*Математические заметки СВФУ*
*Январь—март, 2015. Том 22, № 1*

*УДК 519.67+624.04:531/534*

# РАВНОМЕРНОЕ РАЗБИЕНИЕ СФЕРЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБЛУЧЕННОСТИ

**М. Ф. Семенов, В. Ю. Шадрин**

**Аннотация.** Предложен метод равномерного разбиения сферы, которое можно применить для численного интегрирования поверхностных интегралов по сфере. Приводятся результаты численных экспериментов вычисления коэффициентов облученности.
**Ключевые слова:** сфера, разбиение, узлы кубатурной формулы, коэффициент облученности.

**M. F. Semenov and V. Yu. Shadrin. Uniform Partition of a Sphere and Its Application to Computing Irradiance Coefficients.**

**Abstract:** We propose a method of uniform partition of a sphere which can be applied for the numerical integration of surface inegrals over the sphere. The results are given of numerical experiments for calculating irradiance coefficients.
**Keywords:** sphere, partition, nodes of a cubature formula, irradiance coefficient.

Пусть дана сфера с центром в начале координат $O(0,0,0)$ и с радиусом $R$. Выберем натуральное число $n$ и положим $\alpha = \alpha_n = \frac{\pi}{2n+1}$. Вокруг «северного полюса» с координатами $(0,0,R)$ описываем сегмент с центральным углом $\alpha_n$, далее сверху вниз верхнюю полусферу разбиваем на $n$ поясов с одинаковыми центральными углами $\alpha_n$. Площадь сегмента при «полюсе» равна

$$S = 2\pi Rh, \quad \text{где } h = R - R\cos\frac{\alpha_n}{2}.$$

Если пронумеровать пояса сверху вниз $i = 1, 2, \ldots, n$, то площадь $i$-го пояса равна

$$S_i = 2\pi R h_i,$$

где $h_i = R\sin(n-i+1)\alpha_n - R\sin(n-i)\alpha_n = 2R\sin\frac{\alpha_n}{2}\sin i\alpha_n$.

Рассмотрим отношение площади $i$-го пояса $S_i$ к площади «полюса» $S$:

$$\mu_{ni} = \frac{S_i}{S} = \frac{2\sin i\alpha_n}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{4}}.$$

Целая часть этого числа $[\mu_{ni}]$ означает количество равновеликих секторов с площадями, равными площади «полюса», из которых состоит $i$-й пояс.

Положим $\varphi_i = \frac{\pi}{2} - \alpha_n i$, $\theta_{ij} = \frac{\pi(2j-1)}{\mu_{ni}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, [\mu_{ni}]$. Определим упорядоченное множество равномерно распределенных точек на верхней

© 2015 Семенов М. Ф., Шадрин В. Ю.

полусфере $U_N = \{(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})\}$. Координаты точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_{ij} = R\cos\varphi_i\cos\theta_{ij}, \quad y_{ij} = R\cos\varphi_i\sin\theta_{ij}, \quad z_{ij} = R\sin\varphi_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, [\mu_{ni}].$$

Аналогично определим упорядоченное множество равномерно распределенных точек на нижней полусфере $U_S = \{(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})\}$. Координаты точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_{ij} = R\cos\varphi_i\cos\theta_{ij}, \quad y_{ij} = R\cos\varphi_i\sin\theta_{ij}, \quad z_{ij} = -R\sin\varphi_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, [\mu_{ni}].$$

К этим множествам добавим «северный полюс» $P_N$ с координатами

$$x_{2n+1,1} = 0, \quad y_{2n+1,1} = 0, \quad z_{2n+1,1} = R$$

и «южный полюс» $P_S$ с координатами

$$x_{2n+2,1} = 0, \quad y_{2n+2,1} = 0, \quad z_{2n+2,1} = -R.$$

Таким образом получили упорядоченное множество точек (узлов), которые равномерно распределены по всей сфере:

$$U = U_N \cup U_S \cup P_N \cup P_S.$$

**Теорема 1.** *Справедливы следующие утверждения:*
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{n1} = 8$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu_{nn}}{n} = \frac{16}{\pi}$;
(3) $\frac{16}{\pi} \le \frac{\mu_{ni}}{i} \le 8,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Доказательство. (1) Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{n1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n1}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin\alpha_n}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin\frac{\pi}{2n+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4(2n+1)}} = 8.$$

Это означает, что в первом поясе возле «северного полюса» при $n \to \infty$ количество секторов с площадью, равной площади полюса, стремится к 8. Заметим, что, как показано в [1], в плоском случае при аналогичном разбиении круга в первом кольце расположено ровно 8 секторов с площадью, равной площади центрального круга.

(2) Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{nn}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2\sin n\alpha_n}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2\sin n\frac{\pi}{2n+1}}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2n+1}\right)} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{4(2n+1)}{n\pi} = \frac{16}{\pi}.$$

(3) Очевидно, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место оценка

$$\frac{16}{\pi} \le \frac{\mu_{ni}}{i} \le 8.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим применение предложенного разбиения для приближенного вычисления коэффициентов облученности при лучистом теплообмене между поверхностями, одной из которых является сфера.

Множество узлов $U$ можно взять в качестве узлов для кубатурной формулы, аналогичной формуле, предложенной в [1, 2].

Коэффициент облученности (угловой коэффициент) $F_{1-2}$ с поверхности 1 с площадью $A_1$ на поверхность 2 с площадью $A_2$ определяется следующим образом [3]:

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \iint\limits_{A_1 A_2} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2 \, dA_1 dA_2}{\pi R^2}, \tag{1}$$

где $R$ — расстояние от элементарной площадки $dA_1$ на $A_1$ до элементарной площадки $dA_2$ на $A_2$, $\beta_1, \beta_2$ — углы между $R$ и нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ к $dA_1$ и к $dA_2$ соответственно, направленными в сторону другой поверхности. Коэффициент облученности показывает долю лучистого потока, попадающую на поверхность 2, от всего потока, излучаемого поверхностью 1.

Приближенное вычисление двукратного поверхностного интеграла второго рода (1) проведем с помощью кубатурной формулы, которая является многомерным аналогом формулы средних прямоугольников, основанным на определении данного интеграла. Идея состоит в разбиении поверхностей, участвующих в лучистом теплообмене, на элементарные площадки и в выборе в качестве узлов кубатурной формулы «средних» точек этих площадок. Тогда кубатурная формула примет вид

$$F_{1-2} = \frac{1}{\pi A_1} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{j_2=1}^{m_2} f(M_{i_1 j_1}, M_{i_2 j_2}) \Delta s_{i_1 j_1} \Delta s_{i_2 j_2}, \tag{2}$$

где $n_1 \times m_1$ — количество элементарных площадок поверхности 1, $n_2 \times m_2$ — количество элементарных площадок поверхности 2, $M_{i_1 j_1} \in \Delta s_{i_1 j_1}$, $M_{i_2 j_2} \in \Delta s_{i_2 j_2}$ — узлы кубатурной формулы,

$$f(M_{i_1 j_1}, M_{i_2 j_2}) = \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{R_{12}^2},$$

$$\vec{R}_{12} = \overrightarrow{M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2}}, \quad \vec{R}_{21} = \overrightarrow{M_{i_2 j_2} M_{i_1 j_1}},$$

$$\beta_1 = \angle(\vec{N}_1, \vec{R}_{12}), \quad \beta_2 = \angle(\vec{N}_2, \vec{R}_{21}),$$

$\Delta s_{i_1 j_1}$, $\Delta s_{i_2 j_2}$ — площади элементарных площадок. Косинусы вычисляются через скалярное произведение:

$$\cos\beta_1 = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{R}_{12}}{|\vec{N}_1||\vec{R}_{12}|}, \quad \cos\beta_2 = \frac{\vec{N}_2 \cdot \vec{R}_{21}}{|\vec{N}_2||\vec{R}_{21}|}.$$

В четырехкратном суммировании (2) учитываются только слагаемые с узлами, участвующими в лучистом теплообмене, т. е. те слагаемые, для которых $\cos\beta_1 > 0$, $\cos\beta_2 > 0$.

В табл. 1 приведены результаты вычислений для вложенных концентрических сфер с общим центром в начале координат и с радиусами $R_1 = 2$ и $R_2 = 1$.

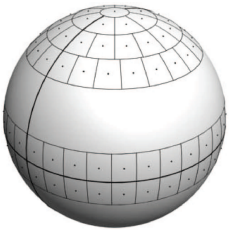

Рис. 1. Равномерное разбиение.

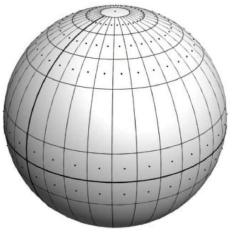

Рис. 2. Географическое разбиение.

Очевидно, что коэффициент облученности наружной сферы со стороны внутренней сферы равен 1. В первом столбце указаны значения площади элементарных площадок $\Delta S$. Во втором столбце РР означает «равномерное разбиение», ГР — «географическое разбиение». При равномерном разбиении (рис. 1) все площадки имеют почти одинаковую указанную площадь, при географическом разбиении (рис. 2) указанную площадь будут иметь площадки, расположенные выше и ниже «экватора», остальные площадки, очевидно, будут иметь меньшую площадь. Тем не менее, измельчение сетки возле «полюсов» при географическом разбиении не приводит к улучшению результатов вычислений. Как видно из табл. 1, имеет место сходимость кубатурной формулы к точному значению с увеличением числа узлов разбиения сферы, причем равномерное разбиение предпочтительнее не только с точки зрения быстроты вычисления, но и точности кубатурной формулы.

В табл. 2 приведены результаты тестовой задачи вычисления коэффициента облученности со сферы радиуса $R = 1$ на внутреннюю поверхность куба, содержащего данную сферу. Центры куба и сферы совпадают, ребро куба равно 4.

По свойству замкнутости коэффициента облученности сумма коэффициентов облученности на отдельные грани куба должна равняться 1. Каждая грань куба разбивалась на $400 \times 400$ элементарных квадратиков площадью 0.0001, элементарный сектор сферы при равномерном разбиении имеет площадь 0.0001181, при географическом разбиении наибольший элементарный сектор при «экваторе» имеет такую же площадь 0.0001181. Через $F_{S-i}$ обозначается коэффициент облученности со сферы на $i$-ю грань, через $\varepsilon$ — погрешность вычисления.

Как видим, результаты данного численного эксперимента также показывают, что применение узлов предложенного равномерного разбиения предпочтительнее обычного географического разбиения.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Семенов М. Ф., Шадрин В. Ю.* Об одном разбиении круга и его применении для вычисления коэффициентов облученности при лучистом теплообмене // Мат. I Междунар. науч.-практ. конф. «Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения». Липецк, 2013. Т. 1. С. 28–31.
2. *Софронова Е. Ф., Шадрин В. Ю.* О приближенном вычислении коэффициентов облученности при лучистом теплообмене между двумя плоскими выпуклыми четырехугольниками // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, № 1. С. 166–174.

**Таблица 1.** Численные результаты для вложенных сфер

| Площадь $\Delta S$ | Способ разбиения | Число узлов $S_1$ | Число узлов $S_2$ | Погрешность | Время счета в секундах |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0671150 | РР | 726 | 202 | 0.000115448 | $< 1$ |
| | ГР | 2354 | 589 | 0.005913457 | $< 1$ |
| 0.0082660 | РР | 6060 | 1574 | 0.000002844 | $< 1$ |
| | ГР | 19105 | 4777 | 0.000800807 | 4 |
| 0.0046685 | РР | 10676 | 2746 | 0.000007244 | 1 |
| | ГР | 33826 | 8457 | 0.000463989 | 11 |
| 0.0021060 | РР | 23788 | 6060 | 0.000000447 | 7 |
| | ГР | 74984 | 18747 | 0.000210775 | 67 |
| 0.0011890 | РР | 42094 | 10676 | 0.000000200 | 20 |
| | ГР | 132813 | 33204 | 0.000119545 | 130 |
| 0.0006285 | РР | 79290 | 20022 | 0.000000145 | 70 |
| | ГР | 251256 | 62815 | 0.000063867 | 480 |
| 0.0003915 | РР | 128128 | 32294 | 0.000000122 | 190 |
| | ГР | 403356 | 100840 | 0.000039819 | 1335 |
| 0.0001925 | РР | 260866 | 65590 | 0.000000106 | 780 |
| | ГР | 820332 | 205084 | 0.000019831 | 5460 |

**Таблица 2.** Численные результаты для сферы, вложенной в куб

| | Равномерное разбиение | Географическое разбиение |
|---|---|---|
| $F_{S-1}$ | 0.1667937281 | 0.1666543690 |
| $F_{S-2}$ | 0.1667937281 | 0.1666543690 |
| $F_{S-3}$ | 0.1666035189 | 0.1666656458 |
| $F_{S-4}$ | 0.1666035191 | 0.1666656458 |
| $F_{S-5}$ | 0.1666035189 | 0.1666656457 |
| $F_{S-6}$ | 0.1666035191 | 0.1666656458 |
| Сумма | 1.0000015322 | 0.9999713211 |
| $\varepsilon$ | 0.0000015322 | $-0.0000286789$ |

**3.** *Зигель Р., Хауэлл Дж.* Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975.

*Статья поступила 28 января 2015 г.*

Семенов Михаил Федорович, Шадрин Василий Юрьевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677801, Республика Саха (Якутия)
sem.mi@mail.ru, vshadr@mail.ru