Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2017. Том 24, № 3

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ПОСРЕДСТВОМ СМЕШАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (ВСТРОЕННАЯ МОДЕЛЬ ТРЕЩИН)

Д. А. Спиридонов, М. В. Васильева

Аннотация. Представлена математическая модель смешанной размерности течения жидкости в трещиноватых пористых средах (встроенная модель трещин). Математическая модель описывается системой параболических уравнений: d-размерной для пористой среды и $(d-1)$-размерной для системы трещин. Система уравнений связана посредством задания специальной функции перетока. Данная модель позволяет использовать сетки для матрицы пористой среды, не зависящие от сетки для трещин. Для численного решения строится аппроксимация с использованием смешанного метода конечных элементов. Представлены результаты численного решения модельной задачи, которые показывают работоспособность предложенного метода для моделирования течения в трещиноватых пористых средах.

DOI 10.25587/SVFU.2018.3.10893

Ключевые слова: метод конечных элементов, встроенная модель трещин, трещиноватая среда, однофазная жидкость, поток жидкости, закон сохранения массы, закон Дарси.

Введение

Построение математических моделей и вычислительных алгоритмов течения жидкости в трещиноватых коллекторах является актуальной и чрезвычай но интересной задачей как со стороны построения новых математических мо делей, позволяющих учитывать разномасштабные процессы, так и со стороны построения современных вычислительных методов [1–5].

Система трещин требует специального подхода при построении матема тической модели и конструировании вычислительных алгоритмов. Поскольку трещины отличаются большой проницаемостью, они оказывают существенное влияние на процессы фильтрации флюида в пористой среде. При этом следует разделять размеры трещин, так как они могут существовать на различных масштабах и могут различаться природой их возникновения. В случае естественно трещиноватых пористых сред система трещин является, как правило, связанной

Работа выполнена за счет гранта РНФ 17–71–2005 (Постановка задачи и теоретическая часть) и мега-гранта Правительства РФ №14.Y26.31.0013 (Численный алгоритм).

© 2017 Спиридонов Д. А., Васильева М. В

и для ее моделирования традиционно используют модели двойной пористости [6–8]. Такие модели строятся для идеализированной среды и обладают рядом ограничений. Взаимодействие континуумов в таких моделях задается посредством задания функций перетока между матрицей породы и трещинами [9, 10].

В случае трещин, возникающих при использовании технологии гидроразрыва пласта, следует использовать модели явного учета течения в трещинах, такие как дискретная модель трещин (Discrete Fracture Model, DFM) [11–14] или встроенная модель трещин (Embedded Fracture Model, EFM) [15]. Дискретная модель трещин позволяет разрешать трещины на уровне сетки и задавать таким образом соответствующие свойства. Данный подход ведет к большим вычислительным затратам, так как возникает большое количество неизвестных при дискретизации задачи [16–18].

В данной работе рассматривается встроенная модель трещин. В разд. 1 представлена математическая модель смешанной размерности течения флюида в трещиноватых средах. Конечно-элементная аппроксимация задачи описана в разд. 2, где описана дискретная задача, позволяющая использовать сетки для матрицы пористой среды, не зависящие от сетки для трещин. В разд. 3 представлены результаты численного решения модельной задачи, показывающие работоспособность предложенного метода для моделирования течения в трещиноватых пористых средах.

1. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель течения однофазного флюида в трещиноватой пористой среде. Расчетная область содержит две подобласти

$$\Omega = \Omega_m \cup \gamma, \quad \gamma = \bigcup_l \gamma_l,$$

где Ω_m — двумерная область матрицы пористой среды и γ — одномерная область сети трещин (рис. 1). В данной работе ограничимся рассмотрением двумерной задачи.

Течение жидкости в пористых средах базируется на законе сохранения массы и законе Дарси:

$$\begin{gathered} \frac{\partial(\phi_\alpha \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q_\alpha) + \rho r^{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha = f, m, \quad \beta \neq \alpha, \\ q_\alpha = -k_\alpha \nabla p_\alpha, \quad \alpha = f, m, \end{gathered} \tag{1}$$

где индекс f, m относится к трещинам и матрице пористой среды, $k_\alpha = \kappa_\alpha/\mu$, c_α — сжимаемость среды, q_α — скорость фильтрации, p_α — давление, μ, $\kappa_\alpha f$ — вязкость и проницаемость среды и f_α — дебиты добывающих/закачивающих скважин. Отметим, что в данном случае мы пренебрегаем гравитационными и капиллярными силами.

Уравнения связаны посредством функции перетока между матрицей пористой среды и трещинами

$$r_{mf} = -r_{fm} = \sigma(p_m - p_f),$$

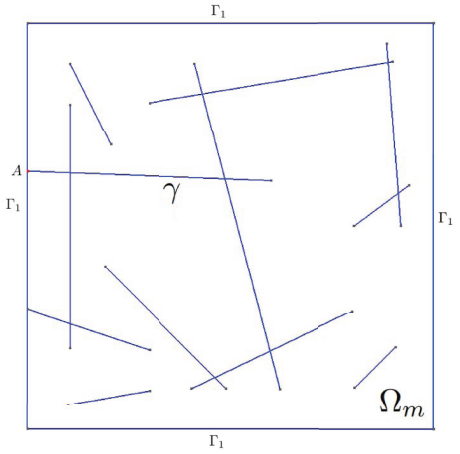

Рис. 1. Расчетная область. Двумерная область матрицы пористой среды Ω_m и одномерная область сети трещин $\gamma = \bigcup\limits_l \gamma_l$

где σ — коэффициент перетока.

Пусть $\rho = \text{const}$ (фильтрации несжимаемой жидкости). Тогда

$$\begin{gathered} c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + \nabla \cdot q_m + \sigma(p_m - p_f) = f_m, \quad x \in \Omega_m, \\ k_m^{-1} q_m + \nabla p_m = 0, \quad x \in \Omega_m, \\ c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla \cdot q_f - \sigma(p_m - p_f) = f_f, \quad x \in \gamma, \\ k_f^{-1} q_f + \nabla p_f = 0, \quad x \in \gamma. \end{gathered} \tag{2}$$

Система уравнений (2) дополняется начальным условием

$$p_m = p_f = p_0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0,$$

и граничными условиями

$$\begin{gathered} p_m = p_f = p_1, \quad x \in \Gamma_D, \\ q_m \cdot n = q_f \cdot n = 0, \quad x \in \partial\Gamma_N. \end{gathered} \tag{4}$$

Представленная математическая модель является связанной системой уравнений смешанной размерности и аналогична моделям двойной пористости.

2. Конечно-элементная аппроксимация

Пусть $\mathscr{T}^h$ — триангуляция области Ω_m на конечные элементы. Для аппроксимации задачи (2)–(4) по пространству для переменных (q_m, p_m), будем использовать смешанный метод конечных элементов. Для переменных скорости и давления возьмем элементы Равиа — Тома наименьшего порядка и кусочно постоянные функции соответственно. Данный метод позволит естественным образом аппроксимировать функции перетока, поскольку давление в данном

случае кусочно постоянно. Смешанный метод конечных элементов также дает локально консервативную аппроксимацию, что является одним из необходимых условий при моделировании задач фильтрации.

Определим следующие пространства для скорости, давления и насыщенности:

$$W = \{w \in L^2(\Omega_m)^d : \operatorname{div} v \in L^2(\Omega_m)\}, \quad Q = L^2(\Omega_m).$$

Вариационная постановка задачи записывается следующим образом: найти $(q_m, p_m) \in (W, Q)$ такие, что

$$a(q_m, v) + b(p_m, v) = 0, \quad v \in W$$
$$b(q_m, r) + m\left(\frac{\partial p_m}{\partial t}, r\right) + q(p_m - p_f, r) = l(r), \quad r \in Q,$$

где

$$m(p, r) = \int\limits_\Omega c_m p r \, dx, \quad a(q, v) = -\int\limits_\Omega k_m q \cdot v \, dx,$$

$$b(p, q) = \int\limits_\Omega \operatorname{div} qp \, dx, \quad q(p, r) = \int\limits_\Omega \sigma p r \, dx, \quad l(r) = \int\limits_\Omega f_m r \, dx.$$

Для аппроксимации одномерного уравнения для сети трещин будем использовать метод конечных объемов, что также приводит к консервативным аппроксимациям:

$$c_f \frac{\partial p_{f,i}}{\partial t} + \sum_j T_{ij}(p_{f,i} - p_{f,j}) + \sigma(p_{f,i} - p_{m,i}) = f_{f,i},$$

где $T_{ij} = \frac{k_f}{d_{ij}|K_i|}$, $|K_i|$ — площадь ячейки K_i, d_{ij} — расстояние между центрами ячеек K_i и K_j.

Таким образом, получим следующую связанную систему уравнений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B^T & M + Q & -Q \\ & -Q & T + Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ p_m \\ p_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_m \\ b_f \end{pmatrix}.$$

Здесь стандартная неявная разностная схема используется для аппроксимации по времени с шагом τ, индексы n, $n + 1$ обозначают предыдущий и текущий временное слои. Данная аппроксимация имеет первый порядок точности по времени и абсолютно устойчива.

3. Численные результаты

Представим результаты численного моделирования рассматриваемой задачи. Рассмотрим модельную задачу в области $\Omega = [0, 1]^2$. Расчет проводится

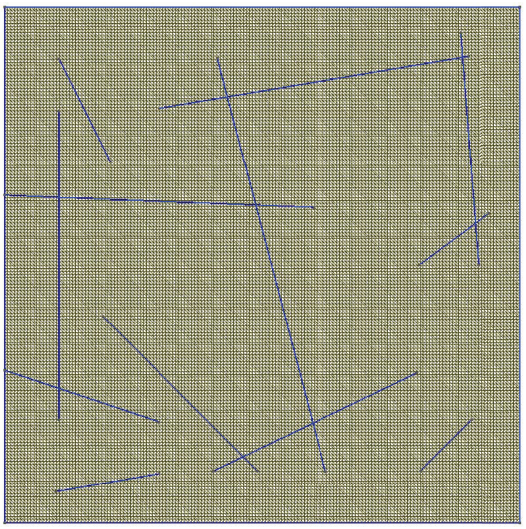

Рис. 2. Расчетная сетка, содержащая 51200 ячеек

при $0 \le t < T_{\max}$, где $T_{\max} = 0.003$ с использованием 50 временных слоев. Значения коэфициентов взяты следующие: $c_f = 0.1$, $k_f = 10^4$, $c_m = 0.1$, $k_m = 1$ и $f_f = f_m = 0$.

Для проведения численных расчетов строим треугольную структурированную сетку со следующими параметрами: 25921 вершин, 77120 граней и 51200 ячеек (рис. 2). На внешней границе области Γ_1 зададим однородное граничное Неймана $q_m \cdot n = q_f \cdot n = 0$. Для моделирования источника в точке A зададим граничное условие Дирихле $p_f = 1$.

Распределение давления и скоростей с течением времени представлено на рис. 3. Также мы отобразили распределение давления в трещинах на рис. 4. Результаты представлены на 10-м, 30-м и 50-м временных слоях.

Проведем численное сравнение относительных погршеностей в L^2-норме для различных сеток. Параметры сеток представлены в табл. 1. Сетки отображены на рис. 5. В качестве эталонного решения примем решение задачи на сетке, представленной на рис. 2 (51200 ячеек).

Таблица 1. Параметры вычислительных сеток

	Количество вершин	Количество граней	Количество ячеек
Сетка 1	6561	19360	12800
Сетка 2	1681	4880	3200

Относительные погрешности между эталонным решением для давления и скорости представлены на рис. 6. Результаты вычислений на сетках 1 и 2 в

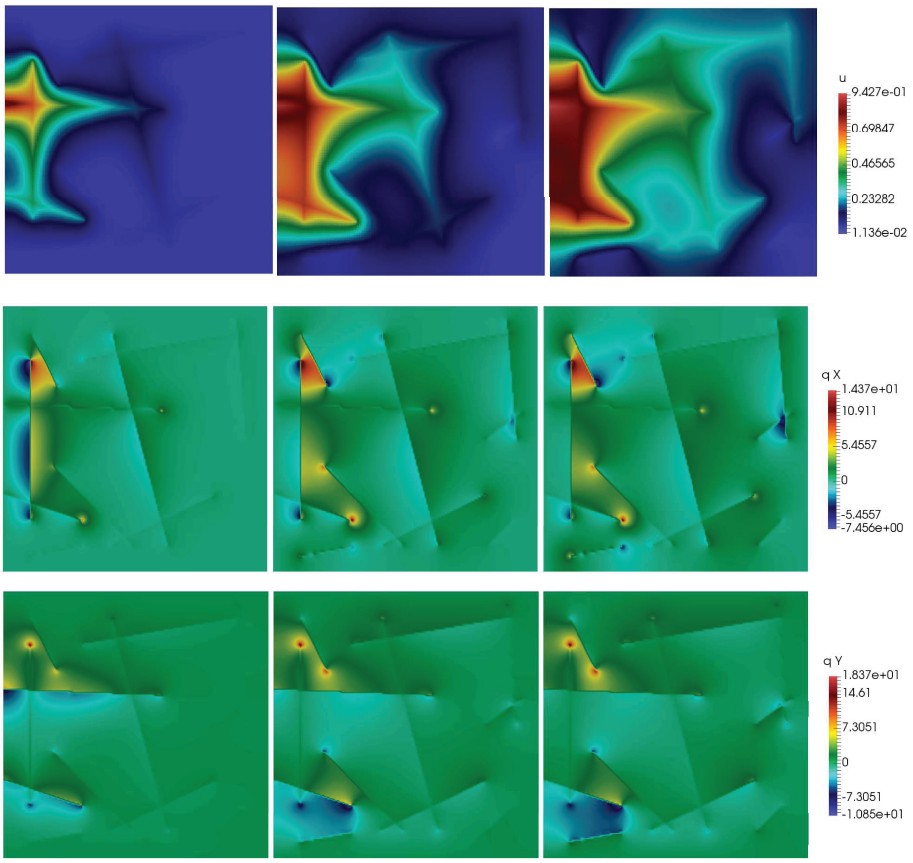

Рис. 3. Распределение давления и скоростей по оси X и Y

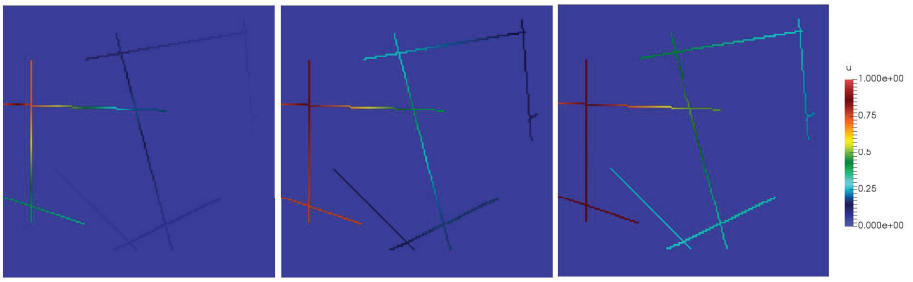

Рис. 4. Распределение давления в сети трещин

последний момент времени отражены на рис. 7. Для грубой сетки 1 имеем относительную погрешность около 16% давления и около 18% для скорости. Для сетки 2: 46% и 90% для давления и скорости соответственно. Представленные результаты иллюстрируют зависимоть решения от выбора сетки. Отметим, что использование достаточно мелких расчетных сеток все еще необходимо. Но

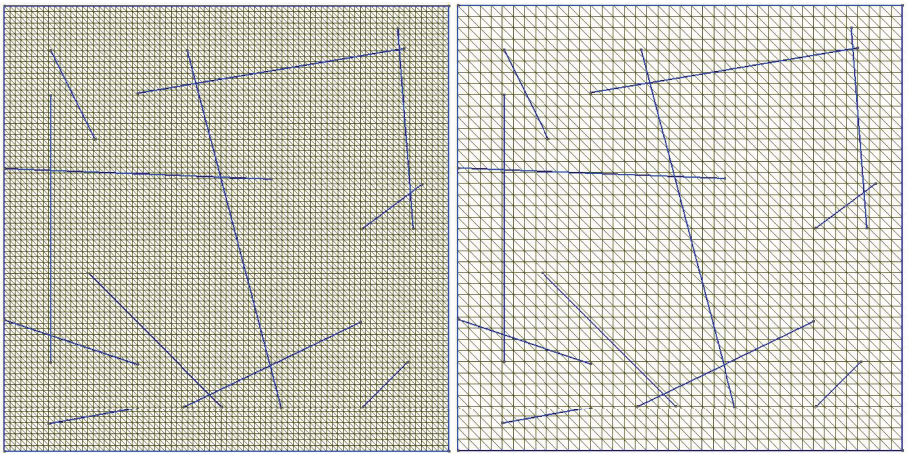

Рис. 5. Расчетные сетки. Слева: сетка 1 (3200 ячеек). Справа: сетка 2 (12800 ячеек)

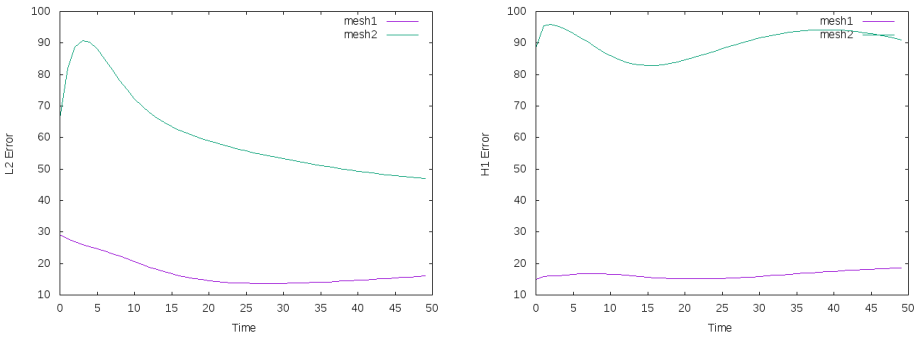

Рис. 6, Разница решений в процентах для сетки 1 и 2
для давления (слева) и скорости (справа)

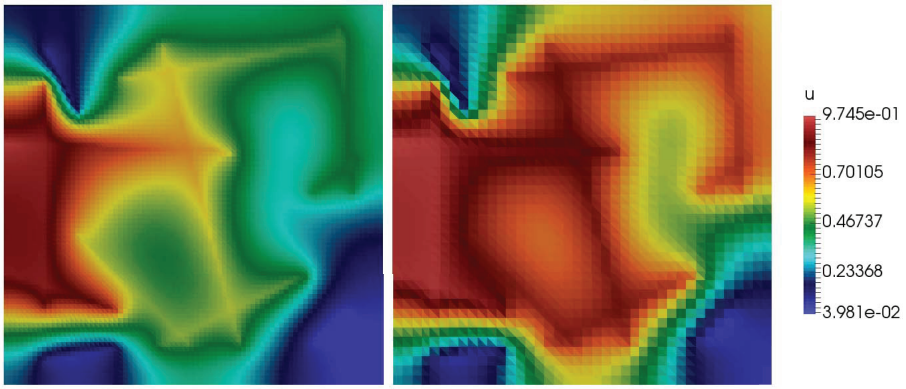

Рис. 7. Распределение давления. Слева: сетка 1 (3200 ячеек).
Справа: сетка 2 (12800 ячеек)

основной особенностью данного метода является возможность использования структурированных расчетных сеток, что значительно упрощает процесс численного моделирования задач в трещиноватых пористых средах.

4. Заключение

В данной статье проведено численное исследование математической модели течения жидкости в трещиноватых средах. Для решения данной задачи использована встроенная модель трещин. Данная модель показала себя хорошо в расчетах. Представлены результаты для двумерной области с трещинами. Также проведен анализ погрешности относительно размерности сетки. Данное исследование показало, что для получения хороших результатов требуется брать мелкие сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barenblatt G. I., Zheltov I. P., Kochina I. N.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // J. Appl. Math. Mech. 1960. V. 24, N 5. P. 1286–1303.
2. *Arbogast T., Douglas, Jr. J., Hornung U.* Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21, N 4. P. 823–836.
3. *Васильева М. В., Васильев В. И., Тимофеева Т. С.* Численное решение методом конечных элементов задач диффузионного и конвективного переноса в сильно гетерогенных пористых средах // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 158, № 2. С. 243–261.
4. *Akkutlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., Wang Y.* Multiscale model reduction for shale gas transport in poroelastic fractured media // J. Comput. Phys. 2018. V. 353. P. 356–376.
5. *Vabishchevich P., Vasil'eva M.* Iterative solution of the pressure problem for the multiphase filtration // Math. Model. Anal. 2012. V. 17, N 4. P. 532–548.
6. *Warren J. E., Root P. J.* The behavior of naturally fractured reservoirs. Soc. Petrol. Eng. J. 1963. V. 3, N 3. P. 245–255.
7. *Li L., Lee S. H.* Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media // SPE Reservoir Eval. Eng. 2008. V. 11, N 04. P. 750–758.
8. *Kazemi H., Merrill Jr L. S., Porterfield K. L., Zeman P. R.* Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // Soc. Petrol. Eng. J. 1976. V. 16, N 06. P. 317–326.
9. *Tene M., Al Kobaisi M. S., Hajibeygi H.* Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous fractured porous media // Pap. SPE Reservoir Simulation Symp. (Houston, TX, Feb. 23–25, 2015), Soc. Petroleum Eng., 2015.
10. *Li Q., Wang Y., Vasilyeva M.* Multiscale model reduction for fluid infiltration simulation through dual-continuum porous media with localized uncertainties // J. Comput. Appl. Math. (to appear). 2018.
11. *Akkutlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., Wang Y.* Multiscale model reduction for shale gas transport in a coupled discrete fracture and dual-continuum porous media // J. Natural Gas Sci. Eng. 2017. V. 48. P. 65–76.
12. *Chung E. T., Efendiev Y., Leung W.T., Wang Y., Vasilyeva V.* Non-local multi-continua upscaling for flows in heterogeneous fractured media // arXiv:1708.08379. 2017.
13. *Chung E. T., Efendiev Y., Leung W. T., Vasilyeva M.* Coupling of multiscale and multi-continuum approaches // Int. J. Geomath. 2017. V. 8, N 1. P. 9–41.
14. *Васильев В. И., Васильева М. В., Никифоров Д. Я.* Решение задач однофазной фильтрации методом конечных элементов на вычислительном кластере // Вестн. СВФУ. 2016. № 6. С. 31–40.
15. *Karimi-Fard M., Durlofsky L. J., Aziz K.* An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators // Soc. Petrol. Eng. J. 2004. V. 9, N 2. P. 227–236.

16. *Васильева М. В., Прокопьев Г. А.* Численное решение задачи двухфазной фильтрации с неоднородными коэффициентами методом конечных элементов // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 2. С. 46–62.

17. *Васильева М. В., Васильев В. И., Красников А. А., Никифоров Д. Я.* Численное моделирование течения однофазной жидкости в трещиноватых пористых средах // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 159, № 1. С. 100–115.

18. *Васильев В. И., Васильева М. В., Лаевский Ю. М., Тимофеева Т. С.* Численное моделирование фильтрации двухфазной жидкости в гетерогенных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 33–40.

Статья поступила 29 августа 2017 г.

Спиридонов Денис Алексеевич, Васильева Мария Васильевна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 42, Якутск 677000
vasilyevadotmdotv@gmail.com, d.stalnov@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2017. Том 24, № 3

UDC 519.63

SIMULATION OF FILTRATION PROBLEMS IN FRACTURED POROUS MEDIA WITH MIXED FINITE ELEMENT METHOD (EMBEDDED FRACTURE MODEL)

D. A. Spiridonov and M. V. Vasilyeva

Abstract: We present a mathematical model of mixed dimension for modeling filtration problems in fractured porous media (built-in model of cracks). The mathematical model is described by a system of parabolic equations: d-dimensional for a porous medium and $(d-1)$-dimensional for a system of cracks. The system of equations is connected by specifying a special flow function. This model allows the use of grids for a matrix of a porous medium not dependent on the grid for cracks. For the numerical solution, an approximation using the mixed finite element method is constructed. The results of the numerical solution of the model problem that show the operability of the proposed method for modeling the flow in fractured porous media are presented.

DOI 10.25587/SVFU.2018.3.10893

Keywords: finite element method, built-in model of cracks, fractured medium, single-phase liquid, liquid flow, law of conservation of mass, Darcy law.

REFERENCES

1. *Barenblatt G. I., Zheltov I. P., and Kochina I. N.*, "Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]," J. Appl. Math. Mech., **24**, No. 5, 1286–1303 (1960).

2. *Arbogast T., Douglas, Jr. J., and Hornung U.*, "Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory," SIAM J. Math. Anal., **21**, No. 4, 823–836 (1990).

3. *Vasilyeva M. V., Vasil'ev V. I., and Timofeeva T. S.*, "Numerical solution by the finite element method of diffusion and convective transport problems in strongly heterogeneous porous media," Uch. Zap. Kazansk. Univ., Ser. Fiz. Mat. Nauki, **158**, No. 2, 243–261 (2016).

4. *Akkutlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., and Wang Y.*, "Multiscale model reduction for shale gas transport in poroelastic fractured media," J. Comput. Phys., **353**, 356–376 (2017).

5. *Vabishchevich P. and Vasilyeva M.*, "Iterative solution of the pressure problem for the multi-phase filtration," Math. Model. Anal., **17**, No. 4, 532–548 (2012).

6. *Warren J. E. and Root P. J.*, "The behavior of naturally fractured reservoirs," Soc. Petrol. Eng. J., **3**, No. 3, 245–255 (1963).

7. *Li L. and Lee S. H.*, "Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media," SPE Reservoir Eval. Eng., **11**, No. 04, 750–758 (2008).

8. *Kazemi H., Merrill Jr. L. S., Porterfield K. L., and Zeman P. R.*, "Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs," Soc. Petrol. Eng. J., **16**, No. 06, 317–326 (1976).

The authors were supported by the Russian Science Foundation (Grant 17–71–20055) (Problem formulation and theory) and Government of Russian Federation Megagrant No. 14.Y26.31.0013 (Numerical algorithm).

© 2017 D. A. Spiridonov and M. V. Vasilyeva

9. *Tene M., Al Kobaisi M. S., and Hajibeygi H.*, "Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous fractured porous media," in: Pap. SPE Reservoir Simulation Symp. (Houston, TX, Feb. 23–25, 2015), Soc. Petroleum Eng. (2015).

10. *Li Q., Wang Y., and Vasilyeva M.*, "Multiscale model reduction for fluid infiltration simulation through dual-continuum porous media with localized uncertainties," J. Comput. Appl. Math. (to appear) (2018).

11. *Akkutlu I. Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., and Wang Y.*, "Multiscale model reduction for shale gas transport in a coupled discrete fracture and dual-continuum porous media," J. Natural Gas Sci. Eng., **48**, 65–76 (2017).

12. *Chung E. T., Efendiev Y., Leung W. T., Wang Y., and Vasilyeva M.*, "Non-local multi-continua upscaling for flows in heterogeneous fractured media," arXiv:1708.08379 (2017).

13. *Chung E. T., Efendiev Y., Leung W. T., and Vasilyeva M.*, "Coupling of multiscale and multi-continuum approaches," Int. J. Geomath., **8**, No. 1, 9–41 (2017).

14. *Vasil'ev V. I., Vasilyeva M. V., and Nikiforov D. Ya.*, "Solution of single-phase filtration problems by the finite element method on a computational cluster [in Russian]," Vestn. SVFU, No. 6, 31–40 (2016).

15. *Karimi-Fard M., Durlofsky L. J., and Aziz K.*, "An efficient discrete-fracture model applicable for general-purpose reservoir simulators," Soc. Petrol. Eng. J., **9**, No. 2, 227–236 (2004).

16. *Vasilyeva M. V. and Prokopiev G. A.*, "Numerical solution of the two-phase filtration problem with inhomogeneous coefficients by the finite element method [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **24**, No. 2, 46–62 (2017).

17. *Vasilyeva M. V., Vasil'ev V. I., Krasnikov A. A., and Nikiforov D. Ya.*, "Numerical simulation of the flow of single-phase fluid in fractured porous media [in Russian]," Uch. Zap. Kazansk. Univ., Ser. Fiz. Mat. Nauki, **159**, No. 1, 100–115 (2017).

18. *Vasil'ev V. I., Vasilyeva M. V., Laevskii Y. M., and Timofeeva T. S.*, "Numerical simulation of the filtration of a two-phase fluid in heterogeneous media," Sib. J. Ind. Math., **20**, No. 2, 33–40 (2017).

Submitted August 29, 2017

Denis A. Spiridonov and Maria V. Vasilyeva
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University
Institute of mathematics and Informatics
42 Kulakovsky Street, Yakutsk 677891, Russia
vasilyevadotmdotv@gmail.com, d.stalnov@mail.ru