*Математические заметки СВФУ*
*Апрель—июнь, 2014. Том 21, № 2*

*УДК 517.946*

# О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА

**Н. С. Попов**

**Аннотация.** Исследуется разрешимость начально-краевой задачи для линейных псевдогиперболических уравнений третьего порядка с заданием на боковой границе условия, связывающего значения решения или конормальной производной решения со значениями некоторого интегрального оператора от решения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

**Ключевые слова:** псевдогиперболическое уравнение, пространство Соболева, начально-краевая задача, метод продолжения по параметру, априорные оценки, регулярное решение.

## Введение

Нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе в одномерном по пространственным переменным случае рассматриваются в [1–3]. В многомерном случае исследования подобных задач ранее относились к гиперболическим уравнениям (см. [4]), псевдопараболическим уравнениям [5], но многомерные псевдогиперболические задачи с интегральным условием на боковой границе ранее не изучались.

## 1. Постановка задачи

Пусть $\Omega$ — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей $\Gamma$, $Q$ — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — его боковая граница, $b^{ij}(x,t)$, $b(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные в цилиндре $\overline{Q}$ функции, $u_0(x), u_1(x)$ — заданные на множестве $\overline{\Omega}$ функции, $K(x,y,t)$ — функция, заданная при $x, y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

**Краевая задача I.** *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения*

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}(u_t - \Delta u) - Bu = f(x,t), \quad Bu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b(x,t)u, \tag{1}$$

*такую, что для нее выполняются условия*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big|_{(x,t)\in S}. \tag{3}$$

© **2014 Попов Н. С.**

**Краевая задача II.** *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются начальные условия* (2) *и условие*

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x)}\right|_{(x,t)\in S} = \left.\int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)\,dy\right|_{(x,t)\in S}, \tag{4}$$

*где $\nu(x) = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ — вектор внутренней нормали к $\Gamma$ в текущей точке.*

Предполагаем выполнение условия эллиптичности на оператор $B$:

$$b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha\big(\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2\big), \quad \alpha>0,\ \xi_i\in\mathbb{R}^n. \tag{5}$$

## 2. Разрешимость краевой задачи I

Определим оператор $M$ по формуле

$$(Mu)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)\,dy.$$

Оператор $M$ однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t\in[0,T]$, и существуют положительные постоянные $m_1$, $m_2$ такие, что выполняются неравенства

$$m_1\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \le \int\limits_\Omega [Mu(x,t)]^2\,dx \le m_2\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \tag{6}$$

при любом $t\in[0,T]$ и $u(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Определим пространство

$$V = \big\{v(x,t) : v(x,t)\in L_\infty\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big),$$
$$v_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\cap L_\infty\big(0,T;W_2^1(\Omega)\big),\ v_{tt}(x,t)\in L_2(Q)\big\},$$

норму в $V$ определим естественным образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} + \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}.$$

Введем обозначения:

$$LMu(x,t) - MLu(x,t) = \Phi(x,t,u), \quad w = Mu,$$

и будем рассматривать уравнение относительно $w$

$$Lw = g(x,t) + \Phi(x,t,M^{-1}w), \quad g(x,t) = Mf,$$

которое, как показано ниже, эквивалентно исходному уравнению (1).

Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(x,t,u) &= LMu(x,t) - MLu(x,t)\\ &= \int\limits_\Omega [-K_{tt}(x,y,t) + \Delta_x K_t(x,y,t) + B_x K(x,y,t) - K(x,y,t)b(y,t)]u(y,t)\,dy\\ &\quad + \int\limits_\Omega [\Delta_x K(x,y,t) - 2K_t(x,y,t)]u_t(y,t)\,dy - \int\limits_\Omega K(x,y,t)\Delta_y u_t(y,t)\,dy\\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega K(x,y,t)(b^{ij}(y)u_{y_j})_{y_i}\,dy,\end{aligned}$$

где

$$B_x u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b(x,t)u,$$

$$B_y u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(b^{ij}(y)u_{y_j}) + b(y,t)u.$$

Введем обозначение

$$Q_0 = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(x,y,t)\,dxdy. \tag{7}$$

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия* (5), (6) *и, кроме того,*

$$\begin{gathered} b(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad b^{ij}(x) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \quad (i,j=1,\dots,n), \\ -b(x,t) \ge b_0 > 0 \quad \textit{при } (x,t) \in \overline{Q}, \\ K(x,y,t) \in C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \\ 1 - \frac{Q_0}{\delta_0^2 m_1} > 0 \quad \textit{при } \delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ f(x,t) \in L_2(Q), \quad u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \end{gathered} \tag{8}$$

*Тогда краевая задача* I *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* $V$, *и это решение единственно.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию* $w(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* $Q$ *решением уравнения*

$$Lw = g(x,t) + \Phi_1(x,t,w), \quad u = M^{-1}w,\ g(x,t) = Mf, \tag{9}$$

*и удовлетворяющую условиям*

$$w(x,t)|_S = 0, \quad w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{10}$$

*где*

$$u(x,0) - \int\limits_{\Omega} K(x,y,0)u(y,0)\,dy = u_0(x) - \int\limits_{\Omega} K(x,y,0)u_0(y)\,dy = w_0(x),$$

$$u_t(x,0) - \int\limits_{\Omega} [K(x,y,t)u(y,t)]_t|_{t=0}\,dy$$

$$= u_1(x) - \int\limits_{\Omega} [K_t(x,y,0)u_0(y) + K(x,y,0)u_1(y)]\,dy = w_1(x),$$

$$\Phi_1(x,t,w) = \Phi(x,t,M^{-1}w).$$

Докажем, что при выполнении условий теоремы краевая задача (9), (10) разрешима в классе $W = \{v(x,t) : v(x,t) \in V,\ w(x,t) = Mv(x,t) \in V\}$ для любой функции $g(x,t)$ такой, что $g(x,t) \in L_2(Q)$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Именно, для чисел $\lambda$ из отрезка $[0,1]$ определим семейство операторов $\{L_\lambda\}$: $L_\lambda w = Lw - \lambda\Phi_1(x,t,w)$.

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $w(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* $Q$ *решением уравнения*

$$L_\lambda w = g(x,t) \tag{$7_\lambda$}$$

*при выполнении условий* (10). Обозначим через $\Lambda$ множество чисел $\lambda \in [0,1]$, для которых краевая задача ($7_\lambda$), (10) разрешима в классе $W$ для произвольной функции $g(x,t)$ такой, что $g(x,t) \in L_2(Q)$. Покажем, что множество $\Lambda$ совпадает со всем отрезком $[0,1]$, что означает разрешимость краевой задачи (9), (10) в требуемом классе.

Прежде всего убедимся, что множество $\Lambda$ непусто. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $w(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* $Q$ *решением уравнения* ($7_\lambda$) *при* $\lambda = 0$:

$$Lw = g(x,t)$$

*при выполнении условий* (10).

Как следует из результатов работ [6–8], при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение, принадлежащее пространству $W$.

Пусть $w(x,t)$ — решение краевой задачи ($7_\lambda$), (10) из пространства $W$. Если имеет место априорная оценка в том же пространстве $W$, то задача разрешима при $\lambda \in [0,1]$ (см. [9]).

Для получения априорной оценки умножим уравнение ($7_\lambda$), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $w_\tau - \Delta w_\tau$ и результат проинтегрируем по области $\Omega$ и по переменной $\tau$ в пределах от 0 до $t$. Таким образом, преобразуем равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega Lw(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (g + \lambda\Phi_1)(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dx d\tau.$$

Интегрируя по частям и считая, что по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до $n$, с учетом краевых условий (10) придем к равенству

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_\Omega w_\tau^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^n (w_{x_i\tau})^2 + (\Delta w_\tau)^2\right] dx\,d\tau \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b^{ij}(x) w_{x_i}(x,t) w_{x_j}(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(x,t) w^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_\Omega b_\tau w^2\,dx d\tau \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega w_{x_i\tau}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega b^{ij} w_{x_i x_j} \Delta w_\tau\,dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega b_{x_i}^{ij} w_{x_j} \Delta w_\tau\,dx d\tau \\
&- \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega b_{x_i} w w_{x_i\tau}\,dx d\tau - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega b(x,t) w_{x_i}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega b_\tau w_{x_i}^2\,dx d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega w_1^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b^{ij}(x) w_{0x_i}(x) w_{0x_j}(x)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(x,0) w_0^2(x)\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \left[w_{1x_i}^2(x) - b(x,0) w_{0x_i}^2(x)\right] dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (g + \lambda\Phi_1)(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dx d\tau. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Рассмотрим оценку интеграла $\int\limits_0^t \int\limits_\Omega b^{ij} w_{x_i x_j} \Delta w_\tau \, dx d\tau$. Используя (5), (8), получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega b^{ij} w_{x_i x_j} \Delta w_\tau \, dx d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int\limits_\Omega b^{ij}(x) w_{x_j x_k}(x,t) w_{x_i x_k}(x,t) \, dx \geq \frac{\alpha}{2} \sum_{i,k=1}^n \int\limits_\Omega w^2_{x_i x_k}(x,t) \, dx. \quad (12)$$

С помощью (5) аналогично имеем

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega b^{ij}(x) w_{x_i}(x,t) w_{x_j}(x,t) \, dx \geq \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega w^2_{x_i}(x,t) \, dx.$$

Рассмотрим оценку интеграла $\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u^2_\tau(y,\tau) \, dy d\tau$ через функцию $w$. Из равенства $w = Mu$ следует, что

$$u_\tau(y,\tau) - \int\limits_\Omega K(y,z,\tau) u_\tau(z,\tau) \, dz = w_\tau(y,\tau) + \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz.$$

Используя (6) и неравенство Юнга, получим

$$\int\limits_\Omega u^2_\tau(y,\tau) \, dy \leq \frac{1}{m_1} \int\limits_\Omega \left[ w_\tau(y,\tau) + \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right]^2 dy$$

$$\leq \frac{1}{m_1} \Bigg[ \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy + 2 \int\limits_\Omega |w_\tau(y,\tau)| \cdot \left| \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right| dy$$

$$+ \int\limits_\Omega \left( \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right)^2 dy \Bigg] \leq \frac{1}{m_1} \Bigg[ \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy + \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy$$

$$+ \int\limits_\Omega \left( \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right)^2 dy + \int\limits_\Omega \left( \int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau) u(z,\tau) \, dz \right)^2 dy \Bigg]$$

$$\leq \frac{2}{m_1} \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy + C_1 \int\limits_\Omega u^2(y,\tau) \, dy$$

$$\leq \frac{2}{m_1} \int\limits_\Omega w^2_\tau(y,\tau) \, dy + \frac{C_1}{m_1} \int\limits_\Omega w^2(y,\tau) \, dy. \quad (13)$$

Иначе оценку можно получить, как в [5], с малым параметром $\delta_1$, который

подберем позже:

$$\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dy \le \frac{1}{m_1}\Big[\int\limits_\Omega w_\tau^2(y,\tau)\,dy + \delta_1^2\int\limits_\Omega w_\tau^2(y,\tau)\,dy$$
$$+\frac{1}{\delta_1^2}\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau)u(z,\tau)\,dz\Big)^2 dy + \int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\Omega K_\tau(y,z,\tau)u(z,\tau)dz\Big)^2 dy\Big]$$
$$\le \frac{1+\delta_1^2}{m_1}\int\limits_\Omega w_\tau^2(y,\tau)\,dy + C(\delta_1)\int\limits_\Omega u^2(y,\tau)\,dy$$
$$\le \frac{1+\delta_1^2}{m_1}\int\limits_\Omega w_\tau^2(y,\tau)\,dy + \frac{C(\delta_1)}{m_1}\int\limits_\Omega w^2(y,\tau)\,dy. \quad (14)$$

Для того чтобы оценить в (11) интеграл

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \Phi_1(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dxd\tau, \quad (15)$$

рассмотрим оценку интеграла от $\Phi(x,t,u)$ вида

$$\Big|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\Omega[\Delta_x K(x,y,\tau) - 2K_\tau(x,y,\tau)]u_\tau(y,\tau)\,dy\Big)(w_\tau-\Delta w_\tau)\,dxd\tau\Big|$$
$$\le \int\limits_0^t\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega([\Delta_x K - 2K_\tau]^2(x,y,\tau)\,dy)^{\frac12}\Big(\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dy\Big)^{\frac12}|w_\tau-\Delta w_\tau|\,dxd\tau$$
$$\le \frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (w_\tau-\Delta w_\tau)^2\,dxd\tau$$
$$+\frac{1}{2\delta_0^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\Omega[\Delta_x K - 2K_\tau]^2(x,y,\tau)\,dy\Big)\Big(\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dy\Big)\,dxd\tau$$
$$\le \frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (w_\tau-\Delta w_\tau)^2\,dxd\tau + \frac{C_2}{2\delta_0^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dyd\tau. \quad (16)$$

Продолжая неравенство (16) с учетом (13) и неравенства Юнга, получим

$$\Big|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_\Omega[\Delta_x K(x,y,\tau) - 2K_\tau(x,y,\tau]u_\tau(y,\tau)\,dy\Big)(w_\tau-\Delta w_\tau)\,dxd\tau\Big|$$
$$\le \frac{\delta_0^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (w_\tau-\Delta w_\tau)^2\,dxd\tau + \frac{C_2}{\delta_0^2 m_1}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$+\frac{C_1C_2}{2\delta_0^2 m_1}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w^2(x,\tau)\,dxd\tau. \quad (17)$$

Для того чтобы оценить в (15) интеграл вида

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left( \int\limits_\Omega K(x,y,\tau)\Delta_y u_\tau(y,\tau)\,dy \right)(w_\tau - \Delta_x w_\tau)\,dxd\tau,$$

поступаем, как в [5]. Применяя оценку (14), имеем

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left( \int\limits_\Omega K(x,y,\tau)\Delta_y u_\tau(y,\tau)\,dy \right)(w_\tau - \Delta w_\tau)\,dxd\tau \right|$$
$$\leq \frac{\delta_0^2}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (w_\tau - \Delta w_\tau)^2\,dxd\tau + \frac{Q_0\left(1+\delta_1^2\right)}{2\delta_0^2 m_1} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta_y u_\tau)^2(y,\tau)\,dyd\tau, \quad (18)$$

где $Q_0$ задано формулой (7).

Зафиксируем $\delta_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и потребуем выполнения неравенства (8):

$$p \equiv 1 - \frac{Q_0}{\delta_0^2 m_1} > 0, \quad (19)$$

которое очевидно выполняется при малых $|K(x,y,t)|$. Подбирая малое $\delta_1 > 0$, применяя неравенство Юнга и используя лемму Гронуолла в равенстве (11), из неравенства

$$p - \frac{Q_0\delta_1}{\delta_0^2 m_1} > 0 \quad (20)$$

получим априорную оценку

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left[ \sum_{i=1}^n (w_{x_i\tau})^2 + (\Delta w_t)^2 + (w_{tt})^2 \right] dxdt$$
$$+ \int\limits_\Omega \left[ w_t^2(x,t) + \sum_{i,k=1}^n w_{x_i x_k}^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2(x,t) + w^2(x,t) \right] dx$$
$$\leq K_0 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega g^2(x,t)\,dxdt \quad (21)$$

с положительной постоянной $K_0$, определяемой лишь функциями $b^{ij}(x)$, $b(x,t)$, числами $T$, $\alpha$, а также областью $\Omega$.

Очевидно, что аналогичная оценка имеет место и для функции $u(x,t)$:

$$\|u\|_V \leq K_0\|w\|_V \leq K_1\|g\|_{L_2(Q)}, \quad (22)$$

где $K_0$, $K_1$ — положительные постоянные, $K_1$ определяется теми же величинами, которыми определяется $K_0$.

Из оценок (21), (22) следует открытость и замкнутость множества $\Lambda$ (см. [1, 4]). Следовательно, краевая задача (9), (10) разрешима в классе $W$.

Как в [5], можно показать, что с помощью решения вспомогательной краевой задачи (9), (10) можно найти решение исходной краевой задачи (1)–(3). В частности, уравнение (1) эквивалентно уравнению (9), так как (9) имеет вид $LMu = Mf + \Phi$, откуда $LMu = Mf + LMu - MLu$, т. е. $M(Lu - f) = 0$.

Единственность решений очевидна: она вытекает, например, из неравенства (22). Теорема доказана.

### 3. Разрешимость краевой задачи II

Рассмотрим краевую задачу II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре $Q$ решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются начальные условия* (2) *и условие* (4).

Доказательство разрешимости краевой задачи II проведем без перехода к нагруженному уравнению [7] вида (9) с краевыми условиями (10).

Введем обозначение

$$Q_1 = \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Gamma \int\limits_\Omega K^2(x,y,t)\, dS_x dy. \tag{23}$$

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия*

$$b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \beta \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha,\beta>0,\ \xi_i\in\mathbb{R}^n, \tag{24}$$

*кроме того,*

$$\begin{gathered} b(x,t)\in C^1(\overline{Q}), \quad b^{ij}(x)\in C_0^1(\overline{\Omega}) \quad (i,j=1,\dots,n), \\ -b(x,t)\ge b_0>0 \quad \textit{при } (x,t)\in\overline{Q}, \\ K(x,y,t)\in C^3(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \\ 1-4Q_1>0, \quad 2-\delta_2-\delta_2\beta>0 \quad \textit{при } \delta_2\in\left(0,\frac{2}{1+\beta}\right), \\ u_0(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad u_1(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad f(x,t)\in L_2(Q). \end{gathered} \tag{25}$$

*Тогда краевая задача* II *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $V$, и это решение единственно.*

Доказательство. Для получения априорной оценки умножим уравнение (1), записанное в переменных $x$ и $\tau$, на функцию $u_\tau + \frac{1}{2}u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau$ и результат проинтегрируем по области $\Omega$ и по переменной $\tau$ в пределах от 0 до $t$. Таким образом, преобразуем равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega Lu\cdot(u_\tau + \frac{1}{2}u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau)\, dxd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f(x,\tau)\cdot\left(u_\tau + \frac{1}{2}u_{\tau\tau} - \Delta u_\tau\right) dxd\tau.$$

Интегрируя по частям, с учетом краевых условий (2) придем к равенству вида (11), в котором $\Phi_1\equiv 0$, т. е. к равенству вида

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,t)\, dx + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^n (u_{x_i\tau})^2 + (\Delta u_\tau)^2 + \frac{1}{2}(u_{\tau\tau})^2\right] dxd\tau \\ &\qquad + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u_{x_i\tau}u_\tau\nu_i\, dS_x d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_\Gamma b^{ij}u_{x_j}u_\tau\nu_i\, dS_x d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b^{ij}(x)u_{x_i}(x,t)u_{x_j}(x,t)\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(x,t)u^2(x,t)\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega b_\tau u^2\, dxd\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Gamma u_{x_i\tau}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_x d\tau + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Gamma bu u_{x_i\tau}\nu_i\,dS_x d\tau \\
&+ \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u^2_{x_i\tau}(x,t)\,dx + \int_0^t\int_\Omega b^{ij}u_{x_ix_j}\Delta u_\tau\,dxd\tau + \int_0^t\int_\Omega b^{ij}_{x_i}u_{x_j}\Delta u_\tau\,dxd\tau \\
&- \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega b_{x_i}uu_{x_i\tau}\,dxd\tau - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b(x,t)u^2_{x_i}(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega b_\tau u^2_{x_i}\,dxd\tau \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Gamma b^{ij}u_{x_j}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_x d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega b^{ij}u_{x_j\tau}u_{x_i\tau}\,dxd\tau \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega b^{ij}(x)u_{x_j}(x,t)u_{x_it}(x,t)\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \left[b_\tau uu_\tau + bu^2_\tau\right]dxd\tau \\
&\frac{1}{2}\int_\Omega b(x,t)u(x,t)u_t(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2_1(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega b^{ij}(x)u_{0x_i}(x)u_{0x_j}(x)\,dx \\
&- \frac{1}{2}\int_\Omega b(x,0)u^2_0(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[\frac{3}{4}u^2_{1x_i}(x) - \frac{1}{2}b(x,0)u^2_{0x_i}(x)\right]dx \\
&- \frac{1}{2}\int_\Omega b(x,0)u_0(x)u_1(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega b^{ij}(x)u_{0x_j}(x)u_{1x_i}(x)\,dx \\
&+ \int_0^t\int_\Omega f\cdot(u_\tau - \Delta u_\tau)\,dxd\tau. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Получение априорных оценок вполне аналогично получению априорных оценок при доказательстве теоремы 1, достаточно лишь показать оценки следующих граничных интегралов:

$$
\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Gamma u_{x_i\tau}u_\tau\nu_i\,dS_x d\tau, \quad \int_0^t\int_\Gamma b^{ij}u_{x_j}u_\tau\nu_i\,dS_x d\tau, \quad \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Gamma u_{x_i\tau}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_x d\tau,
$$
$$
\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Gamma bu u_{x_i\tau}\nu_i\,dS_x d\tau, \quad \int_0^t\int_\Gamma b^{ij}u_{x_j}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_x d\tau. \qquad (27)
$$

Докажем оценки для третьего и пятого интегралов в (27). Преобразуем третий интеграл:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Gamma u_{x_i\tau}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_x d\tau &= -\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial u_{\tau\tau}}{\partial\nu}u_\tau\,dS_x d\tau \\
&+ \int_\Gamma \frac{\partial u_t}{\partial\nu}u_t\,dS_x - \int_\Gamma \frac{\partial u_1}{\partial\nu}u_1\,dS_x. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Используя краевые условия (4) в первом интеграле правой части (28), имеем

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \frac{\partial u_{\tau\tau}}{\partial \nu} u_\tau \, dS_x d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \Big[ \int\limits_\Omega (K(x,y,\tau) u_{\tau\tau}(y,\tau) + 2K_\tau(x,y,\tau) u_\tau(y,\tau) + K_{\tau\tau}(x,y,\tau) u(y,\tau)) \, dy \Big] u_\tau \, dS_x d\tau, \quad (29)$$

откуда, используя неравенства Юнга, получим

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \frac{\partial u_{\tau\tau}}{\partial \nu} u_\tau \, dS_x d\tau \right| \le \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma u_\tau^2 \, dS_x d\tau + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \Big[ \int\limits_\Omega K(x,y,\tau) u_{\tau\tau}(y,\tau) \, dy + 2 \int\limits_\Omega K_\tau(x,y,\tau) u_\tau(y,\tau) \, dy + \int\limits_\Omega K_{\tau\tau}(x,y,\tau) u(y,\tau) \, dy \Big]^2 dS_x d\tau. \quad (30)$$

Первое слагаемое в (30) оценим с помощью интегрального неравенства

$$\int\limits_\Gamma u_\tau^2(x,\tau) \, dS_x \le \delta_2 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2(x,\tau) \, dx + C(\delta_2) \int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau) \, dx. \quad (31)$$

Имеем

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma u_\tau^2 \, dS_x d\tau \le \frac{\delta_2}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2 \, dx d\tau + \frac{C(\delta_2)}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2 \, dx d\tau. \quad (32)$$

Для оценки второго слагаемого в (30) воспользуемся неравенствами Юнга, Гёльдера, а также неравенством $(a+2b+c)^2 \le 3(a^2+4b^2+c^2)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \Big[ \int\limits_\Omega K(x,y,\tau) u_{\tau\tau}(y,\tau) \, dy + 2 \int\limits_\Omega K_\tau(x,y,\tau) u_\tau(y,\tau) \, dy + \int\limits_\Omega K_{\tau\tau}(x,y,\tau) u(y,\tau) \, dy \Big]^2 dS_x d\tau \\
&\le \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \Big[ \Big( \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(y,\tau) \, dy \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int\limits_\Omega K^2(x,y,\tau) \, dy \Big)^{\frac{1}{2}} + 2 \Big( \int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau) \, dy \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int\limits_\Omega K_\tau^2(x,y,\tau) \, dy \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \Big( \int\limits_\Omega u^2(y,\tau) \, dy \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int\limits_\Omega K_{\tau\tau}^2(x,y,\tau) \, dy \Big)^{\frac{1}{2}} \Big]^2 dS_x d\tau \\
&\le \frac{3}{2} \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \Big[ \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(y,\tau) \, dy \cdot \int\limits_\Omega K^2(x,y,\tau) \, dy + 4 \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma \int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau) \, dy \cdot \int\limits_\Omega K_\tau^2(x,y,\tau) \, dy
\end{aligned}$$

$$+\int\limits_\Omega u^2(y,\tau)\,dy\cdot\int\limits_\Omega K_{\tau\tau}^2(x,y,\tau)\,dy\Bigg]\,dS_x d\tau$$

$$\le 4Q_1\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(y,\tau)\,dyd\tau+C_1\left[\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dyd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2\,dyd\tau\right],\quad(33)$$

где $C_1$ — наибольшее значение $K_t^2(x,y,t)$, $K_{tt}^2(x,y,t)$ по области $\Gamma\times\Omega\times(0,T)$.

Второе слагаемое в правой части равенства (28) оценивается аналогично:

$$\left|\int\limits_\Gamma\frac{\partial u_t}{\partial\nu}u_t\,dS_x\right|\le\delta_2\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_it}^2\,dx+C(\delta_2)\int\limits_\Omega u_t^2\,dx$$

$$+C_1\Bigg[\int\limits_\Omega u_t^2(y,\tau)\,dy+\int\limits_\Omega u^2\,dy\Bigg].\quad(34)$$

Рассмотрим пятый интеграл в (27). Имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma b^{ij}u_{x_j}u_{\tau\tau}\nu_i\,dS_xd\tau=-\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma b^{ij}u_{x_j\tau}u_\tau\nu_i\,dS_xd\tau$$

$$+\int\limits_\Gamma b^{ij}u_{x_j}u_t\nu_i\,dS_x-\int\limits_\Gamma b^{ij}u_{0j}u_1\nu_i\,dS_x.\quad(35)$$

Для первого интеграла в правой части равенства (35) аналогично оценке интеграла (28) получим

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma b^{ij}u_{x_j\tau}u_\tau\nu_i\,dS_xd\tau\right|\le\beta\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma\left|\frac{\partial u_\tau}{\partial\nu}u_\tau\right|dS_xd\tau$$

$$=\beta\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma\left|\int\limits_\Omega(K(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)+K_\tau(x,y,\tau)u(y,\tau))\,dy\right|\cdot|u_\tau|\,dS_xd\tau$$

$$\le\frac{\beta}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u_\tau^2\,dS_xd\tau+\frac{\beta}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma\Bigg[\int\limits_\Omega K(x,y,\tau)u_\tau(y,\tau)\,dy$$

$$+\int\limits_\Omega K_\tau(x,y,\tau)u(y,\tau)\,dy\Bigg]^2dS_xd\tau\le\frac{\delta_2\beta}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau}^2\,dxd\tau$$

$$+\frac{C(\delta_2)\beta}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2\,dxd\tau+C_2\left[\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(y,\tau)\,dyd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2\,dyd\tau\right],\quad(36)$$

где $C_2$ — наибольшее значение $K^2(x,y,t)$, $K_t^2(x,y,t)$ по области $\Gamma\times\Omega\times(0,T)$.

Как и выше, при выполнении условий (24)

$$1-\frac{\delta_2}{2}-\frac{\delta_2\beta}{2}>0$$

основная априорная оценка будет определяться положительной постоянной $K_3$ в правой части, определяемой лишь функциями $b(x,t)$, числами $T$, $\alpha$, $\beta$, $b_0$, а также областью $\Omega$. Имеем

$$\|u\|_V\le K_3\|f\|_{L_2(Q)}.\quad(37)$$

Единственность решений краевой задачи II в пространстве $V$ очевидна из априорной оценки (37). Теорема полностью доказана.

Замечание. В теоремах 1 и 2 от условий $-b(x,t) \geq b_0 > 0$ можно отказаться, но тогда, как и выше, при получении априорных оценок возникнут условия малости на функцию $b(x,t)$ и их производные.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 6. С. 747–749.

**2.** *Кожанов А. И.* О разрешимости краевых задач с нелокальным условием Бицадзе — Самарского для линейных гиперболических уравнений // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 6. С. 738–740.

**3.** *Lazetic N.* On classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second order // Publ. l'Inst. Math., Nouv. Ser. 2000. V. 67. P. 53–75.

**4.** *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.

**5.** *Попов Н. С.* О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 1. С. 82–95.

**6.** *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.

**7.** *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.

**8.** *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально–операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

**9.** *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.


*Статья поступила 18 июня 2014 г.*

Попов Николай Сергеевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
popovnserg@mail.ru