Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

УДК 517.95

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИЛЬНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

О. А. Вихрева

Аннотация. Рассмотрен частный случай ранее изученного автором вырождающегося дифференциального оператора второго порядка с сохранением введенных предположений и обозначений. Основное внимание в работе уделяется изучению эффектов, связанных с «сильным» вырождением. Настоящая задача решается для использования в дальнейших исследованиях формально сопряженного (связанного операцией транспонирования) уравнения, а также для получения некоторой теоремы существования и единственности обобщенного решения формально сопряженного уравнения из доказанной теоремы. Использование приведенных ниже результатов, относящихся к данному уравнению, сводится в простейшем случае к операторным уравнениям. Исследованы существование и единственность обобщенного решения первой краевой задачи для данного уравнения с применением теории операторов, также приводится обобщенное решение данного уравнения в случае, связанном с «сильным» вырождением. Результаты, полученные для данного уравнения, содержащего вырождение, будут использованы в дальнейшем для исследования таких уравнений, которые содержат модельные операторы. Уравнения такого вида возникают при математическом моделировании различных физических процессов.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14226

Ключевые слова: гильбертово пространство, вырождающийся дифференциальный оператор, обобщенное решение, «сильное» вырождение, неоднородное уравнение, общее решение, частное решение, модельные операторы.

В данной работе рассматривается частный случай вырождающегося дифференциального оператора второго порядка

$$Mu \equiv -(\varphi u_t)_t + au_t + pu = g, \quad 0 < t < b,$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная положительная функция при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$, a, p — числа [3]. Один из частных случаев рассмотрен в [4], где структура решения и выполнение граничных условий зависели от знака a. К числу первых работ в классической ситуации относится работа [5], в которой указаны основные особенности постановки краевых условий для уравнения второго порядка со степенным вырождением. Обширная библиография имеется в [6]. Близким рассмотрениям (для уравнения со степенным вырождением при старшей производной) посвящены работы [1, 7–14]. Но в работах, близких к данной, недостаточно изучены ряд явлений, поэтому имеется большое количество открытых

© 2018 Вихрева О. А.

вопросов. Подробно математические модели физических процессов для вырождающихся уравнений изложены в [2, 15].

Рассмотрим уравнение

$$Mv \equiv -(\varphi v_t)_t + av_t = g, \quad 0 < t < b, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная положительная функция при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$, $a \geq 0$ — константа. Положим

$$I = \int_0^b \frac{1}{\varphi(t)}\, dt.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\varphi}, & I < \infty, \\ \int\limits_t^b \frac{d\tau}{\varphi}, & I = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$\omega_\delta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \delta, \\ |\ln(\Phi(\delta))|^\varepsilon - |\ln(\Phi(t))|^\varepsilon, & \delta \leq t \leq \delta_1, \\ 1, & \delta_1 \leq t \leq b. \end{cases}$$

Здесь $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, число δ_1 выбирается из соотношения

$$|\ln(\Phi(\delta))|^\varepsilon - |\ln(\Phi(\delta_1))|^\varepsilon = 1.$$

Заметим, что $\delta < \delta_1$, $\delta_1 \to 0$ при $\delta \to 0$ и

$$\int_\delta^{\delta_1} \omega_{\delta t}\, dt = 1.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{H}_1$ новое гильбертово пространство, которое является пополнением $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ по норме

$$\|v\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} = \int_0^b \varphi v_t^2\, dt.$$

Уравнение (1) и уравнение, рассмотренное в [3], являются формально сопряженными (связанными операцией транспонирования). Поэтому операции $\Lambda u \equiv -(\varphi u_t)_t - au_t$, Mv связаны равенством

$$(\Lambda u, v) = (u, Mv), \tag{2}$$

справедливым для достаточно гладких u, v, подчиненных соответствующим граничным условиям. Одновременно операции Λu соответствует некоторый оператор $\Lambda : L_2(0,b) \to L_2(0,b)$.

Определение 1. Элемент $\upsilon \in L_2(0,b)$ *принадлежит* $D(\Lambda^*)$, если существует элемент $g \in L_2(0,b)$ такой, что для любого $u \in D(\Lambda) \subset \overset{\circ}{H}_1 \Subset L_2(0,b)$ выполнено равенство

$$(\Lambda u, \upsilon) = (u, g). \tag{3}$$

Тогда по определению

$$(\Lambda^* \upsilon) = g. \tag{4}$$

Определение 2. *Обобщенным решением уравнения* (1) назовем элемент $\upsilon \in D(\Lambda^*)$, дающий решение уравнения (4), где Λ^* — сопряженный к оператору $\Lambda : L_2(0,b) \to L_2(0,b)$, порождаемому левой частью уравнения (1).

Теорема. *Обобщенное решение уравнения* (1) *единственно и существует при любой правой части* $g \in L_2(0,b)$.

Доказательство. Единственность следует из разрешимости уравнения $\Lambda u = f$ при любом $f \in L_2(0,b)$. Действительно, если υ, ω — два решения уравнения (4), то согласно (3) $(\Lambda u, \upsilon - \omega) = 0$ при любом $u \in D(\Lambda)$, что влечет $\upsilon = \omega$.

Разрешимость (4) при любом $g \in L_2(0,b)$ есть следствие существования ограниченного оператора Λ^{-1}. Действительно, пусть

$$\Lambda u = f, \quad u = \Lambda^{-1} f, \quad (u, g) = (\Lambda^{-1} f, g).$$

Ограниченный функционал над f (порождаемый g) может быть реализован по лемме Рисса [13] элементом $\upsilon \in L_2(0,b)$. Получим

$$(u, g) = (\Lambda^{-1} f, g) = (f, \upsilon) = (\Lambda u, \upsilon).$$

Теорема доказана.

Так как $\Lambda^{*-1} = \Lambda^{-1*}$, полная непрерывность оператора Λ^{-1} влечет полную непрерывность оператора Λ^{*-1}.

Пусть $I = \infty$ и

$$I = \int\limits_0^b \frac{t}{\varphi}\, dt < \infty.$$

Запишем общее решение однородного уравнения (1) при $t > 0$ в виде

$$\upsilon_0(t) = C_1 + C_2 \int\limits_t^b \frac{1}{\varphi(\tau)} e^{-a\Phi(\tau)}\, d\tau, \tag{5}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Тогда при $t > 0$ частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{\upsilon}(t) = \frac{1}{a} \int\limits_t^b [e^{-a(\Phi(t) - \Phi(\tau))} - 1] g(\tau)\, d\tau, \quad a > 0. \tag{6}$$

Лемма 1. *При любой $g \in L_2(0,b)$ существует конечный предел*

$$\lim_{t\to 0} \tilde{\upsilon}(t) = -\frac{1}{a}\int\limits_0^b g(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Разобьем правую часть (6) на два слагаемых:

$$\frac{1}{a}e^{-a\Phi(t)}\int\limits_t^b e^{a\Phi(\tau)}g(\tau)\,d\tau - \frac{1}{a}\int\limits_t^b g(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Оценим первый интеграл в (7) по модулю:

$$\left|e^{-a\Phi(t)}\int\limits_t^b e^{a\Phi(\tau)}g(\tau)\,d\tau\right|^2 \le e^{-2a\Phi(t)}\int\limits_t^b e^{2a\Phi(\tau)}\,d\tau\|g\|^2_{L_2(0,b)}.$$

При $I = \infty$ раскрываем неопределенность в дроби:

$$e^{-2a\Phi(t)}\int\limits_t^b e^{2a\Phi(\tau)}\,d\tau,$$

пользуясь правилом Лопиталя. Получаем, что ее предел при $t \to 0$ будет равен нулю. Отсюда следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Функция, заданная при $t > 0$ равенством*

$$\upsilon(t) = \frac{1}{a}\int\limits_t^b [e^{-a(\Phi(t)-\Phi(\tau))} - 1]g(\tau)\,d\tau + k\int\limits_t^b \frac{1}{\varphi(\tau)}e^{-a\Phi(\tau)}\,d\tau,$$

где

$$k = \frac{\int\limits_0^b g(\tau)\,d\tau}{a\int\limits_0^b \frac{1}{\varphi}e^{-a\Phi(\tau)}\,d\tau},$$

и условием $\upsilon(0) = 0$, дает обобщенное решение уравнения (1). *Обобщенное решение является абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей условиям*

$$\upsilon(0) = \upsilon(b) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Для $\upsilon(t)$ имеем

$$\upsilon_t(t) = \frac{1}{\varphi}\int\limits_t^b e^{-a(\Phi(t)-\Phi(\tau))}g(\tau)\,d\tau - \frac{k}{\varphi}e^{-a\Phi(t)}.$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_0^b \varphi \upsilon_t^2\,dt \le \int\limits_0^b \frac{1}{\varphi}\left[e^{-a\Phi(t)}\int\limits_t^b e^{a\Phi(\tau)}g(\tau)\,d\tau - ke^{-a\Phi(t)}\right]^2 dt$$

$$\le C'\|g\|^2_{L_2(0,b)}\left(\int\limits_0^b \frac{1}{\varphi}e^{-2a\Phi(t)}\left[\int\limits_t^b e^{2a\Phi(\tau)}\,d\tau + 1\right] dt\right) \le C_1\|g\|^2_{L_2(0,b)}, \quad C_1>0,$$

так как

$$\int\limits_0^b \left[\frac{1}{\varphi}e^{-2a\Phi(t)}\int\limits_t^b e^{2a\Phi(\tau)}\,d\tau\right] dt = \mathrm{const}\,.$$

Отсюда следует, что $\upsilon \in \overset{\circ}{H}_1$.

Для любой $u \in D(L)$, удовлетворяющей уравнению $Lu = f$, и для любого $\delta > 0$ верно равенство

$$\{u,\upsilon_\delta\}_\varphi - (au_t,\upsilon_\delta) = (f,\upsilon_\delta), \tag{9}$$

где $\upsilon_\delta(t) = \omega_\delta(t)\upsilon(t)$. При $\delta\to 0$ равенство (9) приводится к виду

$$\{u,\upsilon\}_\varphi - (au_t,\upsilon) = (f,\upsilon).$$

Действительно, из леммы 5 работы [3] имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\{u,\omega_\delta\upsilon\}_\varphi = \{u,\upsilon\}_\varphi = \int\limits_0^b \varphi u_t\upsilon_t\,dt.$$

Второе слагаемое при $I=\infty$ равно

$$\lim_{\delta\to 0}(au_t,\upsilon_\delta) = \lim_{\delta\to 0}(au_t,\omega_\delta\upsilon) = \int\limits_0^b au_t\upsilon\,dt.$$

Оценим интеграл по модулю:

$$\left|\int\limits_0^b u_t(\omega_\delta - 1)\upsilon\,dt\right| \le \sqrt{\int\limits_0^{\delta_1} \varphi u_t^2(\omega_\delta-1)^2\,dt}\sqrt{\int\limits_0^{\delta_1}\frac{1}{\varphi}\upsilon^2\,dt}. \tag{10}$$

Первый интеграл в (10) в силу стремления ω_δ к 1 стремится к 0.

Рассмотрим второй интеграл в (10):

$$\int\limits_0^{\delta_1}\frac{\upsilon^2(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int\limits_0^{\delta_1}\frac{1}{\varphi(t)}\left(\frac{1}{a}\int\limits_t^b e^{-a(\Phi(t)-\Phi(\tau))}g(\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\int\limits_0^t g(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^b g(\tau)\,d\tau\frac{1-e^{-a\Phi(t)}}{a}\right)^2 dt$$

$$= \int\limits_0^{\delta_1} \frac{1}{\varphi(t)} \left(\frac{1}{a} \int\limits_t^b e^{-a(\Phi(t)-\Phi(\tau))} g(\tau)\, d\tau + \frac{1}{a} \int\limits_0^t g(\tau)\, d\tau - \frac{1}{a} \int\limits_0^b \frac{1}{\varphi} e^{a\Phi(\tau)}\, d\tau \right)^2 dt$$

$$\leq C_1 \|g\|^2_{L_2(0,b)} \int\limits_0^{\delta_1} \frac{1}{\varphi(t)} (\varphi(t) + t + e^{-2a(\Phi(t))})\, dt \leq C_2 \|g\|^2_{L_2(0,b)}, \quad C_2 > 0,$$

ограничен, так как

$$\int\limits_0^{\delta_1} \frac{t}{\varphi(t)}\, dt < \infty, \quad \int\limits_0^{\delta_1} \frac{1}{\varphi} e^{-2a(\Phi(t))}\, dt = \frac{1}{2a} e^{-2a(\Phi(\delta_1))} \leq \frac{1}{2a}.$$

Правая часть равенства (9) при $\delta \to 0$ принимает вид

$$\lim_{\delta \to 0} (f, \upsilon_\delta) = \lim_{\delta \to 0} (f, \omega_\delta \upsilon) = \int\limits_0^b f \upsilon\, dt$$

в силу стремления ω_δ к 1.

Пусть $u \in D(\Lambda)$, $u(b) = 0$. Тогда с помощью интегрирования по частям получаем равенство

$$(\varphi u_t, \upsilon_t) = -(u, (\varphi \upsilon_t)_t) + \varphi \upsilon_t u \Big|_{t=0}^{t=b} = -(u, (\varphi \upsilon_t)_t), \quad (a u_t, \upsilon) = -(u, a \upsilon_t).$$

Следовательно,

$$(\Lambda u, \upsilon) = (u, M\upsilon) = (u, g) \quad \forall u \in D(\Lambda).$$

Таким образом, заданная функция $\upsilon(t)$ есть обобщенное решение уравнения (1) и является абсолютно непрерывной функцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
2. *Баев А. Д.* Некоторые качественные методы математического моделирования в теории вырождающихся краевых задач: Дис. докт. … физ.-мат. наук. Воронеж: Воронежский гос. университет, 2008.
3. *Вихрева О. А.* О спектре вырождающегося обыкновенного дифференциального оператора второго порядка // Мат. заметки СВФУ. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 12–19.
4. *Вихрева О. А., Тарасова Г. И.* Об обобщенной разрешимости первой краевой задачи для вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения // Вестн. СВФУ им. М. К. Аммосова. 2015. Т. 12, № 2. С. 7–10.
5. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
6. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
7. *Вихрева О. А.* Обобщенная и фредгольмова разрешимость смешанной краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения // Вестн Сам. гос. ун-та, 2007. Т. 56, № 6. С. 194-202.
8. *Вихрева О. А.* Задача Дирихле для нелинейного вырождающегося эллиптического уравнения // Мат заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, вып. 1. С. 39–44.

9. *Вихрева О. А.* Краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Информационные технологии в науке, образовании экономике: Сб. тр. II Респ. науч.-практ. конф. Якутск, 2003. С. 113–118.

10. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. сб. 1954. Т. 35, № 5. С. 513–568.

11. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. М.: Мир, 1966. Т. 2: Спектральная теория.

12. *Дезин А. А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2000. Т. 229. С. 131–141.

13. *Егоров И. Е.* Теоремы вложения и компактности для одного класса весовых пространств // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993. С. 161–168.

14. *Тихонов Н. А.* Об обобщенной разрешимости третьей краевой задачи для вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения // Мат заметки ЯГУ, 1999. Т. 6, вып. 1. С. 54–59.

15. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.:Наука, 1970.

Статья поступила 17 января 2018 г.

Вихрева Ольга Анатольевна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
институт математики и информатики,
ул. Белинского, 58, Якутск 677000
`ovixreva@mail.ru`

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2018. Том 25, № 2

UDC 517.95

ON THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A STRONGLY DEGENERATE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

O. A. Vikhreva

Abstract: We consider a particular case of the earlier studied by the author second order degenerate differential operator with the same assumptions and designations. We focus on the study of the effects associated with the "strong" degeneration. The problem is solved to be used in further researches of formally conjugated (coupled transposition operation) equation and also for obtaining some theorems of existence and uniqueness for generalized solutions of formally conjugated equations from the proved theorem. The use of the following results is reduced to the operator equations in the simplest case. We study existence and uniqueness of the generalized solution of the first boundary value problem for the given equation using the operator theory and obtain the generalized solution to the equation in the case connected with "strong" degeneration. The results will be used in the future for research of equations with model operators which arise in mathematical modeling of various physical processes.

DOI: 10.25587/SVFU.2018.98.14226

Keywords: Hilbert space, degenerate differential operator, generalized solution, "weak" degeneration, "strong" degeneration, nonhomogeneous equation, general solution, partial solution, model operator.

REFERENCES

1. *Akhiezer N. I. and Glazman I. M.*, Theory of Linear Operators in Hilbert Space [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
2. *Bayev A. D.*, Some Qualitative Methods of Mathematical Modeling in the Theory of the Degenerate Boundary Value Problem [in Russian], Diss. Dokt. Fiz.-Mat. Nauk, Voronezh Gos. Univ., Voronezh (2008).
3. *Vikhreva O. A.*, "The spectrum of a degenerate second-order ordinary differential operator [in Russian]," Mat. Zametki SVFU, **20**, No. 1, 12–19 (2013).
4. *Vikhreva O. A. and Tarasova G. I.*, "On the generalized solvability of the first boundary value problem for a degenerate ordinary equation [in Russian]," Vestn. Sev.-Vostoch. Feder. Univ., **12**, No. 2, 7–10 (2015).
5. *Keldysh M. V.*, "About some cases of degeneration of the equations of elliptic type [in Russian]," Dokl. Akad. Nauk SSSR, **77**, No. 2, 181–183 (1951).
6. *Smirnov M. M.*, Degenerated Elliptic and Hyperbolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
7. *Vikhreva O. A.*, "Generalized and Fredholm resolvability of the mixed regional task for a degenerate elliptic equation [in Russian]," Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser., **56**, No. 6, 194–202 (2007).
8. *Vikhreva O. A.*, "Dirichlet problem for a nonlinear degenerate elliptic equation [in Russian]," Mat. Zametki YAGU, **15**, No. 1, 39–44 (2008).

© 2018 O. A. Vikhreva

9. *Vikhreva O. A.*, "Boundary value problem for a degenerate elliptic equation [in Russian]," in: Sb. Trudov Resp. Nauchn.-Prakt. Konf. Informatsionnye Tekhnologii v Nauke, Obrazovanii i Economike, Yakutsk, 2003, pp. 113–118.

10. *Vishik M. I.*, "Boundary value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of a domain [in Russian]," Mat. Sb., Nov. Ser., **35**, No. 5, 513–568 (1954).

11. *Dunford N. and Schwartz J. T.*, Linear Operators, Part II: Spectral Theory [Russian translation], Mir, Moscow (1966).

12. *Dezin A. A.*, "Differential operator equations. A method of model operators in the theory of boundary value problems," Proc. Steklov Inst. Math., **229**, 131–141 (2000).

13. *Egorov I. E.*, "Embedding theorems and compactness for a class of weighted spaces [in Russian]," in: Non-classical Equations of Mathematical Physics, Izdat. Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk, 1993, pp. 161–168.

14. *Tikhonov N. A.*, "On the generalized solvability of the third boundary value problem for a degenerate ordinary equation [in Russian]," Mat. Zametki YAGU, **6**, No. 1, 54–59 (1999).

15. *Mikhlin S. G.*, Variational Methods in Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1970).

Submitted January 17, 2018

Olga A. Vikhreva
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
57 Belinsky Street, Yakutsk 677000, Russia
ovixreva@mail.ru