Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2015. Том 22, № 2

УДК 517.958:539.3(6)+517.968.72+517.956.3

ЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ В БЕСКОНЕЧНОМ КАНАЛЕ

А. М. Блохин, Д. Л. Ткачев, А. В. Егитов

Аннотация. Изучается новая реологическая модель, описывающая течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. Доказана линейная неустойчивость (по Ляпунову) аналога течения Пуазейля для системы уравнений Навье — Стокса в плоском бесконечном канале.

Ключевые слова: несжимаемая вязкоупругая полимерная жидкость, реологическое соотношение, броуновская частица, гантель, решение типа Пуазейля, корректность смешанной проблемы, линейная неустойчивость.

Blokhin A. M., Tkachev D. L., Yegitov A. V.

Abstract: We study new rheological model descrybing the flow of incompressible viscoelastic polymer fluid. The theorem about linear instability (by Lyapunov) of Poiseuille flow analogue for Navier - Stocks equation system was proven in infinite plane chanel.

Keywords: incompressible viscoelastic polymer fluid, rheological correlation, Brownian particle, dumbbell, Poiseuille type soultions, correctness of mixed problem, linear instability.

1. Введение

В работе изучается новая реологическая модель, которая с приемлемой точностью учитывает нелинейные эффекты, возникающие при рассмотрении движения полимерной среды как суспензии невзаимодействующих упругих гантелей [1]. Каждая из гантелей представляет собой две броуновские частицы, связанные упругой силой и движущиеся в анизотропной жидкости, образованной растворителем и другими гантелями.

Эта модель, основное звено которой — новое реологическое соотношение, устанавливающее связь между кинематическими характеристиками потока и внутренними термодинамическими параметрами, является модификацией известной модели Покровского — Виноградова [2, 3]. По мнению авторов модели она продемонстрировала свою высокую эффективность при численном исследовании течений полимеров в областях со сложной геометрией [4, 5].

В работе рассмотрен вопрос о линейной устойчивости экспериментально наблюдаемого аналога течения Пуазейля для системы уравнений Навье — Стокса.

© **2015 Блохин А. М., Ткачев Д. Л., Егитов А. В.**

2. Постановка задачи. Вспомогательные сведения. Формулировка основных результатов

В [1] изложена новая математическая модель для описания течений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. В плоском случае нестационарные течения полимерных сред описываются с помощью следующей реологической модели (предварительно проведена процедура обезразмеривания):

$$u_x + v_y = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{du}{dt} + p_x = \frac{1}{Re}\{(a_{11})_x + (a_{12})_y\}, \tag{2.2}$$

$$\frac{dv}{dt} + p_y = \frac{1}{Re}\{(a_{12})_x + (a_{22})_y\}, \tag{2.3}$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1u_x - 2a_{12}u_y + K_Ia_{11} = -\beta\big(a_{11}^2 + a_{22}^2\big), \tag{2.4}$$

$$\frac{da_{12}}{dt} - A_1v_x - A_2u_y + \widetilde{K}_Ia_{12} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2A_2v_y - 2a_{12}v_x + K_Ia_{22} = -\beta\big(a_{12}^2 + a_{22}^2\big). \tag{2.6}$$

Здесь t — время, u, v — компоненты вектора скорости в декартовой системе координат (x, y), p — гидростатическое давление, a_{ij} — симметричный тензор анизотропии второго ранга, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla)$ — субстанциональная производная.

Остальные величины определяются следующим образом: $I = a_{11} + a_{22}$ — первый инвариант тензора анизотропии, $\bar{k} = k - \beta$, k, β — скалярные феноменологические параметры реологической модели $(0 < \beta < 1)$, η_0, τ_0 — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации,

$$A_1 = a_{11} + \frac{1}{W}, \quad A_2 = a_{22} + \frac{1}{W},$$

$$K_I = \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3}I, \quad \widetilde{K}_I = \frac{1}{W} + \frac{\hat{k}}{3}I = K_I + \beta I,$$

$$\hat{k} = k + 2\beta = \bar{k} + 3\beta,$$

$$Re = \frac{\rho u_H l}{\eta_0} \text{ — число Рейнольдса,}$$

ρ (= const) — плотность среды, u_H — характерная скорость, l — характерная длина, $W = \frac{\tau_0 u_H}{l}$ — число Вейсенберга (см. [5]).

Замечание 1. В формулировке реологической модели (2.1)–(2.6) участвуют числа Рейнольдса и Вейсенберга, а также феноменологические параметры k и β, определяющие течение физического эксперимента. Как следует из [6], наиболее адекватным экспериментам с полимерными жидкостями является соотношение $k = 1.2\beta$.

Линейная система уравнений, которая возникает в результате линеаризации системы (2.1)–(2.6) относительно выбранного стационарного решения (в дальнейшем его компоненты снабжены значком «ˆ») в случае, когда жидкость движется в бесконечном плоском канале, получена в [7].

В векторном виде она формулируется следующим образом. В области

$$G = \{(t,x,y) \mid t > 0,\ (x,y) \in \Pi = \{(x,y) \mid |x| < \infty,\ 0 < y < 1\}\}$$

требуется найти решение системы уравнений

$$U_t + \widehat{B}U_x + \widehat{C}U_y + \widehat{R}U + F = 0, \tag{2.7}$$

$$\Delta\Omega = \frac{1}{Re}\{\sigma_{xx} + 2(a_{12})_{xy}\} - 2\widehat{\omega}v_x. \tag{2.8}$$

Здесь $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ — неизвестная вектор-функция, $\sigma = a_{11} - a_{22}$, $\Omega = p - \frac{1}{Re}a_{22}$, матрицы $\widehat{B} = B(\widehat{U})$, $\widehat{C} = C(\widehat{U})$, $\widehat{R} = R(\widehat{U})$ выписываются с помощью компонент стационарного решения $\widehat{U}(y)$:

$$\widehat{U}(y) = \begin{pmatrix} \hat{u}(y) \\ 0 \\ \hat{a}_{11}(y) \\ \hat{a}_{12}(y) \\ \hat{a}_{22}(y) \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u} & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ -2\widehat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 & 0 \\ 0 & -\widehat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & \hat{u} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} \\ -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\widehat{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\widehat{A}_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{R} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}'_{11} & R_{33} & R_{34} & R_{35} \\ 0 & \hat{a}'_{12} & R_{43} & R_{44} & R_{45} \\ 0 & \hat{a}'_{22} & R_{53} & R_{54} & R_{55} \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где

$$\widehat{A}_1 = \hat{a}_{11} + \frac{1}{W}, \quad \widehat{A}_2 = \hat{a}_{22} + \frac{1}{W},$$

$$R_{33} = \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3}\hat{I} + \frac{k+5\beta}{3}\hat{a}_{11}, \quad R_{34} = -2(\widehat{\omega} - \beta\hat{a}_{12}), \quad \widehat{\omega} = \hat{u}_y, \quad R_{35} = \frac{\bar{k}}{3}\hat{a}_{11},$$

$$R_{43} = \frac{\hat{k}}{3}\hat{a}_{12}, \quad R_{44} = \frac{1}{W} + \frac{\hat{k}}{3}\hat{I}, \quad R_{45} = -\widehat{\omega} + \frac{\hat{k}}{3}\hat{a}_{12},$$

$$R_{53} = \frac{\bar{k}}{3}\hat{a}_{22}, \quad R_{54} = 2\beta\hat{a}_{12}, \quad R_{55} = \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3}\hat{I} + \frac{k+5\beta}{3}\hat{a}_{22},$$

$F = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Δ — символ оператора Лапласа.

Будем предполагать, что на границах области G выполнены краевые условия

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=1} = 0; \tag{2.10}$$

$$\Omega_y = \frac{1}{Re}(a_{12})_x \quad \text{при } y = 0, 1, \tag{2.11}$$

$$\|U(t,x,y)\| = (U,U)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad p(t,x,y) \to 0, \quad p_x(t,x,y) \to 0 \quad \text{при } |x| \to \infty \tag{2.12}$$

и заданы начальные данные

$$U|_{t=0} = U_0(x,y), \quad p|_{t=0} = p_0(x,y), \tag{2.13}$$

при этом начальные данные удовлетворяют уравнению (2.8) и условиям (2.12).

Замечание 2. В качестве основного решения можно рассматривать, например, решение, аналогичное решению Пуазейля для системы уравнений Навье — Стокса (см. [4, 8, 9]), которое симметрично относительно оси канала $y = \frac{1}{2}$ (при этом $\hat{p}(x,y) = \frac{1}{Re}\hat{a}_{22}(y) + \hat{p}_0 = \widehat{A}x$, $\hat{p}_0$ — значение давления на оси канала, $\widehat{A}$ — параметр, связанный с безразмерным перепадом давления на отрезке h).

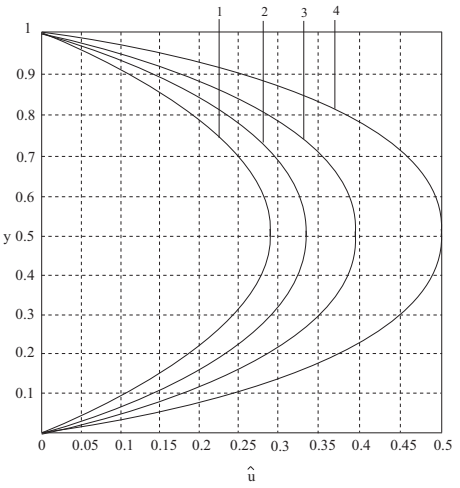

Рис. 1.

Замечание 3. В [7] доказано, что система (2.7) при известном давлении $p(t,x,y)$ t-гиперболическая [10], если $\widehat{A}_1 > 0$, $\widehat{A}_2 > 0$, $\widehat{A}_1\widehat{A}_2 - \hat{a}_{12}^2 > 0$ (см. представления (2.9) матриц $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$). Эти неравенства, в частности, справедливы, когда в качестве основного решения выбирается «решение Пуазейля» (при $k = \beta$ этот факт проверяется непосредственно, а при $k \neq \beta$ численным образом). Информация о корнях характеристического уравнения играет существенную роль при постановке смешанных задач для t-гиперболических систем.

В силу геометрии области П система уравнений (2.7) и уравнение Пуассона (2.8) допускают преобразование Фурье по переменной x. Поэтому будем рассматривать задачу (2.7), (2.8), (2.10)–(2.13), предполагая, что $u, v \in D'_{+,a}\big(P'_x(R), C^1_y[0,1]\big)$, давление p и компоненты тензора анизотропии a_{11}, a_{12}, a_{22} из класса $D_{+,a}\big(P'_x(R), C^2_y[0,1]\big)$, где $D'_{+,a}\big(P'_x(R), C^1_y[0,1]\big)$, $D_{+,a}\big(P'_x(R), C^2_y[0,1]\big)$ — пространства обобщенных функций $u(t,x,y)$, обращающихся в нуль при $t < 0$, $u(t,x,y)e^{-\sigma t} \in P_{+,t}$ при всех $\sigma > a$, $P'_+ = D'_+ \cap P$, D'_+ — множество обобщенных функций из $D'(R)$, равных нулю при $t < 0$, P — пространство функций медленного роста [11, 12], являющихся обобщенными функциями медленного роста по

переменным x и принадлежащих пространствам $C_y^1[0,1]$, $C_y^2[0,1]$ соответственно по переменной y. Индекс при обозначении пространства, например, $P_x(R)$, указывает на действующую переменную.

Таким образом, смешанная задача (2.7), (2.8), (2.10)–(2.13) понимается как краевая задача для обобщенных функций по переменным t, y и x, при этом начальные данные (2.13) выполняются в смысле предельного перехода при $t \to +0$ [11, 12].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Смешанная задача* (3.4)–(3.6) *имеет единственное решение из* $D'_{+,a}(C_y[0,1])$ *при любом значении вещественного параметра* ξ (ξ — *двойственная переменная к переменной* x).

Теорема 2. *При* $|\xi| \to \infty$ *решение смешанной задачи* (3.4)–(3.6) *выходит за пределы пространства* $D'_{+,a}(C_y[0,1])$ *для любого положительного числа* a. *Таким образом, задача поставлена некорректно в пространстве обобщенных функций* $D_{+,a}$.

3. Формулировка одномерной задачи с параметром. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим уравнение (2.8) вместе с граничными условиями (2.11), (2.12) и применим к этой проблеме преобразование Фурье по переменной x. Тогда получим следующую краевую задачу:

$$\widetilde{\Omega}_{yy} - \xi^2\widetilde{\Omega} = -\xi^2\frac{1}{Re}(\tilde{a}_{11} - \tilde{a}_{22}) - \frac{2i\xi}{Re}(\tilde{a}_{12})_y + 2i\xi\widehat{\omega}\tilde{v}, \quad 0 < y < 1, \tag{3.1}$$

$$\widetilde{\Omega}_y = -\frac{i\xi}{Re}\tilde{a}_{12} \quad \text{при } y = 0, 1 \tag{3.2}$$

(предполагается, что основное стационарное решение зависит только от переменной y, в дальнейшем символ «˜», использованный для обозначения Фурье-образов функций, будет опущен).

Функция Грина краевой задачи (3.1), (3.2) (ξ — вещественный параметр, $\xi \neq 0$) имеет вид

$$G(y,\eta) = \begin{cases} -\frac{1}{2\xi(e^{2\xi}-1)}(e^{\xi\eta} + e^{-\xi\eta}e^{2\xi})(e^{\xi y} + e^{-\xi y}), & 0 \le y \le \eta, \\ -\frac{1}{2\xi(e^{2\xi}-1)}(e^{\xi\eta} + e^{-\xi\eta})(e^{\xi y} + e^{-\xi y}e^{2\xi}), & \eta < y \le 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Применив преобразование Фурье, можно найти решение уравнения (3.1), подставить его в правую часть F и получить следующую систему:

$$U_t + \widetilde{C}U_y + (-i\xi\widetilde{B} + \widehat{R})U + F = 0, \quad 0 < y < 1, \tag{3.4}$$

где

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\widehat{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\widehat{A}_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 & \frac{1}{Re}a_{22} \\ 0 & \hat{u} & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ -2\widehat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 & 0 \\ 0 & -\widehat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & \hat{u} \end{pmatrix},$$

компоненты $-i\xi p$ и p_y вектора $F(t,\xi,y) = \begin{pmatrix} -i\xi p \\ p_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, находятся с использованием функции Грина (3.3).

Кроме того, компоненты скорости u, v должны удовлетворять краевым условиям

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=1} = 0, \tag{3.5}$$

а в целом для неизвестной вектор-функции $U(t,x,y)$ справедливо начальное условие

$$U|_{t=0} = U_0(\xi, y). \tag{3.6}$$

Упростим вид системы (3.4), приведя матрицу $\widetilde{C}$ к верхней жордановой форме [13]. Для этого заметим, что собственные числа матрицы $\widetilde{C}$ таковы:

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \quad \lambda_{4,5} = \pm\sqrt{\frac{\widehat{A}_2}{Re}} \tag{3.7}$$

(предполагается, что выполнено условие t-гиперболичности системы (2.7), а значит, как отмечено в замечании 3, в частности, $\widehat{A}_2 > 0$ на отрезке $[0,1]$).

Непосредственные расчеты показывают, что жорданова форма матрицы $\widetilde{C}$ имеет следующий вид:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\widehat{A}_2}{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{\widehat{A}_2}{Re}} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Сделав замену неизвестной вектор-функции

$$U = TZ, \tag{3.9}$$

систему (3.4) можно эквивалентным образом преобразовать, получая в качестве коэффициента при производной Z_y блочно-диагональную матрицу K (см. представление (3.8)):

$$Z_t + KZ_y - i\xi LZ + [T^{-1}\widetilde{C}T_y + M]Z + G = 0, \quad t > 0,\ 0 < y < 1, \tag{3.10}$$

где матрицы L, M зависят только от стационарного решения, а вектор $G =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{pmatrix}$ имеет, например, компоненту

$$g_3 = -2\widehat{A}_2 \left\{ \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh}\xi} \int\limits_0^y \operatorname{ch}(\xi\eta) \left(\frac{\xi}{Re} \left(Z_1 - Z_2 + 2\frac{\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2} Z_4 + 2\frac{\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2} Z_5 \right) + \frac{i\widehat{\omega}}{\widehat{A}_2} Z_3 \right) d\eta \right.$$
$$\left. + \frac{\xi \operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh}\xi} \int\limits_y^1 \operatorname{ch}(\xi(\eta-1)) \left(\frac{\xi}{Re} \left(Z_1 - Z_2 + 2\frac{\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2} Z_4 + 2\frac{\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2} Z_5 \right) + \frac{i\widehat{\omega}}{\widehat{A}_2} Z_3 \right) d\eta \right\}$$
$$+ \frac{2\widehat{A}_2}{Re} \frac{i\xi}{\operatorname{sh}\xi} [(Z_4(t,\xi,0) + Z_5(t,\xi,0)) \operatorname{sh}(\xi(y-1)) - (Z_4(t,\xi,1) + Z_5(t,\xi,1)) \operatorname{sh}(\xi y)]. \tag{3.11}$$

При этом граничные условия (3.5) преобразуются так:

$$\begin{cases} Z_3(t,\xi,0) = Z_3(t,\xi,1) = 0, \\ Z_4(t,\xi,0) = Z_5(t,\xi,0), \\ Z_4(t,\xi,1) = Z_5(t,\xi,1), \end{cases} \tag{3.12}$$

а начальное условие (3.6) для вектора $U(t,\xi,y)$ меняет свой вид:

$$Z|_{t=0} = T^{-1}U_0 = Z_0(\xi,y). \tag{3.13}$$

Исследуем смешанную задачу (3.10), (3.12), (3.13). Применяя технику преобразований Лапласа и используя вид матрицы K, компоненты Z_1 и Z_2 можно выразить через Z_3, Z_4, Z_5.

Для функции $Z_3(t,\xi,y)$ в силу (3.10) можно выписать интегральное уравнение

$$Z_3(t,\xi,y) = e^{i\xi\hat{u}(t)} Z_{30}(\xi,y) + \int\limits_0^t e^{i\xi\hat{u}(t-\tau)} \left[\frac{2\widehat{A}_2}{Re} i\xi Z_4 + \frac{2\widehat{A}_2}{Re} i\xi Z_5 - g_3 \right] d\tau, \tag{3.14}$$

при этом из (3.11) следует, что функция $g_3(t,\xi,y)$ зависит от компонент $Z_3(t,\xi,y)$, $Z_4(t,\xi,y)$ и $Z_5(t,\xi,y)$ (учитываются возможность интегрирования по частям в интеграле от функции $\frac{\partial Z_3}{\partial y}$ по переменной η и первые два граничных соотношения в (3.12)).

Применяя метод последовательных приближений при известных граничных значениях $Z_4(t,\xi,0)$ и $Z_5(t,\xi,1)$, из уравнения (3.15) можно однозначно найти $Z_3(t,\xi,y)$, выражая эту функцию через компоненты $Z_4(t,\xi,y)$, $Z_5(t,\xi,y)$.

Таким образом, решение задачи (3.10), (3.12), (3.13) сводится к поиску двух компонент $Z_4(t,\xi,y)$, $Z_5(t,\xi,y)$, при этом начальные данные $Z_{40}(t,\xi,y)$, $Z_{50}(t,\xi,y)$ известны, а граничные значения $Z_4(t,\xi,0)$ и $Z_5(t,\xi,1)$ требуется определить.

Допустим, что упомянутые граничные значения также известны. Тогда, принимая во внимание структуру матрицы K (см. представление (3.8)), интегрируя вдоль характеристик два последних уравнения системы (3.10) и вновь

применяя метод последовательных приближений, однозначно определим неизвестные функции $Z_4(t,\xi,y)$, $Z_5(t,\xi,y)$, двигаясь «по слоям» в полуполосе $t>0$, $0\le y\le 1$ [10].

Следовательно, для нахождения функций $Z_4(t,\xi,y)$, $Z_5(t,\xi,y)$ достаточно знать граничные условия $Z_4(t,\xi,0)$ и $Z_5(t,\xi,1)$. Предположим, что выполнен аналог условий согласования:

$$Z_{30}(\xi,0)=Z_{30}(\xi,1)=0 \tag{3.15}$$

(см. первые два соотношения в (3.12)).

Обратимся вновь к интегральному уравнению (3.14) и положим сначала $y=0$, а затем $y=1$. Учитывая равенства (3.15), получим два соотношения:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t e^{i\xi\hat{u}(0)(t-\tau)}\frac{8\widehat{A}_2}{Re}i\xi Z_4(\tau,\xi,0)\,d\tau=0,\\ \int\limits_0^t e^{i\xi\hat{u}(1)(t-\tau)}\frac{8\widehat{A}_2}{Re}i\xi Z_4(\tau,\xi,1)\,d\tau=0,\end{gathered} \tag{3.16}$$

из которых, очевидно, следует, что

$$Z_4(t,\xi,0)=Z_5(t,\xi,0)=0,\quad Z_4(t,\xi,1)=Z_5(t,\xi,1)=0.$$

Таким образом, все компоненты неизвестной вектор-функции $U(t,\xi,y)$ найдены, при этом ξ — произвольный вещественный параметр. Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Выполнение соотношений (3.15) не является необходимым условием однозначной разрешимости задачи (3.4)–(3.6). Они приняты для простоты изложения. В общем случае переход к граничным значениям в уравнении (3.14) приводит к системе интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которая однозначно разрешима [9].

4. Доказательство теоремы 2

Выпишем представление для Z_3:

$$\begin{aligned}&Z_{3t}-i\xi\hat{u}Z_3-i\xi\frac{2\widehat{A}_2}{Re}Z_4-i\xi\frac{2\widehat{A}_2}{Re}Z_5-2\widehat{A}_2\left(\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi(y-1))}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_0^y\left\{\mathrm{ch}(\xi\eta)\frac{\xi}{Re}\right.\right.\\ &\times\left[-(P_1+L_1)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)}+(P_2+L_2)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\right]-\frac{\xi}{Re}\left(\mathrm{ch}(\xi\eta)\right.\\ &\times\left\{\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_1}{\sqrt{D}}\right]\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)}-\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_2}{\sqrt{D}}\right]\right.\\ &\left.\left.\left.\left.\times\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\right\}\right)_\eta\right\}\right)Z_3(\tau,\xi,\eta)\,d\tau d\eta-\frac{\xi^2}{Re}\left\{\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_1}{\sqrt{D}}\right]\right.\end{aligned}$$

$$\times\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)} - \left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_2}{\sqrt{D}}\right]\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\Bigg\}Z_3(\tau,\xi,y)\,d\tau$$

$$+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi(y-1))}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_0^y \mathrm{ch}(\xi\eta)\frac{i\omega}{\widehat{A}_2}Z_3\,d\eta+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi(y-1))}{\mathrm{sh}\,\xi}\left[\int\limits_0^y\left\{\mathrm{ch}(\xi\eta)\frac{\xi}{Re}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[(M_1+G_1)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)}-(M_2+G_2)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\right]\right\}Z_4(\tau,\xi,\eta)\,d\tau d\eta\right.$$

$$+\int\limits_0^y\left\{\mathrm{ch}(\xi\eta)\frac{\xi}{Re}\left[(K_1+E_1)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)}-(K_2+E_2)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\right]\right\}$$

$$\left.\times Z_5(\tau,\xi,\eta)\,d\tau d\eta\right]-\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi(y-1))}{\mathrm{sh}\,\xi}\left\{\int\limits_0^y\left\{\mathrm{ch}(\xi\eta)\frac{\xi}{Re}\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_1}{\sqrt{D}}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\times e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)t}-\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_2}{\sqrt{D}}\right]e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)t}\right\}Z_{20}(\xi,\eta)\,d\eta\right\}+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi(y-1))}{\mathrm{sh}\,\xi}$$

$$\times\int\limits_0^y\left\{\mathrm{ch}(\xi\eta)\frac{\xi}{Re}\left\{\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)R_{53}\frac{1}{K_1\sqrt{D}}+\frac{1}{\sqrt{D}}\right]e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)t}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)R_{53}\frac{1}{K_2\sqrt{D}}+\frac{1}{\sqrt{D}}\right]e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)t}\right\}Z_{10}(\xi,\eta)\right\}d\eta+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi(y-1))}{\mathrm{sh}\,\xi}$$

$$\times\int\limits_0^y\mathrm{ch}(\xi\eta)\left(2\frac{\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}Z_4+2\frac{\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}Z_5\right)d\eta+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi y)}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_y^1\left\{\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))\frac{\xi}{Re}\left[-(P_1+L_1)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)}+(P_2+L_2)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\right]-\frac{\xi}{Re}\Bigg(\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))\right.$$

$$\times\left\{\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_1}{\sqrt{D}}\right]\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)}-\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat{a}_{12}}{\widehat{A}_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_2}{\sqrt{D}}\right]\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\right\}\Bigg)_\eta\right\}Z_3(\tau,\xi,\eta)\,d\tau d\eta+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi y)}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_y^1\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))\frac{i\widehat{\omega}}{\widehat{A}_2}Z_3(t,\xi,\eta)\,d\eta$$

$$+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi y)}{\mathrm{sh}\,\xi}\left[\int\limits_0^y\left\{\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))\frac{\xi}{Re}\left[(M_1+G_1)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)}-(M_2+G_2)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\right]\right\}Z_4(\tau,\xi,\eta)\,d\tau d\eta+\int\limits_y^1\left\{\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))\frac{\xi}{Re}\left[(K_1+E_1)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_1)(t-\tau)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-(K_2+E_2)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat{u}+\lambda_2)(t-\tau)}\right]\right\}Z_5(\tau,\xi,\eta)\,d\tau d\eta\right]-\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi y)}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_y^1\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))$$

$$\times\left\{\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat a_{12}}{\widehat A_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_1}{\sqrt{D}}\right]e^{(i\xi\hat u+\lambda_1)t}-\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat a_{12}}{\widehat A_2}R_{45}\right)\frac{1}{\sqrt{D}}+\frac{K_2}{\sqrt{D}}\right]\right.$$
$$\left.\times\, e^{(i\xi\hat u+\lambda_2)t}\right\}Z_{20}(\xi,\eta)\,d\eta+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi y)}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_y^1\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))\frac{\xi}{Re}\left\{\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat a_{12}}{\widehat A_2}R_{45}\right)\right.\right.$$
$$\left.\times R_{53}\frac{1}{K_1\sqrt{D}}+\frac{1}{\sqrt{D}}\right]e^{(i\xi\hat u+\lambda_1)t}-\left[\left(R_{35}-\frac{2\hat a_{12}}{\widehat A_2}R_{45}\right)R_{53}\frac{1}{K_2\sqrt{D}}+\frac{1}{\sqrt{D}}\right]e^{(i\xi\hat u+\lambda_2)t}\left.\right\}$$
$$\times\, Z_{10}(\xi,\eta)\,d\eta+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi y)}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_0^y\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))\left(2\frac{\hat a_{12}}{\widehat A_2}Z_4+2\frac{\hat a_{12}}{\widehat A_2}Z_5\right)d\eta. \quad (4.1)$$

Здесь P_1, P_2, M_1, M_2, G_1, G_2, E_1, E_2, K_1, K_2, L_1, L_2 — коэффициенты, зависящие только от стационарного решения. Рассмотрим часть интегралов, связанных с компонентой $Z_3(t,\xi,y)$. А именно,

$$I_1=\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi(y-1))}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_0^y\left\{\mathrm{ch}(\xi\eta)\frac{\xi}{Re}\left[-(P_1+L_1)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat u+\lambda_1)(t-\tau)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+(P_2+L_2)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat u+\lambda_1)(t-\tau)}\right]\right\}Z_3(\tau,\xi,\eta)\,d\tau d\eta+\frac{\xi\,\mathrm{sh}(\xi y)}{\mathrm{sh}\,\xi}\int\limits_y^1\left\{\mathrm{ch}(\xi(\eta-1))\frac{\xi}{Re}\right.$$
$$\left.\times\left[-(P_1+L_1)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat u+\lambda_1)(t-\tau)}+(P_2+L_2)\int\limits_0^t e^{(i\xi\hat u+\lambda_1)(t-\tau)}\right]\right\}Z_3(\tau,\xi,\eta)\,d\tau d\eta. \quad (4.2)$$

Используем формулу Тейлора, разлагая подынтегральные функции в точке y. Тогда получим

$$I_1=\int\limits_0^t\left\{\Gamma'(y,t-\tau)\frac{\mathrm{sh}\,\xi-\mathrm{sh}(\xi y)-\mathrm{sh}(\xi(1-y))}{\mathrm{sh}\,\xi}\right.$$
$$+\Gamma'''(y,t-\tau)\frac{\mathrm{sh}\,\xi-\mathrm{sh}(\xi y)-\mathrm{sh}(\xi(1-y))}{\mathrm{sh}\,\xi}\frac{1}{\xi^2}$$
$$\left.+\Gamma^V(y,t-\tau)\frac{\mathrm{sh}\,\xi-\mathrm{sh}(\xi y)-\mathrm{sh}(\xi(1-y))}{\mathrm{sh}\,\xi}\frac{1}{\xi^4}+\dots\right\}Z_3(\tau,\xi,y)\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\left\{\Gamma(y,t-\tau)\frac{\mathrm{sh}\,\xi-\mathrm{sh}(\xi y)-\mathrm{sh}(\xi(1-y))}{\mathrm{sh}\,\xi}\right.$$
$$+\Gamma''(y,t-\tau)\frac{\mathrm{sh}\,\xi-\mathrm{sh}(\xi y)-\mathrm{sh}(\xi(1-y))}{\mathrm{sh}\,\xi}\frac{1}{\xi^2}$$
$$\left.+\Gamma^{IV}(y,t-\tau)\frac{\mathrm{sh}\,\xi-\mathrm{sh}(\xi y)-\mathrm{sh}(\xi(1-y))}{\mathrm{sh}\,\xi}\frac{1}{\xi^4}+\dots\right\}Z_{3y}(\tau,\xi,y)\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\left\{\Gamma'(y,t-\tau)\frac{\mathrm{sh}\,\xi-\mathrm{sh}(\xi y)-\mathrm{sh}(\xi(1-y))}{\mathrm{sh}\,\xi}\frac{1}{\xi^2}+\dots\right\}Z_{3yy}(\tau,\xi,y)\,d\tau+\dots, \quad (4.3)$$

где

$$\Gamma(y,t-\tau)=\frac{1}{Re}[-(P_1+L_1)e^{(i\xi\hat u+\lambda_1)(t-\tau)}+(P_2+L_2)e^{(i\xi\hat u+\lambda_2)(t-\tau)}], \quad (4.4)$$

а производные от этой функции берутся по переменной y.

Заметим, что в (4.4) опущены слагаемые, которые экспоненциально убывают при $|\xi| \to \infty$, т. е. слагаемые вида

$$\frac{\operatorname{sh}(\xi(y-1))}{\operatorname{sh}\xi}y + \frac{\operatorname{sh}(\xi y)}{\operatorname{sh}\xi}(1-y), \quad 0 < y < 1.$$

Действуя аналогичным образом с остальными интегралами, получим следующее спектральное уравнение:

$$\begin{aligned}
&s - i\xi\hat{u} - 2\widehat{A}_2\Bigg\{\Bigg\{\Bigg[-(P_1+L_1)'\frac{1}{s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1} + (P_2+L_2)'\frac{1}{s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2} \\
&-(P_1+L_1)\frac{i\xi\hat{u}'(y)+\lambda_1'}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1)^2} + (P_2+L_2)\frac{i\xi\hat{u}'(y)+\lambda_2'}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2)^2}\Bigg] + \frac{1}{\xi^2}\Bigg[-\frac{(P_1+L_1)'''}{s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1} \\
&+\frac{(P_2+L_2)'''}{s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2} - 3(P_1+L_1)''\frac{i\xi\hat{u}'(y)+\lambda_1'}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1)^2} + 3(P_2+L_2)''\frac{i\xi\hat{u}'(y)+\lambda_2'}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2)^2} \\
&-3(P_1+L_1)'\frac{i\xi\hat{u}''(y)+\lambda_1''}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1)^2} + 3(P_2+L_2)'\frac{i\xi\hat{u}''(y)+\lambda_2''}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2)^2} \\
&-\frac{(P_1+L_1)(i\xi\hat{u}'''+\lambda_1''')}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1)^2} + \frac{(P_2+L_2)(i\xi\hat{u}'''+\lambda_2''')}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2)^2} - 6\frac{(P_1+L_1)(i\xi\hat{u}'+\lambda_1')(i\xi\hat{u}''+\lambda_1'')}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1)^3} \\
&+6\frac{(P_2+L_2)(i\xi\hat{u}'+\lambda_2')(i\xi\hat{u}''+\lambda_2'')}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2)^3} - 6\frac{(P_1+L_1)'(i\xi\hat{u}'+\lambda_1')^2}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1)^3} \\
&+6\frac{(P_2+L_2)'(i\xi\hat{u}'+\lambda_2')^2}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2)^3} - 6\frac{(P_1+L_1)(i\xi\hat{u}'+\lambda_1')^3}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_1)^4} + 6\frac{(P_2+L_2)(i\xi\hat{u}'+\lambda_2')^3}{(s-i\xi\hat{u}(y)-\lambda_2)^4}\Bigg] \\
&+\frac{1}{\xi^4}[\widehat{\Gamma}^V(y,s)+\dots] + i\left[\left(\frac{\widehat{\omega}}{\widehat{A}_2}\right)'\frac{1}{\xi} + \left(\frac{\widehat{\omega}}{\widehat{A}_2}\right)'''\frac{1}{\xi^3}+\dots\right]\Bigg\}\Bigg\} = 0. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Разлагая дроби $1/(s-i\xi\hat{u}-\lambda_1)^k$, $1/(s-i\xi\hat{u}-\lambda_2)^k$, $k=1,2,\dots$, при $|\xi|\to\infty$ по степеням дроби $1/(s-i\xi\hat{u})$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, можно получить формальное асимптотическое разложение для корней уравнений (4.5).

Метод неопределенных коэффициентов позволяет получить разложение корней уравнения (3.14) по степеням $\xi^{\frac{1}{3}}$ при $|\xi|\to\infty$:

$$s = i\xi\hat{u} + \sqrt[3]{Q(y)}\xi^{\frac{2}{3}} + R(y)\xi^{\frac{1}{3}} + \dots. \quad (4.6)$$

Замечание 5. Основной момент, связанный с разложением (4.6), в следующем: при $|\xi|\to\infty$ для хотя бы одного из корней выполнено свойство $\operatorname{Re} s \to +\infty$.

Теперь, дифференцируя выражения для функции Z_3 по переменной y, получаем интегральное уравнение для нахождения функции $Z_{3y}(t,\xi,y)$ через производные более высокого порядка $Z_{3yy}, Z_{3yyy}, \dots$, через компоненты $Z_4(t,\xi,y)$, $Z_5(t,\xi,y)$ и их первые производные, через начальные данные $Z_{10}(\xi,y)$, $Z_{20}(\xi,y)$, $Z_{30}(\xi,y)$. Действуя по аналогии, для Z_{3y} также можно получить спектральное уравнение. Формальные асимптотические разложения корней этого уравнения находятся при помощи известной диаграммы Ньютона [15–17].

Таким образом, производная $Z_{3y}(t,\xi,y)$ будет определена через производные более высокого порядка: $Z_{3yy}(t,\xi,y), Z_{3yyy}(t,\xi,y),\ldots$ и через упомянутые выше данные.

Рассуждая по индукции и подставляя найденные значения производных компоненты $Z_3(t,\xi,y)$ в правую часть представления (4.1), получаем решение задачи Коши для интегродифференциального уравнения (4.2) в виде формального асимптотического ряда при $|\xi| \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алтухов Ю. А., Головичева И. Э., Пышнограй Г. В.* Молекулярный подход в динамике линейных полимеров: теория и численный эксперимент // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 1. С. 3–13.
2. *Пышнограй Г. В., Покровский В. Н., Яновский Ю. Г., Образцов И. Ф., Карнет Ю. Н.* Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // Докл. АН. 1994. Т. 355, № 9. С. 612–615.
3. *Volkov V. S., Vinogradov G. V.* Molecular theories of nonlinear viscoelasticity of polymers // Rheol. Acta. 1984. V. 23, N 3. P. 231–237.
4. *Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Макарова М. А., Пышнограй Г. В.* Обобщение закона Пуазейля для плоскопараллельного течения вязкоупругих сред // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 4. С. 581–590.
5. *Алтухов Ю. А., Пышнограй Г. В.* Входные течения в канале 4:1 текучих линейных полимеров // Механика композиционных материалов и конструкций. 2001. Т. 7, № 1. С. 16–23.
6. *Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В.* Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012.
7. *Блохин А. М., Бамбаева Н. В.* Нахождение решений типа Пуазейля и Куэтта для уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 2. С. 3–14.
8. *Wassner E., Schmidt M., Münstedt H.* Entry flow of a low-density-polyethylene melt into a slit die: An experimental study by Laser Doppler Velocimetry // J. Rheol. 1999. V. 43, N 6. P. 1339–1353.
9. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
10. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
11. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
12. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
14. *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
15. *Ньютон И.* Математические работы. М.; Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1937.
16. *Puiseux V. J.* Recherches sur les fonctions algébriques // J. Math. Pures Appl. 1850. V. 15. P. 365–480.
17. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 30 августа 2015 г.

Блохин Александр Михайлович, Ткачев Дмитрий Леонидович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
уд. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
blokhin@math.nsc.ru, tkachev@math.nsc.ru,

Егитов Алексей Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
eav15@mail.ru