ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. К. АММОСОВА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 15, вып. 1 **Январь-Июнь, 2008**

СОДЕРЖАНИЕ

Абдрахманов А. М., Кожанов А.И. *Задача с косой производной для $(2m+1)$-параболических уравнений* **3**

Алдашев С. А. *Задачи Коши и Гурса для одного класса многомерных гиперболических уравнений* **12**

Бородин О. В., Дмитриев И. Г., Иванова А. О. *Реберная 2-дистанционная раскраска плоских субкубических графов* ... **20**

Бородин О. В., Дмитриев И. Г., Иванова А. О. *Покрытие плоских графов подграфами переменной вырожденности* **27**

Бородин О. В., Иванова А. О. *Минимальный вес окрестности 5-вершины в плоских триангуляциях минимальной степени 5* . **34**

Вихрева О. А. *Задача Дирихле для нелинейного вырождающегося эллиптического уравнения* **39**

Егоров И. Е. *Об общей краевой задаче для сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения* **45**

Егоров Р. И., Кайгородов С. П. *Об одном свойстве множества стратегий игрока в PEC-задачах* **52**

Колтуновский О. А. *Обратные задачи для гиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом в случае интегрального переопределения* **55**

Попов С. В., Суслонова А. А. *О гладких решениях задачи Трикоми* **75**

Попов С. В., Шарин Е. Ф. *Краевые задачи для уравнения теплопроводности с разрывными начальными функциями и с меняющимся направлением времени* **91**

Сеилханова Р. Б. *Критерии однозначной разрешимости задач Дарбу с отходом от характеристики для многомерного уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона* **106**

Софронов Е. Т. *Об одном примере асимптотической устойчивости состояния равновесия в случае двух чисто мнимых корней* **118**

Федоров Ф. М. *К теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. II* **123**

Чеботарев А. Ю., Цыба В. Е. *Обратная задача магнитной гидродинамики* **139**

Аннотации **151**

УДК 517.946

ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ $(2m+1)$-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*)

А. М. Абдрахманов, А. И. Кожанов

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач с косой производной для уравнений

$$(-1)^m D_t^{2m+1} u - Mu = f(x,t), \tag{1}$$

где $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, $m \geqslant 0$, — целое число, M — эллиптический оператор второго порядка, действующий по пространственным переменным (подобные уравнения называются иногда $(2m+1)$-*параболическими уравнениями*, иногда — *эллиптико-параболическими уравнениями*). Различные краевые задачи для уравнений вида (1) изучались в работах [1–8], однако задача с косой производной ранее не рассматривалась.

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, S — боковая граница цилиндра Q, $a^{ij}(x)$, $\alpha^i(x)$, $i,\ j=1,\dots,n$, $a_0(x)$, $\alpha_0(x)$, $f(x,t)$ — заданные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$ функции. Пусть M и l — дифференциальные операторы, действие которых определяется равенствами

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_i}) + a_0(x)u,$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта №06–01–00439) и Сибирского отделения РАН, интеграционный проект № 48).

$$lu = \alpha^k(x)u_{x_k} + \alpha_0(x)u$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия*

$$lu|_S = 0, \tag{2}$$

$$D_t^k u\big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \tag{3}$$

$$D_t^k u\big|_{t=T} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{4}$$

Краевая задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (3), *а также условия*

$$D_t^k u\big|_{t=T} = 0, \quad k = m+1, \dots, 2m. \tag{5}$$

Приведем вспомогательные сведения, которые понадобятся ниже.

Обозначим через B оператор, действие которого определяется равенством

$$Bu = Mlu - lMu.$$

Оператор B — дифференциальный оператор второго порядка, и он имеет вид

$$Bu = b^{ij}(x)u_{x_ix_j} + b^i(x)u_{x_i} + b_0(x)u;$$

функции $b^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b_0(x)$ здесь определяются функциями $a^{ij}(x)$, $\alpha^k(x)$, $i,j,k = 1,\dots,n$, $a_0(x)$ и $\alpha_0(x)$. Очевидно, что если коэффициенты этого оператора ограничены в $\overline{\Omega}$, то для любой функции $v(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\|Bv\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \bar{b}_0\|v\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \tag{6}$$

если же ограниченными в $\overline{\Omega}$ являются функции $b^{ij}(x)$, $b^{ij}_{x_j}(x)$, $b^i(x)$, $i = 1,\dots,n$, $b_0(x)$ и если дополнительно функция lv обращается в нуль на Γ, то для любой функции $v(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega} Bvlv\,dx \leqslant \bar{b}_1 \|lv\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \bar{b}_2 \|v\|^2_{L_2(\Omega)}; \tag{7}$$

постоянные $\bar{b}_0$, $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ здесь определяются лишь функциями $a^{ij}(x)$, $\alpha^k(x)$, $i,j,k = 1,\dots,n$, $a_0(x)$ и $\alpha_0(x)$.

Обозначим через $\nu_k(x)$, $k = 1,\dots,n$, компоненты вектора внутренней нормали к Γ в точке x. Всюду ниже будет выполняться условие

$$\alpha^k(x)\nu_k(x) \leqslant 0 \quad \text{при } x \in \Gamma. \tag{8}$$

Пусть $v(x)$ — функция из класса $\big\{v(x) : v \in W_2^2(\Omega),\ lv \in W_2^2(\Omega)\big\}$, и пусть выполняется условие (8). Тогда *если дополнительно выполняется условие*

$$\alpha_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad \alpha^k(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad k = 1,\dots,n,$$

$$\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\alpha^k_{x_k}(x) \geqslant \bar{\alpha}_0 > 0 \quad \textit{при } x \in \overline{\Omega}, \tag{9}$$

то имеет место оценка

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \beta_0 \|lv\|_{L_2(\Omega)}; \tag{10}$$

если выполняются условие (9), *а также условие*

$$\alpha_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \left[\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\alpha^k_{x_k}(x)\right]\xi_i^2 + \alpha^k_{x_i}\xi_i\xi_i \geqslant \bar{\alpha}_1 |\xi|^2, \tag{11}$$

$$\bar{\alpha}_1 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то имеет место оценка

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \beta_1 \|lv\|_{W_2^1(\Omega)}; \tag{12}$$

если выполняются условия (9), (11), *а также условие*

$$\alpha_0(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \alpha^k(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad k = 1,\dots,n,$$

$$\left[\alpha_0(x) - \frac{1}{2}\alpha^k_{x_k}(x)\right]\xi_{ij}^2 + \alpha^k_{x_i}(x)\xi_{kj}\xi_{ij} + \alpha^k_{x_j}(x)\xi_{ki}\xi_{ij} \geqslant \bar{\alpha}_2 \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}^2,$$

$$\bar{\alpha}_2 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{13}$$

то имеет место оценка

$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \beta_2 \|lv\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{14}$$

причем постоянные β_0, β_1 и β_2 в этих неравенствах определяются лишь функциями $\alpha^k(x)$, $k = 1,\dots,n$, и $\alpha_0(x)$.

Для доказательства этих неравенств достаточно последовательно проанализировать равенства

$$(lv, v)_{L_2(\Omega)} = (w, v)_{L_2(\Omega)},$$

$$(lv, v)_{W_2^1(\Omega)} = (w, v)_{W_2^1(\Omega)},$$

$$(lv, v)_{W_2^2(\Omega)} = (w, v)_{W_2^2(\Omega)},$$

в которых скобками обозначается скалярное произведение в пространствах $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ соответственно, $w(x)$ есть функция $lv(x)$; сам анализ основан на интегрировании по частям, использовании условий (8), (9), (11) и (13), а также применении неравенств Коши — Буняковского и Гёльдера.

Пусть $v(x)$ — функция из пространства $W_2^2(\Omega)$, обращающаяся в нуль на Γ, M — эллиптический в $\overline{\Omega}$ оператор. Тогда *при выполнении условия*

$$a_0(x) \leqslant -\overline{a}_0 > 0 \quad \text{при } x \in \overline{\Omega} \tag{15}$$

для функций $v(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$, обращающихся в нуль на Γ, имеет место оценка

$$m_1 \|v\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \|Mv\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{16}$$

с положительной постоянной m_1, определяющейся лишь коэффициентами оператора M и областью Ω (см. [9]).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (8), (9), (11), (13), (14), *а также условия*

$$a^{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \; i,j = 1,\dots,n, \quad a_0(x) \in C^2(\overline{\Omega}); \tag{17}$$

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant m_0|\xi|^2, \quad m_0 > 0,\ x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{18}$$

$$\bar{b}_1 < m_0, \quad \bar{b}_2\beta_0 < \bar{a}_0, \quad \bar{b}_0\beta_2 < m_1. \tag{19}$$

Тогда если функция $f(x,t)$ такова, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $lf(x,t) \in L_2(Q)$, то краевая задача (1)–(4) *имеет решение $u(x,t)$ такое, что*

$$u(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big), \quad D_t^k u(x,t) \in L_2(Q),$$

$$D_t^k lu(x,t) \in L_2(Q), \quad k = 0,1,\dots,2m+1,$$

и это решение единственно.

Доказательство. Пусть $g(x,t)$ — заданная функция из $L_2(Q)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$(-1)^m D_t^{2m+1} lu - Mlu - Bu = g(x,t) \tag{20}$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$D_t^k lu|_{t=0} = 0,\ k = 0,1,\dots,m, \quad D_t^k lu|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\dots,m-1, \tag{21}$$

а также условие (2).

Разрешимость этой краевой задачи установим с помощью метода продолжения по параметру. Именно, пусть λ — число из отрезка $[0,T]$. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$(-1)^m D_t^{2m+1} lu - Mlu - \lambda Bu = g(x,t) \tag{20_λ}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (19). Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (20_λ), (2), (21) разрешима в классе

$$\big\{u(x,t) : u(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big),\ D_t^k u(x,t) \in L_2(Q),$$
$$D_t^k lu(x,t) \in L_2(Q),\ k = 0,1,\dots,2m+1\big\}$$

для любой функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$. Если мы покажем, что множество Λ непусто, открыто и замкнуто, то оно, как известно, будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$. Совпадение множества Λ с отрезком $[0,1]$ и даст разрешимость краевой задачи (20), (2), (21) в требуемом классе.

Покажем, что множество Λ непусто.

Краевая задача (20_0), (2), (21) является аналогом первой краевой задачи для $(2m+1)$-параболического уравнения

$$(-1)^m D_t^{2m+1} w - Mw = g(x,t)$$

относительно функции $w = lu$; при выполнении условий (15), (17), (18) данная краевая задача имеет решение $w(x,t)$ такое, что $w(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big)$, $D_t^k w(x,t) \in L_2(Q)$, $k = 0,1,\ldots 2m+1$ (см. цитированные выше работы). Далее, уравнение $lu = w$, условия (8), (9), (11) и (13) дают возможность найти функцию $u(x,t)$, причем для функции $u(x,t)$ будут иметь место включения $u(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big)$, $D_t^k u \in L_2(Q)$, $k = 0,1,\ldots,2m+1$ (см. [10]). Таким образом, при выполнении условий теоремы краевая задача (20_0), (2), (21) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее требуемому классу. Это и означает, что число 0 принадлежит множеству Λ.

Открытость и замкнутость множества Λ вытекает из априорных оценок (см. [11]). Установим их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q \big[(-1)^m D_t^{2m+1} lu - Mlu\big] lu\, dxdt = \int\limits_Q (g + \lambda Bu) lu\, dxdt.$$

Интегрируя в левой части этого равенства, оценивая правую часть с помощью неравенства Юнга, неравенств (7) и (10), нетрудно получить неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \big[D_t^m lu(x,T)\big]^2 dx + m_0 \|lu\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \bar{a}_0 \|lu\|^2_{L_2(Q)}$$
$$\leqslant \bar{b}_1 \|lu\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} + \left(\bar{b}_2\beta_0 - \frac{\delta^2}{2}\right) \|lu\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{2\delta^2}\|g\|^2_{L_2(Q)},$$

в котором δ — произвольное положительное число. Из этого неравенства и из условия (19) вытекает первая априорная оценка решений краевой задачи (20_λ), (2), (21)

$$\|lu\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leqslant K_1 \|g\|_{L_2(Q)}, \tag{22}$$

постоянная K_1 в которой определяется лишь коэффициентами операторов M и l.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q \left[(-1)^m D_t^{2m+1} lu - Mlu\right] Mlu\, dxdt = \int\limits_Q [g + \lambda Bu] Mlu\, dxdt.$$

Вновь интегрируя в левой части, оценивая правую часть с помощью неравенства Юнга, неравенств (6) и (4), используя далее условие (19), нетрудно получить вторую априорную оценку решений краевой задачи (20_λ), (2), (21)

$$\|lu\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leqslant K_2 \|g\|_{L_2(Q)}, \tag{23}$$

постоянная K_2 в которой определяется лишь коэффициентами операторов M и l, а также областью Ω.

Из оценок (22) и (23) очевидным образом вытекают оценки

$$\|u\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \leqslant K_3 \|g\|_{L_2(Q)}, \tag{24}$$

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \left(\left\|D_t^k u\right\|_{L_2(Q)} + \left\|D_t^k lu\right\|_{L_2(Q)}\right) \leqslant K_4 \|g\|_{L_2(Q)}; \tag{25}$$

постоянная K_3 здесь определяется лишь числами β_2 и K_2, постоянная K_4 — лишь числами K_1, K_2 и T.

Оценок (22)–(25) согласно [11] вполне достаточно для доказательства открытости и замкнутости множества Λ. Как говорилось выше, открытость, замкнутость и установленная ранее непустота множества Λ означают, что оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. Но тогда краевая задача (20), (2), (21) будет иметь решение $u(x, t)$, принадлежащее требуемому классу.

Пусть теперь $g(x,t)$ — функция $lf(x,t)$. Уравнение (20) в этом случае можно записать в виде

$$l\big((-1)^m D_t^{2m+1}u - Mu - f\big) = 0.$$

Из этого уравнения и из условий (8) и (9) следует, что почти всюду в Q выполняется тождество

$$(-1)^m D_t^{2m+1}u - Mu = f.$$

Далее, из тех же условий (8) и (9) следует, что для функции $u(x,t)$ выполняются условия (3) и (4). Другими словами, функция $u(x,t)$, являющаяся решением краевой задачи (20), (2), (21) с $g = lf$, будет требуемым решением краевой задачи (1)–(4).

Единственность решений очевидна.

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда если функция* $f(x,t)$ *такова, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $lf(x,t) \in L_2(Q)$, *то краевая задача* (1)–(3), (5) *имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что*

$$u(x,t) \in L_2\big(0,T;W_2^2(\Omega)\big), \quad D_t^k u(x,t) \in L_2(Q),$$

$$D_t^k lu(x,t) \in L_2(Q), \quad k = 0,1,\dots,2m+1,$$

и это решение единственно.

Доказательство теоремы проводится полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. В работе рассматривается случай модельного уравнения (1). Нетрудно показать, что аналогичные результаты о разрешимости задачи с косой производной можно получить и для более общих уравнений, например, оператор M можно заменить оператором

$$a^{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x,t),$$

и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптико-параболические уравнения // Мат. сб. 1968. Т. 77, № 3. С. 470–496.
2. *Дубинский Ю. А.* Краевые задачи для эллиптико-параболических уравнений // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1969. Т. 4, № 3. С. 192–214.
3. *Дубинский Ю. А.* Краевые задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 1. С. 32–34.
4. *Дубинский Ю. А.* О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Мат. сб. 1973. Т. 90, № 1. С. 3–22.
5. *Егоров И. Е.* Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 6. С. 1301–1304.
6. *Егоров И. Е.* Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени // Дифференц. уравнения и их приложения. Якутск, 1989. С. 30–39.
7. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычислит. центр СО РАН, 1995.
8. *Абдрахманов А. М., Кожанов А. И.* Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3–12.
9. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
10. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. (Итоги науки и техники).
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

г. Уфа, г. Новосибирск *1 апреля 2008 г.*

УДК 517.956

ЗАДАЧИ КОШИ И ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Задачи Коши и Гурса для линейных гиперболических уравнений хорошо изучены в [1–3]. Многомерные аналоги этих задач из-за отсутствия эффективных методов изучения требуют привлечения новых методов, поэтому в этом направлении существует мало работ (см. [4]). В данной работе предложен метод исследования, в частности, получены однозначные разрешимости взаимно-сопряженных задач Коши и Гурса для одного класса многомерных гиперболических уравнений.

1. Постановка задач и основные результаты. Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x, \dots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = t + \varepsilon$, $|x| = 1 - t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$, а $0 \leqslant t \leqslant \frac{1-\varepsilon}{2}$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим взаимно-сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu = \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \qquad (1)$$

$$L^* v = \Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} - b v_t + d v = 0, \qquad (1^*)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geqslant 2$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

Рассмотрим следующие задачи Коши и Гурса для уравнения (1).

Задача 1. *Найти в области* D_ε *решение уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u|_S = \tau(x), \quad u_t|_S = \nu(x). \tag{2}$$

Задача 2. *Найти в области* D_ε *решение уравнения* (1) *из класса* $C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x), \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x). \tag{3}$$

В дальнейшем нам будет удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$. Пусть H_ε — проекция области D_ε на плоскость (r,t) с границами $\Gamma_\varepsilon : r = t + \varepsilon$, $\Gamma_1 : r = 1 - t$ и $\Gamma : t = 0$, $\varepsilon < r < 1$. Пусть далее $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева, а $\widetilde{S} = \left\{(r,\theta) \in S,\ \varepsilon < r < \frac{1+\varepsilon}{2}\right\}$.

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$ $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\tau}_n^k(r)$ $\bar{v}_n^k(r)$, $\bar{\sigma}_{\varepsilon n}^k(r)$, $\bar{\sigma}_{1n}^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ функций $a_i(r,\theta,t)$, $\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)$, $\sigma_1(r,\theta)$, $i = 1, \ldots, m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(S)$. Введем множество функций

$$B^l(S) = \left\{ f(r,\theta) : f \in W_2^l(S), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left(\left\| f_n^k(r) \right\|_{C^1([\varepsilon,1])}^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left\| f_n^k(r) \right\|_{C^2([\varepsilon,1])}^2 \right) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty,\ l \geqslant m-1 \right\}.$$

Если $a_i(x,t), b(x,t), c(x,t) \in B^l(S)$, то имеет место

Теорема 1. *Если* $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in B^l(S)$, *то задача* 1 *имеет единственное решение.*

Теорема 2. *Если $\sigma_\varepsilon(r,\theta) \in B^l(\widetilde{S})$, $\sigma_1(r,\theta) \in B^l(S \setminus \widetilde{S})$, то задача 2 однозначно разрешима.*

2. Доказательство теоремы 1. Единственность решения задачи 1 доказана в [5]. Покажем ее разрешимость. Решение этой задачи будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже. Подставив (4) в (1), аналогично [4, 6] получим уравнения вида

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k\right.$$
$$\left. + \left[\tilde{c}_n^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k + \sum_{i=1}^m \left(\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k\right\} = 0, \quad \lambda_n = n(n+m-2). \tag{5}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{6}$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k \bar{u}_{1r}^k$$
$$-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1\right), \tag{7}$$
$$n = 1, \quad k = \overline{1, k_1},$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k \bar{u}_n^k$$
$$= -\frac{1}{k_n}\sum_{k_n}^{k_n-1}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k\right.$$
$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m \left(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \ k = \overline{1, k_n}, \ n = 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots,$ — решение системы (6)–(8), то оно является и решением уравнения (5). Учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [7], из краевого условия (2) в силу (4) имеем

$$\bar{u}_n^k(r,t)|_\Gamma=\bar{\tau}_n^k(r),\bar{u}_{nt}^k(r,t)|_\Gamma=\bar{\nu}_n^k(r),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots. \tag{9}$$

Таким образом, задача 1 сведена к системе задач Коши в области H_ε для уравнений (6)–(8). Теперь будем находить решения этих задач. Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (6)–(8) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k-u_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{10}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t)\equiv 0$. В (10), выполнив замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{1-m}{2}}u_n^k(r,t)$ и положив затем

$$\xi=\frac{r+t}{2},\quad \eta=\frac{r-t}{2},$$

получим

$$Mu=u_{n\xi\eta}^k+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2}u_n^k=f_n^k(\xi,\eta), \tag{11}$$

$f_n^k(\xi,\eta)=(\xi+\eta)^{\frac{m-1}{2}}\bar{f}_n^k(\xi+\eta,\xi-\eta)$, при этом краевое условие (9) примет вид

$$u_n^k(\xi,\xi)=\tau_n^k(\xi),\quad \left.\left(\frac{\partial u_n^k}{\partial\xi}-\frac{\partial u_n^k}{\partial\eta}\right)\right|_{\xi=\eta}=\nu_n^k(\xi),\quad \frac{\varepsilon}{2}\leqslant\eta<\xi\leqslant\frac{1}{2}, \tag{12}$$

$\tau_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\tau}_n^k(2\xi)$, $\nu_n^k(\xi)=\sqrt{2}(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots.$
Как показано в [8], решение задач Коши (11), (12) имеет вид

$$u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_\eta^\xi\left[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1$$
$$+\int\limits_{1/2}^{\xi}\int\limits_{\varepsilon/2}^{\eta}f_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1d\eta_1,$$

где

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]=P_\mu(z)$$

— функция Римана уравнения $Mu=0$, а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu=n+\frac{m-3}{2}$, $\frac{\partial}{\partial N}\big|_{\xi=\eta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\big)\big|_{\xi=\eta}$. Таким образом, задача (10), (9) имеет единственное решение. Следовательно, сначала решив задачу (6), (9) ($n=0$), а затем (7), (9) ($n=0$) и т. д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)$ $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$. Далее, как и в [4,6], доказывается, что функция (4) является решением задачи 1, где $\bar{u}_n^k(r,t)$ определяется из двумерных задач Коши, причем принадлежит искомому классу.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Сначала докажем единственность решения задачи 2. Для этого построим решение $v(r,\theta,t)$ уравнения (1*), удовлетворяющее начальным условиям

$$v|_S=0,\quad v_t|_S=\nu(r,\theta)=\bar{\nu}_0^1(r)Y_{0,m}^1(\theta),\quad \bar{\nu}_0^1(r)\in G,\tag{13}$$

где G — множество функций $v(r)$ из класса $C^1(\varepsilon\leqslant r\leqslant 1)\cap C^2(\varepsilon<r<1)$. Очевидно, что множество G плотно всюду в $L_2((\varepsilon,1))$. Решение $v(r,\theta,t)$ будем искать в виде ряда (4). Тогда, как и в случае задачи 1, функции $\bar{v}_n^k(r,t)$ будут удовлетворять системе уравнений (6)–(8), где $\tilde{a}_{in}^k$, a_{in}^k, $\tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde{a}_{in}^k$, $-a_{in}^k$, $-\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k$, $i=1,\ldots,m$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$.

Из краевого условия (13) имеем

$$\bar{v}_0^1\big|_\Gamma=0,\quad \bar{v}_{0t}^1\big|_\Gamma=\bar{\nu}_0^1(r),\tag{14}$$

$$\bar{v}_0^k\big|_\Gamma=0,\quad v_{nt}^k\big|_\Gamma=0,\quad k=\overline{1,k_n},\ n=1,2,\ldots.\tag{15}$$

В п. 2 показано, что задачи Коши (10), (14) и (10), (15) имеют единственные решения. Отсюда найдем последовательно однозначные решения задач (6), (14), (7), (15) ($n=1$) и (8), (15) ($n=2,3,\ldots$). Таким образом, решение задачи (1*), (13) в виде (4) построено. Аналогичным образом строятся решения этой задачи, если

$$\nu(r,t)=\bar{\nu}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\quad k=\overline{1,k_n},\ n=1,2,\ldots.$$

Теперь покажем, что если $\sigma_\varepsilon(x) \equiv 0$, $\sigma_1(x) \equiv 0$, то решение задачи 2 $u(x,t)$ тождественно нулевое. Из определения сопряженных операторов [5] следует

$$vLu - uL^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \cos(N^\perp, x_i) - u_t \cos(N^\perp, t),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos(N^\perp, x_i) + b\cos(N^\perp, t),$$

а $N^\perp$ — внутренняя нормаль к границе ∂D_ε. Далее, используя формулу Грина, получим

$$\int\limits_{D_\varepsilon} (vLu - uL^*v)\, dD_\varepsilon = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N} \right) M + uvQ \right] ds, \tag{16}$$

где $\frac{\partial}{\partial N}$ — конормаль к ∂D_ε, а $M^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \cos^2(N^\perp, x_i) + \cos^2(N^\perp, t)$.

Из (16), принимая во внимание граничные условия (3) и тот факт, что на характеристических конусах S_ε и S_1 конормальные производные $\frac{\partial}{\partial N}$ совпадают с производной по касательному направлению [5], получаем

$$\int\limits_{S} \nu(r,\theta) u(r,\theta,0)\, dS = 0. \tag{17}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\left\{ \bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta) \right\}$ плотна [9] в $L_2(S)$, то из (17) заключаем, что $u(x,0) = 0\ \forall x \in S$. Пусть теперь $v(r,\theta,t)$ — решение задачи Коши для (1*) с данными $v|S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, $v_t|_S = 0$, $\bar{\tau}_n^k(r) \in G$ в виде (4). Тогда из (16) также будем иметь

$$\int\limits_{S} \tau(r,\theta)(u_t + bu)\, dS = 0. \tag{18}$$

Таким образом, учитывая (17) и (18), приходим к однородной задаче Коши $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$ $\forall x\in S$ для уравнения (1). Следовательно, единственность решения задачи 2 доказана.

Теперь установим разрешимость задачи 2. Если ее решение искать в виде (4), то функции $\bar{u}_n^k(r,t)$ будут удовлетворять системе уравнений (6)–(8). Из краевого условия (3) имеем

$$\bar{u}_n^k\big|_{\Gamma_\varepsilon}=\bar{\sigma}_{\varepsilon n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k\big|_{\Gamma_1}=\bar{\sigma}_{1n}^k(r),\quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots. \tag{19}$$

Далее рассмотрим уравнение (11), к которому сводится каждое уравнение системы (6)–(8), а условие (19) можно записать в следующем виде:

$$u_n^k\left(\xi,\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi),\quad u_n^k\left(\frac{1}{2},\eta\right)=\psi_n^k(\eta),\quad \frac{\varepsilon}{2}\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2},\quad \frac{\varepsilon}{2}\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{2},$$
$$\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi)=\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\sigma}_{\varepsilon n}^k\left(\xi+\frac{\varepsilon}{2}\right),\psi_n^k(\eta)=\left(\frac{1}{2}+\eta\right)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\sigma}_{1n}^k\left(\frac{1}{2}+\eta\right),$$
$$k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots. \tag{20}$$

Таким образом, пришли к задаче Гурса (11), (20), которая имеет единственное решение [1]. Следовательно, сначала решив задачу (6), (19) ($n=0$), (7), (19) ($n=1$) и т. д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$.

Как и в [4, 6], доказывается, что функция (4) является решением задачи 2, где $\bar{u}_n^k(r,t)$ определяется из двумерных задач Гурса, причем принадлежит искомому классу.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Высш. шк., 1977.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1985.
4. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1981. Т. 4.

6. *Алдашев С. А.* О задаче Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64–68.

7. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

8. *Алдашев С. А.* Спектральные задачи Дарбу — Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. 2003. Т. 55, № 1. С. 100–107.

9. *Колмогоров А. Н., Фомин С В.* Элементы теорий функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

г. Уральск, Казахстан *15 ноября 2007 г.*

УДК 519.17

РЕБЕРНАЯ 2-ДИСТАНЦИОННАЯ РАСКРАСКА ПЛОСКИХ СУБКУБИЧЕСКИХ ГРАФОВ*)

О. В. Бородин, И. Г. Дмитриев, А. О. Иванова

Введение

В теории графов широко известна 2-дистанционная раскраска вершин. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множества вершин и ребер графа G соответственно. Раскраска $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ вершин графа G называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины на расстоянии не более 2 окрашены в разные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется 2-*дистанционным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_2(G)$.

Задача 2-дистанционной раскраски возникает в приложениях; в частности, она является одной из основных моделей в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования. В самой теории графов известна старая (1977 г.) гипотеза Г. Вегнера [1] о том, что $\chi_2(G) \leqslant \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 1$ для любого плоского графа G с максимальной степенью Δ (см. также монографию Т. Р. Йенсена и Б. Тофта [2]). Наилучшей из опубликованных верхних оценок для произвольных плоских графов является $\chi_2(G) \leqslant \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil + 1$ при $\Delta \geqslant 47$ [3].

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта первого автора 08–01–00673 и код проекта второго автора 06–01–00694); третий автор была поддержана грантом Президента России для молодых кандидатов и их научных руководителей (код проекта МК-2302.2008.1).

Очевидно, что $\chi_2(G) \geqslant \Delta+1$ для любого графа G (ввиду того, что в любом графе есть звезда $K_{1,\Delta}$). В [4, 5] определены достаточные условия (в терминах обхвата и максимальной степени) 2-дистанционной $(\Delta + 1)$-раскрашиваемости плоских графов с максимальной степенью Δ. В частности, полностью решен вопрос о том, для плоских графов G сколь малых обхватов число $\chi_2(G)$ достигает своего наименьшего значения $\Delta + 1$ лишь путем наложения ограничения на максимальную степень графа. Работа [6] обобщает результаты, полученные в [4, 5], на случай предписанной 2-дистанционной раскраски.

Реберным раскраскам графов посвящено много работ (см. [2]). В настоящей работе мы вводим в рассмотрение реберную 2-дистанционную раскраску графов без петель и кратных ребер.

Раскраску $\varphi : E(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ графа G назовем *реберной* 2-*дистанционной*, если любые два ребра, находящиеся друг от друга в графе смежности ребер на расстоянии не более 2, окрашены в разные цвета. Другими словами, в разные цвета должны краситься: (a) смежные ребра (имеющие общую концевую вершину) и (b) ребра, имеющие общее соседнее ребро.

Граф G называется *реберно* 2-*дистанционно* k-*раскрашиваемым*, если существует 2-дистанционная раскраска его ребер в k цветов; наименьшее целое k такое, что граф G является реберно 2-дистанционно k-раскрашиваемым, называется *реберным* 2-*дистанционным хроматическим числом графа* G и обозначается через $\chi_2^e(G)$.

Легко видеть, что при $\Delta = 2$ существуют графы с $\chi_2^e(G) = 4$ и произвольно большим обхватом. Действительно, чтобы реберно 2-дистанционно раскрасить цикл C_{3k} достаточно трех цветов, тогда как для циклов C_{3k+1} и C_{3k+2} это число уже достигает четырех, причем C_5 имеет даже $\chi_2^e(C_5) = 5$.

Очевидно, чтобы раскрасить реберно 2-дистанционно простую цепь достаточно трех цветов. Любое дерево с $\Delta = 3$ требует уже 5 цветов, если в нем есть хотя бы две смежные 3-вершины. Покрасив любое ребро в кубическом дереве, будем продолжать 5-раскраску от него в разные стороны к висячим ребрам. Нетрудно заметить, что цвета на ребрах будут повторяться периодично по мере удаления от исходного ребра. Последними будем красить висячие ребра.

Таким образом, при $g = \infty$ и $\Delta = 3$, чтобы раскрасить граф реберно 2-дистанционно, пяти цветов достаточно. А можно ли за счет достаточно большого конечного обхвата добиться реберной 2-дистанционной 5-раскрашиваемости планарного графа? Следующая теорема отвечает на этот вопрос.

Теорема 1. *Пусть G — планарный субкубический граф и $g(G) \geqslant 36$. Тогда $\chi_2^e(G) \leqslant 5$.*

Доказательство теоремы 1

Среди всех контрпримеров к теореме 1 выберем минимальный по числу $\geqslant 2$-вершин и к каждой его 2-вершине добавим висячее ребро. В полученном графе G имеются только вершины степени 1 и 3 и $g(G) \geqslant 36$, а $\chi_2^e(G_0) > 5$.

Не нарушая общности, можно считать, что граф G связен.

Лемма 1. *В G нет 3-вершин, смежных с двумя висячими вершинами.*

Доказательство. Удалим обе висячие вершины при такой 3-вершине и раскрасим полученный граф. Раскраску можно продолжить, поскольку на выбор цвета для неокрашенных ребер имеется не более четырех ограничений, так как $\Delta(G) = 3$. $\square$

Под *k-гусеницей* далее будем понимать цепь, состоящую в точности из k вершин степени 3, каждая из которых инцидентна висячей вершине.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_7$ — ребра 6-гусеницы, а $e'_1, e'_2, \ldots, e'_6$ — ее висячие ребра соответственно; и пусть e_{11}, e_{12} смежны с e_1, а e_{71}, e_{72} — с e_7. Удалим висячие вершины 6-гусеницы и 3-вершины, инцидентные ребрам e_i, $3 \leqslant i \leqslant 5$, и раскрасим полученный граф. Продолжим раскраску c на весь граф G.

Пусть $c(e_{11}) = 1$, $c(e_{12}) = 2$, $c(e_1) = 3$. Найдем множество цветов, разрешенных на центральном ребре e_4 6-гусеницы. Рассмотрим множества разрешенных цветов на ребрах e_i и e'_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$. Очевидно, ребра e_2, e'_1 имеют по два разрешенных цвета — 4 и 5. Следующие за ними e_3 и e'_2 тоже имеют по два разрешенных цвета — 1 и 2, так как каждое из e_3 и e'_2 получает по 3 запрета на выбор цвета от ребер e_1, e_2 и e'_1, т. е. оба разрешенные на e_2, e'_1 цвета для e_3, e'_2 запрещены, а также запрещен цвет ребра e_1. Ребра e_4, e'_3 имеют уже по 3 разрешенных цвета — 3, 4, 5, поскольку для них запрещена только пара цветов, разрешенных на e_3, e'_2. Таким образом, на e_4 со стороны ребер e_{11}, e_{12}, e_1 приходят 2 запрета на выбор цвета, и разрешенными остаются цвета 3, 4, 5.

Точно так же пойдем к e_4 с другой стороны. Пусть $c(e_{71}) = \alpha$, $c(e_{72}) = \beta$, $c(e_7) = \gamma$. На ребрах e_6 и e'_6 разрешены цвета δ, ε, отличные от α, β, γ; на e_5 и e'_5 разрешены α, β, а на e_4 и e'_4 разрешены γ, δ, ε. Таким образом, от ребер e_{71}, e_{72}, e_7 на e_4 также приходят 3 разрешенных цвета. Поскольку цветов пять, то $\{3,4,5\} \bigcap \{\gamma,\delta,\varepsilon\} \neq \varnothing$, т. е. e_4 можно будет покрасить.

Лемма 2. *Раскраску c можно продолжить на G во всех случаях, за исключением случая $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ и ему симметричных* ($\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$; $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ *и* $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$).

Доказательство. Напомним, что $c(e_{11}) = 1$, $c(e_{12}) = 2$, $c(e_1) = 3$.

Случай 1. $3 \notin \{\alpha, \beta\}$. Напомним также, что на ребрах e_6, e'_6 и e_5, e'_5 разрешены цвета δ, ε и α, β соответственно, а на e'_4 — γ, δ и ε. Положим $c(e_4) = 3$.

Если $\gamma \neq 3$, то $3 \in \{\delta, \varepsilon\}$. Пусть $\varepsilon = 3$. Тогда ребра e_6, e'_6 и e'_4 однозначно раскрашиваются в δ, ε, и γ соответственно. Далее мы красим e_5 и e'_5 следующим образом: если $\gamma \in \{4,5\}$, то полагаем $c(e_5) \in \{1,2\}$; если же $\gamma \in \{1,2\}$, то $c(e_5) \in \{4,5\}$. Теперь можно взять $c(e'_3) \in \{4,5\} - \gamma$, а $c(e_3) \in \{1,2\} - c(e_5)$ и далее раскраску легко продолжить на ребра e_2, e'_2 и e'_1.

Пусть теперь $\gamma = 3$. Если хотя бы один из α или β принадлежит множеству $\{1, 2\}$, пусть $\alpha \in \{1, 2\}$, то среди δ, ε есть 4 или 5, и мы полагаем $c(e'_4) > 3$. Далее $c(e_6) \in \{\delta, \varepsilon\} - c(e'_4)$ и $c(e'_3) \in \{4, 5\} - c(e'_4)$, а $c(e_5) = \alpha$. Заметим, что теперь раскраску легко продолжить на все остальные ребра. Если же ни α, ни β не принадлежат множеству $\{1, 2\}$ (т. е. $\alpha = 4$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$), то мы полагаем $c(e'_4) = 1$. Имеем однозначно раскрашиваемые ребра: $c(e_3) = c(e_6) = 2$, $c(e'_2) = c(e'_6) = 1$ и $c(e_4) = 3$; и теперь уже нетрудно продолжить раскраску на ребра e'_3, e_5, e'_5, e_2 и e'_1.

Случай 2. $\alpha = 3$ (случай $\beta = 3$ симметричен). Учитывая случай 1 (повторяя вышеописанные рассуждения применительно к ребрам 6-гусеницы от e_6 к e_2), мы можем считать теперь, что $\gamma \in \{1, 2\}$. Ввиду симметричного расположения цветов 1, 2 на ребрах e_{11} и e_{12} положим $\gamma = 1$.

Если $\beta \in \{4, 5\}$, то заметим, что на ребрах e_6, e'_6 разрешены цвета $\{2, \delta\}$, на e_5, e'_5 — $\{3, \beta\}$, а на e'_4 — $\{1, 2, \delta\}$. Кроме того, поскольку с одной стороны на e_4 приходят разрешенными цвета $\{1, 2, \delta\}$, а с другой — $\{3, 4, 5\}$, причем $\delta \in \{4, 5\}$, то полагаем $c(e_4) = \{4, 5\} - \beta$, а $c(e_5) = \beta$ и $c(e'_3) = 3$. Далее однозначно $c(e'_5) = 3$, $c(e_6) = 2$, $c(e'_6) = \delta$ и раскраску легко продолжить на ребра e'_4, e_3, e'_2, e_2 и e'_1.

Пусть теперь $\beta = 2$. Тогда имеем один из непродолжаемых случаев, перечисленных в условии леммы 2. Убедимся, что раскрасить 6-гусеницу невозможно. Действительно, e_4 можно покрасить либо в 4, либо в 5. Но в обоих случаях $c(e_4)$ вычеркивается из множества разрешенных для e_2 и e_6 цветов. Ввиду симметрии пусть $c(e_4) = 4$; имеем однозначную раскраску: $c(e_2) = 5$, $c(e'_1) = 4$, $c(e_6) = 5$, $c(e'_6) = 4$, $c(e'_3) = 3$, $c(e'_4) = 1$, $c(e_3) = 2$ и $c(e'_2) = 1$. Но тогда e_5 невозможно покрасить. $\square$

Лемма 3. *В G нет 7-гусениц.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_8$ — ребра 7-гусеницы, а $e'_1, e'_2, \ldots, e'_7$ — ее висячие ребра; и пусть e_{11}, e_{12} смежны с e_1, а e_{81}, e_{82} —

с e_8. Удалим висячие вершины 7-гусеницы и 3-вершины, инцидентные ребрам e_i, $3 \leqslant i \leqslant 6$, и раскрасим полученный граф. Продолжим раскраску c на весь граф G. Из леммы 2 следует, что если $c(e_{11})$, $c(e_{12})$, $c(e_1)$ соответственно равны 1, 2, 3, то $c(e_{71}) = 2$, $c(e_{72}) = 3$, $c(e_7) = 1$.

Заметим, что теперь у нас на ребрах e_3', e_4 разрешены три цвета: 3, 4, 5, на e_5, e_5' — 1, 4, 5, а на центральном висячем ребре e_4' — все пять цветов. Положим $c(e_4') = 5$, $c(e_5) = 1$ и $c(e_4) = 3$. Нетрудно видеть, что далее раскраска продолжается на все ребра 7-гусеницы. $\square$

Итак, в G есть только $\leqslant$ 6-гусеницы. Удалим все висячие ребра всех k-гусениц и стянем полученные k-цепи (состоящие из k вершин степени 2) в ребра.

Для полученного графа G^* формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ запишем в виде

$$(4|E| - 6|V|) + (2|E| - g|F|) = -12,$$

где F — множество граней графа G^*. Отсюда следует, что

$$\sum_{v \in V}(2d(v) - 6) + \sum_{f \in F}(r(f) - 6) < 0,$$

где $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f. Поскольку в полученном графе G^* минимальная степень $\geqslant 3$, то в нем найдется $\leqslant$ 5-грань f. Восстановим 2-вершины стянутых k-цепей, при этом каждое ребро грани f превратится в цепь из не более чем 7 ребер, т. е. ранг f не превосходит 35.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wegner G.* Graphs with given diameter and a coloring problem: Technical Report. University of Dortmund, 1977.
2. *Jensen T. R., Toft B.* Graph coloring problems. New York: John Wiley and Sons, 1995.
3. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н.,Ван ден Хойвел Я.* Минимальные степени и хроматические числа квадратов плоских графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 4. С. 9–33.

4. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* 2-дистанционная раскраска разреженных плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. (http://semr.math.nsc.ru/). 2004. № 1. С. 76–90.

5. *Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К., Ташкинов В. А.* Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. (http://semr.math.nsc.ru/). 2004. № 1. С. 129–141.

6. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскраска плоских графов с заданным обхватом // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2007. Т. 14, № 3. С. 13–30.

г. Якутск *11 марта 2008 г.*

УДК 519.17

ПОКРЫТИЕ ПЛОСКИХ ГРАФОВ ПОДГРАФАМИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЫРОЖДЕННОСТИ*)

О. В. Бородин, И. Г. Дмитриев, А. О. Иванова

1. Переменная вырожденность

Одним из обобщений понятия вершинной раскраски является покрытие вершин графа лесами и, более общо, подграфами заданной вырожденности. Граф называется *k-вырожденным*, если минимальная степень любого его подграфа меньше k. В частности, 1-вырожденными являются графы без ребер, а 2-вырожденными — графы без циклов, т. е. леса. Введенное в [1] число $\alpha_t(G)$ вершинной t-древесности графа G есть минимальное число t-вырожденных подграфов, покрывающих $V(G)$. Ясно, что $\alpha_1(G)$ есть хроматическое число $\chi(G)$ графа G. Параметр $\rho(G) = \alpha_2(G)$ называется *числом вершинной древесности графа G*.

Начиная с 1972 г. числа α_t и ρ изучались в десятках работ (см. [2]). Рассматривалась и задача покрытия вершин графа подграфами не одной и той же вырожденности. Так, О. В. Бородиным [3] получено следующее обобщение известной теоремы Брукса [4].

Теорема 1. *Если $\Delta(G) = k_1 + \ldots + k_s \geqslant 3$, где $s \geqslant 2$, и связный*

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта первого автора 06–01–00694 и код проекта третьего автора 05–01–00816); третий автор была поддержана грантом Президента России для молодых кандидатов и их научных руководителей (код проекта МК-2302.2008.1).

граф G не является полным, то $V(G)$ можно покрыть s-подграфами, i-й из которых k_i-вырожден.

Здесь теорема Брукса соответствует случаю $k_1 = \ldots = k_s = 1$. Отметим также, что k-вырожденный граф является k-раскрашиваемым, а $2k$-вырожденный допускает покрытие k индуцированными лесами.

Другое обобщение вершинной раскраски — предписанная раскраска — было введено в 1976 г. Визингом [5], а также, немного позднее, Эрдешем, Рабином и Тейлором [6] и с тех пор привлекает огромное внимание исследователей (см. книгу [7]). Здесь множество цветов $L(v)$, допустимых для вершины v, может меняться от вершины к вершине и нужно выбрать по одному цвету из $L(v)$ для каждой вершины v так, чтобы получилась правильная раскраска графа. *Предписанным хроматическим числом* $\chi^l(G)$ графа G называется такое наименьшее k, что из любого предписания со свойством $|L(v)| \geqslant k$ для каждой вершины $v \in V(G)$ можно выделить раскраску. Очевидно, что $\chi(G) \leqslant \chi^l(G)$, так как обычная раскраска есть тот частный случай предписанной, когда предписание (как функция на $V(G)$) постоянно.

Полученное Визингом [5] обобщение теоремы Брукса на случай предписанной раскраски выглядит следующим образом.

Теорема 2. *Если $|L(v)| \geqslant \Delta(G) \geqslant 3$ для каждой вершины $v \in V(G)$ и связный граф G не является полным, то из L можно выделить раскраску.*

Два приведенных выше обобщения вершинной раскраски кажутся совершенно не похожими друг на друга. Лишь спустя много лет О. В. Бородин, А. В. Косточка и Тофт [2] обнаружили связь между задачами предписанной раскраски и покрытия вырожденными подграфами: в обоих случаях граф покрывается подграфами переменной вырожденности.

Поясним суть дела. Заметим сначала, что k-вырожденный граф допускает k-разборку: можно удалять из него вершины (вместе с инцидентными ребрами) в определенном порядке так, чтобы в момент удаления степень вершины в оставшемся подграфе была меньше k.

Пусть теперь f — функция из $V(G)$ в множество натуральных чисел N. Будем говорить, что граф G является f-вырожденным, если существует такая его разборка, при которой каждая вершина v в момент своего удаления имеет степень (строго) меньше $f(v)$. Ясно, что k-вырожденными являются в точности f-вырожденные графы с $f(v) \equiv k$.

Отметим, что никакой граф G не является d-вырожденным, где d — его степенная функция (хотя бы потому, что нет вершины, с которой можно было бы начать разборку). С другой стороны, если G связен, то для его f-вырожденности достаточно, чтобы $f(v) \geqslant d(v)$ для всех $v \in V(G)$ и при этом $f(w) > d(w)$ для некоторой вершины $w \in V(G)$.

Далее, пусть $F = (f_1, \dots, f_s)$, где каждая f_i есть функция из $V(G)$ в $N \cup \{0\}$. Будем говорить, что граф G является *F-разложимым*, или *$(f_1, \dots, f_s)$-разложимым*, если $V(G)$ можно покрыть вершинно-непересекающимися индуцированными подграфами $G_1, \dots, G_s$ такими, что каждый G_i является f_i-вырожденным, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Эти подграфы G_i можно трактовать как цветовые классы. Заметим, что если $f_i(v) = 0$, то вершина v не может быть покрашена в цвет i (т. е. принадлежать G_i). Действительно, попади v в G_i, она не могла бы быть удалена из G_i, имея в момент удаления *отрицательную* степень.

Таким образом, частный случай покрытия $V(G)$ подграфами переменной вырожденности, когда $f_i(v) \in \{0, 1\}$ для всех i и v, отвечает предписанной раскраске графа G при $L(v) = \{i \mid f_i(v) = 1\}$. Если же всюду $f_i(v) \in \{0, 2\}$, то имеем задачу о предписанной вершинной древесности, введенную в рассмотрение в [2].

Там же [2] получено дальнейшее обобщение теоремы Брукса, поглощающее упомянутые выше результаты Бородина [3] и Визинга [5].

Теорема 3. *Связный неполный граф G является $(f_1, \dots, f_s)$-разложимым, где $s \geqslant 2$, если G не содержит моноблоков и $f_1(v) + \dots + f_s(v) \geqslant \Delta(G) \geqslant 3$ для каждой вершины v.*

2. Основной результат

Согласно теореме Аппеля и Хакена [8] о 4 красках каждый плоский граф является $(1, 1, 1, 1)$-разложимым. Однако, как показал Вегнер [9], не каждый плоский граф допускает следующее по силе $(2, 1, 1)$-разложение (еще раньше Чартрендом и Кронком [10] построены плоские графы с вершинной древесностью 3, т. е. не имеющие $(2, 2)$-разложения). С другой стороны, Маргит Фогт [11] показала, что существуют плоские графы, не раскрашиваемые предписанно в 4 цвета.

Естественно возникает вопрос о достаточных условиях предписанной 4-раскрашиваемости плоских графов, а также для их $(2, 1, 1)$-разложимости, вершинной 2-древесности, предписанной вершинной 2-древесности и т. д. Более общо встает вопрос о возможности покрыть вершины плоского графа индуцированными подграфами с предписанными вырожденностями, в сумме составляющими по меньшей мере 4 в каждой вершине.

Очевидным достаточным условием такого рода является отсутствие в плоском графе 3-циклов (поскольку такие графы являются 4-вырожденными). Интересный результат в этом направлении получили Лам, Ксу и Лю [12].

Теорема 4. *Каждый плоский граф без 4-циклов предписанно 4-раскрашиваем.*

Целью данной работы является следующее обобщение теоремы 4.

Теорема 5. *Каждый плоский граф без 4-циклов $(f_1, \dots, f_s)$-разложим, если $s \geqslant 2$, $f_1(v) + \dots + f_s(v) \geqslant 4$ для любой вершины v, а $f_i(v) \in \{0, 1, 2\}$ для всех i и v.*

Очевидно, что теорема 4 соответствует случаю $f_i(v) \in \{0, 1\}$ теоремы 5.

Следствие 1. *Каждый плоский граф без 4-циклов предписанно вершинно 2-древесен.*

Полагаем $f_i(v) \in \{0, 2\}$ в теореме 5.

Следствие 2. *Каждый плоский граф без 4-циклов вершинно 2-древесен.*

Полагаем $s = 2$, $f_1(v) \equiv f_2(v) \equiv 2$ в теореме 5.

3. Доказательство теоремы 5

Пусть G_0 — минимальный по числу вершин контрпример к теореме 5. Обозначим минимальную степень графа G через $\delta(G)$.

Сначала приведем ряд результатов о строении плоских графов без 4-циклов. В [13] показано, что всегда $\delta \leqslant 4$, причем $\delta \geqslant 3$ влечет наличие ребра $e = xy$ такого, что $d(x)+d(y) \leqslant 9$ (оценка неулучшаема). При $\delta \geqslant 2$ в [14] доказано наличие ребра $e = xy$ такого, что $d(x)+d(y) \leqslant 10$, что было доведено в [15] до неулучшаемой оценки $d(x) + d(y) \leqslant 9$.

Применительно к теоремам 4 и 5 интересен случай $\delta = 4$, так как в G_0 нет вершины v с $d(v) \leqslant 3$. Действительно, любое допустимое $(f_1, \dots , f_s)$-разложение графа $G_0 - \{v\}$ можно продолжить на v, покрасив ее в такой цвет i, что v смежна в $G_0 - \{v\}$ с менее чем $f_i(v)$ вершинами цвета i (при этом v становится первой вершиной в разборке подграфа цвета i).

В [12] доказана

Лемма 1. *Если плоский граф G без 4-циклов имеет $\delta(G) = 4$, то в нем найдется 6-цикл с (треугольной) хордой, все вершины которого имеют степень 4.*

Таким образом, G_0 содержит 6-цикл $C_6^* = x_1 \dots x_6$ с хордой x_2x_6. Нетрудно проверить, что ввиду отсутствия 4-циклов в G_0 индуцированный подграф на множестве $\{x_1, \dots , x_6\}$ совпадает с C_6^*. Иными словами, из вершин x_2 и x_6 в $V(G_0) - \{x_1, \dots , x_6\}$ выходит (в точности) по одному ребру, а из x_1, x_3, x_4 и x_5 — по два.

Нам остается показать, что любое $(f_1, \dots, f_s)$-разложение F графа $G_0 - \{x_1, \dots, x_6\}$, удовлетворяющее условиям теоремы, можно продолжить на весь G_0.

Имея F, для каждой вершины $v \in V(C_6^*)$ и каждого $i \leqslant s$ положим $f_i^*(v)$ равным $f_i(v)$ минус число вершин цвета i, смежных с v в $G_0 - \{x_1, \dots, x_6\}$.

Отметим, что из $(f_1^*, \dots, f_s^*)$-разложения графа C_6^* можно получить искомое $(f_1, \dots, f_s)$-разложение для G_0: для каждого цветового класса i мы сначала разбираем его вершины, входящие в $\{x_1, \dots, x_6\}$ (в порядке, заданном $(f_1^*, \dots, f_s^*)$-разложением), а затем — входящие в $G_0 - \{x_1, \dots, x_6\}$.

Итак, убедимся в $(f_1^*, \dots, f_s)^*$-разложимости графа C_6^*. Для этого воспользуемся теоремой 8 из [2], в которой дается необходимое и достаточное условие $(f_1, \dots, f_s)$-разложимости связного графа G при условии, что $f_1(v) + \ldots + f_s(v) \geqslant d(v)$ для любой вершины v. Эта теорема обобщает известную теорему Галлаи [16] о графах, критических по раскраске вершин, а также ряд последующих ее обобщений (в частности, данное в [17]; см. теорему 6 в [2]). В частности, из этого критерия следует теорема 3 настоящей работы.

Поскольку граф C_6^* является 2-связным, применение к нему критерия из [2] упрощается и сводится к следующим замечаниям: граф C_6^*, во-первых, не является ни полным графом, ни нечетным циклом (очевидно) и, во-вторых, не является так называемым моноблоком (см. [2]).

Под моноблоком в данном случае понимается 2-связный граф с такой вектор-функцией $(f_1, \dots, f_s)$ на вершинах, что $f_{i_0}(v) \equiv d(v)$ для некоторого индекса (цвета) i_0, а $f_i(v) \equiv 0$ при $i \neq i_0$. Поскольку вершины x_2 и x_6 в C_6^* имеют степень 3, то, в частности,

$$f_1^*(x_2) + \ldots + f_s^*(x_2) \geqslant 3.$$

С другой стороны, $f_i(x_2) \leqslant 2$ для любого цвета i по условию теоремы 5, а $f_i^*(x_2) \leqslant f_i(x_2)$ для всех i. Отсюда следует, что вектор $(f_1^*(x_2), \dots, f_s^*(v))$ имеет по меньшей мере две ненулевые компоненты, поэтому C_6^* не является моноблоком.

Теорема доказана.

Авторы благодарят А. Н. Глебова за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lick D. R., White A. T.* The point partition numbers of closed 2-manifolds // J. London Math. Soc. 1972. V. 4. P. 577–583.
2. *Borodin O. V., Kostochka A. V., Toft B.* Variable degeneracy: extensions of Brooks' and Gallai's theorems // Discrete Math. 2000. V. 214. P. 101–112.
3. *Бородин О. В.* О разложении графов на вырожденные подграфы // Дискрет. анализ. 1976. Т. 28. С. 3–11.
4. *Brooks R. L.* On coloring the nodes of a network // Proc. Cambridge Math. Soc. 1941. V. 37. P. 194–197.
5. *Визинг В. Г.* Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. Новосибирск, 1976. Т. 29. С. 3–10.
6. *Erdős P., Rubin A., Taylor H.* Choosability in graphs // Congr. Numer. 1979. V. 26. P. 125–157.
7. *Jensen T. R., Toft B.* Graph coloring problems. New York: Wiley Interscience, 1995.
8. *Appel K., Haken W.* The existence of unavoidable sets of geographically good configurations // Illinois J. Math. 1976. V. 20. P. 218–297.
9. *Wegner G.* Note on a paper by B. Grunbaum on acyclic colorings // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 409–412.
10. *Chartrand G., Rronk H. V.* The point arboricity of planar graphs // J. London Math. Soc. 1969. V. 44. P. 612–616.
11. *Voigt M.* List colourings of planar graphs // Discrete Math. 1993. V. 120. P. 215–219.
12. *Lam P. C. B., Xu B., Liu J.* The 4-choosability of plane graphs without 4-cycles // J. Combin. Theory. B. 1999. V. 76. P. 117–126.
13. *Borodin O. V.* Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings // J. Graph Theory. 1996. V. 21. P. 183–186.
14. *He W., Hou X., Lih K. W., Shao J., Wang W., Zhu X.* Edge-partitions of planar graphs and their game coloring numbers // J. Graph Theory. 2002. V. 41. P. 307–317.
15. *Borodin O. V., Kostochka A. V., Sheikh N. N., Yu G.* Minumum height of edges in C_4-free planar graphs // J. Graph Theory (accepted).
16. *Gallai T.* Kritische Graphen. I // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1963. V. 8. P. 165–192.
17. *Бородин О. В.* Критерий хроматичности степеного предписания: Тез. IV Всесоюзн. конф. по теор. кибернетике, Новосибирск, 1977. С. 127–128.

г. Новосибирск, г. Якутск *11 марта 2008 г.*

УДК 519.17

МИНИМАЛЬНЫЙ ВЕС ОКРЕСТНОСТИ 5-ВЕРШИНЫ В ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ 5*)

О. В. Бородин, А. О. Иванова

1. Введение

Строение плоских триангуляций T_5 с минимальной степенью 5 привлекает внимание исследователей давно отчасти в связи со знаменитой проблемой четырех красок, решенной в 1976 г. Аппелем и Хакеном [1]. Так, Вернике [2] еще в 1904 г. показал, что любая T_5 содержит 5-вершину, смежную с $\leqslant$ 6-вершиной, а Франклин [3] (1922 г.) — с двумя $\leqslant$ 6-вершинами.

Лебег [4] в 1940 г. показал, что в T_5 всегда есть 3-грань $f = xyz$ веса $w(f) = d(x)+d(y)+d(z)$ не более 19, где $d(v)$ — степень вершины v. Коциг [5] в 1963 г. усилил оценку Лебега до 18, а Бородин [6] в 1989 г. — до неулучшаемой оценки 17.

Пусть $w(S_k)$ — минимальный вес k-звезды с центром в 5-вершине. Тогда имеют место следующие точные оценки: $w(S_1) \leqslant 11$ (Вернике), $w(S_2) \leqslant 17$ (Фраклин), $w(S_3) \leqslant 23$ (Йендроль и Мадараш [7], 1996 г.), $w(S_4) \leqslant 30$ (Бородин и Вудал [8], 1998 г.), что улучшает оценку $w(S_4) \leqslant 39$ Йендроля и Мадараша [7].

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06–01–00694 и 08–01–00673); второй автор была поддержана грантом Президента России для молодых кандидатов и их научных руководителей (код проекта МК-2302.2008.1).

Через $w(C_k)$ обозначим минимальный вес (сумму степеней вершин) k-цикла в любой T_5. Из результата Бородина [6] следует, что $w(C_3) \leqslant 17$. Йендроль и Мадараш [7] показали, что $w(C_4) \leqslant 35$ и $w(C_5) \leqslant 45$.

Из оценки $w(S_4) \leqslant 30$ Бородина и Вудала [8] немедленно следуют, с одной стороны, неулучшаемые оценки $w(C_4) \leqslant 25$ и $w(C_5) \leqslant 30$, а с другой — оценка $w(S_5) \leqslant \Delta+30$ (при любом Δ), где Δ — максимальная степень графа.

Целью данной заметки является

Теорема 1. *Для любой плоской триангуляции минимальной степени* 5 *с* $\Delta \geqslant 28$ *имеет место неулучшаемая оценка* $w(S_5) \leqslant \Delta + 27$.

2. Доказательство теоремы 1

Сначала покажем неулучшаемость оценки $w(S_5) \leqslant \Delta + 27$. Возьмем три концентрических Δ-цикла $V^i = v_1^i \dots v_\Delta^i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, и соединим V^2 с V^1 ребрами вида $v_j^2 v_j^1$ и $v_j^2 v_{j+1}^1$, где $1 \leqslant j \leqslant \Delta$, а сложение по $\bmod \Delta$. Аналогично поступим с парой циклов V^2 и V^3. Наконец, соединим все вершины из V^1 с новой Δ-вершиной и то же самое проделаем с циклом V^3. В получившейся триангуляции каждая 5-вершина смежна с двумя 5-вершинами, двумя 6-вершинами и Δ-вершиной.

Пусть теперь T_5 — контрпример к теореме 1. Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для T_5 перепишем в виде

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) = -12. \tag{1}$$

Сопоставим *заряд* $\mu(v) = d(v) - 6$ каждой вершине $v \in V$; видно, что только 5-вершины имеют отрицательный заряд, а именно -1. Используя свойства T_5 как контрпримера, произведем локальное перераспределение зарядов, сохраняющее их сумму, так, что ***новый заряд*** $\mu'(v)$ будет неотрицателен для всех $v \in V$. Это даст противоречие с тем фактом, что сумма новых зарядов согласно (1) равна -12.

Наши правила распределения следующие.

R1. *Каждая* $\geqslant 6$*-вершина* v *отдает* $\xi(v) = \frac{d(v)-6}{d(v)}$ *каждой инцидентной ей грани.*

R2. *Пусть грань* $f = xyz$ *такова, что* $d(x) = 5$ *и* $d(z) \geqslant 6$. *Тогда* x *получает от* f *заряд*:

(i) $\frac{\xi(z)}{2}$, *если* $d(y) = 5$,

(ii) $\xi(y) + \xi(z)$ *при* $d(y) \geqslant 6$.

Как нетрудно видеть, $\mu'(v) \geqslant 0$ при $d(v) \geqslant 6$. Нам остается показать, что при $d(v) = 5$ вершина v получает в сумме не менее 1 согласно правилам R1 и R2.

Замечание 1. Пусть 5-вершина v смежна с $\geqslant$ 6-вершиной w, тогда v получает от w один из зарядов $\xi(w)$, $\frac{3\xi(w)}{2}$ либо $2\xi(w)$ в зависимости от того, сколько 5-вершин, отличных от v, входят в грани, инцидентные ребру vw: две, одна или ни одной.

Для натурального $n \geqslant 6$ положим $\theta(n) = \frac{n-6}{n}$. В дальнейшем при оценке суммарного заряда, получаемого 5-вершиной по правилам R1 и R2, нам будет удобно пользоваться следующим легко доказываемым фактом.

Лемма 1. *Для любых целых* p, q, *где* $6 \leqslant p < q$, *выполняется неравенство* $\theta(p) + \theta(q) \leqslant \theta(p+1) + \theta(q-1)$.

Пусть степени вершин, смежных с 5-вершиной v, записаны в порядке неубывания как $(d_1, \ldots, d_5)$, т. е. $5 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_5$. Например, в приведенной в начале доказательства конструкции все вершины имеют вектор смежности $(5, 5, 6, 6, \Delta)$.

Отметим, что поскольку наша триангуляция T_5 является контрпримером, то выполняются следующие неравенства:

(*) $d_1 + \ldots + d_4 \geqslant 23$;

(**) $d_1 + \ldots + d_5 \geqslant 51$.

Случай 1. $6 \leqslant d_1$. Согласно замечанию 1 суммарный заряд, получаемый v, здесь равен $2(\theta(d_1) + \ldots + \theta(d_5))$, что ввиду леммы 1 не меньше

$$2(4\theta(6) + \theta(27)) = 2\theta(27) > 1.$$

Отсюда $\mu'(v) > 5 - 6 + 1 = 0$.

Случай 2. $5 = d_1 < d_2$. Аналогично суммарный заряд, полученный v, теперь не меньше $\frac{3}{2}(\theta(d_2) + \ldots + \theta(d_5))$, что не меньше

$$\frac{3}{2}(3\theta(6) + \theta(28)) = \frac{3}{2}\theta(28) > 1.$$

Отсюда $\mu'(v) > 0$.

Случай 3. $5 = d_1 = d_2 < d_3$. Отметим, что при фиксированных d_3, d_4 и d_5 наша v получает меньше, если две соседние с ней 5-вершины образуют 3-грань с нею, нежели если они в окружении v идут не подряд. В наихудшем случае одна из $\geqslant 6$-соседок вершины v передает v свою долю θ с коэффициентом 1, а две другие — с коэффициентом $\frac{3}{2}$.

Ясно, что суммарный заряд, полученный v, теперь не меньше

$$\frac{3}{2}\theta(d_3) + \frac{3}{2}\theta(d_4) + \theta(d_5),$$

что не меньше

$$\frac{3}{2}\theta(6) + \frac{3}{2}\theta(7) + \theta(28) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{22}{28} = 1.$$

Отсюда $\mu'(v) \geqslant 0$.

Случай 4. $5 = d_1 = d_2 = d_3 < d_4$. Отметим, что $d_4 \geqslant 8$ ввиду (*). Ясно, что v получает не меньше $\theta(d_4) + \theta(d_5)$, т. е. не меньше

$$\theta(8) + \theta(28) = \frac{1}{4} + \frac{22}{28},$$

откуда $\mu'(v) > 0$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appel K., Haken W.* The existence of unavoidable sets of geographically good configurations // Illinois J. Math. 1976. V. 20. P. 218–297.
2. *Wernicke P.* Uber den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. Bd 58. S. 413–426.
3. *Franklin Ph.* The four color problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.

4. *Lebesgue H.* Quelques consequences simple de la formule d'Euler // J. Math. Pure. Appl. 1940. V. 9. P. 27–43.
5. *Kotzig A.* From the theory of eulerian polyhedra // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–34. (in Russian).
6. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 5. С. 9–12.
7. *Jendrol'S., Madaras T.* On light subgraphs in plane graphs of minimal degree five // Discussiones Math. 1996. V. 16. P. 207–217.
8. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discussiones Math. 1998. V. 18, N. 2. P. 159–164.

г. Новосибирск, г. Якутск *15 марта 2008 г.*

УДК 517.956.4

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

О. А. Вихрева

Введение

Вопрос о разрешимости краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений рассмотрен во многих работах [1–5]. В этих работах для исследования краевых задач использованы метод априорных оценок, теоремы о неподвижных точках, геометрические методы, метод продолжения по параметру. В данной работе с помощью теоремы о сжимающих отображениях и вариационного метода доказывается существование единственного обобщенного решения задачи Дирихле для нелинейного вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка.

Постановка задачи

Рассмотрим некоторую ограниченную область Ω с границей $\Gamma \in C^1$. Положим $Q = \Omega \times (0,a)$, $S = \Gamma \times (0,a)$, $a > 0$, $\Gamma_0 = \Omega \times \{0\}$.

В области Q рассмотрим нелинейное вырождающееся эллиптическое уравнение

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,u,\nabla u)u_{x_j}) + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)u = f, \tag{1}$$

где весовая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям: $\varphi(t) > 0$ — непрерывная функция при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\nabla u =$

$(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, a_{ij} — вещественные измеримые в $\overline{\Omega}$ функции $(i, j = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие условиям симметричности: $a_{ij}(x, u, \nabla u) = a_{ji}(x, u, \nabla u)$ для любого $u \in C_0^\infty(Q)$, а $c(x, t)$ непрерывна в $\overline{Q}$ и $a(x, t)$ непрерывна в $\overline{Q} \cap \{t > \delta\}$ для $\forall \delta > 0$.

Пусть $\overset{\circ}{H}_1(Q)$ — замыкание класса $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} = \int\limits_Q \left[\varphi {u_t}^2 + \rho^2 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^2 \right] dQ,$$

где $\rho \in C(\overline{Q})$, $|\nabla \rho| \in L_2(\Omega)$, $\rho(x) > 0\ \forall x \in \Omega$.

Предположим, что выполнены неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x \in Q} |a_{ij}(x, u, \nabla u) \rho^{-2}(x)| < +\infty, \tag{2}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x \in Q} \left| \frac{a_{ij}(x, \varphi, \nabla \varphi) - a_{ij}(x, \psi, \nabla \psi)}{\rho^2(x)} \right| \leqslant M \left(\int\limits_Q \rho^2 \sum_{i=1}^n (\varphi_{x_i} - \psi_{x_i})^2 \, dQ \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

$$c_1 \rho^2 |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \varphi, \nabla \varphi) \xi_i \xi_j, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

для любых $\varphi, \psi \in \overset{\circ}{H}_1$, где M — положительное число, не зависящее от φ, ψ, x, ξ.

Положим

$$I = \int\limits_0^a \frac{1}{\varphi(t)} \, dt.$$

Введем вспомогательную функцию

$$S(t) = \int\limits_0^t \frac{d\xi}{\varphi}, \quad I < \infty.$$

Задача Дирихле

Пусть $I < \infty$. Для уравнения (1) требуется найти решение $u \in \overset{\circ}{H}_1(Q)$.

Определение. Функция $u \in \overset{\circ}{H}_1(Q)$ называется *обобщенным решением задачи Дирихле* для уравнения (1), если при $\varphi \equiv u$ выполнено интегральное тождество

$$U_\varphi[u,\upsilon] = \int\limits_Q \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\varphi,\nabla\varphi)u_{x_j}\upsilon_{x_i} + \varphi u_t \upsilon_t + au\upsilon_t - (c-a_t)u\upsilon\right] dQ$$
$$= -\int\limits_Q f\upsilon\, dQ \quad \forall \upsilon \in \overset{\circ}{H}_1. \quad (5)$$

Имеет место вложение

$$\overset{\circ}{H}_1 \hookrightarrow L_{2,\sigma^{-1}}(Q),$$

где весовая функция $\sigma(t)$ положительна при $t > 0$ и $\sigma(t) = (\varphi^{-1}(t)S^{-2}(t))$ при достаточно малых t. Тогда справедливо неравенство

$$\|\upsilon\|_{L_{2,\sigma^{-1}}(Q)} \leqslant A\,\|\upsilon\|_{\overset{\circ}{H}_1} \quad \forall \upsilon \in \overset{\circ}{H}_1,\ A > 0.$$

С другой стороны, в силу условий (2), (3) и

$$c - \frac{1}{2}a_t \leqslant 0 \quad \text{в } Q$$

получаем оценку

$$k\,\|\upsilon\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant U_\varphi[\upsilon,\upsilon] \quad \forall \upsilon \in \overset{\circ}{H}_1,$$

где $k = \min\{1, c_1\} > 0$.

Теорема. *Пусть* $q = \frac{Mn^2A}{k^2}\|f\|_{L_{2,\sigma^{-1}}} < 1$ *и коэффициент* a *при* $I < \infty$ *удовлетворяет условию:*

$$a \geqslant -C_2S^{-1}(t) \quad \text{и} \quad \left\|\rho^{-2}\right\|_{L_1(\Omega \bigcap b)} < \infty$$

для любого шара b с центром на Γ_0. Если

$$c(x,t) - \frac{1}{2}a_t \leqslant 0, \quad (x,t) \in Q,$$

то для любой функции $f \in L_{2,\sigma^{-1}}(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (1).

Доказательство. Определим нелинейный оператор $T : \overset{\circ}{H}_1 \to \overset{\circ}{H}_1$ равенством $u = T\varphi$ для любого $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1$, где u является единственным обобщенным решением задачи Дирихле для линейного вырождающегося эллиптического уравнения [6], т. е. удовлетворяет интегральному тождеству (5). Докажем, что если $q < 1$ и $f \in L_{2,\sigma^{-1}}(Q)$, где $\sigma(t)$ определена выше, то оператор T является сжимающим.

Пусть $\varphi, \psi \in \overset{\circ}{H}_1(Q)$ и $f \in L_{2,\sigma^{-1}}(Q)$. Положим $u = T\varphi$ и $\upsilon = T\psi$. Тогда имеем равенство

$$U_\varphi[u,\eta] = -(f,\eta) = U_\psi[\upsilon,\eta] \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{H}_1, \tag{6}$$

так как

$$U_\varphi[u,\eta] = \int\limits_Q \Bigg[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\varphi,\nabla\varphi)u_{x_j}\eta_{x_i} + \varphi u_t\eta_t + au\eta_t - (c-a_t)u\eta\Bigg]\,dQ = -\int\limits_Q f\eta\,dQ, \tag{7}$$

$$U_\psi[\upsilon,\eta] = \int\limits_Q \Bigg[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\psi,\nabla\psi)\upsilon_{x_j}\eta_{x_i} + \varphi \upsilon_t\eta_t + a\upsilon\eta_t - (c-a_t)\upsilon\eta\Bigg]\,dQ = -\int\limits_Q f\eta\,dQ \quad \forall\eta \in \overset{\circ}{H}_1. \tag{8}$$

Тогда из (6) при $U = u - \upsilon$ и $\eta = U$ получаем

$$U_\varphi[U,U] = \int\limits_Q \Bigg[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,\varphi,\nabla\varphi) - a_{ij}(x,\psi,\nabla\psi))\upsilon_{x_j}U_{x_i}\Bigg]\,dQ. \tag{9}$$

Из (8) следует, что

$$\begin{gathered} k\|v\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant \|f\|_{L_{2,\sigma^{-1}}}\|v\|_{L_{2,\sigma}} \leqslant A\|f\|_{L_{2,\sigma^{-1}}}\|v\|_{\overset{\circ}{H}_1}, \\ \|v\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant \frac{A}{k}\|f\|_{L_{2,\sigma^{-1}}}. \end{gathered} \tag{10}$$

Используя (3), (4), оценим (9):

$$k\|U\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant \left|\int\limits_Q \frac{\sum\limits_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,\varphi,\nabla\varphi) - a_{ij}(x,\psi,\nabla\psi))}{\rho^2(x)} \rho v_{x_j}\rho U_{x_i}\, dQ\right|,$$

$$\leqslant Mn^2\,\|\varphi-\psi\|_{\overset{\circ}{H}_1}\,\|v\|_{\overset{\circ}{H}_1}\,\|U\|_{\overset{\circ}{H}_1},$$

из которого в силу неравенства (10) следует оценка

$$\|T\varphi - T\psi\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant \frac{Mn^2A}{k^2}\,\|f\|_{L_{2,\sigma^{-1}}(Q)}\,\|\varphi-\psi\|_{\overset{\circ}{H}_1}.$$

В силу условия теоремы имеем

$$q = \frac{Mn^2A}{k^2}\,\|f\|_{L_{2,\sigma^{-1}}} < 1.$$

Таким образом, оператор T является сжимающим отображением пространства $\overset{\circ}{H}_1(Q)$ в себя. Следовательно, существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{H}_1(Q)$ такая, что $Tu = u$. Тогда функция $u = T\varphi$ является единственным обобщенным решением задачи Дирихле.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А, Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
3. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Пятков С. Г.* Об одном операторно-дифференцируемом уравнении // Краевые задачи для нелинейного уравнения: Сб. научных трудов СО АН СССР. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1982.

5. *Чуешев А. В.* Об одном нелинейном уравнении смешанного типа нечетного порядка // Вестн. Новосиб. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2001. Т. 1. Вып. 1. С. 107–123.

6. *Вихрева О. А.* Краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения: Сб. тр. 2-й республиканской научно-практической конференции «Информационные технологии в науке, образовании и экономике». Якутск: ЯГУ, 2003. С. 113–118.

г. Якутск *16 января 2008 г.*

УДК 517.946

ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

И. Е. Егоров

Известно, что теория сингулярных и вырождающихся уравнений породила обширную литературу [1–7]. В настоящей работе исследуется общая краевая задача на полуоси для сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения порядка $2m$. При этом постановка краевой задачи включает m весовых граничных условий.

Рассмотрим сингулярный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$L_{2m}(B_\nu)\equiv B_\nu^m + a_1 B_\nu^{m-1} + \cdots + a_{m-1}B_\nu + a_m,$$

где $B_\nu = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu+1}{t}\frac{d}{dt}$, ν — вещественное число.

Предположим, что его характеристический многочлен

$$L(\lambda)\equiv\lambda^{2m} + a_1\lambda^{2m-2} + \cdots + a_m$$

удовлетворяет условию: уравнение

$$L(\lambda) = 0 \tag{1}$$

не имеет чисто мнимых корней.

Для формулировки известных условий Лопатинского [1, 6, 7] обозначим через $\lambda_1^-, \ldots, \lambda_m^-$ корни уравнения (1), лежащие в левой полуплоскости. Тогда корни уравнения (1) $\lambda_j^+ = -\lambda_j^-$, $j = \overline{1,m}$, лежат в правой полуплоскости.

Определим весовую функцию $\sigma_\nu(t)$ по формуле

$$\sigma_\nu(t)=\begin{cases} t^{2\nu} & \text{при} \;\; \nu>0,\\ (-\ln t)^{-1} & \text{при} \;\; \nu=0,\\ 1 & \text{при} \;\; \nu<0.\end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$L_{2m}(B_\nu)u=0, \quad 0<t, \; |u(t)|\to 0 \quad \text{при} \;\; t\to+\infty, \tag{2}$$

$$\sigma_\nu(t)b_j(B_\nu)u|_{t=0}=\varphi_j, \quad j=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где граничные дифференциальные операторы имеют вид

$$b_j(B_\nu)=B_\nu^{m_j}+b_1B_\nu^{m_j-1}+\dots+b_{m_j}, \quad m_j\leqslant m-1.$$

Определим полиномы

$$L^-(\lambda)=\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k^-), \quad L^+(\lambda)=\prod_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k^+).$$

Представим характеристические многочлены граничных операторов в виде

$$b_j(\lambda^2)=q_j(\lambda)L_-(\lambda)+\beta_j(\lambda), \tag{4}$$

где $q_j(\lambda)$ и $\beta_j(\lambda)$ — полиномы, причем степень $\beta_j(\lambda)$ не превосходит $m-1$. Пусть

$$\beta_j(\lambda)=\beta_{j1}+\beta_{j2}\lambda+\dots+\beta_{jm}\lambda^{m-1}, \quad j=\overline{1,m}.$$

Введем матрицу

$$B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mm}\end{pmatrix}.$$

Далее считаем, что для граничных операторов выполнено условие Лопатинского

$$\det B\neq 0. \tag{5}$$

В работе [6] В. В. Катрахов ввел оператор типа Сонина и Пуассона, а также изучил их основные свойства. Обозначим через $S(\overline{R^1_+})$ множество всех функций из класса $C^\infty(\overline{R^1_+})$ на полуоси $[0,+\infty)=\overline{R^1_+}$, убывающих при $t\to+\infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени t^{-1}. Для $v\in S(\overline{R^1_+})$ определяем оператор типа Пуассона по формуле

$$P_\nu v(t)=\frac{-1}{\Gamma\left(\frac12-\nu\right)}t^{-2\nu}\int\limits_1^\infty (y^2-1)^{-\nu-\frac12}v(yt)\,dy,\quad t>0, \tag{6}$$

где $\Gamma(\mu)$ — функция Эйлера.

Отметим, что формула (6) определена для $\operatorname{Re}\nu<\frac12$, а для остальных ν оператор P_ν определяется путем аналитического продолжения по параметру ν и ветвь многозначной функции выбирается соответствующим образом [6].

Введем оператор

$$\widetilde{P}_\nu=\begin{cases} P_\nu & \text{при}\quad \operatorname{Re}\nu\geqslant 0,\\ t^{-2\nu}P_{-\nu} & \text{при}\quad \operatorname{Re}\nu<0.\end{cases}$$

Обозначим через $S_\nu\bigl(R^1_+\bigr)$ образ множества $S\bigl(\overline{R^1_+}\bigr)$ при отображении $\widetilde{P}_\nu$.

Определим оператор типа Сонина по формуле

$$S_\nu u(t)=\frac{2}{\Gamma\left(\nu+\frac12\right)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^\infty (y^2-t^2)^{\nu-\frac12}yu(y)\,dy,\quad u\in S_\nu\bigl(\overline{R^1_+}\bigr). \tag{7}$$

Формула (7) определяет S_ν для $\operatorname{Re}\nu>-\frac12$. Теперь введем оператор

$$\widetilde{S}_\nu=\begin{cases} S_\nu & \text{при}\quad \operatorname{Re}\nu\geqslant 0,\\ S_{-\nu}t^{2\nu} & \text{при}\quad \operatorname{Re}\nu<0,\end{cases}$$

определенный на множестве $S_\nu\bigl(R^1_+\bigr)$.

Теорема 1. *Операторы $\widetilde{P}_\nu$, $\widetilde{S}_\nu$ являются операторами преобразования, при этом имеют место*

$$\widetilde{P}_\nu\widetilde{S}_\nu=\widetilde{S}_\nu\widetilde{P}_\nu=I,\quad B_\nu\widetilde{P}_\nu=\widetilde{P}_\nu\frac{d^2}{dt^2},\quad \widetilde{S}_\nu B_\nu=\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{S}_\nu.$$

Справедливость теоремы 1 непосредственно следует из результатов работы [6].

Теорема 2. *Краевая задача* (2), (3) *имеет единственное решение в классе* $S_\nu\big(\overline{R^1_+}\big)$ *при любых* φ_j, $j=\overline{1,m}$, *тогда и только тогда, когда выполнено условие Лопатинского* (5).

Доказательство. В силу теоремы 1 для $v\in S_\nu\big(\overline{R^1_+}\big)$ имеют место равенства

$$\widetilde{S}_\nu L_{2m}(B_\nu)\widetilde{P}_\nu v = L_{2m}\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)v,$$

$$\sigma_\nu(t)b_j(B_\nu)\widetilde{P}_\nu v|_{t=0} = C_\nu b_j\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)v\bigg|_{t=0}.$$

Следовательно, разрешимость краевой задачи (2), (3) в классе $S_\nu\big(R^1_+\big)$ эквивалентна разрешимости следующей краевой задачи:

$$L_{2m}\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)v=0,\ 0<t,\quad |v(t)|\to\infty \text{ при } \ t\to\infty, \tag{$2'$}$$

$$b_j\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)v\bigg|_{t=0} = C_\nu^{-1}\varphi_j,\quad j=\overline{1,m}, \tag{$3'$}$$

в классе $S\big(\overline{R^1_+}\big)$. Тогда на основании теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 7] краевая задача ($2'$), ($3'$) имеет единственное решение при любых φ_j, $j=\overline{1,m}$, тогда и только тогда, когда выполнено условие (5). Поэтому однозначная разрешимость краевой задачи (2), (3) в классе $S_\nu\big(R^1_+\big)$ эквивалентна условию Лопатинского (5). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие Лопатинского* (5). *Тогда краевая задача* (2), (3) *однозначно разрешима в классе* $S_\nu\big(R^1_+\big)$ *при любых* φ_j, $j=\overline{1,m}$, *и имеет место оценка*

$$|\sigma_\nu(t)u(t)|\leqslant C\sum_{j=1}^m|\varphi_j|, \tag{8}$$

где константа $C>0$ *не зависит от* φ_j, $j=\overline{1,m}$.

Доказательство. Пусть a_j^-, $j=\overline{1,m}$, являются коэффициентами полинома

$$L^-(\lambda)=\lambda^m+a_1^-\lambda^{m-1}+\dots+a_m^-.$$

Обозначим через b^{kj} элементы матрицы B^{-1}. Введем полиномы

$$L_k^-(\lambda)=\sum_{s=0}^{m}a_k^-\lambda^{k-s},\quad a_0^-=1,\quad k=\overline{0,m-1},$$

$$N_j(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}b^{kj}L_{m-k}^-(\lambda),\quad j=\overline{1,m}.$$

Сначала доказательство теоремы 3 проведем в случае $\nu\leqslant 0$. Заметим, что в силу теоремы 2 достаточно показать существование решения краевой задачи (2), (3) в классе $S_\nu\big(R_+^1\big)$.

Введем функцию

$$k_\nu(z)=\gamma_\nu\frac{K_\nu(z)}{z^\nu},\quad \gamma_\nu=\begin{cases}1, & \nu=0,\\ \frac{2^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu)}, & \nu<0,\end{cases}$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда порядка ν [8]. Тогда решение краевой задачи (2), (3) можно записать в виде

$$u(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\varphi_j}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-}\frac{k_\nu(-\lambda t)N_j(\lambda)}{L^-(\lambda)}d\lambda,\tag{9}$$

где Γ^- — контур, лежащий в левой полуплоскости и охватывающий корни $\lambda_1^-,\dots,\lambda_m^-$.

Действительно, в силу равенства

$$B_\nu^s k_\gamma(-\lambda t)=\lambda^{2s}k_\nu(-\lambda t)\tag{10}$$

и теоремы Коши имеем

$$L_{2m}(B_\nu)u(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\varphi_j}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-}k_\nu(-\lambda t)L^+(\lambda)N_j(\lambda)\,d\lambda=0,\quad t>0.$$

С учетом (10) и свойств функции $K_\nu(z)$ из формулы (9) получаем

$$\sigma_\nu(t)b_k(B_\nu)u(t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-} \frac{\sigma_\nu(t)k_\nu(-\lambda t)|_{t=0} b_k(\lambda^2)N_j(\lambda)}{L^-(\lambda)}\, d\lambda = \varphi_k,$$

$k = \overline{1,m}$, так как имеют место (4),

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-} \frac{\beta_k(\lambda)N_j(\lambda)}{L^-(\lambda)}\, d\lambda = \delta_j^k, \quad k,j = \overline{1,m},$$

и $\sigma_\nu(t)k_\nu(-\lambda t)|_{t=0} = 1$ при $\nu \leqslant 0$.

Следовательно, функция $u(t)$ удовлетворяет граничным условиям (3). В силу асимптотического представления функции Макдональда [8]

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad |\arg\ z| \leqslant \pi - \alpha,\ \alpha > 0.$$

Оценивая контурный интеграл в (9) получаем, что $u(t)$ принадлежит классу $S_\nu\big(R_+^1\big)$ и для нее справедлива оценка (8).

При $\nu > 0$ рассмотрим функцию

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-} \frac{t^{-2\nu}k_{-\nu}(-\lambda t)N_j(\lambda)}{L^-(\lambda)}\, d\lambda. \tag{11}$$

В силу равенств

$$B_\nu^s t^{-2\nu} = t^{-2\nu} B_{-\nu}^s$$

из формулы (11) снова в силу теоремы Коши имеем

$$L_{2m}(B_\nu)u(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j}{2\pi i} t^{-2\nu} \int\limits_{\Gamma^-} k_{-\nu}(-\lambda t)L^+(\lambda)N_j(\lambda)\, d\lambda = 0, \quad t > 0.$$

Теперь, как и выше, показываем, что функция $u(t)$, определенная формулой (11), принадлежит классу $S_\nu\big(R_+^1\big)$ и для нее справедливы граничные условия (3) и оценка (8) при $\nu > 0$. Теорема 3 доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

3. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973.

4. *Егоров И. Е.* О задаче Коши для сингулярного гиперболического уравнения четного порядка // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1981. С. 54–57.

5. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

6. *Катрахов В. В.* Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 3. С. 354–379.

7. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Изд-во НИИ МИОО НГУ, 1998.

8. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965.

г. Якутск *4 февраля 2008 г.*

УДК 518.9

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МНОЖЕСТВА СТРАТЕГИЙ ИГРОКА В РЕС-ЗАДАЧАХ

Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов

Работа продолжает исследование РЕС-задач, начатое авторами в работе [1]. Некоторые задачи выбора и принятия решений сводятся к одной или нескольким задачам выбора одной из двух возможностей: «поступить таким образом» или «не делать этого». Такого рода задачи будем называть ***задачами «за» и «против»*** или РЕС-***задачами*** (от латинского *pro et contra*). Для каждой РЕС-задачи рассматриваются определенные наборы аргументов (доводов) в пользу той или иной возможности. РЕС-задача определяется как совокупность множеств P, C и матрицы A, где

$$P \rightleftharpoons \{p_1, \ldots, p_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

есть множество аргументов «за»,

$$C \rightleftharpoons \{c_1, \ldots, c_m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

есть множество аргументов «против»,

$$A = \{a_{ij}\}, \quad i = \overline{1,\, n},\ j = \overline{1,\, m}, \tag{3}$$

есть $n \times m$-матрица, состоящая из элементов a_{ij}, являющихся экспертными оценками взаимодействия p_i и c_j. Таким образом, предполагается, что каждый аргумент «за» p_i из P сравнивается с каждым аргументом «против» c_j из C и методом экспертных оценок [2] (или каким-либо другим способом) получаются числа a_{ij}, которые мы и назвали *экспертными оценками взаимодействия* p_i и c_j. Чем больше значение a_{ij}, тем более значим и убедителен аргумент «за» p_i по сравнению с аргументом «против» c_j, и, наоборот, чем меньше значение a_{ij}, тем более значим и убедителен аргумент «против» c_j по сравнению с аргументом «за» p_i.

Пусть $\widehat{A}$ — множество всех $n \times m$-матриц с элементами из R^1 $(n, m \in \mathbb{N})$. Очевидно, что любая $n \times m$-матрица A из $\widehat{A}$ определяет РЕС-задачу с множествами P (1) и C (2) и экспертными оценками a_{ij} (3) взаимодействия p_i и c_j.

Пусть A — $n \times m$-матрица из $\widehat{A}$. Авторами ранее было показано, что для вычисления решения порождаемой ею РЕС-задачи (т. е. определения интегральной экспертной оценки) достаточно найти цену соответствующей матричной игры [3]. Поэтому, рассматривая РЕС-задачу (1)–(3), уместно говорить *об игроках с множествами стратегий* (*аргументов*) P и C.

Рассмотрим теперь вопрос влияния объединения игроком любых двух аргументов на решение РЕС-задачи.

Будем говорить, что первый (максимизирующий) игрок *объединил аргументы* p_s и p_t $(s, t \in \{1, \ldots, n\},\ s \neq t)$, если вместо РЕС-задачи (1)–(3) рассматривается РЕС-задача с множествами P^1, C и $(n-1) \times m$-матрицей A^1, где

$$P^1 = \left\{p_1^1, \ldots, p_{n-1}^1\right\} \tag{4}$$

— множество, получающееся из множества P путем удаления аргументов p_s, p_t и добавления нового аргумента p_r^1 $(r \in \{1, \ldots, n-1\})$,

$$A^1 = \left\{a_{ij}^1\right\}, \quad i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, m}, \tag{5}$$

— матрица, получающаяся из матрицы A путем удаления строк с индексами s, t и добавления новой строки с индексом r такой, что $a_{rj}^1 = \max(a_{sj}, a_{tj})$, $j = \overline{1, m}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы в* РЕС-*задаче* (1)–(3) *первый игрок имел возможность объединить любые два своих аргумента, не изменяя* *решения* РЕС-*задачи, достаточно существования у него оптимальной чистой стратегии.*

Доказательство. Предположим, что имеем РЕС-задачу (1)–(3) и существует оптимальная чистая стратегия первого игрока. Рассмотрим РЕС-задачу (4), (2), (5), т. е. предположим, что первый игрок объединил в аргументе p_r^1 два своих аргумента p_s и p_t. Видно, что максимумы в каждом столбце матрицы (5) равны соответствующим значениям в матрице (3). Тогда оптимальной чистой стратегией (аргументом «за») первого игрока в РЕС-задаче (4), (2), (5) будет оптимальная чистая стратегия первого игрока в исходной РЕС-задаче или аргумент p_r^1. Таким образом, решения рассматриваемых РЕС-задач совпадают. Теорема доказана.

Следствие 1. *Утверждение теоремы верно и для объединения более чем двух аргументов.*

Следствие 2. *Утверждение теоремы дает достаточное условие не только для объединения, но и для разбиения аргумента на несколько аргументов.*

Следствие 3. *Изменяя соответствующие формулировки, можно доказать аналогичную теорему и для второго игрока.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров Р. И., Кайгородов С. П.* Моделирование РЕС-задач с помощью теории игр // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 8–12.

2. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.

3. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.

г. Якутск *28 декабря 2007 г.*

УДК 517.946

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В СЛУЧАЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

О. А. Колтуновский

В прямоугольнике $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + \lambda u_t + q(x)a(x,t)u = f_0(x,t), \tag{1}$$

где λ — известная постоянная, $f_0(x,t)$ и $a(x,t)$ — известные функции, заданные при $(x,t) \in \overline{D}$.

В работе рассматривается

Обратная задача. *Найти функции $u(x,t)$ и $q(x)$, связанные в D уравнением* (1) *и такие, что выполняются условия*

$$u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^T \alpha(t)u(x,t)\,dt = h_0(x), \quad 0 < x < 1. \tag{5}$$

Условия (2)–(4) являются условиями первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения (1). Условие (5) — условие интегрального переопределения, позволяющее найти вместе с решением $u(x,t)$ и неизвестный коэффициент $q(x)$. Функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\alpha(t)$, $h_0(x)$ известны и заданы при $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$.

Так как неизвестными являются решение и коэффициент уравнения (1), обратная задача будет нелинейной. Нелинейные обратные задачи для гиперболических уравнений в различных постановках рассматривались в работах [1–7] и в ряде других, однако в вышеприведенной постановке подобные задачи ранее не изучались. Методы исследования, примененные в данной работе, близки к методам работы [8].

Сделаем следующее

Предположение 1. *Существует функция* $U = U(x,t)$ *из класса* $C^2(\overline{D})$, *удовлетворяющая граничным условиям* (2)–(4).

Произведем замену

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$$

и переформулируем обратную задачу: *требуется найти функции* $v(x,t)$ *и* $q(x)$, *связанные в прямоугольнике* D *уравнением*

$$v_{tt} - v_{xx} + \lambda v_t + q(x)a(x,t)u = f(x,t), \tag{1'}$$

при выполнении условий

$$v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{2'}$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{3'}$$

$$v_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{4'}$$

$$\int\limits_0^T \alpha(t)v(x,t)\,dt = h(x), \quad 0 < x < 1. \tag{5'}$$

Функции $f(x,t)$ и $h(x)$ равны соответственно

$$f(x,t) = f_0(x,t) - (U_{tt} - U_{xx} + \lambda U_t),$$

$$h(x) = h_0(x) - \int\limits_0^T \alpha(t)U(x,t)\,dt.$$

Умножим обе части уравнения ($1'$) на функцию $\alpha(t)$, проинтегрируем почленно получившееся равенство по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=T$, придем к равенству

$$q(x)=\frac{\int\limits_0^T \alpha(t)f(x,t)\,dt+h''(x)-\alpha(T)v_t(x,T)+\int\limits_0^T[\alpha'(t)-\lambda\alpha(t)]v_t(x,t)\,dt}{\int\limits_0^T \alpha(t)a(x,t)v(x,t)\,dt+\int\limits_0^T \alpha(t)a(x,t)U(x,t)\,dt}. \tag{6}$$

Далее будем предполагать выполнение при $0\leqslant x\leqslant 1$ следующих неравенств:

$$\begin{gathered}0<H_1\leqslant\int\limits_0^T \alpha(t)f(x,t)\,dt+h''(x)\leqslant H_2,\\ 0<A_1\leqslant\int\limits_0^T \alpha(t)a(x,t)U(x,t)\,dt\leqslant A_2.\end{gathered} \tag{7}$$

Введем семейство срезающих функций $\sigma_\rho(\zeta)$ при $\rho>0$:

$$\sigma_\rho(\zeta)=\begin{cases}\zeta, & \text{если } |\zeta|\leqslant\rho,\\ -\zeta, & \text{если } \zeta\leqslant-\rho,\\ \zeta, & \text{если } \zeta\geqslant\rho.\end{cases}$$

Для функции $p(x,t)$, заданной в прямоугольнике $\overline{D}$, и чисел $\beta,\gamma\in(0,1)$ определим коэффициент

$$Q_p(x)=\frac{\int\limits_0^T \alpha(t)f(x,t)\,dt+h''(x)+\sigma_{\beta H_1}(\zeta_1)}{\int\limits_0^T \alpha(t)a(x,t)U(x,t)\,dx+\sigma_{\gamma A_1}(\zeta_2)}, \tag{8}$$

где

$$\zeta_1=-\alpha(T)p_t(x,T)+\int\limits_0^T[\alpha'(t)-\lambda\alpha(t)]p_t(x,t)\,dt,$$

$$\zeta_2=\int\limits_0^T \alpha(t)a(x,t)p(x,t)\,dt.$$

Определим постоянные, которые понадобятся ниже:

$$Q_1 = \frac{(1-\beta)H_1}{\gamma A_1 + A_2}, \quad Q_2 = \frac{\beta H_1 + H_2}{(1-\gamma)A_1},$$

$$F_0 = \|f\|_{L_\infty(D)} + Q_2 \max_{\overline{D}} |a(x,t)U(x,t)|,$$

$$\widetilde{F}_0 = \|f_t\|_{L_\infty(D)} + Q_2 \max_{\overline{D}} |[a(x,t)U(x,t)]_t|,$$

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{7}{3}T^3 & \text{при } \lambda = 0, \\ \dfrac{1}{8\lambda^3}\left(6\lambda^2T^2 - 2\lambda T + \ln\dfrac{1+4\lambda T}{1+2\lambda T}\right) & \text{при } \lambda > 0, \end{cases}$$

$$\Phi_0 = (\bar{\lambda} + 5/2T)F_0^2 + 14/3T^3\widetilde{F}_0^2.$$

Определим пространства функций, используемые далее:

$$V = \bigl\{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^2(D) \cap L_\infty\bigl(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\bigr),$$
$$v_t(x,t) \in L_\infty\bigl(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\bigr)\bigr\},$$

$$\widetilde{V} = \{v(x,t) : v(x,t) \in V, v_{xxt} \in L_2(D)\}.$$

Нормы в этих пространствах определим равенствами

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^2(D)} + \|v\|_{L_\infty(0,T,\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))} + \|v_t\|_{L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))},$$

$$\|v\|_{\widetilde{V}} = \|v\|_V + \|v_{xxt}\|_{L_2(D)}.$$

Исследуем вспомогательную задачу: требуется найти функцию $v(x,t)$, которая удовлетворяет в прямоугольнике D уравнению ($\varepsilon > 0$)

$$-\varepsilon v_{xxt} + v_{tt} - v_{xx} + \lambda v_t + Q_v(x)a(x,t)v = F_v(x,t) \tag{9}$$

и граничным условиям (2′), (3′), (4′).

Функция $F_v(x,t)$ равна $f(x,t) - Q_v(x)a(x,t)U(x,t)$. Заметим, что уравнение (9) — нелинейное нагруженное [9, 10] уравнение составного типа.

Теорема 1. *Пусть выполняются предположение* 1, *неравенства* (7) *и включения* $f(x,t) \in L_\infty(D)$, $f_t(x,t) \in L_\infty(D)$, $\alpha(t) \in C^1([0,T])$, $h(x) \in C^2([0,1])$. *Предположим также, что постоянная* λ *не меньше* 0, *функция* $a(x,t)$ *принадлежит* $C^1(\overline{D})$ *и выполняются неравенства при* $(x,t) \in \overline{D}$:

$$a(x,t) > 0, \quad a_t(x,t) \leqslant 0,$$

$$4Q_2 a(x,t)(2T-t) \leqslant \sqrt{1+2\lambda(2T-t)},$$

$$Q_2[a(x,t) + |a_t(x,t)|(2T-t)] \leqslant 1/8,$$

$$Q_2 a(x,0) \leqslant 1/4.$$

Тогда задача (9), (2′), (3′), (4′) *имеет решение* $v(x,t)$ *из пространства* $\widetilde{V}$.

Доказательство. Пусть $p(x,t) \in \widetilde{V}$. Линеаризуем уравнение (9) и рассмотрим задачу: *найти функцию* $v(x,t)$, *удовлетворяющую в прямоугольнике* D *уравнению*

$$-\varepsilon v_{xxt} + v_{tt} - v_{xx} + \lambda v_t + Q_p(x)a(x,t)v = F_p(x,t) \tag{9_p}$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия (2′), (3′), (4′).

Разрешимость этой задачи в пространстве $\widetilde{V}$ фактически установлена в книге [11], так как коэффициент $Q_p(x)$ ограничен в силу своего определения (8): $Q_1 \leqslant Q_p(x) \leqslant Q_2$.

Получим априорные оценки решений задачи (9_p), (2′), (3′), (4′).

Умножим обе части уравнения (9_p) на выражение $(2T-t)(v_t - v_{xxt})$ и проинтегрируем получившееся равенство по прямоугольнику D. В правой части произведем интегрирование по частям с учетом условия ($3'$), применим неравенство Коши и получим оценку

$$\left|\iint\limits_D F_p(2T-t)(v_t - v_{xxt})\,dxdt\right| \leqslant \left|\iint\limits_D F_p(2T-t)v_t\,dxdt\right|$$
$$+\left|\iint\limits_D [F_p(2T-t)]_t v_{xx}\,dxdt\right| + T\left|\int\limits_0^1 v_{xx}(x,T)F_p(x,T)\,dx\right|$$
$$\leqslant \iint\limits_D \left[\frac{1}{2}\lambda(2T-t)+\frac{1}{4}\right]v_t^2\,dxdt + \iint\limits_D F_p^2\frac{(2T-t)^2}{2\lambda(2T-t)+1}\,dxdt$$
$$+\frac{1}{4}\iint\limits_D v_{xx}^2\,dxdt + \iint\limits_D [F_p(2T-t)]_t^2\,dxdt$$
$$+\frac{1}{2}T\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,T)\,dx + \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 F_p^2(x,T)\,dx.$$

В силу определения функции $F_p(x,t)$, коэффициента $Q_p(x,t)$, чисел F_0 и $\widetilde{F}_0$, а также условий теоремы 1 получим окончательную оценку

$$\left|\iint\limits_D F_p(2T-t)(v_t - v_{xxt})\,dxdt\right| \leqslant \iint\limits_D \left[\frac{1}{2}\lambda(2T-t)+\frac{1}{4}\right]v_t^2\,dxdt$$
$$+\frac{1}{4}\iint\limits_D v_{xx}^2\,dxdt + \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,T)\,dx + \Phi_0. \quad (10)$$

Рассмотрим левую часть

$$\iint\limits_D (-\varepsilon v_{xxt} + v_{tt} - v_{xx} + \lambda v_t + Q_p a v)(2T-t)(v_t - v_{xxt})\,dxdt.$$

Произведем интегрирование по частям с учетом однородных граничных условий ($2'$), ($3'$), ($4'$) и выделим знакоопределенные неотрицательные в силу условий теоремы 1 слагаемые I^+ и остальные слагаемые I:

$$I^+ = \varepsilon \iint\limits_D v_{xt}^2(2T-t)\,dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_D v_t^2\,dxdt + \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 v_t^2(x,T)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_D v_x^2\,dxdt + \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 v_x^2(x,T)\,dx + \iint\limits_D \lambda v_t^2(2T-t)\,dxdt$$

$$+ \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 Q_p(x)a(x,T)v^2(x,T) - \frac{1}{2}\iint\limits_D Q_p[a(2T-t)]_t v^2 dxdt$$

$$+ \varepsilon \iint\limits_D v_{xxt}^2(2T-t)dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_D v_{xt}^2\,dxdt + \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,T)\,dx$$

$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_D v_{xx}^2\,dxdt + \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,T)\,dx + \iint\limits_D \lambda v_{xt}^2(2T-t)\,dxdt,$$

$$I = -T\int\limits_0^1 Q_p(x)a(x,T)v(x,T)v_{xx}(x,T)\,dx$$

$$+ \iint\limits_D Q_p v_{xx}\{a(2T-t)v_t + [a(2T-t)]_t v\}\,dxdt.$$

Далее в доказательстве теоремы 1 положительные постоянные M_i ($i = 1,\dots$) зависят только от входных данных задачи (9), ($2'$), ($3'$), ($4'$) — известных функций и их норм в соответствующих пространствах, определяемых условиями теоремы 1, но не зависят от числа $\varepsilon > 0$. Из неравенства

$$\iint\limits_D (-\varepsilon v_{xxt} + v_{tt} - v_{xx} + \lambda v_t + Q_p av)(2T-t)(v_t - v_{xxt})\,dxdt$$

$$\leqslant \left|\iint\limits_D F_p(2T-t)(v_t - v_{xxt})\,dxdt\right|$$

или

$$I^{+} + I \leqslant \left| \iint\limits_{D} F_p(2T-t)(v_t - v_{xxt})\,dxdt \right|$$

в силу условий теоремы 1 и оценки (10) получаем оценку

$$M_1\big(\|v\|^2_{W_2^2(D)} + \varepsilon\|v_{xxt}\|^2_{L_2(D)}\big) + \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 v_x^2(x,T)\,dx + \frac{1}{2}T\int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,T)\,dx \leqslant \Phi_0. \quad (11)$$

Заметим следующее: если при оценке интеграла

$$\left| \iint\limits_{D} F_p(2T-t)(v_t - v_{xxt})\,dxdt \right|$$

не проводить интегрирование по частям, то аналогичным образом получается оценка

$$\|v\|^2_{W_2^2(D)} + \varepsilon\|v_{xxt}\|^2_{L_2(D)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}M_2\|F_p\|^2_{L_2(D)}. \quad (12)$$

Рассмотрим прямоугольник $D_\tau = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 1 < t < \tau\}$, где τ — произвольное число из интервала $[0,T]$. Аналогично предыдущему умножим обе части уравнения (9_p) на выражение $(2\tau - t)(v_t - v_{xxt})$, проинтегрируем получившееся равенство по прямоугольнику D_τ, используем оценку (12) и тогда приходим к оценке

$$\|v\|^2_{\widetilde{V}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}M_3\|F_p\|^2_{L_2(D)}. \quad (13)$$

Как указывалось выше, задача (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$ разрешима в пространстве $\widetilde{V}$, т. е. данная задача порождает оператор P, переводящий пространство $\widetilde{V}$ в себя: $P(p) = v$. Покажем, что оператор P имеет в $\widetilde{V}$ неподвижную точку.

Для решений задачи (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$ выполняется оценка (13), из которой в силу определения функции $F_p(x,t)$ и условий теоремы 1 следует оценка

$$\|v\|^2_{\widetilde{V}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}M_4\big(\|f\|^2_{L_2(D)} + \|U\|_{C^2(\overline{D})}\big). \quad (14)$$

Следовательно, оператор P любой шар пространства $\widetilde{V}$ радиуса r такого, что
$$r \geqslant \frac{1}{\varepsilon} M_4\big(\|f\|^2_{L_2(D)} + \|U\|_{C^2(\overline{D})}\big),$$
будет переводить в себя.

Покажем теперь, что оператор P вполне непрерывен.

Пусть $\{p_n(x,t)\}$ — ограниченная последовательность из пространства $\widetilde{V}$, $\{v_n(x,t)\}$ — последовательность образов функций $p_n(x,t)$ при действии оператора P. В силу (14) последовательность $\{v_n(x,t)\}$ ограничена в пространстве $\widetilde{V}$. Заметим, что последовательности $\{p_n(x,T)\}$, $\{p_{nt}(x,T)\}$ будут ограниченными последовательностями в $W_2^1(0,1)$. Из ограниченности последовательностей $\{p_n(x,t)\}$, $\{v_n(x,t)\}$, $\{p_n(x,T)\}$, $\{p_{nt}(x,T)\}$ и компактности вложения $W_2^1(0,1)$ в $C([0,1])$ следует [12], что существуют подпоследовательности $\{p_{n_k}(x,t)\}$ и $\{v_{n_k}(x,t)\}$ соответствующих последовательностей и функции $p(x,t)$ и $v(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости:
$$\begin{gathered}
p_{n_k}(x,t) \to p(x,t) \quad \text{слабо в } \widetilde{V} \text{ и почти всюду в } \overline{D},\\
v_{n_k}(x,t) \to v(x,t) \quad \text{слабо в } \widetilde{V} \text{ и почти всюду в } \overline{D},\\
p_{n_k}(x,T) \to P(x,T) \quad \text{сильно в } C([0,1]),\\
p_{n_k t}(x,T) \to p_t(x,T) \quad \text{сильно в } C([0,1]).
\end{gathered}$$
Из этих сходимостей следует, что функции $p(x,t)$ и $v(x,t)$ связаны уравнением (9_p), функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям ($2'$), ($3'$), ($4'$).

Обозначим $w_k(x,t) = v_{n_k}(x,t) - v(x,t)$. Имеет место равенство
$$-\varepsilon w_{kxxt} + w_{ktt} - w_{kxx} + Q_{p_{n_k}} w = (Q_p - Q_{p_{n_k}})(v+U).$$
Это равенство, оценка (13) для функций $w_k(x,t)$, сильная сходимость $p_{n_k}(x,T) \to p(x,T)$ и $p_{n_k t}(x,T) \to p_t(x,T)$ в $C([0,1])$ и определение $Q_p(x)$ дают сходимость
$$\|w_k\|_{\widetilde{V}} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$
Другими словами, для всякой ограниченной в пространстве $\widetilde{V}$ последовательности $\{p_n(x,t)\}$ из последовательности $\{P(p_n)\}$ можно извлечь

сильно сходящуюся подпоследовательность. Это и означает, что оператор P вполне непрерывен в пространстве $\widetilde{V}$.

Вполне непрерывность оператора P, его свойство переводить шар пространства $\widetilde{V}$ достаточно большого радиуса в себя и теорема Шаудера дают нам, что оператор P имеет в пространстве $\widetilde{V}$ неподвижную точку. Эта неподвижная точка, т. е. функция $v(x,t)$ из пространства $\widetilde{V}$, и будет искомым решением задачи (9), (2′), (3′), (4′).

Теорема 1 доказана.

Достаточные условия существования решения обратной задачи (1′)–(5′) приведены в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1 *и условия согласования* $h(0) = h(1) = 0$. *Предположим также, что выполняются неравенства*

$$\sqrt{\frac{2\Phi_0}{T}} \left\{ |\alpha(T)| + \int\limits_0^T |\alpha'(t) - \lambda\alpha(t)|\, dt \right\} \leqslant \beta H_1,$$

$$\sqrt{\frac{2\Phi_0}{T}} \max_{[0,1]} \int\limits_0^T |\alpha(t) a(x,t)|\, dt \leqslant \gamma A_1.$$

Тогда существует решение $\{v(x,t), q(x)\}$ *обратной задачи* (1′), (2′), (3′), (4′), (5′) *такое, что* $v(x,t) \in V$, $q(x) \in L_\infty(0,1)$.

Доказательство. В теореме 1 доказано существование решения $v_\varepsilon(x,t) \in \widetilde{V}$ задачи (9), (2′), (3′), (4′) для любого значения $\varepsilon > 0$.

Оценка (11) влечет неравенства

$$\int\limits_0^1 v_{\varepsilon x}^2(x,T)\, dx \leqslant \frac{2\Phi_0}{T}, \quad \int\limits_0^1 v_{\varepsilon xt}^2(x,T)\, dx \leqslant \frac{2\Phi_0}{T}.$$

Применим известные неравенства

$$|v_\varepsilon(x,T)| \leqslant \left(\int\limits_0^1 v_{\varepsilon x}^2(x,T)\, dx \right)^{1/2}, \quad |v_{\varepsilon t}(x,T)| \leqslant \left(\int\limits_0^1 v_{\varepsilon xt}^2(x,T)\, dx \right)^{1/2},$$

тогда

$$|v_\varepsilon(x,T)| \leqslant \sqrt{\frac{2\Phi_0}{T}}, \quad |v_{\varepsilon t}(x,T)| \leqslant \sqrt{\frac{2\Phi_0}{T}} \ \text{ при } \ x \in [0,1].$$

В силу условий теоремы

$$\sigma_{\beta H_1}(\zeta_1) = \zeta_1, \quad \sigma_{\gamma A_1}(\zeta_2) = \zeta_2,$$

поэтому $Q_v(x) = q(x)$, где функция $q(x)$ определена равенством (6).

Покажем, что с помощью предельного перехода по параметру ε можно доказать разрешимость в пространстве V задачи $(1')$–$(5')$.

Из оценки (11) можно получить оценку

$$\|v_\varepsilon\|_V^2 + \varepsilon \|v_{\varepsilon xxt}\|_{L_2(D)}^2 \leqslant M_5 \Phi_0 \tag{15}$$

(аналогично способу получения оценки (13)).

Оценка (15) означает, что существуют числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, подпоследовательность функций $\{v_{\varepsilon_k}(x,t)\}$ и функция $v(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_k \to 0, \\
v_{\varepsilon_k}(x,t) \to v(x,t) \quad \text{слабо в } V \ \text{ и почти всюду в } \overline{D}, \\
\varepsilon_k v_{\varepsilon_k xxt} \to 0 \quad \text{слабо в } L_2(D), \\
v_{\varepsilon_k}(x,T) \to v(x,T) \quad \text{сильно в } C([0,1]), \\
v_{\varepsilon_k t}(x,T) \to v_t(x,T) \quad \text{сильно в } C([0,1]).
\end{gathered}$$

Следовательно, функция $v(x,t)$ удовлетворяет в прямоугольнике D уравнению

$$v_{tt} - v_{xx} + \lambda v_t + q(x)a(x,t)(v+U) = f(x,t), \tag{$1'$}$$

а также условиям $(2')$, $(3')$, $(4')$.

Докажем, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет и условию $(5')$.

Введем функцию

$$I(x) = \int\limits_0^T \alpha(t) v(x,t)\, dx,$$

тогда в силу условий $(2')$ $I(0) = I(1) = 0$.

Умножим уравнение $(1')$, где коэффициент $q(x)$ определен равенством (6), на функцию $\alpha(t)$ и проинтегрируем получившееся уравнение почленно по переменной t в пределах от 0 до T. После преобразований имеем $I''(x) = h''(x)$, по условию теоремы 2 $I(0) = h(0)$, $I(1) = h(1)$, поэтому $I(x) = h(x)$ и условие $(5')$ выполнено.

Итак, функции $v(x,t)$ и $q(x)$ являются решением обратной задачи $(1')$–$(5')$, причем предельная функция $v(x,t)$ принадлежит V, функция $q(x)$ принадлежит $L_\infty(0,1)$ по построению.

Теорема 2 доказана.

Обсудим вопрос о единственности решения обратной задачи $(1')$–$(5')$.

Пусть $\{v(x,t), q(x)\}$ — решение обратной задачи, где функция $v(x,t)$ принадлежит V, коэффициент $q(x)$ принадлежит $L_\infty(0,1)$ и определен равенством (6):

$$q(x) = \frac{\tilde{q}(x)}{\tilde{\tilde{q}}(x)},$$

причем при $x \in [0,1]$

$$0 < H_1^* \leqslant \bar{q}(x) \leqslant H_2^*, \quad 0 < A_1^* \leqslant \tilde{\tilde{q}}(x) \leqslant A_2^*.$$

По теореме 2 такое решение и такие числа H_1^*, H_2^*, A_1^*, A_2^* существуют, например

$$H_1^* = (1-\beta)H_1, \quad H_2^* = (1+\beta)H_2,$$
$$A_1^* = (1-\gamma)A_1, \quad A_2^* = (1+\gamma)A_2.$$

Тогда при $x \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$0 < q_1^* = \frac{H_1^*}{A_2^*} \leqslant q(x) \leqslant q_2^* = \frac{H_2^*}{A_1^*}.$$

Обозначим

$$S(t) = H_2^*|\alpha(t)| \max_{x\in[0,1]} a(x,t) + A_2^*|\alpha''(t) - \lambda\alpha'(t)|, \quad K^* = \int\limits_0^T S^2(t)\,dt,$$

$$a^* = q_1^* \min_{\overline{D}} \frac{[a + |a_t|(2T - t)][1 + 2\lambda(2T - t)]}{a^2(2T - t)^2},$$

$$R^* = \frac{4}{a^*} \iint\limits_D \frac{f^2 + (q_2^*)^2 a^2 U^2}{1 + 2\lambda(2T - t)} (2T - t)^2 \, dxdt + 2 \iint\limits_D \frac{a^2 U^2}{1 + 2\lambda(2T - t)} (2T - t)^2 \, dxdt.$$

Заметим, что при $a_{tt}(x,t) \leqslant 0$ (см. условия теорем 1 и 2) a^* можно взять в виде

$$a^* = \frac{q_1^*(1 + 2\lambda T)}{4T^2} \min_{[0,1]} \frac{a(x,T) + T|a_t(x,0)|}{a^2(x,0)}.$$

Лемма 1. *Пусть в уравнении* $(1')$ $\lambda \geqslant 0$; $a(x,t) \in C^1(\overline{D})$ *и* $a(x,t) > 0$, $a_t(x,t) \leqslant 0$ *при* $(x,t) \in \overline{D}$; $q(x) \in L_\infty(0,1)$ *и* $0 < q_1^* \leqslant q(x) \leqslant q_2^*$; $f(x,t) \in L_\infty(D)$. *Тогда для решения задачи* $(1')$–$(4')$ *из пространства* V *справедлива оценка*

$$\iint\limits_D \frac{a^2(v + U)^2(2T - t)^2}{1 + 2\lambda(2T - t)} \, dxdt \leqslant R^*. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим следствие уравнения $(1')$:

$$\iint\limits_D (v_{tt} - v_{xx} + \lambda v_t + qav) v_t (2T - t) \, dxdt = \iint\limits_D (f - qav) v_t (2T - t) \, dxdt.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, в левой части произведем интегрирование по частям с учетом однородных граничных условий $(2')$–$(4')$, правую оценим, используя неравенство Коши

$$\iint\limits_D \frac{1}{2} q[a + |a_t|(2T - t)] v^2 \, dxdt \leqslant \frac{1}{4} \iint\limits_D \frac{(f - qaU)^2 (2T - t)^2}{\frac{1}{2} + \lambda(2T - t)} \, dxdt. \tag{17}$$

Продолжим оценку (17):

$$\iint\limits_D \frac{q[a+|a_t|(2T-t)][1+2\lambda(2T-t)]}{a^2(2T-t)^2}\cdot\frac{a^2(2T-t)^2}{[1+2\lambda(2T-t)]}v^2\,dxdt \leqslant \iint\limits_D \frac{(2f^2+2q^2a^2U^2)(2T-t)^2}{1+2\lambda(2T-t)}\,dxdt,$$

или

$$\iint\limits_D \frac{a^2(2T-t)^2}{1+2\lambda(2T-t)}v^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{a^*}\iint\limits_D \frac{(2f^2+2(q_2^*)^2a^2U^2)(2T-t)^2}{1+2\lambda(2T-t)}\,dxdt.$$

Поэтому

$$\iint\limits_D \frac{a^2(v+U)^2(2T-t)^2}{1+2\lambda(2T-t)}\,dxdt \leqslant \iint\limits_D \frac{2a^2v^2+2a^2U^2}{1+2\lambda(2T-t)}(2T-t)^2dxdt \leqslant R^*.$$

Лемма 1 доказана.

Достаточные условия единственности решения приведены в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия леммы 1, функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^2([0,T])$, причем $\alpha(T)=\alpha'(T)=0$.*

Предположим также, что справедливо неравенство

$$\frac{K^*R^*}{(A_1^*)^2} < 1. \tag{18}$$

Тогда существует единственное решение $\{v(x,t),q(x)\}$ обратной задачи $(1')$–$(5')$ такое, что $v(x,t)\in V$, $q(x)\in L_\infty(0,1)$, $0<q_1^*\leqslant q(x)\leqslant q_2^*$.

Доказательство. Пусть функции $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ — два решения обратной задачи $(1')$–$(5')$ такие, что $v_1(x,t),v_2(x,t)\in V$, $0<q_1^*\leqslant q_i(x)\leqslant q_2^*$ $(i=1,2)$. Их разность $\bar v(x,t)=v_1(x,t)-v_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar v_{tt}-\bar v_{xx}+\lambda\bar v_t+q_1a\bar v=(q_2-q_1)a(v_2+U)$$

и однородным граничным условиям $(2')$–$(4')$.

Как и в доказательстве теоремы 1, можно получить оценку

$$M_6 \iint\limits_D \bar{v}^2\, dxdt + \iint\limits_D \bar{v}_x^2\, dxdt \leqslant \iint\limits_D (q_2 - q_1)^2 \frac{a^2(v_2 + U)^2(2T - t)^2}{1 + 2\lambda(2T - t)}\, dxdt. \quad (19)$$

Разность $q_2(x) - q_1(x)$ после преобразований с учетом условий теоремы 3 равна

$$q_2(x) - q_1(x) = \frac{\int\limits_0^T (\tilde{q}_2(x)\alpha(t)a(x,t) + \tilde{\tilde{q}}_2(x)[\alpha''(t) - \lambda\alpha'(t)])\bar{v}(x,t)\, dt}{\tilde{\tilde{q}}_1(x)\tilde{\tilde{q}}_2(x)}.$$

Воспользуемся известным неравенством

$$|\bar{v}(x,t)| \leqslant \left(\int\limits_0^1 \bar{v}_x^2(x,t)\, dx\right)^{1/2}$$

и неравенством Гёльдера, тогда

$$(q_2(x) - q_1(x))^2 \leqslant \frac{1}{(A_1^*)^2}\left(\int\limits_0^T [H_2^*|\alpha(t)| \max_{x\in[0,1]} a(x,t) + A_2^*|\alpha''(t) - \lambda\alpha'(t)|]|\bar{v}(x,t)|\, dt\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{(A_1^*)^2}\left(\int\limits_0^T S(t)\left(\int\limits_0^1 \bar{v}_x^2(x,t)\, dx\right)^{1/2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{(A_1^*)^2}\int\limits_0^T S^2(t)\, dt \cdot \int\limits_0^T\int\limits_0^1 \bar{v}_x^2(x,t)\, dxdt.$$

Продолжим оценку (19) с учетом результата леммы 1:

$$M_6 \iint\limits_D \bar{v}^2\, dxdt + \iint\limits_D \bar{v}_x^2\, dxdt \leqslant \frac{1}{(A_1^*)^2}\int\limits_0^T S^2(t)\, dt \cdot \iint\limits_D \bar{v}_x^2\, dxdt \cdot R^* = \frac{K^*R^*}{(A_1^*)^2}\iint\limits_D \bar{v}_x^2\, dxdt.$$

Так как неравенство (18) строгое, равны нулю следующие интегралы:

$$\iint\limits_D \bar{v}_x^2\, dxdt = 0 \quad \text{и} \quad \iint\limits_D \bar{v}^2\, dxdt = 0,$$

следовательно, $\bar{v}(x,t) = 0$ в прямоугольнике $\overline{D}$.

Теорема 3 доказана.

Далее рассматривается

Обратная задача II. *Найти функции* $u(x,t)$ *и* $q(x)$*, связанные в прямоугольнике* D *уравнением*

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)a(x,t)u_t = f_0(x,t) \tag{20}$$

и такие, что выполняются условия (2)–(5).

Будем считать, как и выше, что выполняется предположение 1.

Произведем замену

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$$

и переформулируем обратную задачу: требуется найти функции $v(x,t)$ и $q(x)$, связанные в прямоугольнике D уравнением

$$v_{tt} - v_{xx} + q(x)a(x,t)u_t = f(x,t), \tag{20$'$}$$

при выполнении условий (2′)–(5′).

Функции $f(x,t)$ и $h(x)$ в данном случае равны соответственно

$$f(x,t) = f_0(x,t) - (U_{tt} - U_{xx}),$$

$$h(x) = h_0(x) - \int\limits_0^T \alpha(t)U(x,t)\, dt.$$

Умножим обе части уравнения (20′) на функцию $\alpha(t)$, проинтегрируем почленно получившееся равенство по переменной t в пределах от $t = 0$ до $t = T$, приходим к равенствам

$$q(x) = \frac{\int\limits_0^T \alpha(t)f(x,t)\, dt + h''(x) - \alpha(T)v_t(x,T) + \int\limits_0^T \alpha'(x)v_t(x,t)\, dt}{\int\limits_0^T \alpha(t)a(x,t)v_t(x,t)\, dt + \int\limits_0^T \alpha(t)a(x,t)U_t(x,t)\, dt}. \tag{21}$$

Далее будем предполагать выполнение при $0 \leqslant x \leqslant 1$ следующих неравенств:

$$
\begin{gathered}
0 < H_1 \leqslant \int_0^T \alpha(t) f(x,t)\, dt + h''(x) \leqslant H_2, \\
0 < B_1 \leqslant \int_0^T \alpha(t) a(x,t) U_t(x,t)\, dt \leqslant B_2.
\end{gathered} \tag{22}
$$

Для функции $p(x,t)$, заданной в прямоугольнике $\overline{D}$, и чисел $\beta, \gamma \in (0,1)$ определим коэффициент

$$
\widetilde{Q}_p(x) = \frac{\int_0^T \alpha(t) f(x,t)\, dt + h''(x) + \sigma_{\beta H_1}(\zeta_1)}{\int_0^T \alpha(t) a(x,t) U_t(x,t)\, dt + \sigma_{\gamma B_1}(\zeta_2)}, \tag{23}
$$

где

$$
\zeta_1 = -\alpha(T) p_t(x,T) + \int_0^T \alpha'(t) p_t(x,t)\, dt, \quad \zeta_2 = \int_0^T \alpha(t) a(x,t) p_t(x,t)\, dt.
$$

Определим постоянные, которые понадобятся ниже:

$$
\widetilde{Q}_1 = \frac{(1-\beta)H_1}{\gamma B_1 + B_2}, \quad \widetilde{Q}_2 = \frac{\beta H_1 + H_2}{(1-\gamma)B_1},
$$

$$
\overline{F}_0 = \|f\|_{L_\infty(D)} + \widetilde{Q}_2 \max_{\overline{D}} |a(x,t) U_t(x,t)|,
$$

$$
\overline{\overline{F}}_0 = \|f_t\|_{L_\infty(D)} + \widetilde{Q}_2 \max_{\overline{D}} |[a(x,t) U_t(x,t)]_t|,
$$

$$
\widetilde{\Phi}_0 = (14/3T^3 + 13/4T)\overline{F}_0^2 + 14/3T^3 \overline{\overline{F}}_0^2.
$$

Исследуем вспомогательную задачу: *требуется найти функцию $v(x,t)$, которая удовлетворяет в прямоугольнике D уравнению* ($\varepsilon > 0$)

$$
-\varepsilon v_{xxt} + v_{tt} - v_{xx} + Q_v(x) a(x,t) v_t = F_v(x,t) \tag{24}
$$

и граничным условиям (2′), (3′), (4′).

Функция $F_v(x,t)$ равна $f(x,t) - Q_v(x) a(x,t) U_t(x,t)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются предположение 1, неравенства (22) и включения $f(x,t) \in L_\infty(D)$, $f_t(x,t) \in L_\infty(D)$, $\alpha(t) \in C^1([0,T])$, $h(x) \in C^2([0,1])$. Предположим также, что функция $a(x,t)$ принадлежит $C^1(\overline{D})$ и при $(x,t) \in \overline{D}$ выполняются неравенства*

$$a(x,t) > 0, \quad a_t(x,t) \leqslant 0,$$

$$\widetilde{Q}_2 a(x,0) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \widetilde{Q}_2 a(x,0)T \leqslant \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{16}[1 + 4\widetilde{Q}_1 a(x,t)(2T-t) + \widetilde{Q}_1 |a_t(x,t)|] \geqslant \widetilde{Q}_2^2 [a(x,t) + |a_t(x,t)|(2T-t)].$$

Тогда задача (24), (2′), (3′), (4′) имеет решение $v(x,t)$ из пространства $\widetilde{V}$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 1, только вместо вспомогательного множителя $(2T-t)(v_t - v_{xxt})$ используется выражение $(2T-t)(v_t - v_{xxt}) + \dfrac{1}{2}v_{tt}$.

Достаточные условия существования решения обратной задачи (20′), (2′), (3′), (4′), (5′) приведены в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть выполняются все условия теоремы 4 и условие согласованности $h(0) = h(1) = 0$. Предположим также, что выполняются неравенства*

$$\sqrt{\frac{2\widetilde{\Phi}_0}{T}} \left\{ |\alpha(T)| + \int\limits_0^T |\alpha'(t)|\, dt \right\} \leqslant \beta H_1,$$

$$\sqrt{\frac{2\widetilde{\Phi}_0}{T}} \max_{[0,1]} \int\limits_0^T |\alpha(t) a(x,t)|\, dt \leqslant \gamma B_1.$$

Тогда существует решение $\{v(x,t), q(x)\}$ обратной задачи (20′), (2′)–(5′) такое, что $v(x,t) \in V$, $q(x) \in L_\infty(0,1)$.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 2.

Обсудим вопрос о единственности решения задачи (20′), (2′)–(5′).

Пусть $\{v(x,t), q(x)\}$ — решение обратной задачи, где функция $v(x,t)$ принадлежит V, коэффициент $q(x)$ принадлежит $L_\infty(0,1)$ и определен равенством (21):

$$q(x) = \frac{\tilde{q}(x)}{\tilde{\tilde{q}}(x)},$$

причем при $x \in [0,1]$

$$0 < \overline{H}_1^* \leqslant \tilde{q}(x) \leqslant \overline{H}_2^*, \quad 0 < \overline{B}_1^* \leqslant \tilde{\tilde{q}}(x) \leqslant \overline{B}_2^*.$$

По теореме 5 такое решение существует. Тогда при $x \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$0 < \bar{q}_1^* = \frac{\overline{H}_1^*}{\overline{B}_2^*} \leqslant q(x) \leqslant \bar{q}_2^* = \frac{\overline{H}_2^*}{\overline{B}_1^*}.$$

Обозначим

$$\bar{a}^* = \frac{\bar{q}_1^*}{T \max\limits_{[0,1]} a(x,0)},$$

$$\overline{R}^* = \frac{4}{\bar{a}^*} \cdot \frac{1}{\bar{q}_1^*} \iint\limits_D \frac{f^2 + (\bar{q}_2^*)^2 a^2 U_t^2}{a} (2T - t)\, dxdt + 2 \iint\limits_D a^2 U_t^2 (2T-t)^2\, dxdt,$$

$$\overline{S}(t) = \overline{H}_2^* |\alpha(t)| \max_{x \in [0,1]} a(x,t) + \overline{B}_2^* |\alpha'(t)|, \quad \overline{K}^* = \int\limits_0^T \overline{S}^2(t)\, dt.$$

Достаточные условия единственности решения приведены в следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть в уравнении* $(20')$ *функция* $a(x,t)$ *принадлежит* $C^1(\overline{D})$ *и* $a(x,t) > 0$, $a_t(x,t) \leqslant 0$ *при* $(x,t) \in \overline{D}$; *функция* $\alpha(t)$ *принадлежит* $C^1([0,T])$, *причем* $\alpha(T) = 0$; *функция* $f(x,t)$ *принадлежит* $L_\infty(D)$.

Предположим также, что справедливо неравенство

$$\frac{\overline{K}^* \overline{R}^*}{(\overline{B}_1^*)^2} < 1.$$

Тогда существует единственное решение $\{v(x,t), q(x)\}$ *обратной задачи* $(20')$, $(2')$–$(5')$ *такое, что* $v(x,t) \in V$, $q(x) \in L_\infty(0,1)$, $0 < \bar{q}_1^* \leqslant q(x) \leqslant \bar{q}_2^*$.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
2. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
3. *Аниконов Ю. Е.* Формулы в обратных задачах для уравнений 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 4. С. 848–850.
4. *Savateev E. G.* An inverse problem for the Burger's equation and its hyperbolic regularization // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N. 3. P. 231–244.
5. *Savateev E. G.* Well-posedness and reduction of an inverse problem for a hyperbolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1994. V. 2, N. 2. P. 165–180.
6. *Denisov A. M.* Determination of a nonlinear coefficient in a hyperbolic equation for the Goursat problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 6, N. 4. P. 327–334.
7. *Scheglov A. Yu.* The inverse problem of determination of a nonlinear course in a hyperbolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 6, N 6. P. 625–644.
8. *Валитов И. Р., Кожанов А. И.* Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 1, С. 3–18.
9. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1995.
10. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теорет. и прикл. математики, 1995.
11. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
12. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

г. Южно-Сахалинск *18 августа 2006 г.*

УДК 517.956.4

О ГЛАДКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ

С. В. Попов, А. А. Суслонова

Первыми глубокими исследованиями в области уравнений смешанного типа стали работы Ф. Трикоми, опубликованные в 20-х гг. прошлого столетия. Для уравнения

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

которое называется *уравнением Трикоми*, изучалась основная краевая задача (задача Трикоми).

Ф. И. Франкль обнаружил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. И. Н. Векуа указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. А. В. Бицадзе впервые сформулировал принцип экстремума для задачи Трикоми. Позднее он был доказан и для других краевых задач для уравнений смешанного типа. Из принципа экстремума непосредственно следует единственность решения этих задач. А. В. Бицадзе получил существенно новые результаты значительной теоретической важности для модельного уравнения смешанного типа. Далее, в работах К. И. Бабенко, В. Ф. Волкодавова, В. Н. Врагова, Т. Ш. Кальменова, И. Л. Короля, Е. И. Моисеева, А. М. Нахушева, С. М. Пономарева, С. П. Пулькина, М. С. Салахатдинова и др. были поставлены и исследованы новые задачи для подобных уравнений смешанного типа.

Известно, что доказательство существования решения задачи Трикоми сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно неизвестной плотности $\nu(x)$, разрешимость которого следует из известной теоремы единственности исходной задачи:

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{x+t-2xt}\right)\nu(t)\,dt=F(x), \qquad (2)$$

где

$$F(x)=\frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}.$$

В работе М. М. Смирнова [1] доказано, что решение $\nu(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{6}+\varepsilon$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

В настоящей работе исследована разрешимость этого сингулярного интегрального уравнения в более гладких классах Гёльдера, а значит, гладкость решений задачи Трикоми. Решения существуют при выполнении некоторого количества условий разрешимости на данные задачи.

Рассмотрим уравнение (1), которое при $y>0$ является эллиптическим, а при $y<0$ — гиперболическим; $y=0$ — параболическая линия уравнения (1). Пусть Γ — кривая, совпадающая с «нормальной» кривой Γ_0:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{9}y^3=\frac{1}{4},\quad y\geqslant 0,$$

с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, лежащая в верхней полуплоскости. Уравнение (1) при $y<0$ имеет два различных семейства вещественных характеристик. Уравнениями

$$\xi\equiv x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=0, \qquad (3)$$

$$\eta\equiv x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=1 \qquad (4)$$

определяются характеристики AC и BC из разных семейств (C — точка пересечения). Обозначим через D область, ограниченную кривой Γ и характеристиками AC и BC. Часть области D, лежащую в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$), обозначим через D^+ (D^-).

Задача Трикоми. *Найти в области D решение уравнения* (1), *непрерывное в $\overline{D}$, принимающее на кривой Γ и на одной из характеристик (например, на AC) заданные непрерывные значения $u|_\Gamma = \varphi(s)$, $u|_{AC} = \psi(x)$, $\varphi(l) = \psi(0)$, где l — длина кривой Γ.*

В силу результатов из [1, гл. II, § 4] функция Грина $G_0(x, y; x_0, y_0)$ задачи N для уравнения (1) в случае нормальной области D_0^+ выписывается в явном виде:

$$G_0(x, y; x_0, y_0) = q(x, y; x_0, y_0) - (2r_0)^{-\frac{1}{3}} q((x - 1/2, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0), \tag{5}$$

где

$$r_0^2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9} y_0^3, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{4r_0^2}, \quad \bar{y}_0^{\frac{3}{2}} = \frac{y_0^{\frac{3}{2}}}{4r_0^2},$$

и решение задачи N имеет вид

$$u(x, y) = -\int\limits_0^1 \nu(t) G_0(t, 0; x, y)\, dt - \int\limits_0^l \varphi(s) A_s[G_0(\xi, \eta; x, y)]\, ds. \tag{6}$$

Полагая здесь $y = 0$ и принимая во внимание (5) и

$$q(x, y; x_0, y_0) = k(r^+)^{-\frac{1}{3}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; 1 - \sigma\right) \tag{7}$$

— фундаментальное решение уравнения (1), где

$$(r^\mp)^2 = (x - x_0)^2 + \frac{4}{9}\big(y^{\frac{3}{2}} \mp y_0^{\frac{3}{2}}\big)^2, \quad \sigma = \frac{(r^-)^2}{(r^+)^2}, \quad k = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{4\pi \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)},$$

получим

$$\tau(x) + k\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{|x - t|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x + t - 2xt)^{\frac{1}{3}}}\right] \nu(t)\, dt = \Phi(x), \tag{8}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{k}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} x(1-x)\int\limits_0^1 \varphi(\xi)\xi^{-\frac{1}{3}}(1-\xi)^{-\frac{1}{3}}[x^2-(2x-1)\xi]^{-\frac{7}{6}}\,d\xi. \quad (9)$$

Решение уравнения (1) в гиперболической полуплоскости, удовлетворяющее данным Коши

$$u(x,0)=\tau(x), \quad \lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),$$

дается формулой

$$u(x,y)=\gamma_1\int\limits_0^1 \tau\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}\,dt$$
$$+\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\gamma_2 y\int\limits_0^1 \nu\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}\,dt, \quad (10)$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}, \quad \gamma_2=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}.$$

Приравнивая выражение (9) на характеристике AC к функции $\psi(x)$, будем иметь

$$\gamma_1\int\limits_0^1 \tau(2xt)t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}\,dt$$
$$-\gamma_2(2x)^{\frac{2}{3}}\int\limits_0^1 \nu(2xt)t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}\,dt=\psi(x), \quad (0\leqslant x\leqslant 1/2)$$

или

$$\int\limits_0^x (x-\xi)^{-\frac{5}{6}}\xi^{-\frac{5}{6}}\tau(\xi)\,d\xi-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}x^{-\frac{2}{3}}\int\limits_0^x \xi^{-\frac{1}{6}}(x-\xi)^{-\frac{1}{6}}\nu(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\gamma_1}x^{-\frac{2}{3}}\psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Отсюда, применяя известную формулу обращения

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{\Phi(t)\, dt}{(x-t)^{(1-\alpha)}}$$

для интегрального уравнения Абеля

$$\int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} \varphi(t)\, dt = \Phi(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

получим

$$\tau(x) = \psi_1(x) + k \int\limits_0^x (x-t)^{-\frac{1}{3}} \nu(t)\, dt, \tag{11}$$

где

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi\gamma_1} x^{\frac{5}{6}} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{\bar{\psi}(t)\, dt}{t^{\frac{2}{3}} (x-t)^{\frac{1}{6}}}, \quad \bar{\psi}(t) = \psi\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$k = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{4\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \tag{12}$$

Исключая теперь $\tau(x)$ из уравнений (7) и (10), будем иметь

$$\int\limits_0^x \frac{\nu(t)\, dt}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} + \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{(x+t-2xt)^{\frac{1}{3}}}\right] \nu(t)\, dt = \frac{1}{k} f(x), \tag{13}$$

где

$$f(x) = \Phi(x) - \psi_1(x). \tag{14}$$

Производя преобразования, приведем уравнение (12) к сингулярному уравнению

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt}\right) \nu(t)\, dt = F(x), \tag{15}$$

где

$$F(x) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}. \tag{16}$$

Итак, доказательство существования решения задачи Трикоми сводится к решению интегрального уравнения относительно $\nu(x)$, разрешимость которого следует из теоремы единственности исходной задачи [1, 2]:

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt}\right) \nu(t)\ dt = F(x), \tag{17}$$

где

$$F(x) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}, \tag{18}$$

при этом $f'(t)$ принадлежит классу Гёльдера $H^{\frac{\gamma}{3}}, 0 < \gamma < 1$, и $f(0) = 0$. Тогда $\nu(x) \in H^{\frac{1}{6}+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое (см. [1, с. 106]). Нетрудно заметить, что при выполнении требований на функцию $f(t)$ функция $F(x)$ принадлежит $H^{\frac{1+\gamma}{3}}(0,1)$. Это обеспечивает следующая

Лемма 1 [4, 7, 5]. *Если* $\varphi \in H^\beta, 0 < \alpha < \beta < 1$, *то*

$$\left\| \frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau \right\|_{H^{\beta-\alpha}} \leqslant C\|\varphi\|_{H^\beta},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau \in H^{\beta-\alpha}.$$

Так как $f'(x) \in H^{\frac{\gamma}{3}}$, отсюда следует, что $f(x) \in H^{\frac{\gamma}{3}+1}$. Из леммы 1 вытекает, что $F(x) \in H^{\frac{1+\gamma}{3}}$. Возникает вопрос: при каких условиях $\nu(x) \in H^{\frac{1+\gamma}{3}}$? Выведем условия, которые необходимы для этого. Будем предполагать, что $\nu(t)$ принадлежит требуемому пространству Гёльдера с показателем $\frac{1+\gamma}{3}$ и $\nu(0) = 0$.

Рассмотрим сначала уравнение (17):

$$F(x) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \left[\frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)-f(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\, dt + f(0) \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{dt}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} \right]$$

$$= \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \left[\frac{f(0)}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)-f(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\, dt \right] = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \left[\frac{f(0)}{x^{\frac{2}{3}}} + \int\limits_0^x \frac{f'(t)\, dt}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} \right].$$

В этом интеграле прибавим и отнимем $f'(0)$:

$$F(x) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \left[\frac{f(0)}{x^{\frac{2}{3}}} + \int\limits_0^x \frac{f'(t)-f'(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\, dt + f'(0) \int\limits_0^x \frac{dt}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} \right]$$

$$= \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \left[\frac{f(0)}{x^{\frac{2}{3}}} + \int\limits_0^x \frac{f'(t)-f'(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\, dt + f'(0) \left(-3(x-t)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^x \right) \right]$$

$$= \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \left[\frac{f(0)}{x^{\frac{2}{3}}} + 3x^{\frac{1}{3}} f'(0) + \int\limits_0^x \frac{f'(t)-f'(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\, dt \right].$$

Так как $f(0) = 0$, первое слагаемое исчезает. Тогда $F(x)$ примет вид

$$F(x) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \left[3x^{\frac{1}{3}} f'(0) + \int\limits_0^x \frac{f'(t)-f'(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\, dt \right].$$

В ядре интегрального уравнения ?????(18)? прибавим и отнимем $\frac{1}{t}$. **?!**
Получим

$$F(x) = \nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t} - \frac{1}{x+t-2xt} + \frac{1}{t} \right) \nu(t)\, dt$$

$$= \nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{x}{t(t-x)} - \frac{x(2t-1)}{t(x+t-2xt)} \right) \nu(t)\, dt$$

$$= \nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{2t-1}{x+t-2xt} \right) \nu(t)\, dt.$$

Приравняем обе полученные $F(x)$:

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{2t-1}{x+t-2xt}\right)\nu(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\left[3x^{\frac{1}{3}}f'(0)+\int_0^x\frac{f'(t)-f'(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\,dt\right]. \quad (19)$$

Теперь умножим обе части на $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ и устремим x к нулю:

$$\frac{\nu(x)}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{2t-1}{x+t-2xt}\right)\nu(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\left[3f'(0)+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\int_0^x\frac{f'(t)-f'(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\,dt\right].$$

Поскольку $\frac{\nu(x)}{x^{\frac{1}{3}}}\to 0$ при $x\to 0$, получим следующее условие:

$$\frac{2k}{3}\int_0^1\frac{\nu(t)2(1-t)}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt=f'(0). \quad (20)$$

При выполнении (20) уравнение (17) запишется в виде

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{(2t-1)^2}{x+t-2xt}\right)\nu(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\int_0^x\frac{f'(t)-f'(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\,dt. \quad (21)$$

Регуляризация и разрешимость полученного сингулярного уравнения доказывается стандартно (см. [3–5]). При этом решение, очевидно, будет принадлежать пространству $H^{\frac{1+\gamma}{3}}$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Решение* $\nu(x)$ *сингулярного уравнения* (18)*??????? удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\frac{1+\gamma}{3}$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно условие разрешимости, которое можно выписать в явном виде из равенства* (20). **?!**

Выведем условие, при котором $\nu(x)$ будет принадлежать классу Гёльдера с показателем $1 + \frac{1+\gamma}{3}$. Для этого предположим, что $\nu(x)$ принадлежит требуемому пространству Гёльдера и $\nu(0) = 0$.

Имеем

$$\frac{F(x)}{\frac{1}{k\pi\sqrt{3}}} = \int\limits_0^x \frac{f'(t) - f'(0)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}}\,dt = \int\limits_0^x (f'(t) - f'(0))3d - (x-t)^{\frac{1}{3}}$$

$$= -(f'(t) - f'(0))3(x-t)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^x + 3\int\limits_0^x f''(t)(x-t)^{\frac{1}{3}}\,dt$$

$$= 3\int\limits_0^x (f''(t) - f''(0))(x-t)^{\frac{1}{3}}\,dt + 3\int\limits_0^x f''(0)(x-t)^{\frac{1}{3}}\,dt,$$

где

$$3\int\limits_0^x f''(0)(x-t)^{\frac{1}{3}}\,dt = -\frac{9}{4}(x-t)^{\frac{4}{3}} f''(0)\Big|_0^x = \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} f''(0).$$

Рассмотрим уравнение

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{(2t-1)^2}{x+t-2xt}\right)\nu(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\frac{9}{4}f''(0) + 3\int\limits_0^x (f''(t) - f''(0))(x-t)^{\frac{1}{3}}\,dt,$$

умножим обе части полученного равенства на $\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ и устремим x к нулю.

Получим

$$\frac{\nu(x)}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \frac{1}{t^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{(2t-1)^2}{x+t-2xt} \right) \nu(t)\, dt$$
$$= \frac{1}{k\pi\sqrt{3}} \frac{9}{4} f''(0) + \frac{3}{x^{\frac{4}{3}}} \int\limits_0^x (f''(t) - f''(0))(x-t)^{\frac{1}{3}}\, dt.$$

Так как $\frac{\nu(x)}{x^{\frac{4}{3}}} \to 0$ при $x \to 0$, приходим к следующему условию:

$$\frac{16}{k} \int\limits_0^1 \frac{(1-t)\nu(t)}{t^{\frac{4}{3}}}\, dt = f''(0). \tag{22}$$

При выполнении условия (22) уравнение (21) запишется в виде

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{7}{3}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{(2t-1)^3}{x+t-2xt} \right) \nu(t)\, dt$$
$$= 3 \int\limits_0^x (f''(t) - f''(0))(x-t)^{\frac{1}{3}}\, dt. \tag{23}$$

Регуляризация и разрешимость полученного сингулярного уравнения доказывается стандартно (см. [3–5]). При этом решение, очевидно, будет принадлежать пространству $H^{1+\frac{1+\gamma}{3}}$.

Итак, доказана

Теорема 2. *Решение $\nu(x)$ сингулярного уравнения* (17) *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1 + \frac{1+\gamma}{3}$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия разрешимости, которые можно выписать в явном виде из равенств* (20) *и* (22).

Рассмотрим сингулярное уравнение (21), правая часть которого $F(x) \in H^{\frac{1+\gamma}{3}}(0,1)$, причем $F(x) = O(t^{\frac{1+\gamma}{3}})$ для малых t ($f'(0) = 0$).

Перепишем интегральное уравнение (21) в виде

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{K(x,t)}{t-x} \nu(t)\, dt = F(x), \tag{24}$$

где
$$K(x,t)=\frac{x+t-2xt-(2t-1)(t-x)}{x+t-2xt}=\frac{2t(1-t)}{x+t-2xt}.$$
Сингулярное уравнение (24) будем рассматривать как уравнение относительно $\nu_0(x)=\nu(x)x^{-\frac{1}{3}}$. Найдем решения $\nu_0(x)$, неограниченные при $x=0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при $x=1$. Для этого введем кусочно-голоморфную функцию [3, 4, 6]
$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1\frac{\nu_0(t)}{t-z}\,dt.$$
Тогда на основании формул Сохоцкого — Племеля уравнение (24) эквивалентно решению задачи сопряжения
$$\Psi^+(x)=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\Psi^-(x)+\frac{F(x)}{t^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3}+i)},\quad x\in(0,1),$$
$$\Psi^+(x)=\Psi^-(x),\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),$$
при дополнительном условии $\Psi(\infty)=0$. Так как $G=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ и
$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1\frac{\ln G}{t-z}\,dt\right)=(z-1)^{-\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{6}},\quad \theta=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{6},$$
в указанном выше классе каноническая функция равна
$$\chi(z)=(z-1)^{\frac{5}{6}}z^{-\frac{5}{6}},$$
индекс $\varkappa$ равен 0.

Согласно общей теории [3–6]
$$\Psi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_0^1\frac{F(t)}{t^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3}+i)\chi^+(t)(t-z)}\,dt.$$
Тогда
$$\nu(x)=x^{\frac{1}{3}}(\Psi^+(x)-\Psi^-(x))$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}F(x)-\frac{1}{4\pi}(1-x)^{\frac{5}{6}}x^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^1\frac{F(t)}{(1-t)^{\frac{5}{6}}t^{-\frac{1}{2}}(t-x)}\,dt.\qquad(25)$$

Из формулы (24) следует, что $\nu(0) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^{\frac{5}{6}} t^{\frac{1}{2}}}\, dt = 0. \tag{26}$$

При выполнении (25) формула (24) окончательно примет вид

$$\nu(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} F(x) - \frac{1}{4\pi}(1-x)^{\frac{5}{6}} x^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^{\frac{5}{6}} t^{\frac{1}{2}} (t-x)}\, dt.$$

Так как $F(t)$ принадлежит пространству $H^{\frac{1+\gamma}{3}}(0,1)$, функция $\nu(x)$, представленная формулой (26), удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\gamma}{3}$ во всех точках контура $(0,1)$, отличных от концов. Рассмотрим его поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [4, с. 76] легко видеть, что $\nu(0) = \nu(1) = 0$. Для дальнейшего исследования поведения их на концах контура воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2 [4, с. 82–86]. *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ вблизи c (c обозначает 0 или T), $0 < \lambda < 1$ и $0 < \mu < 1$. Тогда для точек контура $(0, T)$ интеграл типа Коши*

$$\Psi(t) = \frac{(t-c)^{\mu}}{2\pi i} \int_0^T \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - c)^{\mu}(\tau - t)}\, d\tau$$

удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c с показателем $\min\{\lambda, \mu\}$ при $\lambda \neq \mu$, и условию Гёльдера с показателем $\lambda - \varepsilon$ при $\lambda = \mu$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

В силу этой леммы и неравенства $\frac{1+\gamma}{3} < \min\{\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\}$ при $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ получим, что в формуле (26) функция $\nu(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1+\gamma}{3}$, условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2}$ при $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ и условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} - \varepsilon$ при $\gamma = \frac{1}{2}$.

Таким образом, при выполнении условия (24) мы получили функцию $\nu(x)$ из искомого пространства $H^{\frac{1+\gamma}{3}}(0,1)$, удовлетворяющую условиям

$$\nu(0) = \nu(1) = 0.$$

Подставив найденное значение функции $\nu(x)$ в (25), получим единственное условие однозначной разрешимости поставленной краевой задачи Трикоми.

Теорема 3. *Пусть* $F(x) \in H^p(0,1)$, $p = \frac{1+\gamma}{3}$. *Тогда при выполнении условия*

$$\int\limits_0^1 \frac{F(t)\,dt}{(1-t)^{\frac{5}{6}} t^{\frac{1}{2}}} = 0$$

единственное решение уравнения (23) *имеет вид*

$$\nu(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} F(x) - \frac{1}{4\pi} (1-x)^{\frac{5}{6}} x^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^{\frac{5}{6}} t^{\frac{1}{2}}}\ dt \tag{27}$$

и принадлежит пространству $H^q(0,1)$, *где*

1) $q = \frac{1+\gamma}{3}$, *если* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$;

2) $q = \frac{1}{2}$, *если* $\frac{1}{2} < \gamma < 1$;

3) $q = \frac{1}{2} - \varepsilon$, *если* $\gamma = \frac{1}{2}$, ε *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

При выполнении двух условий на данные задачи справедливо существование более гладкого решения $\nu(x)$.

Теорема 4. *Пусть* $F(x) \in H^p(0,1)$, $p = \frac{1+\gamma}{3}$, $\gamma > \frac{1}{2}$. *Тогда при выполнении условий*

$$\int\limits_0^1 \frac{F(t)\,dt}{(1-t)^{\frac{5}{6}} t^{\frac{1}{2}+k}} = 0, \quad k = 0, 1, \tag{28}$$

единственное решение уравнения (23) *имеет вид*

$$\nu(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} F(x) - \frac{1}{4\pi} (1-x)^{\frac{5}{6}} x^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^{\frac{5}{6}} t^{\frac{3}{2}}}\ dt \tag{29}$$

и принадлежит пространству $H^p(0,1)$.

Заключение. Прежде всего отметим основную идею доказательства разрешимости задачи Трикоми для уравнения (1). Идея состоит в том, что сначала отдельно решают задачу типа Дирихле в области D^+ и задачу Коши — Гурса в области D^-, считая известной функцию

$$\nu(x) = \lim_{y \to 0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Затем оба полученных решения вместе с их первыми производными непрерывно склеивают на отрезке AB параболической линии. Таким путем доказательство существования решения задачи Трикоми сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (15) относительно функции $\nu(x)$, разрешимость которого следует из теоремы единственности (см. $[1,2]$).

Отметим, что задачи Трикоми исследовались многими авторами [7–13]. Гладкие решения сингулярных интегральных уравнений, а также задачи Трикоми можно найти в работах [14–17].

В теоремах 1 и 2 выписываются условия гладкости, при выполнении которых решение сингулярного интегрального уравнения будет принадлежать пространствам Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma}{3}$ и $1+\frac{1+\gamma}{3}$.

Далее изучается решение интегрального уравнения (15). Решение $\nu(x)$ имеет вид (27), и для него справедливы теоремы 3 и 4.

Какой гладкостью обладает решение задачи Трикоми при доказанных теоремах 3, 4?

Введем определение решения задачи Трикоми класса R_2, более гладкого, чем класс R_1 $[1,2]$.

Определение. *Решением уравнения Трикоми класса* R_2 в области D называется функция $u(x,y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;

2) она дважды непрерывно дифференцируема в D^+ и удовлетворяет уравнению Трикоми;

3) для любого x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, существует

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu(x);$$

4) обобщенность решения в области D^- состоит в том, что функция $\tau(x) = u(x,0)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_1 = 1 + \gamma/3 > 5/6$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, а функция $\nu(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_2 = (1+\gamma)/3 > 1/6$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Теорема 5. *Пусть $\varphi(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $2-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ сколь угодно малое), а $\psi(\eta)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1+\frac{1+2\gamma}{6}$. Тогда при выполнении условий* (28) *в области D существует решение уравнения* (1), *принадлежащее классу R_2, такое, что*

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \quad u|_{\xi=0} = \psi(\eta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.
2. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1985.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1997.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
5. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
6. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
7. *Волкодавов В. Ф., Быстрова О. К.* Оценка решения и теорема единственности решения задачи Трикоми для одного класса уравнений с вырождением типа и порядка // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа: Сб. науч. трудов / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1990. С. 47–52.
8. *Макаров С. И.* О единственности решения задачи Трикоми для уравнения с двумя линиями вырождения // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. трудов / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1986. С. 169–171.
9. *Мередов М.* Задача Трикоми для одной системы уравнений смешанного типа // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа: Сб. науч. трудов / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1990. С. 140–143.
10. *Сабитов К. Б.* Об обобщенной задаче Трикоми для уравнений смешанного типа // Уравнения неклассического типа: Сб. науч. трудов / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1986. С. 145–150.

11. *Салтуганов Н. М.* Об одном обобщении задачи Трикоми для уравнения Трикоми // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: Сб. науч. трудов / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1989. С. 170–175.

12. *Смирнов М. М.* Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Уравнения неклассического типа: Сб. науч. трудов / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1986. С. 155–161.

13. *Хе К. Ч.* О явных формулах решения задач Дарбу и Коши — Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 710–717.

14. *Петрова Л. И., Попов С. В.* О разрешимости сингулярного интегрального уравнения Трикоми // Тез. докл. «Лаврентьевские чтения РС(Я)». Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2001. С. 40–41.

15. *Попов С. В.* О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1991. Вып. 102. С. 100–113.

16. *Суслонова А. А.* Об условиях гладкости решений сингулярного интегрального уравнения Трикоми // X Лаврентьевские чтения, посвященные 50-летию ЯГУ им. М. К. Аммосова: Сб. статей. Якутск: Изд-во ЯГУ, 2006. С. 69–75.

17. *Суслонова А. А., Попов С. В.* Об условиях гладкости решений сингулярного интегрального уравнения Трикоми // IV Всероссийская школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование развития Северных территорий РФ»: Тез. докл. Якутск: ИМИ ЯГУ (Филиал изд-ва ЯГУ), 2006. С. 51–52.

г. Якутск *21 января 2008 г.*

УДК 517.956.4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

С. В. Попов, Е. Ф. Шарин

I. На полосе $\Pi = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$ рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{1}$$

Ограниченные решения уравнения (1) будем искать на полуполосах $\Pi^+ = \{\Pi : x > 0\}$, $\Pi^- = \{\Pi : x < 0\}$ как решение двух начально-краевых задач при выполнении условий склеивания

$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad u'_x(-0,t) = u'_x(+0,t), \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\varphi\,(x) = \begin{cases} \varphi_1\,(x)\,, & x > 0, \\ \varphi_2\,(x)\,, & x < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — заданные функции.

По условию (2) на линии $x = 0$ требуется непрерывность самих решений с первыми частными производными по x. Покажем, что при этом получаются те же решения из [1]. В самом деле, на первой полуполосе Π^+ имеем

$$u\,(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, \frac{\nu\,(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \omega_1(x,t), \tag{4}$$

во второй полуполосе Π^- —

$$u(x,t)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau+\omega_2(x,t), \tag{5}$$

где

$$\omega_1(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi_1(\xi)\,d\xi,$$

$$\omega_2(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi_2(\xi)\,d\xi.$$

Из второго условия склеивания (2) с учетом (4), (5) получим

$$\nu(t)+\omega'_{2x}(-0,t)=\nu(t)+\omega'_{1x}(+0,t),$$

или

$$\omega'_{2x}(-0,t)-\omega'_{1x}(+0,t)=0. \tag{6}$$

Удовлетворив первому условию склеивания $u(-0,t)=u(+0,t)$, приходим к уравнению с оператором Абеля

$$2\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau=\omega_1(+0,t)-\omega_2(-0,t). \tag{7}$$

Если заданные функции постоянные $\varphi_1(x)=T_1$, $\varphi_2(x)=T_2$, то, обратив оператор Абеля в уравнении (7), получим

$$\frac{d}{dy}\int\limits_0^y\frac{dt}{(y-t)^{1/2}}\left[\int\limits_0^t\frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau=\Phi_0(t)\right]\Rightarrow\nu(t)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\Phi_0(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}, \tag{8}$$

где

$$\Phi_0(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}(\omega_1-\omega_2)=(T_1-T_2)\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Имеем

$$\nu(t)=\frac{T_1-T_2}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}=\frac{T_1-T_2}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Отметим, что при $x = 0$

$$u(0,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\frac{T_1-T_2}{2a\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + T_1$$

$$= \frac{T_2-T_1}{2\pi}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} + T_1 = \frac{T_1+T_2}{2},$$

где $\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} = \pi$. Таким образом, мы получим решение, обладающее такими же свойствами, что и в случае задачи Коши (см. [1]):

$$u\,(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_1-T_2}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \tag{9}$$

где

$$\Phi\,(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\omega e^{-z^2}dz$$

— функция ошибок. Очевидно, $\Phi(0) = 0$, $\Phi\,(+\infty) = 1$. Легко показать, что функция $\Phi\,(\omega)$ нечетная:

$$\Phi(-\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{-\omega} e^{-z^2}\,dz = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{-\omega} e^{-z^2}d(-z)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\omega} e^{-s^2}ds = -\Phi(\omega).$$

Отсюда $\Phi\,(-\infty) = -1$. Отметим, что начальная функция $\varphi\,(x)$ не является непрерывной, а претерпевает разрыв в точке $x = 0$. В этом случае решение, как и в задаче Коши, представимое интегралом Пуассона, уже не будет классическим, а имеет особую точку $x = 0$.

Поведение решения, представленного формулой (9), в особой точке $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ зависит от способа перехода к пределу:

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{t\to 0} u(x,t) = T_2, \quad \lim_{x\to 0-0}\lim_{t\to 0} u(x,t) = T_1,$$

$$\lim_{t\to 0}\lim_{x\to 0} u(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2}.$$

Более того, если рассмотреть одновременный переход к пределу при $x \to 0$, $t \to 0$ вдоль кривой $\frac{x}{2a\sqrt{t}} = \omega$, где $\omega \in (-\infty;+\infty)$ — постоянная, то с помощью формулы (9) имеем

$$\lim_{(x,t)\to(0,0)} u(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} - \frac{T_1-T_2}{2}\Phi\left(\omega\right), \quad \frac{x}{2a\sqrt{t}} = \omega.$$

Поскольку $-1 \leqslant \Phi(\omega) \leqslant 1$, получим любое значение, заключенное в пределах от T_1 до T_2.

Пусть теперь $\varphi_1 \in H^{2+\gamma_1}(0;+\infty)$, $0 < \gamma_1 < 1$, и $\varphi_2 \in H^{2+\gamma_2}(-\infty;0)$, $0 < \gamma_2 < 1$. Согласно общей теории [2–4] $u(x,t)$ принадлежит $H_{x\ \ t}^{2+\gamma_1,\ 1+\frac{\gamma_1}{2}}$ при условии принадлежности краевых условий $u_x(0,t) = \psi\left(t\right)$ пространству $H^{\frac{1+\gamma_1}{2}}$ и выполнении условия согласования

$$\psi\left(0\right) = u'_x(0,0) = \varphi'_1(0),$$

равносильного выполнению условия

$$\nu\left(0\right) = 0. \tag{10}$$

Введем обозначения

$$\Phi_0\left(t\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left(\omega_1-\omega_2\right), \quad \Phi_1\left(t\right) = \omega'_{2x}\left(-0,t\right) - \omega'_{1x}\left(+0,t\right).$$

Из второго условия склеивания имеем выполнение условия:

$$\Phi_1\left(0\right) = 0. \tag{11}$$

Удовлетворив первому условию склеивания (2), получим

$$\int\limits_0^t \frac{\nu\left(\tau\right)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = \Phi_0(t),$$

где

$$\omega_1(0,t) \in H^{1+\frac{\gamma_1}{2}}(0,T), \quad \omega_2(0,t) \in H^{1+\frac{\gamma_2}{2}}(0,T),$$

т. е. $\Phi_0(t) \in H^{\min(1+\frac{\gamma_1}{2},1+\frac{\gamma_2}{2})}(0,T)$.

В дальнейшем без ограничения общности предполагаем $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$. Тогда $\Phi_0(t) \in H^{1+\frac{\gamma_1}{2}}(0,T)$ и

$$\int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = \Phi_0(t) \in H^{1+\frac{\gamma_1}{2}}(0,T).$$

Применив известную формулу обращения оператора Абеля, приходим к соотношению

$$\nu(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} \in H^{\frac{1+\gamma_1}{2}}(0,T). \tag{12}$$

Преобразуем правую часть в полученном уравнении (12):

$$\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)-\Phi_0(0)}{(t-\tau)^{1/2}}\, d\tau$$
$$+\frac{\Phi_0(0)}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\Phi_0'(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}\, d\tau + \frac{\Phi_0(0)}{\pi\sqrt{t}}. \tag{13}$$

Тогда при $t=0$ из (13) получим выполнение условия

$$\Phi_0(0) = 0. \tag{14}$$

При выполнении (14) имеем

$$\nu(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\Phi_0'(\tau)-\Phi_0'(0)}{(t-\tau)^{1/2}}\, d\tau + \frac{\Phi_0'(0)}{\pi}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\Phi_0'(\tau)-\Phi_0'(0)}{(t-\tau)^{1/2}}\, d\tau + \frac{\Phi_0'(0)}{\pi}2t^{1/2},$$

где так как $\Phi_0(t) \in H^{1+\frac{\gamma_1}{2}}(0,T)$, то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\Phi_0'(\tau)-\Phi_0'(0)}{(t-\tau)^{1/2}}\, d\tau \in H^{\frac{1+\gamma_1}{2}}(0,T)$$

и

$$\Phi_0'(0) = 0. \tag{15}$$

Таким образом, при выполнении условий (14) и (15) получим

$$\nu\,(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \frac{\Phi_0'(\tau) - \Phi_0'(0)}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau \in H^{\frac{1+\gamma_1}{2}}(0,T).$$

При этом, очевидно, $\nu\,(0) = 0$.

Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1 \in H^{2+\gamma_1}$, $\varphi_2 \in H^{2+\gamma_2}$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,t) \in H_x^{2+\gamma,}{}_t^{1+\frac{\gamma}{2}}(\Pi^{\pm})$ $\quad(\gamma = \min\{\gamma_1,\gamma_2\})$ *краевой задачи* (1)–(3) *при выполнении трех условий* (11), (14) *и* (15):

$$\Phi_0(0) = 0, \quad \Phi_0'(0) = 0, \quad \Phi_1(0) = 0.$$

Следствие 1. *При* $\varphi_1\,(x)\,,\varphi_2\,(x) \in H^p$ $(p = 2l+\gamma,\, 0<\gamma<1)$ *единственное решение краевой задачи* (1)–(3) *существует при выполнении* $[p]+1$ *количества условий на начальные данные задачи* φ_1, φ_2.

Рассмотрим вопросы, связанные с дифференциальными свойствами функций $u(x,t)$. Для этого в формулах (4) изучим свойства производных от первых слагаемых, которые будем обозначать в дальнейшем через u_0^+, u_0^-. Оставшееся слагаемое в (4), как известно [2], решает задачу Коши. Несложно получить выражение для первых производных по x:

$$u_{0x}^{\pm} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/(2a\sqrt{t})}^{\infty} \nu\left(t - \frac{x^2}{4a^2z^2}\right)e^{-z^2}\,dz. \tag{16}$$

Очевидно, что для любого $t \in (0,T)$ при $x \to 0$ получаем $u_0^+ \to \nu(t), u_0^- \to \nu(t)$. Таким образом, при $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^{1+\gamma}$, а также при выполнении условий (14), (15) $u_x \in C(\overline{\Pi})$. Исследуем свойства второй производной по x или первой по t (в силу (1) их свойства одинаковы).

Для второй производной по x получаем выражения

$$u_{0xx}^{\pm} = \frac{2a^2}{\sqrt{\pi}x}\left(\nu(0)\int\limits_0^{x/(2a\sqrt{t})}(2z^2-1)e^{-z^2}\,dz\right.$$

$$\left.-\int\limits_{x/(2a\sqrt{t})}^{\infty}\left(\nu\left(t-\frac{x^2}{4az^2}\right)-\nu(0)\right)(2z^2-1)e^{-z^2}\,dz\right). \quad (17)$$

Исследуем первую формулу в (17), вторая рассматривается аналогично. Будем считать, что (14), (15) выполнены. Запишем первую формулу (17) в другой форме:

$$u_{0xx}^{+} = \frac{a\nu(0)}{s\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^s(2z^2-1)e^{-z^2}\,dz$$

$$-\frac{a}{s\sqrt{\pi t}}\int\limits_s^{\infty}F(x,t,z)\left(t-\frac{x^2}{4a^2z^2}\right)^{\delta}(2z^2-1)e^{-z^2}\,dz,$$

где $s = x/(2a\sqrt{t})$; $F(x,t,z)$ — некоторая ограниченная функция, $\delta = \frac{\gamma}{2}$.

Учтем следующие простые разложения при $s \to 0$:

$$\frac{1}{s}\int\limits_0^s(2z^2-1)e^{-z^2}\,dz = -1+o(s),$$

$$\frac{1}{s}\int\limits_s^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{z^2}\right)^{\delta}(2z^2-1)e^{-z^2}\,dz = 1+o(s).$$

Таким образом, получили для любых $t \in (0,T)$ и $x > 0$ следующую формулу:

$$u_{0xx}^{+} = -\frac{\nu(0)}{\sqrt{\pi}}\cdot t^{-\frac{1}{2}} - c\cdot t^{-\frac{1}{2}+\delta} + o(s), \quad (18)$$

где c — некоторая постоянная.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_1(x) \in H^{p_1}$, $\varphi_2(x) \in H^{p_2}$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,t) \in H_{x\ t}^{p,\ \frac{p}{2}}(\Pi^{\pm})$ $(p = \min\{p_1, p_2\})$ *краевой задачи* (1)–(3) *при выполнении*

1) *одного условия* (14), *если* $0 < p < 1$, *при этом*

$$u_x(x,t) \in L_2(\Pi), \quad u_{xx}(x,t) \in L_1(\Pi);$$

2) *двух условий* (11), (14), *если* $1 < p < 2$, *при этом*

$$u_{xx}(x,t), \quad u_t(x,t) \in L_2(\Pi);$$

3) *трех условий* (11), (14) *и* (15), *если* $2 < p < 3$, *при этом*

$$u_{xx}(x,t), \quad u_t(x,t) \in H_{x\ t}^{\gamma,\ \frac{\gamma}{2}}(\Pi)\ (0 < \gamma < 1/2).$$

Следствие 2. *Пусть* $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^2$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,t) \in C_{x\ t}^{2,1}$ *краевой задачи* (1)–(3) *при выполнении трех условий* (11), (14) *и* (15), *при этом* $u_{xx}(x,t), u_t(x,t) \in C(\overline{\Pi})$.

II. Рассмотрим в полосе Π следующую задачу:

$$u_t - \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} = f(x,t) \tag{19}$$

при граничных условиях

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ x > 0; \quad u(x,T) = \varphi_T(x),\ x < 0. \tag{20}$$

В данной работе будем исследовать классические решения. Относительно правой части в (19) будем предполагать, что $f \in L_2(\Pi)$. Кроме того, потребуем, чтобы функции φ_0 и φ_T в (20) удовлетворяли условиям Гёльдера с некоторыми положительными показателями α и β соответственно, т. е.

$$\varphi_0(x) \in H^{\alpha}(0,\infty), \quad \varphi_T(x) \in H^{\beta}(-\infty,0).$$

Решение задачи (19), (20) будем понимать в классическом смысле, т. е. будем считать, что

$$u \in C^{2,1}(\Pi^+ \cap \Pi^-) \cap C^{1,0}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi}). \tag{21}$$

Если ввести неизвестную функцию

$$\nu(t) = u_x(+0,t) = u_x(-0,t), \tag{22}$$

то решение задачи (19), (20) может быть представлено в виде [4]

$$\begin{aligned} u^+ &= \int\limits_0^t \nu(\tau)E(x,t-\tau)\,d\tau + G^+(x,t) + V^+(x,t);\\ u^- &= \int\limits_t^T \nu(\tau)E(x,\tau-t)\,d\tau + G^-(x,t) + V^-(x,t). \end{aligned} \tag{23}$$

В последних формулах введены следующие обозначения:

$$E(x,t) = e^{-x^2/4t}/\sqrt{\pi t},$$

$$G^+ = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \varphi_0(\xi)(E(x+\xi,t) + E(x-\xi,t))\,d\xi,$$

$$G^- = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \varphi_T(-\xi)(E(x+\xi,T-t) + E(x-\xi,T-t))\,d\xi,$$

$$V^+ = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^t f(\xi,\tau)(E(x+\xi,t-\tau) + E(x-\xi,t-\tau))\,d\tau,$$

$$V^- = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^t f(-\xi,\tau)(E(x+\xi,\tau-t) + E(x-\xi,\tau-t))\,d\tau.$$

Условие непрерывности функции $u(x,t)$ при $x = 0$ позволяет написать интегральное уравнение для функции $\nu(t)$:

$$\int\limits_0^T \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{|t-\tau|}}\,d\tau = h(t). \tag{24}$$

где

$$h(t) = \sqrt{\pi}(G^+(0,t) + V^+(0,t) - G^-(0,t) - V^-(0,t)). \tag{25}$$

Уравнение (24) при помощи известных формул обращения интегрального оператора Абеля эквивалентно приводится к сингулярному интегральному уравнению

$$\varphi(t) + \int_0^T \frac{\varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau = \frac{\sqrt{t}}{\pi} g(t), \quad \varphi(t) = \sqrt{t}\nu(t), \tag{26}$$

где

$$g(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{h(s)\, ds}{\sqrt{t-s}}\right). \tag{27}$$

Сингулярное уравнение (26) имеет нулевой индекс и, следовательно, единственное решение [5]. В силу доказанной эквивалентности решение (24) также единственно. Используя известную технику [5, 6], это решение можно представить в виде

$$\nu(t) = \frac{1}{2} g(t) - \frac{\nu_0(t)}{2\pi} \int_0^T \frac{g(\tau)}{\nu_0(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}, \tag{28}$$

$$\nu_0(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t(T-t)}}. \tag{29}$$

Функция $g(t)$ представлена выражением (27). Таким образом, задача (19)–(21) формально решена.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть $f = 0$, $\varphi_0(x) = \varphi_0$, $\varphi_T(x) = \varphi_T$, где φ_0, φ_T — некоторые постоянные. По формулам (23), (28), (29) получаем точное решение задачи (19)–(21) в этом простом частном случае [4, 7]:

$$\begin{aligned} u^+ &= \varphi_0 + \frac{\varphi_T - \varphi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \nu_0(\tau) E(x, t-\tau)\, d\tau, \quad x > 0, \\ u^- &= \varphi_T - \frac{\varphi_T - \varphi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_t^T \nu_0(\tau) E(x, \tau - t)\, d\tau, \quad x < 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Другой пример получим при $f = 0$, $\varphi_0(x) = \varphi_0 + Ax^\alpha$, $\varphi_T(x) = \varphi_T + B(-x)^\beta$, где φ_0, φ_T, A, B — некоторые постоянные. По формуле (25) найдем

$$h(s) = \int\limits_0^\infty ((\varphi_0 + A\xi^\alpha)E(\xi, s) - (\varphi_T + B\xi^\beta)E(\xi, T - s))\, d\xi.$$

После несложных преобразований будет

$$\begin{gathered} h(s) = \sqrt{\pi}(\varphi_0 - \varphi_T) + as^{\alpha/2} - b(T - s)^{\beta/2}, \\ a = 2^{\alpha+1}A \int\limits_0^\infty z^\alpha e^{-z^2}\, dz, \quad b = 2^{\beta+1}B \int\limits_0^\infty z^\beta e^{-z^2}\, dz. \end{gathered} \tag{31}$$

Формула (27) допускает представление

$$g(t) = \frac{h(0)}{\sqrt{t}} + \int\limits_0^t \frac{h'(s)\, ds}{\sqrt{t - s}}. \tag{32}$$

Согласно формуле (31) имеем

$$h'(s) = \frac{a\alpha}{2} s^{(\alpha-2)/2} + \frac{b\beta}{2}(T - s)^{(\beta-2)/2}; \tag{33}$$

Применяя разложение в степенные ряды, представим (33) в виде

$$h'(s) = \frac{b\beta}{2} T^{(\beta-2)/2} + \frac{a\alpha}{2} s^{(\alpha-2)/2} + \sum_{n=1}^\infty c_n s^n. \tag{34}$$

Осуществляя подстановку (34) в формулу (32), находим представление для функции $g(t)$:

$$g(t) = \frac{h(0)}{\sqrt{t}} + A_0 t^{(\alpha-1)/2} + \sqrt{t} \sum_{n=0}^\infty b_n t^n, \tag{35}$$

где

$$A_0 = \frac{a\alpha}{2} \int\limits_0^1 \sigma^{(\alpha-2)/2}(1 - \sigma)^{-1/2}\, d\sigma.$$

Займемся представлением функции $\nu(t)$ в окрестности точки $t = 0$. Аналогично можно определить представление в окрестности точки $t = T$. Запишем (35) в виде

$$g(t) = g_0(t) + g_1(t) + g_2(t),$$

где

$$g_0(t) = \frac{h(0)}{\sqrt{t}}; \quad g_1(t) = A_0 t^{(\alpha-1)/2}; \quad g_2(t) = \sqrt{t}\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Опираясь на значение интеграла [8]

$$\int_0^T \left(\frac{T-\tau}{\tau}\right)^{1/4} \frac{d\tau}{\tau - t} = \pi\left(\left(\frac{T-t}{t}\right)^{1/4} - \sqrt{2}\right), \tag{36}$$

получаем следующую формулу:

$$g_0 - \frac{\nu_0(t)}{\pi}\int_0^T \frac{g_0(\tau)}{\nu_0(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} = \sqrt{2}h(0)\nu_0(t). \tag{37}$$

Последний результат соответствует постоянным краевым условиям φ_0, φ_T в формулах (30). Для дальнейших исследований введем в рассмотрение кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^T \frac{g_1(\tau)}{\nu_0(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{38}$$

По формулам Сохоцкого в каждой внутренней точке отрезка $[0, T]$ имеем

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{g_1(t)}{\nu_0(t)}, \tag{39}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^T \frac{g_1(\tau)}{\nu_0(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t}. \tag{40}$$

Для получения регулярной в окрестности $z = 0$ функции рассмотрим также еще одну функцию

$$\omega(z) = \frac{g_1(z)}{\nu_0(z)} = A_0 z^{(\alpha-1)/2}(z(T-z))^{1/4}. \tag{41}$$

Нетрудно убедиться, что функция $\Phi(z)-\gamma\omega(z)$ будет однозначной аналитической функцией в окрестности $z=0$, где

$$\gamma=\frac{1}{1-e^{i\pi(2\alpha-1)/2}}. \tag{42}$$

Таким образом, используя (40), приходим к следующему результату:

$$g_1(t)-\frac{\nu_0(t)}{\pi}\int\limits_0^T\frac{g_1(\tau)}{\nu_0(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}=\lambda A_0t^{(\alpha-1)/2}+\nu_0(t)R_1(t), \tag{43}$$

где

$$\lambda=1-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right), \tag{44}$$

$R_1(t)$ — аналитическая в окрестности $t=0$ функция.

Аналогичные вычисления показывают, что

$$g_2(t)-\frac{\nu_0(t)}{\pi}\int\limits_0^T\frac{g_2(\tau)}{\nu_0(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}=\nu_0(t)R_2(t). \tag{45}$$

Производя суммирование формул (37), (43), (45), найдем представление $\nu(t)$ в окрестности $t=0$:

$$2\nu(t)=\lambda A_0t^{(\alpha-1)/2}+\nu_0(t)R(t). \tag{46}$$

Таким же образом можно получить представление функции $\nu(t)$ в окрестности $t=T$:

$$2\nu(T-t)=\kappa B_0(T-t)^{(\beta-1)/2}-\nu_0(t)\widetilde{R}(t). \tag{47}$$

В формулах (46), (47) $R(t)$ и $\widetilde{R}(t)$ обозначают некоторые аналитические функции в окрестности $t=0$,

$$\kappa=1-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right), \tag{48}$$

Формулы (44), (48) теряют смысл при $\alpha=1/2$, $\beta=1/2$. Можно показать, что в этом случае $\nu(t)$ будет иметь логарифмическую особенность в окрестности $t = 0$ и $t = T$. Если потребовать дополнительно выполнение равенств

$$R(0) = \widetilde{R}(0) = 0, \tag{49}$$

то вторые слагаемые в формулах (46), (47) будут иметь вид $O(t^{3/4})$. Условия (49) могут быть записаны в интегральной форме ($\alpha, \beta > 1/2$):

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}h(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{g_1(\tau) + g_2(\tau)}{\nu_0(\tau)} \frac{d\tau}{\tau}; \\ \sqrt{2}h(T) &= \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\tilde{g}_1(\tau) + \tilde{g}_2(\tau)}{\nu_0(\tau)} \frac{d\tau}{T-\tau}, \end{aligned} \tag{50}$$

где $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ находятся аналогично g_1, g_2.

Приведенные рассуждения с незначительными усложнениями могут быть реализованы и в общем случае, указанном в начале п. II, т. е при $f \in L_2(\Pi)$.

Лемма. *Пусть* $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in H^{1+\gamma}$ *и выполнены условия* (50), *тогда* $\nu(t) \in H^{\delta}(0,T)$, *где*

$$\delta = \min\{3/4; \gamma/2\} > 0. \tag{51}$$

В этом случае из (46), (47) *следует* $\nu(0) = \nu(T) = 0$. *При* $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in H^1$ *и выполнимости* (50) $\nu(t) \in C[0,T]$.

В заключение, как и выше, рассмотрим вопросы, связанные с дифференциальными свойствами функций $u(x,t)$. Несложно получить выражение для вторых производных по x: для любых $t \in (0,T)$ и $x > 0$ справедлива формула

$$u^{+}_{0xx} = -\frac{\nu(0)}{\sqrt{\pi}} \cdot t^{-1/2} - c \cdot t^{-1/2+\delta} + o(s), \tag{52}$$

где c — некоторая постоянная.

Из соотношений (46), (47), (52) вытекают следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_0(x) \in H^\alpha$, $\varphi_T(x) \in H^\beta$ $(p = \min\{\alpha, \beta\} \in (1; 2))$. *Тогда при выполнении* (50) *существует единственное решение уравнения* (19) $u(x,t) \in H^{p,p/2}_{x\ t}(\Pi^\pm)$, *при этом* $u_{xx}, u_t \in L_2(\Pi)$.

Следствие 3. *Пусть* $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x) \in H^2$. *Тогда при выполнимости* (50) *существует единственное решение уравнения* (19) $u(x,t) \in C^{2,1}_{x\ t}(\Pi^\pm)$, *при этом* $u_{xx}, u_t \in C(\overline{\Pi})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Задачи по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
4. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
7. *Кислов Н. В., Червяков А. В.* Об одной краевой задаче с меняющимся направлением времени // Вестн. МЭИ. 2001. № 6. С. 67–74.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразование Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970.

г. Якутск *29 января 2008 г.*

УДК 517.956

КРИТЕРИИ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ДАРБУ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ДАРБУ — ПУАССОНА

Р. Б. Сеилханова

В [1] для уравнения колебания струны исследовалась задача Дарбу с отходом от характеристики, где было обращено внимание на изучение таких задач, для гиперболических уравнений. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [2]. В данной работе получен критерий однозначной разрешимости задач Дарбу с отходом от характеристики для многомерного уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона.

1. Постановка задач и основные результаты. Пусть D_β — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями $\beta|x| = t$, $|x| = 1 - t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$, а $0 < \beta = \mathrm{const} \leqslant 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S_β, S^1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим уравнение Эйлера — Дарбу — Пуассона

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = 0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geqslant 2$, α — действительное число.

Через $u_\alpha(x, t)$ обозначим решение уравнения (1) при данном α.

В качестве многомерных аналогов задач Дарбу с отходом от характеристики для уравнения (1) рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. *Найти в области* D_β *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u_\alpha|_S = \tau(x), \quad u_\alpha|_{S_\beta} = \sigma(x) \quad \text{при } \alpha < 1; \tag{2}$$

$$\left.\frac{u_\alpha}{\ln t}\right|_S = \tau(x), \quad u_\alpha|_{S_\beta} = \sigma(x) \quad \text{при } \alpha = 1; \tag{3}$$

$$(t^{\alpha-1}u_\alpha)|_S = \tau(x), \quad u_\alpha|_{S_\beta} = \sigma(x) \quad \text{при } \alpha > 1. \tag{4}$$

Задача 2. *Найти в области* D_β *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha(u_\alpha - u_{\alpha,2}) = \nu(x), \quad u_\alpha|_{S_\beta} = \sigma(x) \quad \textit{при } \alpha < 1; \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0} t(\ln t)^2\left(\frac{u_\alpha - u_{\alpha,1}}{\ln t}\right)_t = \nu(x), \quad u_\alpha|_{S_\beta} = \sigma(x) \quad \textit{при } \alpha = 1; \tag{6}$$

$$\lim_{t\to 0} t^{2-\alpha}[t^{\alpha-1}(u_\alpha - u_{\alpha,2})]_t = \nu(x), \quad u_\alpha|_{S_\beta} = \sigma(x) \quad \textit{при } \alpha > 1, \tag{7}$$

где $u_{\alpha,1}(x,t)$, $u_{\alpha,2}(x,t)$ *— вполне определенные функции, зависящие от* $\sigma(x)$, $\nu(x)$.

В дальнейшем нам будет удобно перейти от декартовых координат $x_1,\dots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\dots,\theta_{m-1},t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2,\dots,m-1$. Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_{m-1})$, $W_2^1(S)$, $l = 0,1,\dots,$ — пространства Соболева, а $\widetilde{S}_\beta = \left\{(r,\theta) \in S,\ 0 < r < \frac{1}{1+\beta}\right\}$. Через $\bar\tau_n^k(r)$, $\bar\nu_n^k(r)$, $\bar\sigma_n^k(r)$ обозначим коэффициенты рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, а через H_β — проекцию области D_β на плоскость (r,t). Имеет место [3]

Лемма. *Пусть* $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. *Если* $l \geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l - m + 1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Введем множество функций

$$B_p^l(S) = \Big\{ f(r,\theta) : f \in W_2^l(S),\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\big(\big\|f_n^k(r)\big\|^2_{C^{p+2}((0,1))} + \big\|f_n^k(r)\big\|^2_{C^p([0,1])}\big)(\exp 2n^2)n^{2l} < \infty,\ l > \frac{3m}{2},\ p = 0,1,\dots \Big\}.$$

Пусть далее $p \geqslant 0$ — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенствам $\alpha + 2p \geqslant m - 1$, если $\alpha \leqslant 0$, и $2 - \alpha + 2p \geqslant m - 1$, если $\alpha \geqslant 2$; $q \geqslant 0$ — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенствам $2-\alpha+2q \geqslant m-1$, если $0 < \alpha \leqslant 1$, и $\alpha+2q \geqslant m-1$, если $1 \leqslant \alpha < 2$, а также s такое, что $s = \left[-\frac{\alpha}{2}\right]$, если $\alpha \leqslant 0$, и $s = \left[\frac{\alpha}{2} - 1\right]$, если $\alpha \geqslant 2$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α. Введем обозначение $\mu = \max\{s+1, p\}$, $y = \max\{s+1, q\}$.

Если $\tau(r,\theta) = \tau^{s+1}\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^{s+1}\nu^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta) \in B_\mu^l(S)$, $\nu^*(r,\theta) \in B_\gamma^l(S)$, $\sigma(r,\theta) = r\sigma^*(r,\theta)$, $\sigma^*(r,\theta) \in B_{s+1}^l(\widetilde{S}_\beta)$ при $\alpha \leqslant 0$ и $\alpha \geqslant 2$; $\tau(r,\theta) = r^{q+3}\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) = r^{q+3}\nu^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta), \nu(r,\theta) \in B_{q+1}^l(S)$, $\sigma(r,\theta) = r^{q+2}\sigma^*(r,\theta)$, $\sigma^*(r,\theta) \in B_{q+1}^l(\widetilde{S}_\beta)$ при $0 < \alpha \leqslant 1$ и $1 \leqslant \alpha < 2$, то справедлив следующий критерий.

Теорема. *В классе* $C(\overline{D}_\beta \setminus S) \cap C^2(D_\beta)$ *задачи* 1 *и* 2 *однозначно разрешимы тогда и только тогда, когда* $\beta < 1$.

При $\alpha = 0$ эта теорема получена в [4].

2. Сведение задач 1 и 2 к двумерным задачам Дарбу. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t}u_t = 0, \tag{8}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$
$$g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Так как искомое решение u_α принадлежит $C^2(D_\beta)$, его можно искать в виде ряда

$$u_\alpha(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_{\alpha,n}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{9}$$

где $\bar{u}_{\alpha,n}^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже. Подставив (9) в (8) и использовав ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [3], получим уравнение

$$L_\alpha \bar{u}_{\alpha,n}^k \equiv \bar{u}_{\alpha,nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{\alpha,nr}^k - \bar{u}_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t}\bar{u}_{\alpha,nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_{\alpha,n}^k = 0,$$

$\lambda_n = n(n+m-2)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\dots$, которое с помощью замены переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t)$ сводится к уравнению

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k \equiv u_{\alpha,nrr}^k - u_{\alpha,ntt}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4r^2} u_{\alpha,n}^k = 0. \tag{10}$$

Далее, из краевых условий (2)–(7) для функций $u_n^k(r,t)$ соответственно будем иметь

$$u_{\alpha,n}^k(r,0) = \tau_n^k(r), \quad u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = \sigma_n^k(r), \tag{11}$$

$$k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots,\alpha < 1;$$

$$\left.\frac{u_{\alpha,t}^k}{\ln t}\right|_{t=0} = \tau_n^k(r), \quad u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = \sigma_n^k(r), \tag{12}$$

$$k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots,\alpha = 1;$$

$$\left.\left(t^{\alpha-1}u_{\alpha,n}^k\right)\right|_{t=0} = \tau_n^k(r), \quad u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = \sigma_n^k(r), \tag{13}$$

$$k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots,\alpha > 1;$$

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha \left(u_{\alpha,n}^k - u_{\alpha,n}^{k,2}\right)_t = \nu_n^k(r), \quad u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = \sigma_n^k(r), \quad \alpha < 1, \tag{14}$$

$$k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots;$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{u_{\alpha,n}^k - u_{\alpha,n}^{k,1}}{\ln t}\right)_t (\ln t)^2 = \nu_n^k(r), \quad u_{\alpha,n}^k(r,\beta r) = \sigma_n^k(r), \quad \alpha = 1, \tag{15}$$

$$k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots;$$

$$\lim_{t\to 0} t^{2-\alpha}\big[t^{\alpha-1}\big(u^k_{\alpha,n}-u^{k,2}_{\alpha,n}\big)\big]_t=\nu^k_n(r),\quad u^k_{\alpha,n}(r,\beta r)=\sigma^k_n(r),\quad \alpha>1,\tag{16}$$

$$k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots,$$

где $\tau^k_n(r)=r^{\frac{m-1}{2}}\bar\tau^k_n(r)$, $\nu^k_n(r)=r^{\frac{m-1}{2}}\bar\nu^k_n(r)$, $\sigma^k_n(r)=r^{\frac{m-1}{2}}\bar\sigma^k_n(r)$.

Таким образом, задачи 1 и 2 сведены к двумерным задачам Дарбу в области H_β для уравнения (10). Решение этих задач будем изучать в п. 4. Наряду с уравнением (10) рассмотрим уравнение

$$L_0u^k_{0,n}\equiv u^k_{0,nrr}+\frac{m-1}{r}u^k_{0,nr}-u^k_{0,ntt}-\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}u^k_{0,n}=0,\tag{10_0}$$

которое с помощью замены переменных

$$\xi=\frac{r+t}{2},\quad \eta=\frac{r-t}{2}$$

сводится к уравнению

$$Mu^k_{0,n}\equiv u^k_{0,n\xi\eta}+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2}u^k_{0,n}=0.\tag{17}$$

Решение задачи Коши для (17) с данными

$$u^k_{0,n}(\xi,\xi)\equiv\tau^k_n(\xi),\quad \left(\frac{\partial u^k_{0,n}}{\partial\xi}-\frac{\partial u^k_{0,n}}{\partial\eta}\right)\bigg|_{\xi=\eta}=\nu^k_n(\xi),\quad \eta\leqslant\xi\leqslant\eta+\frac{\beta}{1+\beta},$$

имеет вид [5]

$$\begin{aligned}u^k_{0,n}(\xi,\eta)&=\frac12\tau^k_n(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac12\tau^k_n(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)\\&+\frac{1}{\sqrt2}\int\limits_\eta^\xi\left[\nu^k_n(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau^k_n(\xi_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1,\end{aligned}\tag{18}$$

где

$$\tau^k_n(\xi)=(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\bar\tau^k_n(2\xi),\quad \nu^k_n(\xi)=\sqrt2(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\bar\nu^k_n(2\xi),$$

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_{\mu_1}\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi\eta+\xi_1\eta_1)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]=P_{\mu_1}(z)$$

— функция Римана для уравнения $Mu_{0,n}^{k} = 0$ [6], а $P_{\mu_1}(z)$ — функция Лежандра,

$$\mu_1 = n + \frac{(m-3)}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial N}\bigg|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial N'}\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \frac{\partial}{\partial N'}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\bigg|_{\xi_1=\eta_1},$$

N' — нормаль к прямой $\xi = \eta$ в точке $\xi_1, \eta_1)$, направленная в сторону полуплоскости $\eta \leqslant \xi$.

3. Функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (10_α) **и** (10_0)**.** Сначала приведем некоторые свойства оператора L_α, которые необходимы для дальнейших исследований. Если u_α — решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$u_{2-\alpha} = t^{\alpha-1} u_\alpha \tag{19}$$

является решением уравнения $L_{2-\alpha} = 0$. Если u_α — решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$\frac{1}{t}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = u_{\alpha+2} \tag{20}$$

будет решением уравнения $L_{2+\alpha} u = 0$. Оператор L_α обладает свойством

$$L_\alpha u_\alpha = t^{1-\alpha} L_{2-\alpha}(t^{\alpha-1} u_\alpha). \tag{21}$$

Указанные свойства устанавливаются аналогично тому, как они были доказаны для уравнения (1) [7]. Из равенства (19) имеем $u_{2-\alpha-2p} = t^{\alpha+2p-1} u_{\alpha+2p}$. Применив к последнему равенству p раз формулу (20), а затем (19), получим

$$u_{2-\alpha} = \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p (t^{\alpha+2p-1} u_{\alpha+2p}). \tag{22}$$

Соотношение (22) является фундаментальной формулой [7] для решения задачи Коши. Пусть $p_1 \geqslant 0$, $q_1 \geqslant 0$ — наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам $\alpha + 2p_1 \geqslant m - 1$, $2 - \alpha + 2q_1 \geqslant m - 1$.

Утверждение 1. *Если $u_{0,n}^{2,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (10_0), удовлетворяющее условию*

$$u_{0,n}^{2,k}(r,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{2,k}(r,0) = \nu_n^k(r), \tag{23}$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{2,k}(r,t) = \gamma_{-\alpha} t^{-\alpha} \int\limits_0^1 u_{0,n}^{2,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1}\, d\xi$$
$$\equiv \gamma_{-\alpha}\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}} u_{0,n}^{2,k}(r,t) \tag{24}$$

при $\alpha < 0$ *будет решением уравнения* (10_α), *удовлетворяющим условию*

$$u_{\alpha,n}^{2,k}(r,0) = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,n}^{2,k} = \nu_n^k(r). \tag{25}$$

Если же $0 < \alpha < 1$, *то функция*

$$u_{\alpha,n}^{2,k}(r,t) = \gamma_{2-k+2q_1}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{q_1}\left[t^{1-k+2q_1}\int\limits_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{q_1-\frac{\alpha}{2}}\, d\xi\right]$$
$$\equiv \gamma_{2-\alpha+2q_1} 2^{q_1-1}\Gamma\left(q_1 - \frac{\alpha}{2}+1\right) D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{u_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] \tag{26}$$

является решением уравнения (10_α) *с начальными данными* (25), *где* $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ — *гамма-функция,* D_{0t}^{α} — *оператор Римана — Лиувилля* [7], *а* $u_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — *решение уравнения* (10_0) *с начальными условиями*

$$u_{0,n}^{1,k}(r,0) = \frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q_1+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0. \tag{23$'$}$$

Утверждение 2. *Если* $u_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — *решение задачи Коши для уравнения* (10_0), *удовлетворяющее условию*

$$u_{0,n}^{1,k}(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial t}u_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0, \tag{27}$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{1,k}(r,t) = \gamma_\alpha \int\limits_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\, d\xi$$
$$\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{u_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] \tag{28}$$

при $\alpha > 0$ *будет решением уравнения* (10_α), *удовлетворяющим условию* (27).

Утверждение 3. *Если* $u_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — *решение задачи Коши для уравнения* (10_0), *удовлетворяющее условию* (27), *то функция*

$$u_{1,n}^{1,k}(r,t) = \int\limits_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \ln[t(1-\xi^2)]\, d\xi \tag{29}$$

является решением уравнения $L_1 u = 0$ *с начальными данными*

$$\left. \frac{u_{1,n}^{1,k}}{\ln t} \right|_{t=0} = \tau_n^k(r). \tag{30}$$

Справедливость приведенных утверждений устанавливается так же, как они доказаны для уравнения (1) и волнового уравнения [8–10]. Приведем некоторые следствия из утверждений 2, 3. Сначала рассмотрим случай $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r+1)$, $r = 0, 1, \ldots$. Если $u_{0,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для уравнения (10_0) с данными

$$u_{0,n}^{1,k}(r,0) = \frac{\tau_n^k(r)}{(1-\alpha)\ldots(\alpha+2p_1-1)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{1,k}(r,0) = 0, \tag{31}$$

то из утверждения 2 следует, что функция

$$u_{\alpha+2p_1,n}^{1,k}(r,t) = \gamma_{\alpha+2p_1} \int\limits_0^1 u_{0,n}^{1,k}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}+p_1-1}\, d\xi$$

является решением уравнения $L_{\alpha+2p_1} u = 0$, удовлетворяющим начальному условию (31). Тогда из соотношений (22) и (19) вытекает, что функция

$$\begin{aligned} u_{\alpha,n}^{1,k}(r,t) &= t^{1-\alpha} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p_1} \left(t^{\alpha+2p_1-1} u_{\alpha+2p_1,n}^{1,k}\right) \\ &\equiv \gamma_{k+2p_1} 2^{p_1-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+p_1\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{u_{0,n}^{1,k}(r,t)}{t}\right] \end{aligned} \tag{32}$$

является решением уравнения (10_α) и удовлетворяет условию (27).

Пусть $\alpha = -(2r+1)$. Если $u^{1,k}_{0,n}(r,t)$ — решение задачи Коши для (10_0) с данными (27), то из (19), (22) и утверждения 3 нетрудно получить, что функция

$$u^{1,k}_{-(2r+1),n}(r,t) = t^{2(r+1)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{r+1} \times \left[\int\limits_0^1 u^{1,k}_{0,n}(r,\xi t)(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\ln(t(1-\xi^2))\,d\xi\right] \qquad (33)$$

является решением задачи Коши для $L_{-(2r+1)}u = 0$, удовлетворяющим условию (27).

Используя [11, лемма 1.14.2], соотношение (33) можно записать в виде

$$u^{1,k}_{-(2r+1),n}(r,t) = \frac{a}{2}t^{2(r+1)}D^{\frac{1}{2}+r}_{0t^2}\left[\frac{u^{1,k}_{0,n}(r,t)}{t}\right], \qquad (34)$$

$$a = \frac{1}{2}\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(1/2)}{\sqrt{\pi}} - \ln t.$$

4. Доказательство теоремы для задач 1 и 2. Пусть $\beta < 1$. Рассмотрим задачу 1.

1. Случай $\alpha < 1$. Решение задачи (10_α), (11) будем искать в виде $u^k_{\alpha,n}(r,t) = u^{1,k}_{\alpha,n} + u^{2,k}_{\alpha,n}$, где $u^{1,k}_{\alpha,n}(r,t)$ — решение задачи Коши (10_α), (27), а $u^{2,k}_{\alpha,n}(r,t)$ — решение задачи для (10_α) с условием

$$u^{2,k}_{\alpha,n}(r,0) = 0, \quad u^{2,k}_{\alpha,n}(r,\beta r) = \sigma^k_n(r) - u^{1,k}_{\alpha,n}(r,\beta r), \qquad (35)$$

$$k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots.$$

Учитывая формулы (28), (32) и (34), задачи Коши (10_α), (27) сводим к задачам Коши (10_0), (31) и (10_0), (27), решения которых имеет вид (18). Далее, используя формулы (24), (26), краевую задачу (10_α), (35) сводим к задаче для уравнения (10_0) с данными $u^{2,k}_{0,n}(r,0) = 0$, $u^{2,k}_{0,n}(r,\beta r) = \varphi^k_n(r)$ при $\alpha \leqslant 0$ и к задаче для (10_0) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t}u^{2,k}_{0,n}(r,0) = 0, \quad u^{2,k}_{0,n}(r,\beta r) = \varphi^k_n(r) \qquad (36)$$

при $0 < \alpha < 1$, где $\varphi_n^k(r)$ — функция, выражающаяся через $\tau_n^k(r)$, $\sigma_n^k(r)$. Эти задачи, как показано в [4], имеют единственные решения.

Следовательно, с учетом утверждения 1 получим однозначное решение задачи (10_α) (11) в классе $C(\overline{H}_\beta) \cap C^2(H_\beta)$.

2. Случай $\alpha = 1$. Решение задачи (10_α), (12) будем искать в виде $u_{1,n}^k(r,t) = u_{1,n}^{1,k} + u_{1,n}^{2,k}$, где $u_{1,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи для уравнения (10_α) с данными (30), а $u_{1,n}^{2,k}(r,t)$ — решение краевой задачи для (10_α) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{1,n}^{2,k}(r,0) = 0, \quad u_{1,n}^{2,k}(r,\beta r) = \sigma_n^k(r) - u_{1,n}^{1,k}(r,\beta r). \tag{37}$$

В силу (29) задача (10_α), (30) сводится к задаче Коши (10_0), (27). Учитывая формулу (28), задачу (10_α), (37) приводим к задаче (10_0), (36). Таким образом, задача (10_α), (12) однозначно разрешима. Используя формулы (21), (19), задачу (10_α), (13) сводим к исследованному случаю $\alpha < 1$.

Значит, ряд вида

$$u_\alpha(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{1-m}{2}} u_{\alpha,n}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta) \tag{38}$$

является единственным решением задачи 1 при $\beta < 1$, где функции $u_{\alpha,n}^k(r,t)$ определяются из двумерных задач.

Учитывая ограничение на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, как и в [4, 12], нетрудно показать, что решение (37) принадлежит искомому классу. Теперь рассмотрим задачу 2.

1. Случай $\alpha < 1$. Решение задачи (10_α), (14) будем искать в виде $u_{\alpha,n}^k(r,t) = u_{\alpha,n}^{1,k} + u_{\alpha,n}^{2,k}$, где $u_{\alpha,n}^{2,k}(r,t)$ — решение задачи Коши (10_α), (25), а $u_{\alpha,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи для уравнения (10_α) с условием (37). В силу (24), (26) задача (10_α), (25) приводится к задаче (10_α), (23) при $\alpha \leqslant 0$ и задаче (10_0), $(23')$ при $0 < \alpha < 1$. Используя (32) и (34), задачу (10_α), (37) сводим к задаче (10_0), (36), которая однозначно разрешима [4]. Таким образом, задача (10_α), (14) имеет единственное решение.

2. Случай $\alpha = 1$. Решение задачи (10_α), (15) ищем в виде $u_{1,n}^k(r,t) = u_{1,n}^{1,k} + u_{1,n}^{2,k}$, где $u_{1,n}^{2,k}(r,t)$ — решение задачи Коши для (10_α) с данными

$$u_{1,n}^{2,k}(r,0) = -\nu_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{1,n}^{2,k}(r,0) = 0, \tag{39}$$

а $u_{1,n}^{1,k}(r,t)$ — решение задачи Коши (10_α), (37).

Учитывая (28), задачу Коши (10_α), (39) сводим к задаче Коши (10_0), (39), а задачу (10_α), (37) — к задаче (10_0), (36). Значит, задача (10_α), (15) также однозначно разрешима. Применяя (21), (19), задачу (10_α), (16) сводим к случаю $\alpha < 1$. Следовательно, функция (38) является единственным решением задачи 2 при $\beta < 1$, где функция $u_{\alpha,n}^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, определяется из предыдущих краевых задач.

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь решения задач 1 и 2 в классе $C(\overline{D}_\beta \setminus S) \cap C^2(D_\beta)$, $u(x,t)$ тождественно нулевые. Покажем, что $\beta < 1$.

Предположим противное, т. е. $\beta = 1$. В этом случае в [13, 14] доказано, что задачи 1 и 2 имеют бесчисленное множество нетривиальных решений, что приводит к противоречию.

Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. *Protter M. H.* New boundary value problems for the wawe equation of mixed type // J. Rational Mech. Anal. 1954. V. 3, N 4. P. 435–446.
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Алдашев С. А.* Критерии однозначной разрешимости задачи Дарбу с отходом от характеристики для многомерного волнового уравнения // Изв. НАН РК. Сер. физ -мат наук. 2007, № 3. С. 15–19.
5. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
6. *Copson E. T.* On the Riemann — Green function // J. Rath. Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 324–348.
7. *Weinstein A.* On the wawe equation and the equation of Euler — Poisson // The First simpos. in applied math. New York: MCGraw — Hill, 1954. P. 137–147.

8. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: НГУ, 1973.
9. *Алдашев С. А.* О некоторых краевых задачах для одного класса сингулярных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 6. С. 3–14.
10. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982.
11. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000.
12. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым 1994.
13. *Алдашев С. А.* Задачи Дарбу — Поттера для одного класса многомерных сингулярных гиперболических уравнений // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2000. С. 116–118.
14. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу — Поттера для одного класса многомерных сингулярных гиперболических уравнений // Вестн. КазГУ. Сер. математика, механика, информатика. Алматы, 2001. С. 51–63.

г. Уральск, Казахстан *15 декабря 2007 г.*

УДК 517.958

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В СЛУЧАЕ ДВУХ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Е. Т. Софронов

В статье рассматривается один пример для системы уравнений вида [1]

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1(1 - x_1 - bx_2 - ax_3), \\ \dot{x_2} &= x_2(1 - ax_1 - x_2 - bx_3), \\ \dot{x_3} &= -x_3(k - ax_1 - bx_2 - x_3), \end{aligned} \tag{1}$$

где a, b, k — положительные постоянные. Исследуется состояние равновесия с положительными координатами на устойчивость по Ляпунову [2] при численных значениях a, b, k. Это состояние равновесия $M(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ имеет следующие координаты:

$$x_i^* = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \text{где } \Delta = (a-1)(b-1)(1+a+b),$$

$$\Delta_1 = (a-1)(b-1) + (b^2 - a)(k-1),$$

$$\Delta_2 = (a-1)(b-1) + (a^2 - b)(k-1),$$

$$\Delta_3 = (a-1)(b-1) + (1 - ab)(k-1).$$

С помощью замены

$$x_i = x_i^* + y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

приведем систему уравнений (1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= (x_1^* + y_1)(-y_1 - by_2 - ay_3), \\ \dot{y_2} &= (x_2^* + y_2)(-ay_1 - y_2 - by_3), \\ \dot{y_3} &= (x_3^* + y_3)(ay_1 + by_2 + y_3). \end{aligned} \tag{2}$$

Характеристическое уравнение для соответствующей линейной системы уравнений представим в виде

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{3}$$

где

$$a_1 = x_1^* + x_2^* - x_3^*, \quad a_2 = (1 - ab)x_1^*x_2^* + (a^2 - 1)x_1^*x_3^* + (b^2 - 1)x_2^*x_3^*,$$
$$a_3 = -\Delta x_1^*x_2^*x_3^*.$$

Для системы уравнений рассмотрим тот случай, когда

$$k < 1, \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 = 0.$$

При таких условиях характеристическое уравнение (3) имеет один отрицательный корень и два чисто мнимых корня. Изучаем данный случай при конкретных значениях параметров системы уравнений (1).

Пусть $k = \frac{19}{21}$, $a = 4$, $b = \frac{1}{4}$. Тогда

$$x_1^* = \frac{10}{63}, \quad x_2^* = \frac{20}{63}, \quad x_3^* = \frac{4}{21}.$$

Характеристическое уравнение (3) имеет корни

$$\lambda_1 = -\frac{2}{7}, \quad \lambda_{2,3} = \pm\frac{5\sqrt{7}}{21}i.$$

С помощью замены переменных

$$x = 2y_1 + 2y_2 + 3y_3, \quad y = -\sqrt{7}y_2 - \frac{5\sqrt{7}}{3}y_3, \quad z = y_2 - y_3$$

можно привести систему уравнений (2) к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2}{7}x - \frac{9\sqrt{7}}{14}yz - \left(\frac{33\sqrt{7}}{224}xy + \frac{105}{32}z\right)x - \frac{1}{2}x^2, \\ \dot{y} &= \beta z + \frac{15\sqrt{7}}{128}(y^2 - z^2) + \frac{237}{64}yz + \left(\frac{1}{2}y + \frac{5\sqrt{7}}{2}z\right)x, \\ \dot{z} &= -\beta y - \frac{64}{63}x + \frac{45}{128}(y^2 - z^2) - \frac{57\sqrt{7}}{7\cdot 64}yz + \left(\frac{3\sqrt{7}}{14}y - \frac{1}{2}z\right)x. \end{aligned} \tag{4}$$

Чтобы уничтожить выражение $-\frac{64}{63}x$, стоящее в третьем уравнении системы (4), сделаем следующую замену переменных:

$$\bar{y} = y + \frac{320\sqrt{7}}{633}x, \quad \bar{z} = z - \frac{128}{211}x,$$

и опустим черточки у новых переменных $\bar{y}$ и $\bar{z}$. Тогда получим систему уравнений

$$\dot{x} = -\frac{2}{7}x - \frac{9\sqrt{7}}{14}yz + \left(\frac{11469\sqrt{7}}{211\cdot 214}y - \frac{37515}{32\cdot 211}z\right)x + d_1x^2,$$

$$\begin{aligned}\dot{y} = \beta z &+ \frac{15\sqrt{7}}{128}(y^2 - z^2) + \frac{19297}{211\cdot 64}yz \\ &+ \left(-\frac{277131}{211\cdot 422}y + \frac{626685\sqrt{7}}{211\cdot 422}z\right)x + d_2x^2,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{z} = -\beta y + \frac{45}{128}(y^2 - z^2) + \frac{24837\sqrt{7}}{211\cdot 448}yz + \left(\frac{67065\sqrt{7}}{422\cdot 1477}y + \frac{11949}{422\cdot 211}z\right)x + d_3x^2.$$

Для этой системы уравнений ищем интегральную поверхность [3]

$$x = F(y,z) = \sum_{k=2}^{\infty} F_k(y,z), \tag{6}$$

где $F_k(y,z)$ суть однородные многочлены k-го порядка. Если

$$F_2(y,z) = b_1y^2 + b_2yz + b_3z^2,$$

то из уравнения

$$\begin{aligned}-\frac{2}{7}F(y,z) - \frac{9\sqrt{7}}{14}yz + \left(\frac{11469\sqrt{7}}{211\cdot 214}y - \frac{37515}{32\cdot 211}z\right)F(y,z) + d_1F(y,z)^2 \\ = \frac{\partial F}{\partial y}(\beta z + \dots) + \frac{\partial F}{\partial z}(-\beta y + \dots)\end{aligned}$$

найдем b_1, b_2, b_3, а именно

$$b_1 = -b_3 = \frac{7\cdot 135}{8\cdot 184}, \quad b_2 = \frac{-81\sqrt{7}}{2\cdot 368}.$$

Остальные члены F_3, $F_4, \dots$ нам не нужно находить. Теперь найденный интеграл (6) подставляем в систему уравнений (5). Тогда два последние уравнения системы (5) не зависят от x. Для этих двух уравнений ищем функцию Ляпунова [2] $V(y,z)$ в виде

$$V = y^2 + z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} V_k(y,z),$$

где $V_k(y,z)$ суть однородные многочлены порядка k. Производная этой функции, взятая в силу данной системы уравнений, будет обладать либо свойством $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, либо свойством $\frac{dV}{dt} = g_s(y^2+z^2)^s + \dots$, где g_s — const, $g_s \neq 0$. В первом случае состояние равновесия $A(0,0)$, лежащее на интегральной поверхности (6) системы уравнений (5), есть центр, а во втором случае — фокус, устойчивый или неустойчивый в зависимости от знака g_s. Найдем последовательно V_3, V_4. Пусть

$$V_3 = c_1 y^3 + c_2 y^2 z + c_3 y z^2 + c_4 z^3.$$

Тогда постоянные c_i находятся из уравнения

$$(3c_1y^2 + 2c_2yz + c_3z^2)\beta z + 2y\left[\frac{15\sqrt{7}}{128}(y^2-z^2) + \frac{19297}{64\cdot 211}yz\right]$$
$$- (c_2y^2 + 2c_3yz + 3c_4z^2)\beta y + 2z\left[\frac{45}{128}(y^2-z^2) + \frac{24837\sqrt{7}}{448\cdot 211}yz\right] = 0.$$

Отсюда

$$c_1 = \frac{-29099\sqrt{7}}{64\cdot 211}, \quad c_2 = \frac{63}{64}, \quad c_3 = \frac{27\sqrt{7}}{64}, \quad c_4 = \frac{71829}{320\cdot 211}.$$

Заметим, что система двух последних уравнений при $x=0$ имеет интеграл [4]

$$F = y^2 + z^2 + \sum_{s=3}^{\infty} F_s(y,z) = c,$$

т. е. производная этой функции $F(y,z)$, вычисленная в силу системы уравнений (5) при $x=0$, тождественно равна нулю. С учетом этого мы можем найти функцию

$$V_4 = l_1y^4 + l_2y^3z + l_3y^2z^2 + l_4yz^3 + l_5z^4$$

аналогично случаю нахождения V_3. Сравнивая коэффициенты при y^4, z^4, z^2y^2 и исключая l_2, l_4, получим уравнения

$$\beta l_2 = -g_2 + \frac{45}{128}c_2 + \frac{15\sqrt{7}}{128}3c_1 - \frac{277131}{211}b_1,$$

$$\beta l_4 = g_2 + \frac{15\sqrt{7}}{128}c_3 + \frac{45}{128}3c_4 - \frac{11949}{211\cdot 211}b_3,$$

$$8g_2 = \frac{11949 - 3\cdot 277131}{211\cdot 211}b_1 + \frac{7\cdot 626685 + 67065}{7\cdot 211\cdot 211}\sqrt{7}b_2 + \frac{3\cdot 11949 - 277131}{211\cdot 211}b_3.$$

Подставляя значения b_1, b_2, b_3, найдем значение $8g_2$: оно отрицательно. Таким образом, состояние равновесия $A(0,0)$ — устойчивый фокус. Отсюда следует, что состояние равновесия M асимптотически устойчиво [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Софронов Е. Т.* Исследование на устойчивость одной системы с тремя параметрами // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 1. С. 82–88.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
3. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.
4. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.

г. Якутск *10 декабря 2007 г.*

УДК 512.6:519.61

К ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. II

Ф. М. Федоров

Статья является продолжением работы [1]. Прежде чем доказать теорему 6, отметим некоторые результаты, предшествующие теореме 6, но не включенные в [1], поэтому сохраним прежние нумерации предложений и формул.

Замечание 4. Надо помнить, что при построении метода редукции для однородных гауссовых систем вида (2) число неизвестных всегда остается на одно больше, чем число уравнений. В противном случае, т. е. когда число неизвестных равно числу уравнений, методом редукции, как было замечено выше [1], получим только тривиальное решение.

В связи с замечанием 4 можно ввести разные понятия метода редукции для решения бесконечных систем алгебраических уравнений.

Определение 4. Если при построении метода редукции для решения бесконечных систем алгебраических уравнений количество неизвестных и количество уравнений остаются одинаковыми в усеченной системе, то говорим, что метод редукции понимается *в узком смысле*, а если количество неизвестных остается больше, чем количество уравнений, то говорим, что метод редукции понимается *в широком смысле*.

Здесь и выше, например в теореме 5 из [1], метод редукции для однородных гауссовых систем понимается в широком смысле, если это специально не оговорено.

Таким образом, если к однородной гауссовой системе (2) применим метод редукции в узком смысле, то получим только тривиальное решение, а если к этой же системе применим метод редукции в широком смысле, то при выполнении условия А получим нетривиальное решение, причем бесконечно много решений и все они строго нетривиальны.

Здесь уместно вернуться к дискуссии, упомянутой выше [1], между Б. М. Кояловичем [2] и Р. О. Кузьминым [3]. Бесконечная система (1) в современном понимании является актуальной бесконечной системой, т. е. заданной одновременно или завершенной независимо от построения этих систем. В то же время многие авторы в прошлом, в том числе и Б. М. Коялович и Р. О. Кузьмин, систему (1) понимали как потенциальную бесконечную систему, т. е. полученную исходя из построения этих систем. Ответ на вопрос, при каком законе изменения числа неизвестных и уравнений получена бесконечная система (1), и привел к яростной дискуссии между этими авторами. Выше [1] мы уже указали, что результатом этой дискуссии стало введение понятий *нормальной* бесконечной системы, когда число уравнений остается равным числу неизвестных при возрастании количества неизвестных и уравнений, и *анормальной* — в противном случае. Б. М. Коялович придерживался понятия нормальных систем, и, как он сам отмечал [2], все его результаты относятся к нормальным системам, а Р. О. Кузьмин [3], придерживаясь анормальных систем, критиковал Б. М. Кояловича за то, что его результаты неверны. Оказалось, что оба в чем-то правы и в чем-то неправы. На самом деле не система (1) является нормальной или анормальной, а дело заключается в методе решения бесконечных систем, а именно в методе редукции, в каком случае он применяется: в узком или в широком. К каким результатам приходим при этом, мы уже упомянули выше.

Следствие 5. *Для любых фундаментальных решений системы* (2) *независимо от выполнения условия* А *справедливо соотношение*

$$x_i = -sx_{i+1}, \quad i \geqslant 0, \tag{33}$$

где x_i — компоненты фундаментального решения гауссовой системы (2), $\frac{1}{s}$ — нуль характеристики $f(x)$ (12) системы (2).

Таким образом, различным фундаментальным решениям соответствуют разные нули характеристики (12).

Замечание 5. Все фундаментальные решения гауссовой системы (2) являются строго нетривиальными и линейно независимыми. Действительно, из предположения линейной зависимости двух фундаментальных решений следует равенство нулей характеристики, соответствующей этим решениям, чего, очевидно, быть не может. Следовательно, все фундаментальные решения (20) образуют фундаментальную систему решений БСЛАУ (2).

После этих замечаний доказательство теоремы (6) становится очевидным.

Замечание 6. Если предел s последовательности s_n, т. е.

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{x_0},$$

где x_0 — нуль характеристики $f(x)$ по условию А, равен нулю, то $x_0 = \infty$, следовательно, по условию А характеристика $f(x)$ является, вопервых, аналитической функцией во всей области, во-вторых, не имеет нулей в этой же области. Если же $s = \infty$, то $x_0 = 0$, т. е. нуль является корнем характеристики $f(x)$, следовательно, в разложении (12) характеристики $f(x)$ коэффициент a_0 равен 0, что невозможно по построению бесконечной системы (2).

Замечание 7. Характеристика $f(x)$ системы (2) не является постоянной функцией, в противном случае нельзя построить бесконечную систему (2).

На основании замечаний 6 и 7 в дальнейшем полагаем, не нарушая общности, что $a_0 = 1$ и $a_{j_0} \neq 0$ хотя бы для одного j_0.

Теорема 7. *Бесконечная система* (2) *имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда характеристика* $f(x)$ *системы* (2) *не имеет нулей.*

Доказательство теоремы очевидным образом следует из теорем 4 и 6.

Следствие 6. *При выполнении условия* А *бесконечная система* (2) *имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда* $s = 0$, *где* s *— предел последовательности* (8) [1].

Теперь перейдем к рассмотрению более общей бесконечной системы, чем система (2).

Пусть задана следующая однородная БСЛАУ в гауссовой форме:

$$\begin{aligned} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2 + a_{0,3}x_3 + a_{0,4}x_4 + \ldots &= 0 \\ a_{1,0}x_1 + a_{1,1}x_2 + a_{1,2}x_3 + a_{1,3}x_4 + \ldots &= 0 \\ a_{2,0}x_2 + a_{2,1}x_3 + a_{2,2}x_4 + \ldots & \\ a_{3,0}x_3 + a_{3,1}x_4 + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \tag{34}$$

В краткой записи система (34) запишется так:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p}x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

причем полагаем, что коэффициенты $a_{j,j+p}$ имеют специальный вид:

$$a_{j,j+p} = a_p a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} \quad \forall a_{j,j} \neq 0 \ (j, p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

Заметим, что для унификации обозначений в (36) можно положить $\prod\limits_{k=0}^{-1} \bar{a}_{j+k} = 1$.

Величины $\bar{a}_{j+k}$ строим по определенному алгоритму из чисел $a_{j,j}$ таким образом: сначала положим $\bar{a}_0 = a_{1,1}$, а для последующих коэффициентов можно взять $\bar{a}_k = a_{k+1,k+1}/a_{k,k}$, $k > 0$. Исходя из структуры чисел $\bar{a}_j$ заключаем, что $a_{j,j} \prod\limits_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} = a_{j+p,j+p}$. Действительно, из построения $\bar{a}_j$ можно записать

$$\prod_{k=0}^{j-1} \bar{a}_k = \bar{a}_0 \prod_{k=1}^{j-1} (a_{k+1,k+1}/a_{k,k}) = a_{j,j}.$$

Тем самым имеем следующую цепочку равенств:

$$a_{j+p,j+p} = \prod_{k=0}^{j+p-1} \bar{a}_k = \prod_{k=0}^{j-1} \bar{a}_k \prod_{k=j}^{j+p-1} \bar{a}_k = a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k}.$$

Таким образом, подстановка последнего соотношения в (36) дает

$$\frac{a_{j,j+p}}{a_{j+p,j+p}} = a_p \quad \forall j = 0, 1, \dots. \tag{37}$$

Определение 5. *Периодической БСЛАУ* будем называть бесконечную систему (34) с коэффициентами, удовлетворяющими соотношению (37).

Теорема 8. *Решения систем* (2) *и* (34) *изоморфны.*

Доказательство Напомним, что краткая запись системы (2) имеет вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots. \tag{38}$$

Пусть x'_i — любое решение системы (38). Поскольку коэффициенты $a_{i,i}$ в системе (34) по предположению не равны нулю, то можно построить функцию

$$y_i = \frac{x'_i}{a_{i,i}}. \tag{39}$$

Покажем, что числа y_i являются решениями системы (35), коль скоро числа x'_i будут решениями системы (38).

Подставляя y_i в (35) и учитывая, что $a_{j+p,j+p} \neq 0$, и соотношения (37)–(39), получим

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} y_{j+p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{j,j+p} x'_{j+p}}{a_{j+p,j+p}} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x'_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

и тем самым показали, что числа y_i являются решениями системы (35).

Пусть числа y_i составляют любое решение системы (35). Тогда исходя из функции (39) обратное отображение возьмем в виде $x'_i = a_{i,i}y_i$. Поступая абсолютно аналогично тому, как делали выше, но беря систему (38) вместо системы (35), убеждаемся, что числа x'_i являются решениями системы (38).

Следствие 7. *Бесконечная система* (38) *входит в класс периодических систем со структурой* (37).

Замечание 8. В правомерности следствия (7) можно убедиться непосредственно, не используя теорему 8, полагая, что $a_{i,i} \equiv 1$.

Теорема 9. *Решения периодических систем с равной характеристикой* $f(x)$ (12) *изоморфны друг к другу, т. е., иными словами, существует автоморфизм между решениями этих систем.*

Доказательство. Возьмем две любые периодические системы с одной и той же характеристикой $f(x)$. Пусть эти системы имеют вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} a'_{j,j+p}x_{j+p} = 0, \quad \text{где } a'_{j,j+p} = a_p a'_{j+p,j+p}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} a''_{j,j+p}x_{j+p} = 0, \quad \text{где } a''_{j,j+p} = a_p a''_{j+p,j+p}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{41}$$

где величины a_p являются коэффициентами в разложении (12) [1] характеристики $f(x)$ систем (40) и (41).

Пусть x'_i — любое решение системы (40). Составим функцию

$$x''_i = \frac{a'_{i,i}}{a''_{i,i}} x'_i.$$

Как и в доказательстве теоремы 8, убеждаемся, что числа x''_i образуют решение системы (41). Пусть x''_i — любое решение системы (41). Составим обратное отображение

$$x'_i = \frac{a''_{i,i}}{a'_{i,i}} x''_i.$$

Тогда, как и в доказательстве теоремы 8. убеждаемся, что числа x_i' образуют решение системы (40), что и требовалось доказать.

Следствие 8. *Свойства двух периодических систем различаются тогда и только тогда, когда различны их характеристики.*

Теорема 10. *Любое фундаментальное решение периодической системы* (35) *выражается соотношением*

$$x_i = \frac{(-1)^i x_0}{a_{i,i} s^i}, \quad i \geqslant 0, \tag{42}$$

где $\frac{1}{s}$ *является некоторым нулем характеристики* $f(x)$ *системы* (35).

Доказательство теоремы очевидным образом следует из изоморфизма систем (38) и (35). Отметим, что доказательство теоремы 10 можно получить и непосредственно, подставляя выражение (42) в систему (35).

Следствие 9. *Для любых фундаментальных решений периодической системы* (35) *справедливо соотношение*

$$x_i = -s\bar{a}_i x_{i+1}, \quad i \geqslant 0, \tag{43}$$

где x_i *— компоненты фундаментального решения гауссовой системы* (35), $\frac{1}{s}$ *— нуль характеристики* $f(x)$ *системы* (35), $\bar{a}_i = \frac{a_{i+1,i+1}}{a_{i,i}}$ *— коэффициенты, входящие в выражение* (36).

Действительно, выражение (42) перепишем, учитывая структуру коэффициентов $\bar{a}_i$, в следующем виде:

$$x_i = \frac{-s(-1)^{i+1} x_0}{a_{i,i} s^{i+1}} = -s\frac{(-1)^{i+1}\bar{a}_i x_0}{a_{i+1,i+1} s^{i+1}} = -s\bar{a}_i x_{i+1}, \quad i \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

В силу изоморфизма систем (38) и (35) легко доказать следующую основную теорему для периодических бесконечных систем, аналогичную теореме 6.

Теорема 11. *Общим решением гауссовой системы* (35) *является линейная комбинация всех фундаментальных решений системы* (35), *т. е.*

$$x_i = \sum_{k=1}^{M} \frac{(-1)^i c_k}{a_{i,i} s_k^i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{44}$$

где $\frac{1}{s_k}$ *— нули характеристики* $f(x)$ (12) *системы* (2), M *— число всех этих нулей,* c_k *— произвольные константы.*

Замечание 9. Число M может быть и бесконечным, но в этом случае потребуется необходимость исследования сходимости ряда (44).

Пример 1. Пусть задана следующая однородная периодическая гауссова система:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p+1)!}{(2p+1)!} x_{j+p} = 0, \quad j = \overline{0, \infty}. \tag{45}$$

Проверим периодичность системы (45). Поскольку коэффициенты данной системы имеют вид

$$a_{j,j+p} = \frac{(2j+2p+1)!}{(2p+1)!},$$

то $a_{j,j} = (2j+1)!$, значит, числа $\bar{a}_j$, входящие в формулу (36), запишутся следующим образом:

$$\bar{a}_j = \frac{(2j+3)!}{(2j+1)!} = (2j+2)(2j+3).$$

Поэтому произведение $\prod\limits_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k}$ равно

$$\prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} = \prod_{k=0}^{p-1} (2j+2k+2)(2j+2k+3) = \frac{(2j+2p+1)!}{(2j+1)!}.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$a_{j,j+p} = \frac{(2j+2p+1)!}{(2p+1)!} = \frac{(2j+1)!(2j+2p+1)!}{(2p+1)!(2j+1)!}$$

$$= \frac{1}{(2p+1)!}(2j+1)! \prod_{k=0}^{p-1} (2j+2k+2)(2j+2k+3) = a_p a_{j,j} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k},$$

где

$$a_p = \frac{1}{(2p+1)!}, \quad a_{j,j} = (2j+1)!, \quad \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} = \frac{(2j+2p+1)!}{(2j+1)!},$$

тем самым показана периодичность системы (45).

Составим характеристику $f(x)$ системы (45):

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p x^p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p+1)!} x^p. \tag{46}$$

Найдем нули $\frac{1}{s}$ характеристики (46), т. е. решим уравнение

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p x^p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p+1)! s^p} = \sin(1/\sqrt{s}) = 0.$$

Отсюда заключаем, что $s = s_k = 1/\pi^2 k^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

В силу теоремы 10 любое фундаментальное решение бесконечной системы (45) будет иметь следующий вид:

$$x_i^{(k)} = \frac{(-1)^i \pi^{2i} k^{2i} x_0}{(2i+1)!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \; k = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{47}$$

Тогда на основании теоремы 11 и формулы (47) общее решение системы (45) формально запишется так:

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \pi^{2i} k^{2i} C_k}{(2i+1)!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{48}$$

В силу изоморфизма систем (38) и (35) все утверждения относительно системы (2) [1] (то же, что и система (38)) остаются в силе и для периодической системы (35), в частности, имеет место

Теорема 12. *Периодическая однородная бесконечная система* (35) *имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда характеристика* $f(x)$ (12) [1] *системы* (35) *не имеет нулей.*

Следствие 10. *При выполнении условия* А *периодическая однородная бесконечная система* (35) *имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда* $s = 0$, *где* s — *предел последовательности* (8) [1].

Перейдем к рассмотрению неоднородных периодических гауссовых систем:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{49}$$

Поскольку система (49) является периодической, то коэффициенты системы $a_{j,j+p}$ имеют вид (36).

Очевидно, как для всякой линейной системы общее решение БСЛАУ (49) состоит из суммы общего решения однородной системы (35) и частного решения неоднородной системы (49). Относительно поведения свободных членов b_j пока никаких предположений не делаем.

Попытаемся найти частное решение системы (49) при задании свободных членов b_j в простейшем виде:

$$b_j = c\bar{b}_j, \quad \text{где } \bar{b}_{j+p} = b_j b_p, \quad c = \text{const}, \ j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{50}$$

Теорема 13. *Периодическая система* (49) *со свободными членами* (50) *всегда имеет частное решение, которое задается формулой*

$$x_i = \frac{b_i B^*}{a_{i,i}}, \tag{51}$$

где

$$B^* = \frac{1}{\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p \bar{b}_p}, \tag{52}$$

если только ряд в (52) *сходится и не равен нулю.*

Доказательство. Действительно, подставляя (51), (52) в (49), с учетом (36) и (50) имеем

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_{j,i} \frac{c\bar{b}_i B^*}{a_{i,i}} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} \frac{c\bar{b}_{j+p} B^*}{a_{j+p,j+p}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p a_{j+p,j+p} c\bar{b}_j \bar{b}_p B^*}{a_{j+p,j+p}}$$

$$= c\bar{b}_j B^* \sum_{p=0}^{\infty} a_p \bar{b}_p = c\bar{b}_j = b_j,$$

что и требовалось доказать.

Теперь попытаемся решить неоднородную гауссову систему в более общем виде (35) методом редукции в его широком смысле. Согласно этому методу бесконечную систему (35) урезаем до конечной так, чтобы число неизвестных было на единицу больше, чем число уравнений. Для таких конечных систем в работах [4, 5] получены следующие результаты.

Теорема 14. *Пусть задана следующая конечная* СЛАУ

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p}x_{j+p} = b_j, \quad a_{jj} \neq 0, \; j = \overline{0, n-1}. \tag{53}$$

Тогда неизвестные x_i выражаются через x_n следующим образом:

$$x_i = B_{n-i} + (-1)^{n-i}x_n \prod_{p=1}^{n-i} s_p, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{54}$$

где

$$B_j = \frac{b_{n-j}}{a_{n-j,n-j}} - \sum_{p=1}^{j-1} \frac{a_{n-j,n-p}}{a_{n-j,n-j}} B_p, \quad B_1 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{2, n}, \tag{55}$$

и

$$\begin{gathered} s_j = \frac{a_{n-j,n-j+1}}{a_{n-j,n-j}} + \sum_{p=2}^{j} \frac{(-1)^{p+1} a_{n-j,n-j+p}}{a_{n-j,n-j} \prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{j-k}}, \\ s_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{2, n}. \end{gathered} \tag{56}$$

Следствие 11. *В системе* (53) *соседние неизвестные связаны друг с другом следующим образом*:

$$x_i = B_{n-i} + s_{n-i}B_{n-i-1} - s_{n-i}x_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{57}$$

Замечание 10. Очевидно, что если $b_j = 0$, то и $B_j = 0$, следовательно, получаем соответствующую теорему для однородной СЛАУ. Таким образом, в этом случае формула (57) будет соответствовать однородной системе, ассоциированной с неоднородной системой (53).

Замечание 11. Систему (53) можно рассмотреть двояко: во-первых, как самостоятельную конечную систему, во-вторых, как урезанную от бесконечной системы (35).

В последнем случае, естественно, вместо x_i подразумеваем их приближенные значения $\overset{n}{x}_i$ и для простоты, предполагая, что $x_i = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{n}{x}_i$, опускаем верхний знак. В этих терминах выражение (57) примет вид

$$x_i = \lim_{n\to\infty} B_{n-i} + \lim_{n\to\infty} (s_{n-i}B_{n-i-1}) - (\lim_{n\to\infty} s_{n-i})x_{i+1}, \quad i = \overline{0,\infty}. \quad (58)$$

Таким образом, исследование разрешимости бесконечной системы (35), точнее исследование сходимости метода редукции в широком понимании, сводится к изучению сходимости соответственно пределов (55) и (56), которые можно переписать в виде

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=1}^{n-j-1} \frac{a_{j,n-p}}{a_{j,j}} B_p, \quad B_1 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}, \quad (59)$$

$$s_{n-j} = \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{n-j-k}}, \quad s_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \ j = \overline{0, n-2}. \quad (60)$$

Пусть теперь гауссова система (53) является периодической, а свободные члены b_j имеют вид (50).

Для унификации обозначений будем считать, что

$$a_0 = 1, \quad \prod_{k=0}^{-1} \bar{a}_{j+k} = 1, \quad \bar{b}_0 = 1.$$

Теорема 15. *Если коэффициенты $a_{j,j+p}$ и свободные члены b_j системы (53) соответственно представимы в виде (37) и (50), то решение конечной системы (53) имеет вид*

$$x_i = \frac{c}{a_{i,i}} \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^{j+1} \bar{b}_{i-j}}{\prod\limits_{k=1}^{j-1} \bar{s}_{n-i+k}} \left(\frac{\bar{b}_{n-i+j}}{\bar{s}_{n-i+j}} + \bar{b}_1 \bar{b}_{n-i+j-1} \right) + \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=1}^{i} \bar{a}_{i-k} \bar{s}_{n-i+k}}, \quad (61)$$

где

$$\bar{b}_{n-j} = 1 - \sum_{p=1}^{n-j-1} a_p \bar{b}_p \bar{b}_{n-j-p}, \quad \bar{b}_1 = 1, \tag{62}$$

$$\bar{s}_{n-j} = a_1 + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} \bar{s}_{n-j-k}}, \quad \bar{s}_1 = a_1,\ j = \overline{0, n-2}. \tag{63}$$

Теорема 16. *При выполнении условия* А *решение периодической* БСЛАУ (49) *со свободными членами* (50) *может быть получено методом редукции в его широком понимании и это решение задается формулой*

$$x_i = \frac{(-1)^{i+1} cB^*}{a_{i,i}} \left(\frac{1}{s^i} + (-1)^{i-1} \bar{b}_i \right) + \frac{(-1)^i x_0}{s^i a_{i,i}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{64}$$

где B^* *определяется выражением* (52), *если только ряд в* (52) *сходится и не равен нулю и* $1/s$ *является минимальным по модулю нулем характеристики* $f(x)$ *системы* (49).

Доказательство теоремы 16 приведено в работе [5] и получено методом редукции с предельным переходом.

Таким образом, метод редукции в его широком понимании сходится к решению периодических БСЛАУ вида (49) с условиями, указанными в теореме 16.

Проанализируем решение (64) и для этого перепишем (64) в следующем виде:

$$x_i = \frac{(-1)^{i+1} cB^*}{a_{i,i} s^i} + \frac{cB^* \bar{b}_i}{a_{i,i}} + \frac{(-1)^i x_0}{s^i a_{i,i}}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{65}$$

В силу условия (50) второй член в (65) совпадает с выражением (51), т. е. является частным решением неоднородной системы (49), а третий член в (65) по теореме 10 является фундаментальным решением приведенной системы, ассоциированной с системой (49). Как легко видеть из третьего члена в (65), первый член в (65) является частным значением фундаментального решения приведенной системы при

$x_0 = -cB^*$. Резюмируя вышесказанное, заключаем, что выражение является решением неоднородной периодической бесконечной системы (49) со свободными членами (50).

В дальнейшем изложении будем полагать, что ряд $\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p \bar{b}_p$ сходится и не равен нулю.

Теорема 17. *Метод редукции в его широком понимании сходится к решению* (51) *периодических* БСЛАУ *вида* (49) *тогда и только тогда, когда характеристика* $f(x)$ *системы* (49) *не имеет нулей.*

Доказательство теоремы очевидным образом следует из теорем 12 и 16.

Следствие 12. *При выполнении условия* А *метод редукции в его широком понимании сходится к решению* (51) *периодических* БСЛАУ *вида* (49) *тогда и только тогда, когда* $s = 0$, *где* s — *предел последовательности* (8) [1].

Теорема 18. *Метод редукции в его узком понимании сходится к решению* (51) *периодических* БСЛАУ *вида* (49) *со свободными членами* (50).

Доказательство. В соответствии с методом редукции в его узком понимании периодическую систему (49) урезаем до конечной системы с одинаковым числом неизвестных и уравнений $n+1$, т. е. рассматриваем конечную систему вида

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad a_{jj} \neq 0,\ j = \overline{0,n}. \tag{66}$$

Конечную гауссову систему (66) решаем по методу, предложенному в работах [4, 5]. В соответствии с этим вводим следующие обозначения. Последнее уравнение системы (66) дает

$$x_n = B_1, \quad \text{где } B_1 = \frac{b_n}{a_{n,n}}.$$

Из предпоследнего уравнения системы (66) имеем

$$x_{n-1} = B_2 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} - \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} B_1.$$

Продолжая таким образом, получим аналогичное выражению (55) соотношение

$$B_{n-j+1} = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=1}^{n-j} \frac{a_{j,j+p}}{a_{j,j}} B_{n+1-j-p}, \quad B_1 = \frac{b_n}{a_{n,n}}, \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (67)$$

Отсюда, введя обозначение

$$B_{n-j+1} = \frac{b_j}{a_{j,j}} \overline{B}_{n-j+1}$$

и учитывая периодичность системы (49) и вид свободных членов (50), получим

$$\overset{n}{x}_j = \frac{b_j}{a_{j,j}} \bar{b}_{n-j+1},$$

где

$$\bar{b}_{n-j+1} = 1 - \sum_{p=1}^{n-j} a_p \bar{b}_p \bar{b}_{n+1-j-p}. \quad (68)$$

Исходя из выражений (52) и (68), заключаем, что

$$\lim_{M \to \infty} \sum_{p=0}^{M} a_p \bar{b}_p (\bar{b}_{M+1-p} - B^*) = 0.$$

Следовательно, введя обозначение

$$\bar{b}_{M+1-p} - B^* = B'_{M+1-p},$$

имеем

$$\left| \sum_{p=0}^{M} a_p \bar{b}_p B'_{M+1-p} - \sum_{p=0}^{M} a_p \bar{b}_p B'_{M+m+1-p} - \sum_{p=M+1}^{M+m} a_p \bar{b}_p B'_{M+m+1-p} \right| < \epsilon.$$

Отсюда для достаточно больших M очевидным образом следует, что

$$|B'_{M+1-p} - B'_{M+m+1-p}| < \epsilon$$

или, что то же,

$$\lim_{M\to\infty} \bar{b}_{M+1-p} = B^*.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \overset{n}{x} = \frac{b_i}{a_{i,i}} \lim_{M\to\infty} \bar{b}_{M+1-p} = \frac{b_i}{a_{i,i}} B^* = x_i,$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М.* К теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. I // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 78–92.
2. *Коялович Б. М.* Об основных понятиях теории бесконечных систем линейных уравнений // Уч. зап. пед. ин-та. Л., 1937. С. 83–99.
3. *Кузьмин Р. О.* Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений // Изв. АН СССР. 1934. С. 515–546.
4. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
5. *Федоров Ф. М., Осипова Т. Л.* О решении неоднородных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, вып 1. С. 106–115.

г. Якутск *17 декабря 2007 г.*

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ*)

А. Ю. Чеботарев, В. Е. Цыба

1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой и проводящей жидкости в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ со связной границей $\Gamma = \partial\Omega$, $d = 2, 3$. В безразмерных переменных течение описывается уравнениями магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\nabla)u = -\nabla p + S \cdot \operatorname{rot} B \times B, \quad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0, \quad j = \operatorname{rot} B = \frac{1}{\nu_m}\left(E + u \times B + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) E_i\right), \tag{2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{div} B = 0. \tag{3}$$

Здесь u, B, E и j — векторные поля скорости, магнитной индукции, электрической напряженности и плотности тока соответственно, p — давление, $\nu = 1/\operatorname{Re}$, $\nu_m = 1/R_m$, $S = M^2/\operatorname{Re} R_m$, где Re — число Рейнольдса, R_m — магнитное число Рейнольдса, M — число Гартмана. Через $E_i = E_i(x)$ обозначены сторонние электродвижущие силы.

К уравнениям (1)–(3) добавляют начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad B|_{t=0} = B_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований — ДВО РАН (код проекта 06–01–96003) и гранта НШ-9004.2006.1.

и условия на границе Γ области течения:

$$u = 0, \quad B \cdot n = 0, \quad n \times E = 0 \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \tag{5}$$

где n — единичный вектор внешней нормали к границе Γ.

В двумерном случае плотность тока, электрическое поле и выражения rot B, $u \times B$ являются скалярами, при этом

$$\operatorname{rot} B = \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2}, \quad u \times B = Z(u) \cdot B,$$

$$\operatorname{rot} B \times v = \operatorname{rot} B Z(v), \quad \operatorname{rot} E = -Z(\nabla E).$$

Здесь $Z(v) = \{-v_2, v_1\}$ — поворот вектора $\{v_1, v_2\}$ на $\pi/2$.

Для модели (1)–(5) рассмотрим следующую задачу.

Найти функции $\alpha_i = \alpha_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, *и соответствующее им решение* $y = \{u, B\}$ *системы* (1)–(3), *удовлетворяющее условиям* (4), (5) *и дополнительным соотношениям*

$$\alpha_i(t) \geqslant 0, \quad \int\limits_\Omega \operatorname{rot} B \cdot E_i \, dx \geqslant q_i(t), \quad \alpha_i(t)\Bigg(\int\limits_\Omega \operatorname{rot} B \cdot E_i \, dx - q_i\Bigg) = 0. \tag{6}$$

Здесь функции $q_i(t)$, $E_i(x)$ считаются заданными так же, как и начальные условия u_0, B_0.

Заметим, что величина $\int\limits_\Omega \operatorname{rot} B \cdot E_i \, dx$ соответствует работе, совершаемой сторонними электродвижущими силами E_i в единицу времени, над токами проводимости $j = \operatorname{rot} B$ [1]. Нелокальные граничные условия (6) фактически описывают процесс регулирования мощности сторонних э.д.с. за счет динамического изменения амплитуд сторонних токов при условии ограниченности их снизу.

Математические вопросы для классических краевых задач в модели (1)–(3) изучены в [2]. Постановка (1)–(6) исследуется на основе теории абстрактных эволюционных неравенств Навье — Стокса [3–5], представленной в следующем пункте. Близкие задачи для параболических систем и для уравнений Максвелла рассматривались в [6, 7].

2. Субдифференциальная обратная задача для системы типа Навье — Стокса

Пусть V и H — пара вещественных сепарабельных гильбертовых пространств таких, что V плотно в пространстве H, вложение V в H компактно и $V \subset H = H' \subset V'$, где H' и V' — сопряженные с H и V. Нормы пространств V и H будем обозначать через $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ соответственно; $(\cdot,\cdot)$ — отношение двойственности между пространствами V' и V и скалярное произведение в H. Определим следующие отображения.

1. $A : V \to V'$ — линейный непрерывный оператор такой, что

$$(Av, v) \geqslant \alpha\|v\|^2,\ \alpha > 0, \quad (Av, w) = (Aw, v)\ \forall v, w \in V. \tag{7}$$

2. $\mathscr{B}(u, v) : V \times V \to V'$ — билинейное непрерывное отображение, удовлетворяющее условию ортогональности $(\mathscr{B}(u, v), v) = 0\ \forall u, v \in V$.

3. Квадратичный оператор $\mathscr{B}[u] = \mathscr{B}(u, u) : V \to V'$ усиленно непрерывен.

4. $\Psi : V' \to (-\infty; +\infty]$ — выпуклый полунепрерывный снизу функционал, $\Psi \not\equiv +\infty$.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$y' + Ay + B[y] + h = f, \quad t \in (0, T), \tag{8}$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0. \tag{9}$$

Здесь $y' = \partial y/\partial t$. Предполагается, что правая часть f и начальное значение y_0 заданы. Функция $h : (0, T) \to V'$ считается неизвестной, и требуется ее определить вместе с $y(t)$ по дополнительному условию

$$y(t) - r(t) \in \partial\Psi(h(t)) \quad \text{на}\ \ (0, T). \tag{10}$$

Здесь $r(t) \in V$ — известная функция, $\partial\Psi(h)$ является субдифференциалом $\Psi(\cdot)$;

$$\partial\Psi(h) = \{u \in V : \Psi(g) - \Psi(h) \geqslant (g - h, u) \quad \forall g \in V'\}.$$

На задачу (8)–(10) в дальнейшем будем ссылаться как на задачу I.

2.1. Преобразование задачи I. Существование слабого решения. Обозначим через $\Phi(v)$ преобразование поляризации от функции Ψ,

$$\Phi(v) = \sup\{(h, v) - \Psi(h),\, h \in V'\}.$$

Пусть K — эффективная область функционала Φ,

$$K = \{v \in V : \Phi(v) < +\infty\}.$$

Будем считать, что функционал Φ непрерывен на множестве K. Следовательно, $\partial\Phi(w) \neq \varnothing \ \forall w \in K$.

Воспользовавшись соотношением между множествами $\partial\Psi$ и $\partial\Phi$ [8, с. 61], из условия (10) сразу получаем

$$h(t) \in \partial\Phi(y(t) - r(t)). \tag{11}$$

Исключив $h(t)$ из (8), (11), получаем задачу Коши для эволюционного уравнения с многозначным оператором (вариационное неравенство)

$$f \in y' + Ay + \mathscr{B}[y] + \partial\Phi(y - r), \quad y(0) = y_0. \tag{12}$$

В дальнейшем если X — банахово пространство, то через $L^s(0, T; X)$, $1 \leqslant m \leqslant \infty$ (соответственно $C([0, T]; X)$), обозначается пространство L^s (соответственно класс C) функций, определенных на $[0, T]$ со значениями в X. Через $D'(0, T)$ будем обозначать пространство распределений (обобщенных функций) на $(0, T)$, через W^l_s — пространство Соболева функций, интегрируемых с s-й степенью вместе с обобщенными производными до порядка l.

Определим функционал

$$G(z) = \begin{cases} \int\limits_0^T \Phi(z(t))\, dt, & \text{если } \Phi(z(\cdot)) \in L^1(0, T), \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение 1. Пара $\{y, h\} \in L^2(0, T; V) \times \mathscr{D}'(0, T; V')$ называется *слабым решением задачи* I, если

$$G(y - r) < +\infty, \quad h(t) \in \partial\Phi(y(t) - r(t))$$

и справедливо неравенство

$$\int_0^T (z' + Ay + \mathscr{B}[y] - f, y - z)\,dt + G(y - r) - G(z - r) \leqslant \frac{|y_0 - z(0)|^2}{2} \quad (13)$$

для всех z таких, что $z \in L^2(0,T;V)$, $z' \in L^2(0,T;V')$.

Здесь и далее мы будем предполагать, что выполняются следующие (достаточно слабые) условия регулярности исходных данных:

$$r \in L^2(0,T;V); \quad f, r' \in L^2(0,T;V'); \quad y_0 \in H. \quad (14)$$

Теорема 1. *Пусть билинейный оператор $\mathscr{B}$ удовлетворяет условию*

$$|((w,v),w)| \leqslant k_1 \|w\|^{1+\theta} |w|^{1-\theta} \|v\|, \quad (15)$$

где $\theta \in [0,1)$, $k_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от $v, w \in V$. Тогда для любых f, r, удовлетворяющих условиям (14), и произвольного элемента y_0 такого, что

$$y_0 - r(0) \in \overline{K}^H = \text{замыкание } K \text{ в пространстве } H, \quad (16)$$

задача I имеет по крайней мере одно слабое решение.

Доказательство теоремы 1, основанное на получении априорных оценок решения задачи вида (12), в которой вместо функционала Φ выбрана его регуляризация [9, с. 25]

$$\Phi_\lambda(u) = \inf\left\{\frac{\|u - v\|^2}{2\lambda} + \Phi(v); v \in V\right\}, \quad u \in V,\ \lambda > 0,$$

получено в [4, 5].

2.2. Сильное решение задачи I.

Определение 2. Пара $\{y, h\} \in C([0,T];V) \times L^2(0,T;V')$ называется *сильным решением задачи* I, если

$$y(0) = y_0, \quad y' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \quad G(y - r) < +\infty,$$

при этом

$$h(t) = f(t) - (y'(t) + Ay(t) + B[y(t)]) \in \partial\Phi(y(t) - r(t)) \quad \text{п. в. на } (0,T). \tag{17}$$

Пусть U, H_0 являются вещественными сепарабельными гильбертовыми пространствами, U непрерывно и плотно вложено в V, а норма в H_0 эквивалентна норме в H. Предположим, что $Az + \mathscr{B}[z] \in H_0$, если $z \in U$,

$$|Az + \mathscr{B}[z] - f(0)| \leqslant k_2\bigl(1 + \|z\|_U^2\bigr), \tag{18}$$

где $k_2 > 0$ не зависит от $z \in U$.

Теорема 2 [5]. *Пусть*

$$|(\mathscr{B}(w,v), w)| \leqslant k_3\|w\|^{1+\theta}|w|^{1-\theta}\|v\|^{\gamma}|v|^{1-\gamma}, \tag{19}$$

где постоянные $\theta, \gamma \in [0, 1/2], k_3 > 0$ *не зависят от* $v, w \in V$. *Тогда для любых данных таких, что*

$$\partial\Phi(y_0 - r(0)) \cap H \neq \varnothing, \quad y_0 - r(0) \in U \cap K, \quad f(0) \in H,$$
$$f, f' \in L^2(0,T;V'), \quad r \in C([0,T];V), \quad r' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{20}$$

задача I *имеет ровно одно сильное решение.*

2.3. Обратная задача типа управления. Приведем пример обратной задачи I, к которой можно свести постановку (1)–(6). Рассмотрим линейно независимую систему функционалов $\{Q_i\}$, $i = \overline{1,m}$, из пространства V' и биортогональную с ней систему элементов из V, $\{z_i\}$, $i = \overline{1,m}$, $(Q_i, z_k) = \delta_{ik}$. Пусть

$$r = -\sum_{i=1}^{m} q_i(t) z_i, \quad K = \{z \in V : (Q_i, z) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}.$$

Здесь $q_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, — заданные функции. Рассмотрим задачу I, где Ψ — опорная функция множества K, $\Psi(h) = \sup\{(h,z) : z \in K\}$. На основании условия (10) заключаем [8, с. 60], что

$$y(t) - r(t) \in K \quad \text{и} \quad (h, z - y + r) \leqslant 0 \quad \forall z \in K. \tag{21}$$

Из (21) следует структура неизвестной функции $h(t)$,

$$h(t) = \sum_{1}^{m} \alpha_i(t) Q_i, \quad \alpha_i(t) = (h(t), w_i),$$

$$(Q_i, y(t)) \leqslant -q_i(t),\ \alpha_i \geqslant 0, \quad ((Q_i, y(t)) + q_i(t))\alpha_i(t) = 0,\ i = \overline{1, m}.$$

3. Разрешимость обратной задачи МГД

В дальнейшем, не нарушая общности, считаем, что параметр S в модели (1)–(3) равен 1, поскольку всегда можно сделать переобозначения: $B := \sqrt{S}B$, $E := \sqrt{S}E$, $E_i := \sqrt{S}E_i$.

3.1. Пространства и операторы для модели МГД. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{R}^d$ со связной границей $\Gamma \in C^2$. Рассмотрим линейные многообразия гладких вектор-функций:

$$\mathscr{U}_1 = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \operatorname{div} v = 0,\ x \in \Omega,\ v = 0,\ x \in \Gamma\},$$

$$\mathscr{U}_2 = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \operatorname{div} v = 0,\ x \in \Omega,\ n \cdot v = 0,\ x \in \Gamma\}.$$

Обозначим через V_1, V_2 замыкания $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ по норме $W_2^1(\Omega)$, через H_1, H_2 — замыкания $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ по норме $L^2(\Omega)$, при этом фактически $H_1 = H_2$. Скалярное произведение в пространствах H_1 и H_2 определяется обычным образом:

$$(u, v)_0 = \int_\Omega (u \cdot v)\, dx.$$

Билинейная форма

$$((u, v)) = (\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v)_0 = \int_\Omega (\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v)\, dx \quad \forall u, v \in V_1, V_2$$

задает скалярное произведение в V_1 и V_2, при этом определяемая им норма эквивалентна норме пространства $W_2^1(\Omega)$. Рассмотрим также пространства

$$V = V_1 \times V_2, \quad H = H_1 \times H_2, \quad V \subset H = H' \subset V'.$$

Указанные вложения являются плотными и непрерывными. Нормы в пространствах V и H соответственно обозначаем через $\|\cdot\|$, $|\cdot|$; $(\cdot,\cdot)$ — отношение двойственности между V' и V и скалярное произведение в H;

$$(y,z)=(u,v)_0+(B,w)_0,\quad (y,z)_V=((u,v))+((B,w))$$

$$\forall y=\{u,B\},\quad z=\{v,w\}.$$

Для сведения постановки (1)–(6) к задаче I определим отображения

$$A:V\to V',\quad \mathscr{B}:V\times V\to V',$$

используя соотношения

$$(Ay,z)=\nu((u,v))+\nu_m((B,w)),$$

$$(\mathscr{B}(y_1,y_2),z)=((u_1\cdot\nabla)u_2-\operatorname{rot}B_2\times B_1,v)_0-(u_2\times B_1,\operatorname{rot}w)_0,$$

которые выполняются для всех $y=\{u,B\}$, $y_1=\{u_1,B_1\}$, $y_2=\{u_2,B_2\}$, $z=\{v,w\}$ из пространства V.

Заметим, что оператор A удовлетворяет условиям (7), а отображения $\mathscr{B}(y,z)$ и $\mathscr{B}[y]=\mathscr{B}(y,y)$ таковы, что

$$(\mathscr{B}(y,z),z)=0,$$

$$(\mathscr{B}[y],z)=(\operatorname{rot}u\times u,v)_0-(\operatorname{rot}B\times B,v)_0-(u\times B,\operatorname{rot}w)_0.$$

Мультипликативное неравенство для области $\Omega\subset\mathbb{R}^d$

$$\|f\|_{L^4(\Omega)}\leqslant K\|f\|^{d/4}_{W_2^1(\Omega)}\|f\|^{1-d/4}_{L^2(\Omega)}$$

приводит к следующей оценке:

$$(\mathscr{B}(y,z),y)\leqslant C\|z\|\,\|y\|^{1+d/4}|y|^{1-d/4},\tag{22}$$

где $C>0$ не зависит от $y,z\in V$. Если $d=2$, то справедливо более сильное неравенство

$$(\mathscr{B}(y,z),y)\leqslant C\|z\|^{1/2}|z|^{1/2}\|y\|^{3/2}|y|^{1/2}.\tag{23}$$

Таким образом, введенное отображение $\mathscr{B}$ удовлетворяет условию (15), а в двумерном случае условию (19).

Для вектор-функций $E_i \in W_2^1(\Omega)$, $n \times E_i = 0$ на Γ, определим функционалы $Q_i \in V'$,

$$(Q_i, z) = -(\mathrm{rot}\ E_i, w)_0 = -(E_i, \mathrm{rot}\ w)_0, \quad \text{если } z = \{v, w\} \in V.$$

Определим $\Phi(y)$ как индикаторную функцию множества $K = \{z \in V : (Q_i, z) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m}\}$:

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ y \in K, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что Φ является выпуклым на V функционалом, слабо полунепрерывным снизу.

3.2. Исследование постановки (1)–(6). Пусть $y = \{u, B\}$ — достаточно гладкое решение нелокальной односторонней задачи (1)–(6), $y_0 = \{u^0, B^0\}$. Будем предполагать, что система функций $\{\mathrm{rot}\, E_i\}$ линейно независима в пространстве H_2.

Рассмотрим произвольный элемент $z = \{v, w\} \in V$, умножим уравнение (1) на $(v - u)$, уравнение (2) на $(w - B)$ и проинтегрируем по частям по области Ω, используя граничные условия для скорости, электрического и магнитного полей, а также для тестовых функций v, w. Складывая полученные соотношения и учитывая условия (6), получаем неравенство

$$(y' + Ay + \mathscr{B}[y], z - y) + \Phi(z - r) - \Phi(y - r) \geqslant 0, \tag{24}$$

где $r(t) \in V$ определяется равенством

$$r = \left\{ 0, -\sum_{i=1}^{m} q_i(t) w_i \right\}.$$

Здесь функции $\{w_i\}$ биортогональны с $\{-\,\mathrm{rot}\, E_i\}$.

Обратно, пусть $y = \{u, B\}$ — достаточно гладкое решение вариационного неравенства (24). Положим $z = \{u \pm v, B\}$, где $v \in C_0^\infty(\Omega)$ —

вектор-функция такая, что $\operatorname{div} v = 0$. Тогда из неравенства (24) вытекает, что

$$(u', v)_0 + \nu(\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v)_0 + ((u \cdot \nabla)u - \operatorname{rot} B \times B, v)_0 = 0. \qquad (25)$$

Из (25) с учетом условия $\operatorname{div} u = 0$ следует, что

$$u' + \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u - \operatorname{rot} B \times B = -\nabla p, \qquad (26)$$

для некоторой функции p. Выполнение граничных условий для поля скоростей следует из принадлежности $u(\cdot, t)$ пространству V_1. Далее, полагая в (24) $z = \{u, \widetilde{w}\}$ и учитывая структуру функционала Φ, заключаем

$$(\operatorname{rot} E_i, B)_0 \geqslant q_i(t), \quad i = 1, \dots, m,$$
$$(B', \widetilde{w} - B)_0 + (\nu_m \operatorname{rot} B - u \times B, \operatorname{rot}(\widetilde{w} - B))_0 \geqslant 0 \qquad (27)$$

для произвольных гладких функций $\widetilde{w}(\cdot, t) \in V_2$, удовлетворяющих неравенствам $(\operatorname{rot} E_i, \widetilde{w})_0 \geqslant q_i(t)$, $i = 1, \dots, m$. Следствием вариационного неравенства (27) является соотношение

$$(B', w)_0 + (\nu_m \operatorname{rot} B - u \times B, \operatorname{rot} w)_0 = \sum_1^m \alpha_i(t)(\operatorname{rot} E_i, w)_0. \qquad (28)$$

Здесь $\alpha_i \geqslant 0$, $((\operatorname{rot} E_i, B)_0 - q_i(t))\alpha_i(t) = 0$, w — произвольный элемент из пространства V_2. Для произвольной вектор-функции $\widehat{w} \in C_0^\infty(\Omega)$ определим скалярную функцию ϕ такую, что

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \widehat{w} \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Тогда $w = \widehat{w} - \nabla\phi \in V_2$, при этом $\operatorname{rot} w = \operatorname{rot} \widehat{w}$, а в силу условия $\operatorname{div} B = 0$ будет

$$(B, w)_0 = (B, \widehat{w})_0.$$

Следовательно, соотношение (28) справедливо для любой функции $\widehat{w} \in C_0^\infty(\Omega)$. Полагая

$$E = \nu_m \operatorname{rot} B - u \times B - \sum_1^m \alpha_i(t) E_i$$

и интегрируя в (28) по частям, получаем уравнения (2). Сравнивая первое уравнение в (2) с (28), заключаем, что $n \times E = 0$ на Γ.

Таким образом, постановка (1)–(6) сводится к абстрактному эволюционному неравенству (12). *Слабым* (соответственно *сильным*) *решением задачи* (1)–(6) будем называть соответственно слабое (сильное) решение задачи I, для которой выше определены соответствующие пространства и операторы.

Следствием теорем 1, 2 является следующий результат.

Теорема 3. *Пусть*

$$u_0 \in H_1, \quad B_0 \in H_2, \quad E_i \in W_2^1(\Omega), \quad n \times E_i|_\Gamma = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

система вихрей $\{\operatorname{rot} E_i\}$ *линейно независима в пространстве* H_2,

$$q_i \in W_2^1(0,T), \qquad \int\limits_\Omega \operatorname{rot} E_i \cdot B_0 \, dx \geqslant q_i(0), \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда задача (1)–(6) *имеет по крайней мере одно слабое решение. Кроме того, если* $d = 2$ *и дополнительно*

$$u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap V_1, \quad B_0 \in W_2^2(\Omega) \cap V_2, \quad (n \times \operatorname{rot} B_0)|_\Gamma = 0, \quad q_i \in W_2^2(0,T), \tag{29}$$

то слабое решение является сильным и при этом единственным.

Доказательство. Проверим выполнение условий теорем 1, 2. Отметим сразу, что операторы A, $\vec{B}$, определенные в п. 3.1, удовлетворяют условиям указанных теорем, а оценки (22) и (23) означают справедливость условий (15), (19). Кроме того, для доказательства существования единственного сильного решения полагаем $U = W_2^2(\Omega) \cap V$. Тогда $\mathscr{B}[g] \in H_0 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ для $g \in U$. Если $z = \{v, w\} \in H$, а $y_0 = \{u_0, B_0\}$ удовлетворяет (29), то

$$(Ay_0, z) = -\nu(\Delta u_0, v)_0 - \nu_m(\Delta B_0, w)_0 - \nu_m \int\limits_\Gamma (n \times \operatorname{rot} B_0) w \, d\Gamma.$$

Поэтому из (29) следует выполнение условий (20) теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1974.
2. *Sermange M., Temam R.* Some mathematical questions related to the MHD equations // Comm. Pure App. Math. 1983. V. 36. P. 635–664.
3. *Коновалова Д. С.* Субдифференциальные краевые задачи для эволюционных уравнений Навье — Стокса // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. С. 792–798.
4. *Chebotarev A. Yu.* Subdifferential inverse problems for evolution Navier–Stokes systems // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2000. V. 8, N 3. P. 243–254.
5. *Чеботарев А. Ю., Савенкова А. С.* Вариационные неравенства в магнитной гидродинамике // Мат. заметки. 2007. Т. 82, вып. 1. С. 135–149.
6. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
7. *Беспалова Т. В., Чеботарев А. Ю.* Вариационные неравенства и обратные субдифференциальные задачи для уравнений Максвелла в гармоническом режиме // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, N 6. С. 747–753.
8. *Barbu V.* Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems. San Diego: Acad. Press, 1993.
9. *Aubin J. P.* Optima and equilibria. An introduction to nonlinear analysis. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1993.

г. Владивосток *28 января 2008 г.*

АННОТАЦИИ

УДК 517.946

ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ $(2m+1)$-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. *А. М. Абдрахманов, А. И. Кожанов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Для $2m+1$-параболических уравнений

$$(-1)^m D_t^{2m+1} u - Mu = f(x,t)$$

рассматриваются краевые задачи в цилиндрической области с заданием на боковой границе значения косой производной. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 11.

УДК 517.956

ЗАДАЧИ КОШИ И ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. *С. А. Алдашев.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Для одного класса многомерных гиперболических уравнений доказаны однозначные разрешимости взаимно-сопряженных задач. Библиогр. 9.

УДК 519.17

РЕБЕРНАЯ 2-ДИСТАНЦИОННАЯ РАСКРАСКА ПЛОСКИХ СУБКУБИЧЕСКИХ ГРАФОВ. *О. В. Бородин, И. Г. Дмитриев, А. О. Иванова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Доказано, что любой планарный граф с максимальной степенью 3 реберно 2-дистанционно 5-раскрашиваем, если его обхват не меньше 36. Оценка 5 достигается на любом графе, содержащем две смежные вершины степени 3. Библиогр. 6.

УДК 519.17

ПОКРЫТИЕ ПЛОСКИХ ГРАФОВ ПОДГРАФАМИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЫРОЖДЕННОСТИ. *О. В. Бородин, И. Г. Дмитриев, А. О. Иванова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Как известно, не все плоские графы предписанно 4-раскрашиваемы, и не все они вершинно 2-древесны. С другой стороны, Лам, Ксу и Лю (1999 г.) доказали, что при отсутствии в плоском графе 4-циклов он предписанно 4-раскрашиваем. Получено обобщение этого результата в терминах покрытия индуцированными подграфами переменной вырожденности; как следствие, любой плоский граф без 4-циклов можно покрыть двумя индуцированными подграфами без циклов, т. е. такие графы вершинно 2-древесны. Библиогр. 17.

УДК 519.17

МИНИМАЛЬНЫЙ ВЕС ОКРЕСТНОСТИ 5-ВЕРШИНЫ В ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ 5. *О. В. Бородин, А. О. Иванова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

О. В. Бородин и Вудал (1998 г.) доказали, что в любой плоской триангуляции T_5 с минимальной степенью 5 найдется вершина степени 5 такая, что сумма степеней ее соседей не превосходит $\Delta + 25$, где Δ — максимальная степень вершины в T_5. Таким образом, минимальный вес $w(S_5)$ окрестности 5-вершины в T_5 не превосходит $\Delta + 30$ при любом Δ.

Мы доказываем, что $w(S_5) \leqslant \Delta + 27$ при $\Delta \geqslant 28$, причем оценка неулучшаема. Библиогр. 8.

УДК 517.956.4

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. *О. А. Вихрева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

С помощью теоремы о сжимающих отображениях и вариационного метода доказывается существование единственного обобщенного решения задачи Дирихле для нелинейного вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка. Библиогр. 6.

УДК 517.946

ОБ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. *И. Е. Егоров.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Рассматривается общая краевая задача на полуоси для сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка с оператором Бесселя. Постановка краевой задачи включает весовые граничные условия. Доказываются теоремы единственности и существования решений краевой задачи в классе функций, быстро убывающих на бесконечности. Библиогр. 8.

УДК 518.9

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МНОЖЕСТВА СТРАТЕГИЙ ИГРОКА В PEC-ЗАДАЧАХ. *Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Работа посвящена проблематике PEC-задач. Доказана теорема, дающая достаточное условие для объединения игроками аргументов из своих множеств стратегий. Библиогр. 3.

УДК 517.946

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В СЛУЧАЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ. *О. А. Колтуновский.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Рассматривается обратная задача нахождения вместе с решением гиперболического уравнения неизвестного коэффициента при решении. В качестве условия переопределения в данной задаче предлашается условие интегрального переопределения по времени. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 12.

УДК 517.956.4

О ГЛАДКИХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ. *С. В. Попов, А. А. Суслонова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Исследуется гладкость решения задачи Трикоми. Также выписываются условия гладкости, при выполнении которых решение сингулярного интегрального уравнения Трикоми будет принадлежать пространствам Гёльдера. Библиогр. 17.

УДК 517.956.4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ. *С. В. Попов, Е. Ф. Шарин.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Исследуются гладкости решений краевых задач для параболических уравнений с негладкими коэффициентами в классах Гёльдера. Рассматриваются случаи односторонних и противоположных спутных потоков, на границе раздела которых выполняются непрерывные условия сопряжения. Библиогр. 18.

УДК 517.956

КРИТЕРИИ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ДАРБУ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ДАРБУ — ПУАССОНА. *Р. Б. Сеилханова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Получен критерий однозначной разрешимости задач Дарбу с отходом от характеристики для многомерного уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона. Библиогр. 14.

УДК 517.958

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В СЛУЧАЕ ДВУХ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ. *Е. Т. Софронов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Приведен один пример в данном критическом случае для системы трех дифференциальных уравнений, в котором указан алгоритм решения вопроса об устойчивости по Ляпунову. Библиогр. 4.

УДК 512.6:519.61

К ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. II. *Ф. М. Федоров.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

В основном с алгебраических позиций сделана попытка построения теории для так называемых периодических бесконечных систем линейных алгебраических уравнений в отличие от регулярных, вполне регулярных и нормальных систем. Библиогр. 5.

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ. *А. Ю. Чеботарев, В. Е. Цыба.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 1.

Исследуется обратная субдифференциальная задача для уравнений магнитной гидродинамики (МГД) вязкой несжимаемой жидкости. На основе результатов о разрешимости абстрактного эволюционного неравенства в гильбертовом пространстве для операторов с квадратичной нелинейностью доказано существование слабого решения «в целом» по времени, а для двумерных течений — существование и единственность сильного решения. Библиогр. 9.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации, шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210×300 мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, названия статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Формулы и математические обозначения должны быть вписаны черной пастой или чернилами черного цвета отчетливо, единообразно.

4. Пронумерованные формулы располагаются в отдельной строке. Номер формулы ставится у правого края листа.

5. Проводится дополнительная разметка формул.

6. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа Word, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

7. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа TEX и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Список литературы печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.

ВНИМАНИЮ ПОДПИСЧИКОВ!

Зарубежная подписка на «Математические заметки ЯГУ» оформляется через фирмы — партнеры ЗАО «Международная книга — Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК — Периодика» по адресу:

117049 Москва, ул. Б. Якимянка, 39, ЗАО «МК — Периодика». Тел. 238–14–85, 238–49–67, факс 238–46–34;

e-mail info@mkniga.msk.su. Internet: http://WWW.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address to one of the partners of JSC Mazhdunarodnaya kniga – Periodica" in your country or to the JSC "MK – Periodica" directly.

Address: "MK – Periodica", ul. B. Yakimianka, 39, Moscow, 117049, Russia.

Tel.: (095) 238–14–85, 238–49–67, Fax: 238–46–34.

e-mail info@mkniga.msk.su.

Internet: http://www.mkniga.ru

Журнал подготовлен с использованием макро-пакета $\mathcal{AMS}$-TeX, разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TeX, the American Mathematical Society's TeX macro system.

Подписано в печать ??.0?.2008. Формат 60 × 84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 10. Уч.-изд. л. 10. Тираж 150 экз. Заказ № ??.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.