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} h(x)v_{x\tau}^2\,dxd\tau$$
$$+\gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} h(x)w_{x\tau}^2\,dxd\tau + \int\limits_{-1}^{0} h(x)v_x(x,t)v_{xt}(x,t)\,dx$$
$$+\gamma\int\limits_{0}^{1} h(x)w_x(x,t)w_{xt}(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} h'(-0)v_\tau^2(-0,\tau)d\tau$$
$$-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} h'(+0)w_\tau^2(+0,\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} h''(x)v_\tau^2\,dxd\tau$$
$$-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} h''(x)w_\tau^2\,dxd\tau - \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} c(x,\tau)v_\tau^2\,dxd\tau$$
$$-\gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} c(x,\tau)w_\tau^2\,dxd\tau - \int\limits_{-1}^{0} c(x,t)v(x,t)v_t(x,t)\,dx$$

$$
-\gamma\int\limits_0^1 c(x,t)w(x,t)w_t(x,t)\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 c_t(x,t)v^2(x,t)\,dx
$$

$$
-\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^1 c_t(x,t)w^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 c_{\tau\tau}(x,\tau)v^2\,dxd\tau
$$

$$
+\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 c_{\tau\tau}(x,\tau)w^2\,dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 f(x,\tau)v_{\tau\tau}\,dxd\tau+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f(x,\tau)w_{\tau\tau}\,dxd\tau. \quad (31)
$$

Применяя в правой части (31) неравенство Юнга, получим первую априорную оценку

$$
\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0\left(v_{\tau\tau}^2+v_{x\tau\tau}^2\right)dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(w_{\tau\tau}^2+w_{x\tau\tau}^2\right)dxd\tau
$$

$$
\leq M_1\left[\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 f^2(x,\tau)\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau\right], \quad (32)
$$

в которой число M_1 определяется лишь числами h_0, g_0, a, b и функцией $c(x,t)$.

На следующем шаге умножим уравнение (27) на функцию $-v_{xxtt}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_1, а уравнение (28) — на функцию $-\gamma w_{xxtt}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_2. Используя неравенство Юнга и оценку (32), из суммы этих равенств получим вторую априорную оценку для функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$:

$$
\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0\left(v_{xx\tau}^2+v_{xx\tau\tau}^2\right)dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(w_{xx\tau}^2+w_{xx\tau\tau}^2\right)dxd\tau
$$

$$
\leq M_2\left[\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 f^2(x,\tau)\,dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f^2(x,\tau)\,dxd\tau\right], \quad (33)
$$

число M_2 в которой определяется числами h_0, g_0, a, b и функцией $c(x,t)$.

Имеют место равенства

$$
\tilde{v}(x,t)=v(x,t)+\frac{\lambda ab(x+1)(\lambda-1)}{1+\lambda^2ab}v_x(-0,t)+\frac{\lambda a(x+1)(\lambda ab-1)}{1+\lambda^2ab}w(+0,t), \quad (34)
$$

$$
\widetilde{w}(x,t)=w(x,t)+\frac{\lambda ab(x-1)(1-\lambda)}{1+\lambda^2ab}w(+0,t)-\frac{\lambda b(x-1)(\lambda ab+1)}{1+\lambda^2ab}v_x(-0,t). \quad (35)
$$

Из ограниченности функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ в пространствах $V_1(Q_1)$ и $V_1(Q_2)$ следует, что функции $\tilde{v}(x,t)$ и $\widetilde{w}(x,t)$ также ограничены в этих же пространствах. Это означает, что для решений $\tilde{v}(x,t),\widetilde{w}(x,t)$ выполнена равномерная по λ оценка в пространствах $V_1(Q_1)$ и $V_1(Q_2)$.

По теореме о методе продолжения по параметру [39, гл. 3, § 14] разрешимость (25), (26), (21)–(24) при $\lambda = 0$ и оценки (32), (33) означают, что задача (19)–(24) имеет решение $\tilde{v}(x,t)$, $\widetilde{w}(x,t)$ из пространств $V_1(Q_1)$ и $V_1(Q_2)$ соответственно. Таким образом, $u(x,t)$ является решением задачи сопряжения I из требуемого класса. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (15)–(17). *Тогда для любой функции* $f(x,t) \in L_2(Q)$ *задача сопряжения* II *имеет решение, принадлежащее пространству* V_2.

Доказательство. Снова представим $u(x,t)$ в виде (18), и пусть также

$$v(x,t) = \tilde{v}(x,t) + (x+1)aw(+0,t), \quad w(x,t) = \widetilde{w}(x,t) + (x-1)bv_x(-0,t),$$

где

$$v_0(x,t) = (x+1)aw(+0,t), \quad w_0(x,t) = (x-1)bv_x(+0,t).$$

Рассмотрим задачу: найти решения $\tilde{v}(x,t)$ и $\widetilde{w}(x,t)$ уравнений

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{tttt}(x,t) - g(x)\tilde{v}_{xxtt}(x,t) + h(x)\tilde{v}_{xx}(x,t) - \frac{ab(x+1)}{1+ab}\tilde{v}_{xtttt}(-0,t)\\ + \frac{a(x+1)}{1+ab}\widetilde{w}_{tttt}(+0,t) + c(x,t)\biggl(\tilde{v}(x,t) + \frac{a(x+1)}{1+ab}\widetilde{w}(+0,t)\\ - \frac{ab(x+1)}{1+ab}\tilde{v}_x(-0,t)\biggr) = f(x,t) \quad \text{при } (x,t) \in Q_1,\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_{tttt}(x,t) - g(x)\tilde{v}_{xxtt}(x,t) + h(x)\widetilde{w}_{xx}(x,t) + \frac{a(x-1)}{1+ab}\tilde{v}_{xtttt}(-0,t)\\ + \frac{ab(x-1)}{1+ab}\widetilde{w}_{tttt}(+0,t) + c(x,t)\biggl(\widetilde{w}(x,t) + \frac{ab(x-1)}{1+ab}\widetilde{w}(+0,t)\\ + \frac{a(x-1)}{1+ab}\tilde{v}_x(-0,t)\biggr) = f(x,t) \quad \text{при } (x,t) \in Q_2\end{aligned} \tag{37}$$

в областях Q_1 и Q_2 соответственно, для которых выполняются условия (21)–(24).

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Будем искать решение $\tilde{v}(x,t) \in V_1(Q_1)$, $\widetilde{w}(x,t) \in V_1(Q_2)$ уравнений

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{tttt}(x,t) - g(x)\tilde{v}_{xxtt}(x,t) + h(x)\tilde{v}_{xx}(x,t) - \frac{\lambda^2 ab(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_{xtttt}(-0,t)\\ + \frac{\lambda a(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\widetilde{w}_{tttt}(+0,t) + c(x,t)\biggl(\tilde{v}(x,t) + \frac{\lambda a(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\widetilde{w}(+0,t)\\ - \frac{\lambda^2 ab(x+1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_x(-0,t)\biggr) = f(x,t) \quad \text{при } (x,t) \in Q_1,\end{aligned} \tag{38}$$

$$\widetilde{w}_{tttt}(x,t) - g(x)\tilde{v}_{xxtt}(x,t) + h(x)\widetilde{w}_{xx}(x,t) + \frac{\lambda a(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_{xtttt}(-0,t)$$

$$+\frac{\lambda^2 ab(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\widetilde{w}_{tttt}(+0,t)+c(x,t)\biggl(\widetilde{w}(x,t)+\frac{\lambda^2 ab(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\widetilde{w}(+0,t)$$

$$+\frac{\lambda a(x-1)}{1+\lambda^2 ab}\tilde{v}_x(-0,t)\biggr)=f(x,t)\quad \text{при } (x,t)\in Q_2 \qquad (39)$$

такие, что для них выполняются условия (21)–(24).

При $\lambda = 0$ эта задача разрешима, докажем наличие «хороших» априорных оценок для функций $\tilde{v}(x,t)$ и $\widetilde{w}(x,t)$. Зададим функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$, как в доказательстве теоремы 3. Пусть для них справедливы уравнения

$$v_{tttt}-g(x)v_{xxtt}+h(x)v_{xx}+c(x,t)v=f(x,t), \qquad (40)$$

$$w_{tttt}-g(x)v_{xxtt}+h(x)w_{xx}+c(x,t)w=f(x,t) \qquad (41)$$

в областях Q_1 и Q_2 соответственно и выполняются условия (29), (30), (21)–(24).

Сначала умножим уравнение (40) на функцию $v_{ttt}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_1, затем умножим уравнение (41) на функцию $\gamma w_{ttt}(x,t)$, где $\gamma = \frac{a}{b}$, и проинтегрируем по области Q_2. Сложив оба равенства, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} v_{ttt}^2(x,t)\,dx+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} w_{ttt}^2(x,t)\,dx+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} g'(x)v_{x\tau\tau}v_{\tau\tau\tau}\,dxd\tau$$

$$+\gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} g'(x)w_{x\tau\tau}v_{\tau\tau\tau}\,dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} g(x)v_{xtt}^2(x,t)\,dx+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} g(x)w_{xtt}^2(x,t)\,dx$$

$$-\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} h'(x)v_x v_{\tau\tau\tau}\,dxd\tau-\gamma\int\limits_{0}^{t} h'(x)w_x w_{\tau\tau\tau}\,dxd\tau$$

$$+\int\limits_{-1}^{0} h(x)v_x(x,t)v_{xtt}(x,t)\,dx+\gamma\int\limits_{0}^{1} h(x)w_x(x,t)w_{xtt}(x,t)\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} h(x)v_{xt}^2(x,t)\,dx+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} h(x)w_{xt}^2(x,t)\,dx$$

$$-\int\limits_{-1}^{0} c(x,t)v(x,t)v_{tt}(x,t)\,dx-\gamma\int\limits_{0}^{1} c(x,t)w(x,t)w_{tt}(x,t)\,dx$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} c_\tau(x,\tau)v_\tau^2\,dxd\tau+\gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} c_\tau(x,\tau)w_\tau^2\,dxd\tau$$

$$+\int\limits_{-1}^{0} c_t(x,t)v(x,t)v_t(x,t)\,dx+\gamma\int\limits_{0}^{1} c_t(x,t)w(x,t)w_t(x,t)\,dx$$

$$-\int\limits_{-1}^{0} c(x,t)v(x,t)v_{tt}(x,t)\,dx-\gamma\int\limits_{0}^{1} c(x,t)w(x,t)w_{tt}(x,t)\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} c_{tt}(x,t)v^2(x,t)\,dx+\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} c_{tt}(x,t)w^2(x,t)\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} c(x,t)v_t^2(x,t)\,dx-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{1} c(x,t)w_t^2(x,t)\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} c_{\tau\tau\tau}(x,\tau)v^2\,dxd\tau-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} c_{\tau\tau\tau}(x,\tau)w^2\,dxd\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} c_{\tau}(x,\tau)v_\tau^2\,dxd\tau-\frac{\gamma}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} c_{\tau}(x,\tau)w_\tau^2\,dxd\tau$$
$$=\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} f(x,\tau)v_{\tau\tau\tau}\,dxd\tau+\gamma\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} f(x,\tau)w_{\tau\tau\tau}\,dxd\tau. \qquad (42)$$

Из (42), применяя неравенство Юнга, получим следующую априорную оценку:

$$\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0}\left(v_{\tau\tau\tau}^2+v_{x\tau\tau}^2\right)dxd\tau+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1}\left(w_{\tau\tau\tau}^2+w_{x\tau\tau}^2\right)dxd\tau$$
$$\le M_3\left[\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} f^2(x,\tau)\,dxd\tau+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} f^2(x,\tau)\,dxd\tau\right], \qquad (43)$$

в которой число M_3 определяется числами h_0, g_0, a, b и функцией $c(x,t)$.

Затем умножим уравнение (40) на функцию $-v_{xxttt}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_1, а уравнение (41) — на функцию $-\gamma w_{xxttt}(x,t)$ и проинтегрируем по области Q_2. Используя неравенство Юнга и оценку (32), получим еще одну априорную оценку для функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$:

$$\int\limits_{-1}^{0}\left(v_{xx\tau}^2+v_{xx\tau\tau}^2\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(w_{xx\tau}^2+w_{xx\tau\tau}^2\right)dx$$
$$\le M_4\left[\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-1}^{0} f^2(x,\tau)\,dxd\tau+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1} f^2(x,\tau)\,dxd\tau\right], \qquad (44)$$

где число M_4 зависит от h_0, g_0, a, b и $c(x,t)$.

В силу равенств (34), (35) и ограниченности функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ в пространствах $V_2(Q_1)$ и $V_2(Q_2)$ получим, что функции $\tilde{v}(x,t)$ и $\widetilde{w}(x,t)$ также ограничены в этих же пространствах. А это означает, что для решений $\tilde{v}(x,t), \widetilde{w}(x,t)$ выполнена равномерная по λ оценка в пространствах $V_2(Q_1)$ и $V_2(Q_2)$.

По теореме о методе продолжения по параметру [39, гл. 3, § 14] разрешимость (38), (39), (21)–(24) при $\lambda=0$ и оценки (43), (44) означают, что задача

(36), (37), (21)–(24) имеет решение $\tilde{v}(x,t), \widetilde{w}(x,t)$ из пространств $V_2(Q_1)$ и $V_2(Q_2)$ соответственно. Таким образом, $u(x,t)$ является решением задачи сопряжения II из требуемого класса. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.
2. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
3. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht: VSP, 2003.
4. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
5. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: Либроком, 2011.
6. *Амиров Ш. Кожанов А. И.* Глобальная разрешимость начально-краевых задач для некоторых нелинейных аналогов уравнения Буссинеска // Мат. заметки. 2016. Т. 99, вып. 2. С. 171–180.
7. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
8. *Ладыженская О. А., Ступялис Л.* Об уравнениях смешанного типа // Вестн. Ленингр. ун-та. 1967. № 18. С. 38–46.
9. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
10. *Ладыженская О. А., Ступялис Л.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 101–136.
11. *Ступялис Л.* Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 125. С. 211–229.
12. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Ин-т математики, 1982.
13. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
14. *Солдатов А. П.* Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева — Бицадзе. I. Теоремы единственности // Докл. АН. 1993. Т. 332, № 6. С. 696–698; II. Теоремы существования // Докл. АН. 1993. Т. 333, № 1. С. 16–18.
15. *Хачев М. М.* Первая краевая задача для линейного уравнения смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1988.
16. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
17. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
18. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
19. *Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара: Самарск. гос. экономический ун-т, 2008.
20. *Моисеев Е. И., Лихоманенко Т. Н.* Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 3. С. 256–258.
21. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 488–496.
22. *Кожанов А. И.* Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа переменного направления // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. С. 96–109.
23. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками со знакопостоянной функцией при старшей производной // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2015. Т. 15. № 2. С. 51–59.

24. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача сопряжения для дифференциальных уравнений нечетного порядка с двумя временными переменными и с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2017. Т. 474. № 6. С. 661–664.
25. *Ильин В. А., Луференко П. В.* Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности, разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 1. С. 12–15.
26. *Ильин В. А., Луференко П. В.* Обобщенные решения смешанных задач для разрывного волнового уравнения при условии равенства импедансов // Докл. АН. 2009. Т. 429, № 3. С. 317–321.
27. *Олейник О. А.* Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типов с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 3–20.
28. *Ильин В. А.* О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.
29. *Ильин В. А.* Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 21–24.
30. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
31. *Рогожников А. М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волн по каждому из этих участков // Докл. АН. 2012. Т. 441, № 4. С. 449–451.
32. *Кулешов А. А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 4. С. 451–454.
33. *Рогожников А. М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. АН. 2012. Т. 444, № 5. С. 488–491.
34. *Смирнов И. Н.* О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 49, № 5. С. 643–648.
35. *Шубин В. В.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 1. С. 126–138.
36. *Potapova S. V.* Boundary value problems for pseudoparabolic equations with a variable time direction. TWMS // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2012. V. 3. N 1. P. 73.
37. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14. № 1. С. 48–65.
38. *Кожанов А. И., Шарин Е. Ф.* Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка. II // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21. № 1. С. 18–28.
39. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.

Статья поступила 28 февраля 2018 г.

Григорьева Александра Ивановна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
институт математики и информатики,
кафедра высшей математики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
shadrina_ai@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

UDC 517.946

INITIAL–BOUNDARY PROBLEM WITH CONJUGATION CONDITIONS FOR COMPOSITE–TYPE EQUATIONS WITH TWO BREAKDOWN COEFFICIENTS

A. I. Grigorieva

Abstract: In this paper we study the solvability of an initial-boundary value problem with conjugation conditions for two nonclassical differential equations of composite type. We describe the case when the coefficients of each equation under consideration have a discontinuity of the first kind at the point zero. The field of research is given in the form of a band, due to the presence of a discontinuity point consisting of two subregions. Thus, the investigated equations are considered in two different areas. To prove the existence and uniqueness of regular solutions (which have all the generalized derivatives entering into the equations) of the initial-boundary value problem, we use the method of continuation with respect to a parameter, which has a wide application in the theory of boundary value problems. Using the maximum principle, the presence of all necessary a priori estimates for the solutions of the problem being studied is established.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14227

Keywords: composite type equation, initial-boundary problem, breakdown coefficients, conjugation problem, regular solution, existence and uniqueness, a priori estimate.

REFERENCES

1. *Dzhuraev T. D.*, Boundary Value Problems for Mixed and Mixed-Composite Type Equations [in Russian], Fan, Tashkent (1979).
2. *Kozhanov A. I.*, Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht (1999).
3. *Sviridyuk G. A. and Fedorov V. E.*, Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, VSP, Utrecht (2003).
4. *Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., and Pletner Yu. D.*, Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type, Fizmatlit, Moscow (2007).
5. *Korpusov M. O.*, Blow-up in Non-classical Nonlocal Equations, Librokom, Moscow (2011).
6. *Amirov Sh. and Kozhanov A. I.*, "Global solvability of initial boundary-value problems for nonlinear analogs of the Boussinesq equation," Math. Notes, **99**, No. 2, 183–191 (2016).
7. *Bitsadze A. V.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow (1959).
8. *Ladyzhenskaya O. A. and Stupjalis L.*, "On equations of mixed type [in Russian]," Vestn. Leningr. Univ., No. 18, 38–46 (1967).
9. *Smirnov M. M.*, Equations of Mixed Type [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
10. *Ladyzhenskaya O. A. and Stupjalis L.*, "Boundary problems for mixed-type equations [in Russian]," Tr. Mat. Inst. Steklova, **116**, 101–136 (1971).
11. *Stupyalis L.*, "Boundary problems for elliptic-hyperbolic equations [in Russian]," Tr. Mat. Inst. Steklova, **125**, 211–229 (1973).
12. *Tersenov S. A.*, Introduction to the Theory of Parabolic Equations with Varying Time Direction, Inst. Mat., Novosibirsk (1982).

13. *Moiseev E. I.*, Equations of Mixed Type with Spectral Parameter [in Russian], Izdat. Mosk. Univ., Moscow (1988).

14. *Soldatov A. P.*, "Problems of Dirichlet type for the Lavrent'ev–Bitsadze equation. I: Uniqueness theorems," Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., **48**, No. 2, 410–414 (1994); "Problems of Dirichlet type for the Lavrent'ev–Bitsadze equation. II: Existence theorems," Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., **48**, No. 3, 433–437 (1994).

15. *Hachev M. M.*, First Boundary Problem for Linear Mixed-Type Equations, Ehl'brus, Nal'chik (1988).

16. *Egorov I. E., Pyatkov S. G., and Popov S. V.*, Nonclassical Differential-Operator Equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2000).

17. *Nakhushev A. M.*, Problems with Shifts for Partial Differential Equations, Nauka, Moscow (2006).

18. *Sabitov K. B.*, "Dirichlet problem for mixed-type equation in a rectangular domain," Dokl. Math., **75**, No. 2, 193–196 (2007).

19. *Marichev O. I., Kilbas A. A., and Repin O. A.*, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients, Samarsk. Gos. Ekonom. Univ., Samara (2008).

20. *Moiseev E. I. and Lihomanenko T. N.*, "A nonlocal boundary value problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation," Dokl. Math., **86**, No. 2, 635–637 (2012).

21. *Sabitov K. B.* "Boundary value problem for a third-order equation of mixed type in a rectangular domain," Differ. Equ., **49**, No. 2, 187–197 (2013).

22. *Kozhanov A. I.*, "A conjugation problem for a class of composite-type equations of variable direction [in Russian]," in: Nonclassical Equations of Mathematical Physics, pp. 96–109, Izdat. Sobolev Inst. Mat., Novosibirsk (2002).

23. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, "Conjugate problem for a third order equation with multiple characteristics and a positive function at the higher order derivative," J. Math. Sci., New York, **215**, No. 4, 510–516 (2016).

24. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, "Transmission problem for odd-order differential equations with two time variables and a varying direction of evolution," Dokl. Math., **95**, No. 3, 267–269 (2017)

25. *Il'in V. A. and Luferenko P. V.*, "Mixed problems describing longitudinal oscillations of a rod consisting of two segments with different densities and different elasticities but equal impedances," Dokl. Math., **80**, No. 2, 642–645 (2009).

26. *Il'in V. A. and Luferenko P. V.*, "Generalized solutions of initial-boundary value problems for a discontinuous wave equation in the case of equal impedances," Dokl. Math., **80**, No. 3, 901–905 (2009).

27. *Olejnik O. A.*, "Boundary problems for linear elliptic and parabolic types with discontinuous coefficients [in Russian]," Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **25**, 3–20 (1961).

28. *Il'in V. A.*, "On the solvability of the Dirichlet and Neumann problems for a linear elliptic operator with discontinuous coefficients," Sov. Math., Dokl., **2**, 228–231 (1961).

29. *Il'in V. A.*, "The Fourier method for a hyperbolic equation with discontinuous coefficients," Sov. Math., Dokl., **3**, 12–16 (1962).

30. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'ceva N. N.*, Linear and Quasilinear Parabolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

31. *Rogozhnikov A. M.*, "Study of a mixed problem describing the oscillations of a rod consisting of several segments with arbitrary lengths," Dokl. Math., **85**, No. 3, 399–402 (2012).

32. *Kuleshov A. A.*, "Mixed problems for the equation of longitudinal vibrations of a heterogeneous rod with a free or fixed right end consisting of two segments with different densities and elasticities," Dokl. Math., **85**, No. 1, 80–82 (2012).

33. *Rogozhnikov A. M.*, "Study of a mixed problem describing the oscillations of a rod consisting of several segments with arbitrary lengths," Dokl. Math., **85**, No. 3, 399–402 (2012).

34. *Smirnov I. N.* "On the vibrations described by the telegraph equation in the case of a system consisting of several parts of different densities and elasticities," Differ. Equ., **49**, No. 5, 617–622 (2013)

35. *Shubin V. V.*, "Boundary value problems for third-order equations with a discontinuous coefficient," J. Math. Sci., New York, **198**, No. 5, 637–647 (2014).

36. *Potapova S. V.*, “Boundary value problems for pseudoparabolic equations with a variable time direction,” TWMS J. Pure Appl. Math., **3**, No. 1, 75–91 (2012).
37. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, “The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient of the highest derivative,” Dal’nevost. Mat. Zh., **14**, No. 1, 48–65 (2014).
38. *Kozhanov A. I. and Sharin E. F.*, “A conjugate problem for some higher order nonclassical equations, II,” Mat. zametki SVFU, **21**, No. 1, 18–28 (2014).
39. *Trenogin V. A.*, Functional Analysis [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2007).

Submitted February 28, 2018

Alexandra I. Grigorieva
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia
shadrina_ai@mail.ru