ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. К. АММОСОВА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 15, вып. 2 **Июль—Декабрь, 2008**

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 514.755

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ СЕГРЕ $S(1,1)$ С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКЦИИ ГЕССЕ

И. В. Бубякин, Е. А. Кузьмина

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве стереографическую проекцию сферы Φ на плоскость. Проведем через южный полюс сферы касательную плоскость α. Спроектируем сферу Φ на эту плоскость с центром в северном полюсе N следующим образом: через данную точку $M \neq N$ и северный полюс проведем прямую p. Эта прямая пересечет плоскость α в некоторой точке P^*. Таким образом, получаем биективное отображение φ сферы Φ на плоскость α:

$$\varphi : M \to P^*.$$

Это отображение называется *стереографической проекцией.* Стереографическая проекция применяется в математической картографии, которая занимается изучением изображений земной поверхности на плоскости. Заметим, что вся сфера Φ будет отображена на всю плоскость α, за исключением северного полюса N.

Рассмотрим на сфере Φ сечения плоскостями, перпендикулярными ее оси, проходящей через северный и южный полюсы, а также плоскостями, проходящими через эту ось. Эти сечения соответственно называются *параллелями и меридианами* сферы. При стереографической проекции φ параллели изображаются концентрическими окружностями с центром в точке касания сферы с плоскостью проекций, а меридианы — прямыми, принадлежащими одному пучку с центром в точке O. Отметим, что эти прямые являются линиями пересечения плоскости меридиана и плоскости проекций. Таким образом, точка P, которая задается на сфере пересечением определенных параллели и меридиана, отображается при стереографической проекции φ в точку P^*, которая является пересечением соответствующих окружности и прямой, за исключением северного полюса N.

Теперь обобщим понятие стереографической проекции. Вместо трехмерного евклидова пространства возьмем трехмерное проективное пространство, а вместо сферы — поверхность Сегре $S(1,1)$ [1], которой в евклидовом пространстве соответствуют однополостные гиперболоиды и гиперболические параболоиды. Тогда проектирование φ называется *отображением* или *проекцией* Гессе.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве проекцию Гессе [2] поверхности Сегре $S(1,1)$ на плоскость и с помощью этого отображения определим алгебраические кривые на поверхности $S(1,1)$.

Поверхность Сегре $S(1,1)$ представляет собой невырожденную линейчатую квадрику, несущую два однопараметрических семейства прямолинейных образующих. Через данную точку этой квадрики проходит по одной прямолинейной образующей из каждого семейства. При этом две прямолинейные образующие, принадлежащие различным семействам, пересекаются, а две прямолинейные образующие, принадлежащие одному семейству, не имеют общих точек. Поверхность Сегре $S(1,1)$ можно представить как одномерное многообразие прямолинейных образующих одного из двух семейств. С другой стороны, эту линейчатую квадрику $S(1,1)$ образуют прямые, пересекающие три фиксированные прямые общего положения трехмерного проективного пространства. Геометрический факт, что поверхности Сегре $S(1,1)$ несут два семейства прямолинейных образующих, находит применение в архитектуре. Если необходимо построить искривленную поверхность, то возможность задать ее форму, используя образующие прямые этих квадрик, является очевидным преимуществом.

Теперь непосредственно рассмотрим проекцию Гессе. Пусть имеем квадрику Сегре $S(1,1)$ и некоторую плоскость π, которую назовем *плоскостью проекций.* Через всякую точку M квадрики $S(1,1)$ проходят две прямолинейные образующие, которые пересекают плоскость проекций в точках A и B. Прямая AB представляет собой линию пересечения плоскости проекций с касательной плоскостью $T_M S(1,1)$ к квадрике $S(1,1)$ в точке M. При этом отметим, что касательная плоскость $T_M S(1,1)$ высекает на квадрике $S(1,1)$ пару прямолинейных образующих, проходящих через точку M.

Таким образом, устанавливается биективное отображение g между квадрикой Сегре $S(1,1)$ и плоскостью π. Точке M квадрики $S(1,1)$ соответствует прямая AB на плоскости π, а точкам A и B — прямолинейные образующие, проходящие через точку M. Построенное таким образом отображение называется *проекцией* Гессе.

Рассмотрим на квадрике $S(1,1)$ алгебраическую кривую γ_n n-го порядка, не проходящую через точку M. Так как при отображении Гессе порядок кривой не меняется, эта кривая перейдет в плоскую кривую γ_n^* n-го порядка. Покажем, что кривая γ_n^* пересекает прямую AB только в двух точках A и B. Действительно, предположим, что существует какая-нибудь другая точка пересечения. Тогда на квадрике $S(1,1)$ ей будет соответствовать точка M и, значит, вопреки предположению пространственная кривая γ_n будет проходить через точку M.

Для определенности будем считать, что плоскость γ_n^* проходит α раз через точку A и β раз через точку B. Тогда очевидно, что

$$\alpha + \beta = n,$$

так как кривая γ_n^* пересекается с прямой AB точно в n точках.

Теперь найдем все пространственные кривые первого порядка, второго и третьего порядков, лежащие на поверхности Сегре $S(1,1)$.

Найдем сначала кривые γ_1, т. е. кривые первого порядка. В этом случае

$$\alpha + \beta = 1.$$

Стало быть, здесь возможны два случая: а) $\alpha = 1$; $\beta = 0$; б) $\alpha = 0$; $\beta = 1$. Поэтому плоская кривая γ_1^* может быть лишь прямой, проходящей через одну из точек A или B. Тогда пучкам прямых с центром в точках A или B соответствуют на квадрике Сегре $S(1,1)$ два семейства прямолинейных образующих: прямым, проходящим через точку A, соответствует одно семейство прямолинейных образующих, а прямым, проходящим через точку B, — другое семейство прямолинейных образующих.

Таким образом, единственными кривыми первого порядка, лежащими на поверхности Сегре $S(1,1)$, являются ее прямолинейные образующие.

Теперь проведем рассуждения аналитически. Зададим поверхность Сегре $S(1,1)$ уравнением

$$x_0x_1 - x_2x_3 = 0. \tag{1}$$

Выберем проективный репер в трехмерном проективном пространстве так, чтобы вершина (0:0:0:1) совмещалась с точкой M, а координатную плоскость $x_3 = 0$ совместим с плоскостью π проекций. В выбранном репере отображение Гессе будет определяться формулами

$$x_0 = \lambda\nu, \quad x_1 = \mu\nu, \quad x_2 = \nu^2, \quad x_3 = \lambda\mu, \tag{2}$$

при этом выполняется равенство

$$\lambda : \mu : \nu = x_0 : x_1 : x_2. \tag{3}$$

Легко проверить, что величины x_0, x_1, x_2, x_3, определяемыми формулами (2), удовлетворяют уравнению поверхности Сегре $S(1,1)$. Действительно, подставляя (2) в (1), получаем тождество.

Теперь выберем проективный репер на плоскости π проекций. Совместим вершину (0:1:0) с точкой A, а вершину (1:0:0) с точкой B. Всякая прямая в плоскости π определяется уравнением

$$a_\lambda\lambda + a_\mu\mu + a_\nu\nu = 0.$$

Прямые, проходящие через точку A, будут задаваться уравнением

$$a_\lambda\lambda + a_\nu\nu = 0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\lambda}{\nu} = -\frac{a_\nu}{a_\lambda}. \tag{4}$$

С другой стороны, из формул (2) следует, что

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{x_0}{x_2}, \quad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{x_3}{x_1}. \tag{5}$$

Сравнивая равенства (4) и (5), получим

$$\frac{x_0}{x_2} = -\frac{a_\nu}{a_\lambda}, \quad \frac{x_3}{x_1} = -\frac{a_\nu}{a_\lambda}.$$

Таким образом, выполняются уравнения

$$a_\lambda x_0 + a_\nu x_2 = 0, \quad a_\lambda x_3 + a_\nu x_1 = 0. \tag{6}$$

Эти уравнения определяют на квадрике Сегре $S(1,1)$ одно однопараметрическое семейство прямолинейных образующих.

Рассмотрим теперь прямые, проходящие через точку B. Они определяются уравнением

$$a_\mu \mu + a_\nu \nu = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{a_\nu}{a_\mu}. \tag{7}$$

С другой стороны, из формул (2) имеем

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{x_3}{x_0}. \tag{8}$$

Сравнивая соотношения (7) и (8), получим

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{a_\nu}{a_\mu}, \quad \frac{x_3}{x_0} = -\frac{a_\nu}{a_\mu}.$$

Стало быть, выполняются уравнения

$$a_\mu x_1 + a_\nu x_2 = 0, \quad a_\mu x_3 + a_\nu x_0 = 0.$$

Эти уравнения определяют на поверхности Сегре $S(1,1)$ другое однопараметрическое семейство прямолинейных образующих.

Таким образом, при отображении Гессе прямым плоскости π, проходящим через точку A, соответствует одно семейство прямолинейных образующих (6) квадрики Сегре $S(1,1)$, а прямым той же плоскости π, проходящим через точку B, соответствует другое семейство прямолинейных образующих (9) поверхности Сегре $S(1,1)$. Это подтверждает вывод, сделанный ранее.

Теперь найдем кривые γ_2, т. е. кривые второго порядка. В этом случае

$$\alpha + \beta = 2.$$

Значит, возможны три случая:

а) $\alpha = 2$; $\beta = 0$; б) $\alpha = 0$; $\beta = 2$; в) $\alpha = 1$; $\beta = 1$.

В первом и во втором случаях плоская кривая γ_2^* дважды проходит через точку A или через точку B. Следовательно, кривая γ_2^* имеет двойную точку в точке A или B и представляет собой пару прямых, пересекающихся в точке A или B. Все такие кривые γ_2^* образуют пучок прямых с центром в точке A или B. Этим пучкам прямых на квадрике Сегре $S(1,1)$ соответствуют два семейства прямолинейных образующих.

В третьем случае мы получим плоскую кривую γ_2^*, которая проходит через точку A и через точку B. Следовательно, кривая γ_2^* является коникой — коническим сечением, а соответствующая пространственная кривая γ_2 на квадрике Сегре $S(1,1)$ представляет собой ее плоское сечение.

Таким образом, единственными кривыми второго порядка, лежащими на поверхности Сегре $S(1,1)$, являются ее плоские сечения.

Проведем теперь рассуждения аналитически. Зададим квадрику Сегре $S(1,1)$ уравнением (1). Выбирая проективный репер пространства так же, как и в случае кривых первого порядка, определим отображение Гессе формулами (2). При этом будет выполняться равенство (3). Далее, выберем проективный репер на плоскости проекций π так, чтобы вершины (0:1:0) и (1:0:0) совмещались с точками A и B.

Кривая второго порядка, проходящая через точки A и B, определяется в плоскости π уравнением

$$\nu^2 - \lambda\mu = 0. \tag{10}$$

На основании соотношений (3) этой конике на поверхности Сегре $S(1,1)$ при отображении Гессе соответствует кривая γ_2 второго порядка:

$$x_0x_1 - x_2x_3 = 0, \quad x_2^2 - x_0x_1 = 0. \tag{11}$$

Второе уравнение последней системы в пространстве представляет собой конус Q с вершиной в точке M. Следовательно, кривая γ_2 представляет собой пересечение квадрики Сегре $S(1,1)$ и конуса Q. При этом поверхность Сегре $S(1,1)$ и конус Q расположены в пространстве так, что они имеют две общие образующие

$$px_0 + qx_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

и

$$rx_1 + sx_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Система уравнений (11) определяет либо кривую γ_2 второго порядка:

$$x_2^2 - x_0x_1 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \tag{12}$$

либо пару пересекающихся прямых:

$$x_0 = x_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0,$$

расположенных на квадрике Сегре $S(1,1)$. Таким образом, конус Q высекает на поверхности Сегре $S(1,1)$ либо невырожденную конику (12), либо пару пересекающихся прямых, очевидно, общих образующих квадрики Сегре $S(1,1)$ и конуса Q. Здесь следует отметить, что всякая плоскость высекает на поверхности Сегре $S(1,1)$ либо невырожденную кривую второго порядка, либо пару пересекающихся прямых. В последнем случае секущая плоскость будет касаться квадрики Сегре $S(1,1)$. Итак, кривая второго порядка γ_2 на поверхности Сегре $S(1,1)$

представляет собой ее плоское сечение. Это подтверждает вывод, полученный ранее.

Найдем теперь кривые γ_3, т. е. кубические кривые. В этом случае

$$\alpha + \beta = 3.$$

Здесь возможны случаи а) $\alpha = 3$; $\beta = 0$; б) $\alpha = 0$; $\beta = 3$; в) $\alpha = 2$; $\beta = 1$; г) $\alpha = 1$; $\beta = 2$. В первых двух случаях плоская кривая γ_3^* трижды проходит через точку A или через точку B. Следовательно, кривая γ_3^* имеет тройную точку в точке A или в точке B или представляет собой тройку прямых, пересекающихся в точке A или B. Все такие кривые γ_3^* образуют пучок прямых с центром в точке A или B. Тогда этим пучкам прямых на квадрике Сегре $S(1,1)$ соответствует два семейства прямолинейных образующих.

В третьем и четвертом случаях мы получим, что плоские кривые γ_3^* имеют в точке A или B двойную точку. Например, если кривая γ_3^* дважды проходит через точку A, то она один раз проходит через точку B. В этом случае каждая прямая, проходящая через точку A, еще только раз пересекает кривую γ_3^*, в то время как каждая прямая, проходящая через точку B, пересекает кривую γ_3^* еще в двух точках. Поэтому соответствующие пространственные кривые γ_3 дважды пересекаются с прямолинейными образующими одного семейства и один раз пересекаются с прямолинейными образующими другого семейства. Таким образом, мы получим на квадрике Сегре $S(1,1)$ два различных семейства пространственных кривых γ_3 третьего порядка.

Рассмотрим плоскую кривую γ_3^*. Пусть она имеет двойную точку в точке A. Тогда произвольная прямая, проходящая через точку B, вместе с кривой γ_3^* будет составлять кривую γ_4^* четвертого порядка. На квадрике Сегре $S(1,1)$ плоской кривой γ_4^* будет соответствовать кривая γ_4 четвертого порядка, которая высекается некоторой другой линейчатой квадрикой. Это показывает, что линейчатая квадрика, пересекающая поверхность Сегре $S(1,1)$ по кривой γ_3, имеет с ней еще и общую образующую. Поскольку линейчатая квадрика в трехмерном проективном пространстве может быть либо квадрикой Сегре $S(1,1)$, либо конусом, тем самым доказана следующая

Теорема [1]. *Всякая кубическая кривая, лежащая на квадрике Сегре $S(1,1)$, представляет собой сечение либо другой квадрикой Сегре, либо конусом, которые имеют с данной поверхностью общую образующую и вдоль этой образующей не касаются.*

В заключение отметим, что многообразие Сегре $S(m,n)$, в частности $S(1,1)$, играет важную роль при исследовании дифференциальной геометрии [3] грассмановых многообразий $G(m,n)$ — многообразий m-мерных плоскостей n-мерного проективного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

2. *Математическая энциклопедия.* М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 5. С. 222–223.

3. *Акивис М. А.* К дифференциальной геометрии грассманова многообразия // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.

г. Якутск *30 октября 2004 г.*

УДК 518.9

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Ю. В. Борисов

В работе исследуется нелинейная коэффициентная обратная задача для вырождающегося параболического уравнения. Указанная задача сводится к прямой краевой задаче, существование решения которой обеспечивает существование решения исходной обратной задачи.

Пусть D — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $Q = D \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, — цилиндр, Γ — гладкая (для простоты бесконечно дифференцируемая) граница области D, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница цилиндра Q. Функции $h(x,t)$, $f(x,t)$ и $\mu(x,t)$ заданы в $\overline{Q}$, функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ заданы при $x \in \overline{D}$ и $K(t)$ задана при $t \in [0,T]$.

Обратная задача. *Найти функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $q_0(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$K(t)u_t - \Delta u + q(x)u = q_0(x)h(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$u(x,t)|_S = \mu(x,t), \tag{2}$$

$$u(x,t_1) = u_1(x), \quad x \in D, \quad 0 < t_1 < T, \tag{3}$$

$$u(x,t_2) = u_2(x), \quad x \in D, \quad 0 < t_1 < t_2 \leqslant T, \tag{4}$$

Разрешимость обратных задач с вырождением, подобных обратной задаче (1)–(4), но с известной правой частью и неизвестным лишь коэффициентом $q(x)$ ранее изучалась в работах [1, 2]. Задачи с неизвестным коэффициентом $q(x)$ и неизвестной правой частью уравнения указанного выше вида, но без вырождения в уравнении, изучались в работах [3, 4]. В настоящей работе уравнение наряду с неизвестными решением $u(x,t)$ и коэффициентом $q(x)$ содержит в правой части также неизвестную функцию $q_0(x)$. Отметим также, что в работах [2–4] функция $K(t)$ была тождественно равна единице. В рамках этой работы функция $K(t)$ определяется следующим образом:

$$K(t) > 0, \quad t \in (0,T], \quad K(0) = 0. \tag{5}$$

Метод исследования данных обратных задач близок к подходу [5], он основан на регуляризации, далее на переходе к прямой задаче путем исключения функций $q(x), q_0(x)$, исследовании полученной прямой задачи и построении решения исходной обратной задачи путем предельного перехода.

Произведем регуляризацию функции $K(t)$. Введем в рассмотрение функцию $K_\varepsilon(t)$: $K_\varepsilon(t) = K(t) + \varepsilon$, ε — число из полуинтервала $(0, \varepsilon_0]$, ε_0 — фиксированное положительное число.

Заметим, что мы считаем наличие нижнего индекса ε у какой-либо функции признаком ее зависимости от параметра ε, а отсутствие этого индекса в обозначении функции признаком равенства параметра ε нулю.

Пусть

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(Q) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(D)),\ \sqrt{K(t)}v_t(x,t) \in L_2(Q),$$

$$v_{x_i x_i}(x,t) \in L_2(Q),\ i = 1, \dots, n\},$$

норму в этом пространстве определим равенством

$$\|v(x,t)\|_V = \operatorname*{vrai\,max}_{Q} |v| + \operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{i=1}^{n} \int_D v_{x_i}^2(x,t)\,dx + \int_0^T \int_D \left[\sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i}^2 + K(t) v_t^2\right] dxdt.$$

Определим пространство

$$H = \{u(x,t) : u(x,t) \in V,\ u_t(x,t) \in V\}$$

с нормой

$$\|u\|_H = \|u\|_V + \|u_t\|_V.$$

Пусть выполняется условие:

$$\exists U(x,t) \in H \quad U(x,t)|_S = \mu(x,t). \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$w(x,t) = u(x,t) - U(x,t),$$

$$w_1(x) = u_1(x) - U(x,t_1), \quad w_2(x) = u_2(x) - U(x,t_2),$$

$$h_0(x) \equiv h(x,t_1)u_2(x) - h(x,t_2)u_1(x),$$

$$\tilde{f}_\varepsilon(x,t) = f(x,t) - K_\varepsilon(t)U_t(x,t) + \Delta U(x,t),$$

$$\alpha_{0\varepsilon}(x) = \frac{h(x,t_1)[\tilde{f}_\varepsilon(x,t_2) + \Delta w_2(x)] - h(x,t_2)[\tilde{f}_\varepsilon(x,t_1) + \Delta w_1(x)]}{h_0(x)},$$

$$\alpha_{1\varepsilon}(x) = \frac{h(x,t_2)K_\varepsilon(t_1)}{h_0(x)}, \quad \alpha_{2\varepsilon}(x) = -\frac{h(x,t_1)K_\varepsilon(t_2)}{h_0(x)},$$

$$\beta_{0\varepsilon}(x) = \frac{u_1(x)[\tilde{f}_\varepsilon(x,t_2) + \Delta w_2(x)] - u_2(x)[\tilde{f}_\varepsilon(x,t_1) + \Delta w_1(x)]}{h_0(x)},$$

$$\beta_{1\varepsilon}(x) = \frac{u_2(x)K_\varepsilon(t_1)}{h_0(x)}, \quad \beta_{2\varepsilon}(x) = -\frac{u_1(x)K_\varepsilon(t_2)}{h_0(x)},$$

$$a_0 = \inf_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0} \operatorname*{vrai\,min}_{\overline{Q}} (\alpha_{0\varepsilon}(x) + K'(t)),$$

$$A_1 = \max_{0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\{\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|\alpha_{1\varepsilon}(x)|\}, \quad A_2 = \max_{0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\{\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|\alpha_{2\varepsilon}(x)|\},$$

$$B_1 = \max_{0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\{\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|\beta_{1\varepsilon}(x)|\}, \quad B_2 = \max_{0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\{\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|\beta_{2\varepsilon}(x)|\},$$

$$K_1 = \frac{(a_0-m_0)\max\limits_{0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\operatorname{vrai}\max\limits_{\overline{Q}}|\beta_{0\varepsilon}(x)h_t(x,t)+\tilde{f}_{\varepsilon t}(x,t)-\alpha_{0\varepsilon}(x)U_t(x,t)|}{a_0-m_0-(B_1+B_2)\operatorname{vrai}\max\limits_{\overline{Q}}|h_t(x,t)|-(A_1+A_2)\operatorname{vrai}\max\limits_{\overline{Q}}|U_t(x,t)|},$$

$$m_1 = K_1(B_1+B_2)$$

(здесь m_0 — некоторое положительное число, о величине которого мы скажем позже).

Считая функцию $v(x,t)$ известной, введем в рассмотрение функции

$$c_{v\varepsilon}(x) = \alpha_{0\varepsilon}(x) + \alpha_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1) + \alpha_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2),$$

$$F_{v\varepsilon}(x,t) = [\beta_{0\varepsilon}(x) + \beta_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1) + \beta_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2)]h_t(x,t) + \tilde{f}_{\varepsilon t}(x,t) - c_{v\varepsilon}(x)U_t(x,t).$$

Согласно нашему замечанию, под обозначениями $c_v(x)$ и $F_v(x,t)$ будем подразумевать функции $c_{v0}(x)$ и $F_{v0}(x,t)$.

Рассмотрим вспомогательную прямую краевую задачу, с помощью которой мы в дальнейшем построим решение исходной обратной задачи: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$K_\varepsilon(t)v_t - \Delta v + c_{v\varepsilon}(x)v + K'(t)v = F_{v\varepsilon}(x,t), \tag{7}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$v(x,t)|_S = 0, \tag{8}$$

$$v(x,0) = 0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются включения $K(t) \in C^2([0,T])$, $f(x,t) \in L_\infty(Q)$, $f_t(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h_t(x,t) \in L_\infty(Q)$, $u_1(x) \in W_2^2(D)\cap L_\infty(D)$, $u_2(x) \in W_2^2(D)\cap L_\infty(D)$. Далее, пусть выполняются условия*

$$h_0(x) \geqslant h_0 > 0, \quad x \in \overline{D}, \tag{10}$$

$$a_0 > 0,\ a_0 > \operatorname*{vrai\,max}_{Q} |h_t(x,t)|(B_1 + B_2) + \operatorname*{vrai\,max}_{Q} |U_t(x,t)|(A_1 + A_2), \tag{11}$$

$$\alpha_0(x) + \frac{1}{2}K'(t) \geqslant a_0, \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{12}$$

$$u_1(x) = \mu(x, t_1),\ u_2(x) = \mu(x, t_2), \quad x \in \Gamma. \tag{13}$$

Пусть также для некоторого положительного числа m_0 *такого, что*

$$m_0 < a_0 - \operatorname*{vrai\,max}_{Q}\{|h_t(x,t)|(B_1 + B_2) + |U_t(x,t)|(A_1 + A_2)\}, \tag{14}$$

выполняется неравенство

$$(A_1 + A_2)K_1 \leqslant m_0. \tag{15}$$

Тогда обратная задача (1)–(4) *имеет решение* $\{u(x,t), q(x), q_0(x)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in H$, $q(x) \in L_\infty(D)$, $q_0(x) \in L_\infty(D)$.

Доказательство. Вначале рассмотрим вспомогательную прямую задачу, с помощью которой в дальнейшем построим решение исходной обратной задачи.

Определим срезающие функции $G_1(\xi)$, $G_2(\xi)$:

$$G_1(\xi) = \begin{cases} -m_0, & \text{если } \xi < -m_0, \\ \xi, & \text{если } -m_0 \leqslant \xi \leqslant m_0, \\ m_0, & \text{если } \xi > m_0, \end{cases}$$

$$G_2(\xi) = \begin{cases} -m_1, & \text{если } \xi < -m_1, \\ \xi, & \text{если } -m_1 \leqslant \xi \leqslant m_1, \\ m_1, & \text{если } \xi > m_1. \end{cases}$$

Для функции $v(x,t)$ из пространства V определим функции $c_{1v\varepsilon}(x)$ и $F_{1v\varepsilon}(x,t)$:

$$c_{1v\varepsilon}(x) = \alpha_{0\varepsilon}(x) + G_1(\alpha_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1) + \alpha_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2)),$$

$$F_{1v\varepsilon}(x,t) = \beta_{0\varepsilon}(x)h_t(x,t) + G_2(\beta_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1) + \beta_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2))h_t(x,t) \\ + \tilde{f}_{\varepsilon t}(x,t) - c_{1v\varepsilon}(x)U_t(x,t).$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $v(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$K_\varepsilon(t)v_t - \Delta v + c_{1v\varepsilon}(x)v + K'(t)v = F_{1v\varepsilon}(x,t), \tag{16}$$

и такую, что для нее выполняются условия (8) *и* (9).

Уравнение (16) является «нагруженным» параболическим уравнением, именно такие уравнения исследованы в работах [3–5]. Точнее, в этих работах доказано существование решений $v(x,t)$ краевой задачи (16), (8), (9), принадлежащих пространству V, и доказано, что для этих решений будет выполняться оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |v(x,t)| \leqslant \frac{\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |F_{1v\varepsilon}(x,t)|}{\operatorname*{vrai\,min}_{\overline{Q}}(c_{1v\varepsilon}(x) + K'(t))}.$$

Учитывая указанные в условии теоремы включения и условия, а также условие (10), получаем неравенство

$$\begin{aligned}\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |v(x,t)| \leqslant{}& \frac{\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |v(x,t)|(B_1+B_2)\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |h_t(x,t)|}{a_0 - m_0} \\ &+ \frac{\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |v(x,t)|(A_1+A_2)\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |U_t(x,t)|}{a_0 - m_0} \\ &+ \frac{\max\limits_{0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0} \operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |\beta_{0\varepsilon}(x)h_t(x,t) + \tilde{f}_t(x,t) - \alpha_{0\varepsilon}(x)U_t(x,t)|}{a_0 - m_0}.\end{aligned}$$

Учитывая условие (11), выбор числа m_0, вновь включения функций в соответствующие классы и введенные обозначения, получаем оценку

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{Q}} |v(x,t)| \leqslant K_1. \tag{17}$$

Ее следствием является следующая оценка:

$$|\alpha_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1) + \alpha_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2)| \leqslant K_1(A_1 + A_2).$$

Условие (15) дает неравенство

$$|\alpha_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1) + \alpha_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2)| \leqslant m_0.$$

Согласно определению срезающей функции $G_1(\xi)$, справедливо равенство

$$G_1(\alpha_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1)+\alpha_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2))=\alpha_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1)+\alpha_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2).$$

Аналогично имеем

$$|\beta_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1)+\beta_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2)|\leqslant K_1(B_1+B_2),$$

и, учитывая обозначения, получаем

$$|\beta_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1)+\beta_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2)|\leqslant m_1.$$

Согласно определению срезающей функции $G_2(\xi)$, справедливо равенство

$$G_2(\beta_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1)+\beta_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2))=\beta_{1\varepsilon}(x)v(x,t_1)+\beta_{2\varepsilon}(x)v(x,t_2).$$

Таким образом, функция $v(x,t)$ принадлежит пространству $L_\infty(Q)$.$\blacksquare$ Следует также отметить, что в силу доказанного будут выполняться равенства

$$c_{1v\varepsilon}(x)=c_{v\varepsilon}(x),\quad F_{1v\varepsilon}(x,t)=F_{v\varepsilon}(x,t). \tag{18}$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_D[K_\varepsilon(t)v_t-\Delta v+c_{v\varepsilon}(x)v+K'(t)v]v\,dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_D F_{v\varepsilon}v\,dxdt.$$

Принимая во внимание условия (8), (9), получим верные равенства

$$\int\limits_0^T\int\limits_D K_\varepsilon(t)v_tv\,dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_D(K_\varepsilon(t)v^2)_t\,dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_D K'(t)v^2\,dxdt$$

$$=\frac{K_\varepsilon(T)}{2}\int\limits_D v^2(x,T)dx-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_D K'(t)v^2\,dxdt,$$

$$-\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D v_{x_ix_i}v\,dxdt=\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D v_{x_i}^2\,dxdt.$$

С помощью этих равенств и неравенства Юнга получаем

$$\frac{K_\varepsilon(T)}{2}\int\limits_D v^2(x,T)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D v_{x_i}^2\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_D\left[\frac{1}{2}K'(t)+c_{v\varepsilon}(x)\right]v^2\,dxdt \leqslant \frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_D F_{v\varepsilon}^2(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^T\int\limits_D v^2\,dxdt,$$

где δ_1 — произвольное положительное число. Далее учитывая (12), получим

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D v_{x_i}^2\,dxdt\leqslant M_1, \tag{19}$$

где постоянная M_1 зависит от входных данных обратной задачи. Величина M_1 в силу условий теоремы конечна.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_D[K_\varepsilon(t)v_t-\Delta v+c_{v\varepsilon}(x)v+K'(t)v]v_t\,dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_D F_{v\varepsilon}v_t\,dxdt.$$

Интегрируя по частям во втором слагаемом левой части, получаем

$$-\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D v_{x_ix_i}v_t\,dxdt=\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D v_{x_i}v_{x_it}\,dxdt = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D\left(v_{x_i}^2\right)_t\,dxdt=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_D v_{x_i}^2(x,T)\,dxdt.$$

Преобразуем третье и четвертое слагаемые левой части:

$$\int_0^T \int_D [c_{v\varepsilon}(x) + K'(t)]vv_t \, dxdt$$

$$= \int_D [c_{v\varepsilon}(x) + K'(T)]v^2(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_0^T \int_D K''(t)v^2 dxdt.$$

Учитывая (14), нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\operatorname{vrai\,min}_{\overline{Q}} |c_{v\varepsilon}(x) + K'(t)| = a_0 - m_0 > 0. \tag{20}$$

Принимая во внимание оценки (17), (20), получаем неравенство

$$\int_0^T \int_D K_\varepsilon v_t^2 \, dxdt + \sum_{i=1}^n \int_D v_{x_i}^2(x,T)dx \leqslant M_2, \tag{21}$$

где постоянная M_2 зависит от входных данных обратной задачи. Величина M_2 в силу условий теоремы конечна.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^T \int_D [K_\varepsilon(t)v_t - \Delta v + c_{v\varepsilon}(x)v + K'(t)v](-\Delta v) \, dxdt = \int_0^T \int_D F_{v\varepsilon}(-\Delta v) \, dxdt.$$

Интегрируя по частям, используя условия теоремы, оценку (19) и применяя неравенство Юнга, получаем априорную оценку

$$\sum_{i=1}^n \int_D v_{x_i}^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_D v_{x_i x_i}^2 \, dxdt \leqslant M_3, \tag{22}$$

где постоянная M_3 зависит от входных данных обратной задачи. Величина M_3 в силу условий теоремы конечна.

Учитывая оценки (19)–(22), получим априорную оценку для функции $v(x,t)$:

$$\int\limits_0^T\int\limits_D K_\varepsilon v_t^2\,dxdt+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D v_{x_i}^2\,dxdt+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^T\int\limits_D v_{x_ix_i}^2\,dxdt \\ +\sum_{i=1}^n\int\limits_D v_{x_i}^2(x,T)dx\leqslant M,$$

где постоянная M зависит от входных данных обратной задачи. Величина M в силу условий теоремы конечна.

Таким образом, для любого положительного числа ε существует функция $v^\varepsilon(x,t)\in V$, являющаяся решением задачи (7)–(9), удовлетворяющая неравенству

$$\|v^\varepsilon(x,t)\|_V\leqslant M_0. \tag{23}$$

Равномерная ограниченность в пространстве V последовательности $\{v^\varepsilon(x,t)\}$, вложение $W_2^{2,1}(Q)\subset W_2^1(Q)$, вполне непрерывность вложений $W_2^1(Q)\to L_2(Q)$, $W_2^1(Q)\to L_2(D)$ и теорема о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду [6], дают существование подпоследовательности $\{v^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ последовательности функций $\{v^\varepsilon(x,t)\}$, а также функции $v(x,t)$ таких, что при $m\to\infty$ функции

$$v^{\varepsilon_m}(x,t),\quad \sqrt{K_\varepsilon(t)}v_t^{\varepsilon_m}(x,t),\quad v_{x_i}^{\varepsilon_m}(x,t),\quad v_{x_ix_i}^{\varepsilon_m}(x,t)$$

сходятся слабо в $L_2(Q)$ к функциям

$$v(x,t),\quad \sqrt{K(t)}v_t(x,t),\quad v_{x_i}(x,t),\quad v_{x_ix_i}(x,t)$$

соответственно. Вместе с оценкой (17) эти сходимости дают выполнение для предельной функции $v(x,t)$ равенства

$$\int\limits_Q[K(t)v_t-\Delta v+[c_v(x)+K'(t)]v]\eta(x,t)\,dxdt=\int\limits_Q F_v(x,t)\eta(x,t)\,dxdt$$

для произвольной функции $\eta(x,t)$, принадлежащей пространству $L_2(Q)$. $\blacksquare$

Но тогда функция $v(x,t)$ будет решением уравнения

$$K(t)v_t - \Delta v + c_v(x)v + K'(t)v = F_v(x,t).$$

Таким образом, осуществляя предельный переход в задаче (7)–(9) при $\varepsilon \to 0$ и учитывая (18), получим, что функция $v(x,t) \in V$ является решеним краевой задачи: *найти в Q решение уравнения*

$$K(t)v_t - \Delta v + c_v(x)v + K'(t)v = F_v(x,t), \tag{24}$$

удовлетворяющее условию

$$v(x,t)|_S = 0. \tag{25}$$

Определим функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $q_0(x)$ следующим образом:

$$u(x,t) = \int\limits_{t_1}^{t} v(x,\tau)d\tau + w_1(x) + U(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \tag{26}$$

$$q(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)v(x,t_1) + \alpha_2(x)v(x,t_2),$$
$$q_0(x) = \beta_0(x) + \beta_1(x)v(x,t_1) + \beta_2(x)v(x,t_2).$$

Уравнение (24) приобретет теперь вид

$$K(t)w_{tt} - \Delta w_t + q(x)(w_t + U_t) + K'(t)w_t = q_0(x)h_t(x,t) + \tilde{f}_t(x,t). \tag{27}$$

Интегрируя это уравнение по переменной t от t_2 до t_1, получим равенство

$$\Delta[w(x,t_2) - w_2(x)] - q(x)[w(x,t_2) - w_2(x)] = 0.$$

Из (26) следует, что функция $w(x,t_2)$ обращается в нуль на границе Γ области D. Из оценки (23) и условий (10), (11) вытекает, что функция $q(x)$ положительна в области D. Вместе с обращением функции $w_2(x)$ в нуль на границе Γ (согласно условия согласования (13)) получаем, что функции $w(x,t_2)$ и $w_2(x)$ совпадают при $x \in D$. Следствием этого является совпадение функции $u(x,t_2)$ и $u_2(x)$ при $x \in D$. Таким образом, выполнение условия (4) доказано.

Интегрируя уравнение (27) по переменной t от текущей точки до точки t_1, получаем, что функции $u(x,t)$, $q(x)$ и $q_0(x)$ будут связаны в цилиндре Q уравнением (1).

Таким образом, мы получили решение $\{u(x,t), q(x), q_0(x)\}$ обратной задачи (1)–(4) такое, что $u(x,t) \in H$, $q(x)$, $q_0(x) \in L_\infty(D)$, и для функции $u(x,t)$ выполняются условия (2)–(4) (уточним, что выполнение условия (2) следует из равенств (25), (26), выполнение условия (3) — из определения (26) функции $u(x,t)$, а выполнение условия (4) — из рассуждений, приведенных выше).

Теорема доказана полностью.

Далее будет доказана теорема единственности решения обратной задачи (1)–(4).

Для функций $u_i(x,t) \in H$, $i = 1,2$ определим функции $z(x,t)$, $\varphi_1(x,t)$, $\varphi_2(x,t)$ и $F_2(x,t)$:

$$\begin{gathered}
z(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),\\
\varphi_1(x,t) = h_t(x,t)\beta_1(x) - u_{2t}(x,t)\alpha_1(x),\\
\varphi_2(x,t) = h_t(x,t)\beta_2(x) - u_{2t}(x,t)\alpha_2(x),\\
F_2(x,t) = \varphi_1(x,t)z(x,t_1) + \varphi_2(x,t)z(x,t_2).
\end{gathered}$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$K_i = \operatorname{vrai}\max_{\overline{Q}} |\varphi_i|, \quad i = 1,2.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{u_1(x,t), q_1(x), q_{01}(x)\}$ *и* $\{u_2(x,t), q_2(x), q_{02}(x)\}$ — *два решения обратной задачи* (1)–(4) *такие, что* $u_i(x,t) \in H$, $q_i(x)$, $q_{0i}(x) \in L_\infty(D)$, $i = 1,2$, *и выполнены условия теоремы* 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$q_i(x) + \frac{K'(t)}{2} \geqslant b_0 > 0, \quad q_i(x) \geqslant b_1 > 0, \quad i = 1,2, \tag{28}$$

$$\operatorname{vrai}\max_{\overline{Q}} |u_{it}| \leqslant K_0, \quad i = 1,2, \tag{29}$$

$$\frac{K(t_i)}{2} - \frac{(t_1+t_2)K_i^2}{b_0} > 0, \quad i = 1,2. \tag{30}$$

Тогда $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ *в* $\overline{Q}$ *и* $q_1(x) \equiv q_2(x)$, $q_{01}(x) \equiv q_{02}(x)$ *в* $\overline{D}$.

Доказательство. Так как

$$\{u_1(x,t), q_1(x), q_{01}(x)\} \text{ и } \{u_2(x,t), q_2(x), q_{02}(x)\}$$

— два решения обратной задачи (1)–(4), справедливы равенства

$$K(t)u_{1t} - \Delta u_1 + q_1(x)u_1 = q_{01}(x)h(x,t) + f(x,t),$$

$$K(t)u_{2t} - \Delta u_2 + q_2(x)u_2 = q_{02}(x)h(x,t) + f(x,t).$$

Вычтем из первого равенства второе. Продифференцировав полученное, имеем уравнение

$$\begin{aligned} K(t)z_{tt} - \Delta z_t + [q_1(x) + K'(t)]z_t \\ = [q_{01}(x) - q_{02}(x)]h_t(x,t) + u_{2t}(x,t)[q_2(x) - q_1(x)]. \end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, с помощью которой мы в дальнейшем докажем утверждение теоремы 2.

Найти функцию $z(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (31) *и следующим условиям*:

$$z(x,t)|_S = 0 \tag{32}$$

$$z(x,t_1) = 0. \tag{33}$$

Примем во внимание, что функции $q_i(x)$, $q_{0i}(x)$, $i = 1,2$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)u_{1t}(x,t_1) + \alpha_2(x)u_{1t}(x,t_2) \\ - \alpha_1(x)U_t(x,t_1) - \alpha_2(x)U_t(x,t_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x)u_{2t}(x,t_1) + \alpha_2(x)u_{2t}(x,t_2) \\ - \alpha_1(x)U_t(x,t_1) - \alpha_2(x)U_t(x,t_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{01}(x) = \beta_0(x) + \beta_1(x)u_{1t}(x,t_1) + \beta_2(x)u_{1t}(x,t_2) \\ - \beta_1(x)U_t(x,t_1) - \beta_2(x)U_t(x,t_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{02}(x) = \beta_0(x) + \beta_1(x)u_{2t}(x,t_1) + \beta_2(x)u_{2t}(x,t_2) \\ - \beta_1(x)U_t(x,t_1) - \beta_2(x)U_t(x,t_2), \end{aligned}$$

Тогда уравнение (31) принимает вид

$$K(t)z_{tt} - \Delta z_t + [q_1(x) + K'(t)]z_t = F_2(x,t). \tag{34}$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D [K(t)z_{tt} - \Delta z_t + [q_1(x) + K'(t)]z_t]z_t\,dxdt = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_D F_2 z_t\,dxdt.$$

Интегрируя по частям в левой части последнего равенства, учтем однородность граничного условия и особенность функции $K(t)$. В правой части равенства применим неравенство Юнга. В результате получим оценку

$$\frac{K(t_1)}{2}\int\limits_D z_t^2(x,t_1)dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D z_{x_it}^2\,dxdt + \int\limits_0^{t_1}\int\limits_D \left[\frac{1}{2}K'(t) + q_1(x)\right] z_t^2\,dxdt \leqslant \frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D z_t^2\,dxdt + \frac{1}{2\delta_2^2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D F_2^2\,dxdt,$$

где δ_2 — произвольное положительное число. Приводя подобные и учитывая (28), получаем

$$\frac{K(t_1)}{2}\int\limits_D z_t^2(x,t_1)dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D z_{x_it}^2\,dxdt + \frac{b_0}{2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D z_t^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2b_0}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D F_2^2\,dxdt. \tag{35}$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^{t_2}\int\limits_D [K(t)z_{tt} - \Delta z_t + [q_1(x) + K'(t)]z_t]z_t\,dxdt = \int\limits_0^{t_2}\int\limits_D F_2 z_t\,dxdt.$$

Поступая подобно тому, как мы это делали с предыдущим равенством и учитывая (28), получаем

$$\frac{K(t_2)}{2}\int\limits_D z_t^2(x,t_2)dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_D z_{x_i t}^2\,dxdt + \frac{b_0}{2}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_D z_t^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2b_0}\int\limits_0^{t_2}\int\limits_D F_2^2\,dxdt.$$

Сложив полученные неравенства и отбросив в левой части неотрицательные слагаемые, получим неравенство

$$\frac{K(t_1)}{2}\int\limits_D z_t^2(x,t_1)\,dx + \frac{K(t_2)}{2}\int\limits_D z_t^2(x,t_2)\,dx \leqslant \frac{1}{2b_0}\left[\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D F_2^2\,dxdt + \int\limits_0^{t_2}\int\limits_D F_2^2\,dxdt\right]. \quad (36)$$

Из представления функции $F_2(x,t)$, используя (29), нетрудно получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2b_0}&\left[\int\limits_0^{t_1}\int\limits_D F_2^2\,dxdt + \int\limits_0^{t_2}\int\limits_D F_2^2(x,t)\,dxdt\right]\\ &\leqslant \frac{1}{2b_0}\left[2t_1K_1^2\int\limits_D z_t^2(x,t_1)\,dxdt + 2t_1K_2^2\int\limits_D z_t^2(x,t_2)\,dxdt\right]\\ &+ \frac{1}{2b_0}\left[2t_2K_1^2\int\limits_D z_t^2(x,t_1)\,dxdt + 2t_2K_2^2\int\limits_D z_t^2(x,t_2)\,dxdt\right]\\ &= \frac{(t_1+t_2)K_1^2}{b_0}\int\limits_D z_t^2(x,t_1)\,dxdt + \frac{(t_1+t_2)K_2^2}{b_0}\int\limits_D z_t^2(x,t_2)\,dxdt.\end{aligned}$$

Следовательно, из (36), приняв во внимание оценку правой части неравенства, имеем

$$\left[\frac{K(t_1)}{2} - \frac{(t_1+t_2)K_1^2}{b_0}\right]\int\limits_D z_t^2(x,t_1)\,dx + \left[\frac{K(t_2)}{2} - \frac{(t_1+t_2)K_2^2}{b_0}\right]\int\limits_D z_t^2(x,t_2)\,dx \leqslant 0.$$

Учитывая (30), из последнего неравенства получаем

$$z_t(x,t_1) \equiv z_t(x,t_2) \equiv 0, \quad x \in \overline{D}. \tag{37}$$

А значит, из неравенства (35) следует, что

$$z_t(x,t) \equiv z_{x_it}(x,t) \equiv 0, \quad i=1,\ldots,n, \quad x \in \overline{Q}.$$

Из (34) благодаря (37) имеем

$$K(t)z_{tt} - \Delta z_t + [q_1(x) + K'(t)]z_t = 0.$$

Интегрируя теперь последнее уравнение по переменной t от точки t_1 до текущей точки, получаем

$$K(t)z_t - \Delta z + q_1(x)z = 0.$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_D [K(t)z_t - \Delta z + q_1(x)z]z\,dxdt = 0.$$

Применяя ту же последовательность действий, что и в рассмотренных выше равенствах, нетрудно убедиться что

$$\frac{K(t)}{2}\int\limits_D z^2dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_D z_{x_i}^2\,dxdt + \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_D z^2\,dxdt = 0.$$

Отсюда, учитывая (5), получаем

$$z_{x_i}(x,t) \equiv 0, \quad i=1,\ldots,n, \quad x \in \overline{Q}.$$

Значит, функция $z(x,t)$ постоянна в цилиндре Q. Учитывая ее равенство нулю на боковой поверхности цилиндра Q согласно (33), получаем

$$z(x,t) \equiv 0, \quad x \in \overline{Q},$$

что и означает справедливость заключения теоремы.

Замечание. Если функцию $U(x,t)$ выбрать более квалифицированным образом, например, как решение краевой задачи

$$U_t - \Delta U = 0,$$

$$U(x,t)|_S = \mu(x,t), \quad U(x,0) = 0,$$

то из условий (11), (14) и (15) ее можно исключить, заменив функцией $\mu_t(x,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисов Ю. В.* О разрешимости нелинейной вырождающейся обратной задачи для параболического уравнения // Современные проблемы физики и математики: труды всеросийской научной конференции. Уфа: Гилем, 2004. Т. 1. С. 18–23.
2. *Борисов Ю. В.* О разрешимости одной обратной задачи с вырождением // Вестник Новосиб. гос. ун-та. 2004. Т. 4, вып. 3/4. С. 17–22.
3. *Kozhanov A. I.* On solvability of an inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2002. V. 10, N 6. P. 611–630.
4. *Kozhanov A. I.* An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2003. V. 11, N 5. P. 505–522.
5. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 722–744.
6. *Функциональный анализ.* Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1964.

г. Стерлитамак *12 августа 2005 г.*

УДК 517.945

О РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ*)

Л. Ф. Борисова, А. И. Кожанов

Пусть D — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $D \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $h(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — известные функции, заданные при $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$, $\mu(x,t)$ — известная функция, заданная при $x \in \Gamma$, $t \in [0,T]$, $K(t)$ — известная функция, заданная при $t \in [0,T]$, наконец, λ — известная положительная постоянная.

Обратная задача: *Найти функции* $u(x,t)$, $q(x)$ *и* $q_0(x)$, *связанные в цилиндре* Q *уравнением*

$$u_t - \Delta u + \lambda u + q(x)u = h(x,t)q_0(x) + f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ *условий*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_S = \mu(x,t) \quad (S = \Gamma \times (0,T)), \tag{3}$$

$$u(x,T) = u_1(x), \quad \int\limits_0^T K(t)u(x,t)\,dt = u_2(x), \quad x \in D. \tag{4}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00796).

В обратной задаче (1)–(4) условия (2) и (3) суть условия прямой краевой задачи для параболических уравнений (именно, первой начально-краевой задачи), условия же (4) — это условия переопределения, необходимые для нахождения двух дополнительных неизвестных функций $q(x)$ и $q_0(x)$. Ранее обратные задачи нахождения вместе с решением параболического уравнения коэффициентов $q(x)$ и $q_0(x)$, определяющих коэффициент поглощения (стока) и неизвестную правую часть, изучались в работах [1, 2], но условия переопределения в указанных работах были отличными от условий (4). Отметим, что первое условие (4) принято в литературе называть «условием финального переопределения», второе же — «условием интегрального переопределения». Условие финального переопределения означает, что произведено измерение состояния среды в момент времени T (вобще говоря, измерение можно произвести в любой промежуточный момент времени), условие же интегрального переопределения означает, что задана информация о средневзвешенном распределении температуры, или плотности, или же иной характеристике среды в случае, когда динамика изменения среды описывается параболическим уравнением.

Как и в работах [1, 2], нам понадобится одно утверждение о разрешимости специальной нелокальной по времени краевой задачи для параболических уравнений.

Пусть $\alpha(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — известные функции, заданные при $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$, $\Phi(x,t)$ — известная функция, заданная при $x \in \Gamma$, $t \in [0,T]$. Далее, пусть H — пространство $W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty\big(0,T; W_2^1(D)\big)$, снабженное нормой

$$\|v\|_H = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(D))},$$

V — пространство $H \cap L_\infty(Q)$ с нормой

$$\|v\|_V = \|v\|_H + \|v\|_{L_\infty(Q)}.$$

Уточним, что всюду ниже равенства или неравенства для функций из пространства L_p или из того или иного его подпространства понимаются в смысле их выполнения почти всюду по мере Лебега на том или ином множестве.

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_t - \Delta u + \alpha(x,t)u = f(x,t) \tag{5}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)|_S = \Phi(x,t), \tag{6}$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)u(x,T) + \varphi_2(x)\int\limits_0^T K(t)u(x,t)\,dt. \tag{7}$$

Положим

$$\overline{\varphi}_1 = \|\varphi_1\|_{L_\infty(D)}, \quad \overline{\varphi}_2 = \|\varphi_2\|_{L_\infty(D)}\int\limits_0^T |K(t)|\,dt.$$

Утверждение. *Пусть выполняются включения* $\alpha(x,t)\in L_\infty(Q)$, $f(x,t)\in L_\infty(Q)$, $\varphi_0(x)\in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $\varphi_1(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $\varphi_2(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $\Phi(x,t)\in L_\infty(S)$, *и пусть выполняются условия*

$$\alpha(x,t)\geqslant \alpha_0>0 \quad \textit{при} \quad (x,t)\in\overline{Q};$$

$$\overline{\varphi}_1+\overline{\varphi}_2<1;$$

$$\Phi(x,0)=\varphi_0(x) \quad \textit{при} \quad x\in\Gamma;$$

краевая задача

$$U_t-\Delta U+\alpha_0 U=0,$$

$$U(x,t)|_S=\Phi(x,t), \quad U(x,0)=\varphi_0(x)$$

имеет решение $U(x,t)$, *принадлежащее пространству* V.

Тогда краевая задача (5)–(7) *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V *и такое, что для него выполняются оценки*

$$\|u\|_{L_\infty(Q)}\leqslant \frac{1}{1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2}\max\left\{\frac{1}{\alpha_0}\|f\|_{L_\infty(Q)},\,\|\varphi_0\|_{L_\infty(D)},\,\|\Phi\|_{L_\infty(S)}\right\}, \tag{8}$$

$$\|u\|_H \leqslant M(\|f\|_{L_2(Q)} + \|U\|_H) \tag{9}$$

с постоянной M, зависящей лишь от функций $\alpha(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, а также от области D.

Доказательство данного утверждения в случае $\Phi(x,t) \equiv 0$ проведено в работе [3]; в случае же не тождественно нулевой функции $\Phi(x,t)$ мы можем воспользоваться процедурой сглаживания — именно, мы можем аппроксимировать задачу (5)–(8) семейством гладких задач, далее воспользоваться известными оценками решений параболических уравнений и затем с помощью предельного перехода получить требуемое утверждение (вся процедура сглаживания и предельного перехода в близкой ситуации осуществлена в работах [2, 4]).

Вернемся к изучаемой обратной задаче.

Пусть V_1 — пространство

$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in V,\ v_t(x,t) \in V\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_V + \|v_t\|_V.$$

Определим необходимые функции и постоянные:

$$h_0(x) = u_1(x)\int_0^T K(t)h(x,t)\,dt - u_2(x)h(x,T),$$

$$A_0(x) = -\frac{f(x,T) + \Delta u_1(x) - \lambda u_1(x)}{h_0(x)}\int_0^T K(t)h(x,t)\,dt \\ + \frac{h(x,T)}{h_0(x)}\left[\int_0^T K(t)f(x,t)\,dt + \Delta u_2(x) - \lambda u_2(x)\right],$$

$$A_1(x) = \frac{1}{h_0(x)}\int_0^T K(t)h(x,t)\,dt, \quad A_2(x) = -\frac{h(x,T)}{h_0(x)},$$

$$b_1(x,t)=\frac{h(x,t)u_2(x)}{h_0(x)},\quad b_2(x,t)=-\frac{h(x,t)u_1(x)}{h_0(x)},$$

$$B_1(x,t)=b_{1t}(x,t),\quad B_2(x,t)=b_{2t}(x,t),$$

$$f_1(x,t)=f(x,t)+\frac{h(x,t)}{h_0(x)}\left\{u_2(x)[f(x,T)+\Delta u_1(x)-\lambda u_1(x)]\right.$$
$$\left.-u_1(x)\left[\int\limits_0^T K(t)f(x,t)\,dt+\Delta u_2(x)-\lambda u_2(x)\right]\right\},$$

$$F(x,t)=f_{1t}(x,t),$$

$$\varphi_0(x)=f_1(x,0)+\Delta u_0(x)-\lambda u_0(x)-A_0(x)u_0(x),$$

$$\varphi_1(x)=b_1(x,0)-A_1(x)u_0(x),$$

$$\varphi_2(x)=b_2(x,0)-A_2(x)u_0(x),$$

$$\overline{A}_1=\|A_1\|_{L_\infty(D)},\quad \overline{A}_2=\|A_2\|_{L_\infty(D)}\int\limits_0^T|K(t)|\,dt,$$

$$\overline{B}_1=\|B_1\|_{L_\infty(Q)},\quad \overline{B}_2=\|B_2\|_{L_\infty(Q)}\int\limits_0^T|K(t)|\,dt,$$

$$\overline{\varphi}_1=\|\varphi_1\|_{L_\infty(D)},\quad \overline{\varphi}_2=\|\varphi_2\|_{L_\infty(D)}\int\limits_0^T|K(t)|\,dt,$$

$$K_0=\frac{1}{1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2}\max\left\{\frac{1}{\lambda_0}\|F\|_{L_\infty(Q)},\,\|\varphi_0\|_{L_\infty(D)},\,\|\mu_t\|_{L_\infty(S)}\right\},$$

$$K_1=\frac{\overline{B}_1+\overline{B}_2}{\lambda_0(1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2)},\quad N_0=\frac{K_0}{1-K_1}$$

(λ_0 — некоторое фиксированное положительное число).

Теорема 1 *Пусть для функции* $f(x,t)$, $h(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ *и* $\mu(x,t)$ *выполняются включения* $f(x,t) \in L_\infty(Q)$, $f_t(x,t) \in L_\infty(Q)$, $f(x,0) \in W_2^1(D)$, $f(x,T) \in W_2^1(D)$, $h(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h_t(x,t) \in L_\infty(Q)$, $u_0(x) \in W_2^3(D) \cap W_\infty^2(D)$, $u_1(x) \in W_2^3(D) \cap W_\infty^2(D)$, $u_2(x) \in W_2^3(D) \cap W_\infty^2(D)$, $\mu(x,t) \in L_\infty(S)$, $\mu_t(x,t) \in L_\infty(S)$. *Кроме того, пусть выполняются условия*

$$h_0(x) \geqslant \bar{h}_0 > 0, \quad A_0(x) + \lambda - \lambda_0 \geqslant a_0 > 0 \quad \text{при } x \in D; \tag{10}$$

$$K_1 < 1, \quad (\overline{A}_1 + \overline{A}_2)K_0 \leqslant a_0(1 - K_1); \tag{11}$$

$$\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 < 1; \tag{12}$$

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma;$$

$$\mu_t(x,0) = \varphi_0(x), \quad \mu(x,0) = u_0(x), \quad \mu(x,T) = u_1(x), \tag{14}$$

$$\int\limits_0^T K(t)\mu(x,t)\,dt = u_2(x) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{15}$$

Наконец, пусть

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{для функций } \mu(x,t) \text{ и } \varphi_0(x) \text{ выполняется условиекраевая задача } U_t - \Delta U_t + \lambda U_t = 0 \\ U_t(x,t)|_S = \mu_t(x,t), \quad U_t(x,0) = \varphi_0(x), \quad U(x,T) = 0 \\ \text{имеет решение, принадлежащее пространству } V_1. \end{array} \right. \tag{16}$$

Тогда обратная задача (1)–(4) *имеет решение* $\{u(x,t), q(x), q_0(x)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in V_1$, $q(x) \in L_\infty(D)$, $q_0(x) \in L_\infty(D)$.

Доказательство. Определим срезающую функцию $G(\xi)$:

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant a_0, \\ a_0, & \text{если } \xi > a_0, \\ -a_0, & \text{если } \xi < -a_0. \end{cases}$$

Пусть $v(x,t)$ — произвольная функция из пространства V_1. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре*

Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u_t + \left[\lambda + A_0(x) + G(A_1(x)v_t(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)v_t(x,t)\,dt)\right] u_t$$

$$= F(x,t) + B_1(x,t)v_t(x,T) + B_2(x)\int\limits_0^T K(t)v_t(x,t)\,dt \quad (17)$$

и такую, что выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x),$$

$$u_t(x,0) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)u_t(x,T) + \varphi_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt, \quad x \in D, \quad (18)$$

а также условие (3).

Краевая задача (17), (18), (3) представляет собой прежде всего нелокальную по времени краевую задачу относительно функции $u_t(x,t)$. Вследствие указанных в теореме включений, условий (10), (12), (13), первого равенства условия (14), ограниченности функции $G(\xi)$, положительности числа λ_0, неотрицательности функции

$$A_0(x) + \lambda - \lambda_0 + G\left(A_1(x)v_t(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)v_t(x,t)\,dt\right)$$

(вытекающей из второго неравенства условия (11) и неравенства $|G(\xi)| \leqslant a_0$), и, наконец, принадлежности функции $v(x,t)$ пространству V_1 для данной краевой задачи выполняются все условия приведенного выше утверждения. Следовательно, функцию $u_t(x,t)$ мы можем найти; эта функция будет принадлежать пространству V. Используя первое равенство условия (18), нетрудно найти и саму функцию $u(x,t)$; очевидно, что эта функция будет принадлежать пространству V.

Все сказанное означает, что краевая задача (17), (18), (5) порождает оператор A, переводящий пространство V_1 в себя: $A(v) = u$. Покажем, что этот оператор имеет неподвижные точки.

Определим множество

$$W = \{v(x,t) \in V_1 : \|v\|_{L_\infty(Q)} \leqslant M_0,$$
$$\|v_t\|_{L_\infty(Q)} \leqslant M_1,\ \|v\|_H + \|v_t\|_H \leqslant R_0\}.$$

Покажем, что можно подобрать числа M_0, M_1 и R_0 так, что множество W окажется множеством, которое оператор A переводит в себя.

Прежде всего заметим, что оценка (8) дает для решений краевой задачи (17), (18), (5) неравенство

$$\|u_t\| \leqslant K_0 + K_1\|v\|_{L_\infty(Q)}. \tag{19}$$

Выберем число M_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$M_1 \geqslant \frac{K_0}{1-K_1}$$

(вследствие первого неравенства условия (11) число M_1 можно выбрать заведомо конечным и положительным). При таком выборе числа M_1 из неравенства (19) будет следовать оценка

$$\|u_t\|_{L_\infty(Q)} \leqslant M_1. \tag{20}$$

Эта оценка означает, что при принадлежности функции $v(x,t)$ множеству W для решений краевой задачи (17), (18), (3) будет выполняться второе неравенство, определяющее искомое множество.

Равенство

$$u(x,t) = \int\limits_0^t u_\tau(x,\tau)\,d\tau + u_0(x) \tag{21}$$

дает очевидную оценку

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \leqslant M_1 T + \|u_0\|_{L_\infty(D)}.$$

Если мы теперь выберем число M_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$M_0 \geqslant M_1 T + \|u_0\|_{L_\infty(D)},$$

то при принадлежности функции $v(x,t)$ множеству W для решений краевой задачи (17), (18), (3) будет выполняться и первое неравенство, определяющее множество W.

Уравнение (17) можно записать в виде

$$u_{tt} - \Delta u_t + \lambda u_t = \widetilde{F},$$

где функция $\widetilde{F}$ принадлежит пространству $L_\infty(Q)$. Оценка (9) утверждения дает для решений этого уравнения (при выполнении условий (18) и (3)) неравенство

$$\|u_t\|_H \leqslant R_1$$

с постоянной R_1, определяющейся лишь числами M, M_1, $\|F\|_{L_\infty(Q)}$, B_1, B_2 и функциями $K(t)$ и $U(x,t)$. Далее, используя равенство (21) и последнее неравенство, нетрудно показать, что для самой функции $u(x,t)$ имеет место аналогичное неравенство

$$\|u\|_H \leqslant R_2$$

с постоянной R_2, определяющейся лишь числами R_1, T и функцией $u_0(x)$.

Пусть теперь число R_0, определяющее множество W, будет таким, что для него выполняется неравенство $R_0 \geqslant R_1 + R_2$. Очевидно, что при таком выборе числа R_0 при принадлежности функции $v(x,t)$ множеству W для решений краевой задачи (17), (18), (3) будет выполняться и третье неравенство, определяющее множество W.

Итак, при указанном выше выборе чисел M_0, M_1 и R_0 решение $u(x,t)$ краевой задачи (17), (18), (3) будет принадлежать множеству W. А это и означает, что выбранное множество W оператор A переводит в себя.

Докажем теперь, что оператор A непрерывен на пространстве V_1.

Пусть последовательность функций $\{v_m(x,t)\}$ сходится в пространстве V_1 к функции $v(x,t)$, $u_m(x,t)$ и $u(x,t)$ — образы функций $v_m(x,t)$ и $v(x,t)$ при действии оператора A, $\bar{v}_m(x,t)$ — функции $v_m(x,t) - v(x,t)$, $\bar{u}_m(x,t)$ — функции $u_m(x,t) - u(x,t)$.

Функции $\bar{u}_m(x,t)$ представляют собой решение краевой задачи

$$\bar{u}_{mtt} - \Delta\bar{u}_{mt} + \Bigg[\lambda + A_0(x) + G(A_1(x)v_t(x,T)$$

$$+A_2(x)\int\limits_0^T K(t)v_t(x,t)\,dt)\Bigg]\bar{u}_{mt}$$

$$= B_1(x)\bar{v}_{mt}(x,T) + B_2(x)\int\limits_0^T K(t)\bar{v}_{mt}(x,t)\,dt$$

$$+\Bigg[G(A_1(x)v_t(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)v_t(x,t)\,dt) -$$

$$-G(A_1(x)v_{mt}(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)v_{mt}(x,t)\,dt)\Bigg]u_{mt}, \qquad (22)$$

$$\bar{u}_m(x,0) = 0,$$

$$\bar{u}_{mt}(x,0) = \varphi_1(x)\bar{u}_{mt}(x,T) + \varphi_2(x)\int\limits_0^T K(t)\bar{u}_{mt}(x,t)\,dt, \qquad (23)$$

$$u_m(x,t)|_S = 0. \qquad (24)$$

Заметим, что вследствие сходимости в пространстве $L_\infty(Q)$ последовательности $\bar{v}_{mt}(x,t)$ к тождественно нулевой функции, ограниченности функций $A_1(x)$, $A_2(x)$, $B_1(x,t)$ и $B_2(x,t)$, а также непрерывности функции $G(\xi)$ правая часть уравнения (22) будет почти всюду в Q сходится к тождественно нулевой функции. Учитывая, что функцией $U(x,t)$ задачи (22)–(24) является тождественно нулевая функция и используя оценки (8) и (9), нетрудно показать, что будет иметь место сходимость последовательности $\{\bar{u}_m(x,t)\}$. Все же вместе доказанное и означает непрерывность оператора A.

Докажем, что оператор A компактен. Пусть $\{v_m(x,t)\}$ есть ограниченная последовательность функций из пространства V_1, $\{u_m(x,t)\}$

— последовательность образов функций $v_m(x,t)$ при действии оператора A. Оценки (8) и (9) дают нам ограниченность в пространстве V семейства функций $\{u_{mt}(x,t)\}$; используя равенство (21) для функций $u_m(x,t)$, нетрудно показать, что и семейство $\{u_m(x,t)\}$ будет ограничено в пространстве V.

Равномерная ограниченность в пространстве V последовательностей $\{v_m(x,t)\}$, $\{v_{mt}(x,t)\}$, $\{u_m(x,t)\}$ и $\{u_{mt}(x,t)\}$, вложение $W_2^{2,1}(Q) \subset W_2^1(Q)$, вполне непрерывность вложений $W_2^1 \to L_2(Q)$, $W_2^1(Q) \to L_2(D)$ и теорема о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду (см., например, [5]) дают нам существование подпоследовательностей $\{v_{m_k}(x,t)\}$ и $\{u_{m_k}(x,t)\}$, а также функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$ таких, что при $k \to \infty$ функции $v_{m_k}(x,t)$, $u_{m_k}(x,t)$, $v_{m_k t}(x,t)$ и $u_{m_k t}(x,t)$ сходятся почти всюду в Q к функциям $v(x,t)$, $u(x,t)$, $v_t(x,t)$ и $u_t(x,t)$ соответственно, функции $v_{m_k t}(x,T)$, $u_{m_k}(x,0)$, $u_{m_k t}(x,0)$ и $u_{m_k t}(x,T)$ сходятся почти всюду в D к функциям $v_t(x,T)$, $u(x,0)$, $u_t(x.0)$ и $u_t(x,T)$ соответственно, и, наконец, функции $u_{m_k t}(x,t)$ сходятся слабо в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ к функции $u_t(x,t)$. Очевидно, что предельные функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ будут связаны уравнением (17) и для функции $u(x,t)$ будут выполняться условия (18) и (3). Но тогда для функций $\bar{v}_k(x,t) = v_{m_k}(x,t) - v(x,t)$ и $\bar{u}_k(x,t) = u_{m_k}(x,t) - u(x,t)$ будут выполняться уравнение (21) и условия (23) и (24). Вновь, как и при доказательстве непрерывности оператора A, используя оценки (8) и (9) и первое равенство (22), получаем, что последовательность $\{\bar{u}_k(x,t)\}$ будет сходиться в пространстве V_1 к тождественно нулевой функции.

Из доказанного вытекает, что для всякой ограниченной в пространстве V_1 последовательности функций $\{v_m\}$ из последовательности $\{Av_m\}$ можно извлечь сильно сходящуюся подпоследовательность. А это и означает, что оператор A компактен в пространстве V_1.

Итак, оператор A переводит выбранное выше множество W в себя, непрерывен и компактен на пространстве V_1. Поскольку множество W замкнуто, выпукло и ограничено, то все сказанное означает, что для оператора A выполняются условия теоремы Шаудера. Следовательно, оператор A имеет в множестве W неподвижную точку — функцию $u(x,t)$, являющуюся решением уравнения

$$u_{tt}-\Delta u_t+\left[\lambda+A_0(x)+G\left(A_1(x)u_t(x,T)+A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt\right)\right]u_t$$

$$=F(x,t)+B_1(x,t)u_t(x,T)+B_2(x,t)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt \qquad (25)$$

и принимающую краевые условия (18) и (3).

Нетрудно убедиться, что для решений краевой задачи (25), (18), (5) имеет место оценка

$$\|u_t\|_{L_\infty(Q)}\leqslant N_0.$$

Эта оценка влечет неравенство

$$\left|A_1(x)u_t(x,T)+A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt\right|\leqslant(\overline{A}_1+\overline{A}_2)N_0 \quad \text{при} \quad x\in\overline{D}.$$

Второе неравенство условия (11) дает следущее неравенство:

$$\left|A_1(x)u_t(x,T)+A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt\right|\leqslant a_0.$$

Но тогда для построенного решения краевой задачи (25), (18), (3) будет выполняться равенство

$$G\left(A_1(x)u_t(x,T)+A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt\right)$$

$$=A_1(x)u_t(x,T)+A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt$$

и тем самым уравнение (25) преобразуется в уравнение

$$u_{tt} - \Delta u_t + \left[\lambda + A_0(x) + A_1(x)u_t(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt\right]u_t$$

$$= F(x,t) + B_1(x,t)u_t(x,T) + B_2(x,t)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt. \quad (26)$$

Положим

$$q(x) = A_0(x) + A_1(x)u_t(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt,$$

$$q_0(x) = \frac{1}{h_0(x)}\left\{u_1(x)\left[\int\limits_0^T K(t)f(x,t)\,dt + \Delta u_2(x) - \lambda u_2(x)\right]\right.$$

$$\left. - u_2(x)[f(x,T) + \Delta u_1(x) - \lambda u_1(x)]\right\} + \frac{u_2(x)}{h_0(x)}u_t(x,T)$$

$$- \frac{u_1(x)}{h_0(x)}\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt.$$

Проинтегрируем уравнение (26) по переменной t в пределах от 0 до T. Получим равенство

$$u_t(x,T) - \Delta u(x,T) + \lambda u(x,T) + q(x)u(x,T) = h(x,T)q_0(x) + f(x,T). \quad (27)$$

С другой стороны, из представлений функций $q(x)$ и $q_0(x)$ вытекает равенство

$$q_0(x)h(x,T) = q(x)u_1(x) - f(x,T) - \Delta u_1(x) + \lambda u_1(x) + u_t(x,T).$$

Следовательно, равенство (27) можно преобразовать к виду

$$-\Delta[u(x,T) - u_1(x)] + [\lambda + q(x)][u(x,T) - u_1(x)] = 0. \quad (28)$$

Поскольку функции $u(x,T)$ и $u_1(x)$ совпадают на Γ (см. третье равенство условия (14)) и поскольку функция $\lambda+q(x)$ строго положительна в $\overline{D}$, то из равенства (28) очевидным образом вытекает равенство

$$u(x,T)=u_1(x), \tag{29}$$

справедливое при $x\in D$.

Проинтегрируем теперь уравнение (26) по временно́й переменной в пределах от 0 до текущей точки. Очевидно, что получим уравнение

$$u_t-\Delta u+\lambda u+q(x)u=h(x,t)q_0(x)+f(x,t),$$

т. е. уравнение (1). Умножим это уравнение на функцию $K(t)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до T. Обозначив для краткости

$$\Phi(x)=\int\limits_0^T K(t)u(x,t)\,dt,$$

получим равенство

$$\int\limits_0^T K(t)u_t(x,t)\,dt-\Delta\Phi(x)+\lambda\Phi(x)+q(x)\Phi(x)$$
$$=q_0(x)\int\limits_0^T K(t)h(x,t)\,dt+\int\limits_0^T K(t)f(x,t)\,dt. \tag{30}$$

Вновь из представления функций $q(x)$ и $q_0(x)$ вытекает равенство

$$q_0(x)\int\limits_0^T K(t)h(x,t)\,dt=q(x)u_2(x)-\int\limits_0^T K(t)f(x,t)\,dt$$
$$-\Delta u_2(x)+\lambda u_2(x)+\int\limits_0^T K(t)u_1(x,t)\,dt.$$

Следовательно, равенство (30) преобразуется к виду

$$-\Delta[\Phi(x)-u_2(x)]+[\lambda+q(x)][\Phi(x)-u_2(x)]=0.$$

Совпадение функций $\Phi(x)$ и $u_2(x)$ на Γ (условие (15)) и положительность функции $\lambda + q(x)$ означают, что следствием равенства (30) является равенство

$$\int_0^T K(t)u(x,t)\,dt = u_2(x), \tag{31}$$

справедливое при $x \in D$.

Итак, решение $u(x,t)$ краевой задачи (17), (18), (5) и построенные по функции $u(x,t)$ функции $q(x)$ и $q_0(x)$ будут связаны в цилиндре Q уравнением (1), функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V_1, для функции $u(x,t)$ будут выполняться условия (2) и (3). Кроме того, для функции $u(x,t)$ будут выполняться равенства (29) и (31), т. е. требуемые равенства (4). Принадлежность функций $q(x)$ и $q_0(x)$ пространству $L_\infty(D)$ очевидна. Все это вместе и означает, что нужное решение $\{u(x,t), q(x), q_0(x)\}$ обратной задачи (1)–(4) найдено.

Теорема доказана.

Обсудим вопрос о единственности решений обратной задачи (1)–(4).

Теорема 2 *Пусть* $\{u_i(x,t), q_i(x), q_{0i}(x)\}$, $i = 1, 2$, *суть два решения обратной задачи* (1)–(4) *такие, что* $u_i(x,t) \in V_1$, $\|u_{it}\|_{L_\infty(Q)} \leqslant N_0$. *Если выполняются условия*

$$A_0(x) + \lambda - \lambda_0 \geqslant a_0 > 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{D}; \tag{32}$$

$$K_1 + \frac{N_0(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)}{\lambda_0(1 - \overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2)} < 1; \tag{33}$$

$$(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)K_0 \leqslant a_0(1 - K_1), \tag{34}$$

то функции $u_i(x,t)$ *совпадают в* Q, *функции* $q_i(x)$ *и* $q_{0i}(x)$ *совпадают в* D.

Доказательство. Обозначим $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Для функции $w(x,t)$ выполняются соотношения

$$w_{tt} - \Delta w_t + \left[\lambda + A_0(x) + A_1(x)u_{1t}(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_{1t}(x,t)\,dt\right] w_t$$

$$= B_1(x,t)w_t(x,T) + B_2(x,t)\int\limits_0^T K(t)w_t(x,t)\,dt$$

$$- \left[A_1(x)w_t(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)w_t(x,t)\,dt\right] u_{2t}, \quad (x,t) \in Q;$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = \varphi_1(x)w_t(x,T) + \varphi_2(x)\int\limits_0^T K(t)w_t(x,t)\,dt, \quad x \in D;$$

$$w(x,t)|_S = 0.$$

Учитывая, что функция

$$A_0(x) + \lambda - \lambda_0 + A_1(x)u_{1t}(x,T) + A_2(x)\int\limits_0^T K(t)u_{1t}(x,t)\,dt$$

неотрицательна (вследствие условий (32), (34) и неравенства $\|u_{1t}\|_{L_\infty(Q)} \leqslant N_0$), и применяя оценку (8), получим неравенство

$$\|w_t\|_{L_\infty(Q)} \leqslant \left(K_1 + \frac{N_0(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)}{\lambda_0(1 - \overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2)}\right) \|w_t\|_{L_\infty(Q)}.$$

Из этого неравенства вследствие условия (33) вытекает, что $w_t(x,t)$ — тождественно нулевая в цилиндре Q функция. Очевидно, что и $w(x,t)$ — тождественно нулевая в цилиндре Q функция. Другими словами, функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ совпадают в цилиндре Q. Поскольку функции $q_i(x)$ и $q_{0i}(x)$ выражаются через функции $u_i(x)$, то получаем автоматически, что и функции $q_i(x)$ и $q_{0i}(x)$, $i = 1, 2$, совпадают на области D.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozhanov A. I.* On solvability of an inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2002, N 6. P. 611–630.
2. *Kozhanov A. I.* An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2003, N 5. P. 505–522.
3. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индуст. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.
4. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 722–744.
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

г. Стерлитамак, г. Новосибирск *19 августа 2005 г.*

УДК 518.9

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПЯТЬЮ УБЕГАЮЩИМИ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

А. Г. Варламова

В работе рассмотрен случай преследования пятерых убегающих, когда убегающие, выбрав в начале игры направление, двигаются прямолинейно, никаких коррекций направления движения не делают, а преследователь, выбрав порядок преследования, не меняет этот порядок в течение игры, причем использует П-стратегию (стратегия параллельного сближения, стратегия Петросяна). Порядок выбора убегающих фиксированный. Полученные результаты могут быть обобщены и для общего случая, когда имеется n убегающих.

Пусть α, β — скорости преследователя и убегающих (скорости убегающих одинаковы и равны $\beta = \mathrm{const}$, $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha > \beta$), P_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 — начальные местоположения точек преследователя и пяти убегающих. В игре с многими убегающими геометрическим местом точек поимки первого убегающего является окружность Аполлония (ее обозначим через A), а остальных убегающих — овал Декарта (обозначим через D) [1]. Постановка задачи нелинейного программирования имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 \in A(P_0, E_1), \quad x_2 \in D_1(x_1, E_2), \quad x_3 \in D_2(x_2, E_3), \\ x_4 \in D_3(x_3, E_4), \quad x_5 \in D_4(x_4, E_5), \\ \rho(P_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_4) + \rho(x_4, x_5) \to \max, \end{cases}$$

где

$$A(P_0, E_1) = \left\{ x_1 \in X_0 \mid \frac{\rho(P_0, x_1)}{\alpha} = \frac{\rho(E_1, x_1)}{\beta} \right\}$$

$$D_1(x_1, E_2) = \left\{ x_2 \in A(P_0, E_1) \mid \frac{\rho(P_0, x_1) + \rho(x_1, x_2)}{\alpha} = \frac{\rho(E_2, x_2)}{\beta} \right\},$$

$$D_2(x_2, E_3) = \left\{ x_3 \in D_1(x_1, E_2) \right.$$
$$\left. \mid \frac{\rho(P_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3)}{\alpha} = \frac{\rho(E_3, x_3)}{\beta} \right\},$$

$$D_3(x_3,\, E_4) = \left\{ x_4 \in D_2(x_2, E_3) \right.$$
$$\left. \mid \frac{\rho(P_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_4)}{\alpha} = \frac{\rho(E_4, x_4)}{\beta} \right\},$$

$$D_4(x_4, E_5) = \left\{ x_5 \in D_3(x_3, E_4) \right.$$
$$\left. \mid \frac{\rho(P_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_4) + \rho(x_4, x_5)}{\alpha} = \frac{\rho(E_5, x_5)}{\beta} \right\},$$

$\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между точками x и y [2].

В работе реализованы два алгоритма для случая пятерых убегающих. Эти алгоритмы реализованы в интегрированной среде Visual Basic версии 6 с возможностью ввода начальных данных и скоростей преследователя и убегающих (табл. 1). Порядок выбора убегающих фиксирован. Убегающие стараются максимизировать маршрут преследователя при прямолинейном движении преследователя и убегающих.

Первый алгоритм учитывает смещения центров окружностей Аполлония. В каждой окружности Аполлония задается конечное число точек захвата преследователем соответственного убегающего. Задается полный перебор этих точек. Этим перебором находится максимальная длина пути поимки. Этот алгоритм, хотя и является эффективным, но время его выполнения за счет процессов перебора координат значительно. Для сокращения времени выполнения было предложено учесть «области перекрытия», за счет чего объем перебора значительно сократился. В общем случае радиус и центр окружности Аполлония можно

Таблица 1

записать в виде

$$R_i = \frac{\nu_A \nu_{B_i}}{\nu_A^2 - \nu_{B_i}^2}(|AC_1| + |C_1B_2| + |C_2B_3| + \cdots + |C_{i-1}B_i|),$$

$$\begin{aligned} x_{0_i} = {} & \frac{\nu_A^2 x_{B_i} - \nu_{B_i}^2 x_{C_{i-1}}}{\nu_A^2 - \nu_{B_i}^2} \\ & + \frac{\nu_{B_i}^2 (x_{B_i} - x_{C_{i-1}})}{\nu_A^2 - \nu_{B_i}^2} \cdot \frac{(|AC_1| + |C_1C_2| + \cdots + |C_{i-2}B_{i-1}|)}{B_iC_{i-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{0_i} = {} & \frac{\nu_A^2 y_{B_i} - \nu_{B_i}^2 y_{C_{i-1}}}{\nu_A^2 - \nu_{B_i}^2} + \frac{\nu_{B_i}^2 (y_{B_i} - y_{C_{i-1}})}{\nu_A^2 - \nu_{B_i}^2} \\ & \times \frac{(|AC_1| + |C_1C_2| + \cdots + |C_{i-2}B_{i-1}|)}{B_iC_{i-1}}, \quad i = 1,\, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

где A, B_i — начальное местоположение преследователя и убегающих, C_i — точка захвата i-го убегающего, v — скорость $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Рис. 1. Траектория максимального маршрута

Второй алгоритм построен на основании результата реализации первого алгоритма. Для случая n убегающих можно высказать следующее предположение. Считаем, что для первых $n-1$ убегающих траектории максимального маршрута проходят по отраженным углам от касательных. И только траектория последнего n-го убегающего проходит через его начальное положение (рис. 1). В этом алгоритме вводятся ограничения на углы и на радиус окружности Аполлония. Применение данного алгоритма уменьшает время работы программы в m раз, так как исключается перебор для всех убегающих, кроме первого. Число m задает количество повторения цикла для перебора значений по y и зависит от шага цикла.

Пусть A — начальное местоположение преследователя, C_1 — точка захвата первого убегающего, β — угол падения и угол отражения. Геометрическим местом точек поимки убегающего является окружность Аполлония, O_1 — центр окружности Аполлония. Для определения параметров прямой, полученной отражением прямой AC_1 от касательной, необходимо знать углы относительно некоторой оси.

Выберем в качестве направления отсчета углов положительное направление оси Ox. Тогда схематически углы будут выглядеть следующим образом: γ_1 — угол прямой AC_1, γ_2 — угол радиуса O_1C_1, γ_3 — угол прямой C_1D_1 (отраженная прямая). Для разных значений углов γ_1 и γ_2 значение γ_3 получается из следующих соотношений:

$$\gamma_3 = 2\gamma_2 - \gamma_1 + \pi, \quad \gamma_2 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 + \pi,$$
$$\gamma_3 = 2\gamma_2 - \gamma_1 - \pi, \quad \gamma_1 < \gamma_2, \quad \gamma_1 > \gamma_2 + \pi,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in [0;\, 2\pi]$.

При написании алгоритма следует учесть, что согласно свойствам функции тангенса углы будут ограничены значениями $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. После определения угла γ_3 определяется, пересекает ли прямая C_1D_1 окружность (O_2R_2). Значения координат центра окружности и ее радиуса определяются для текущего значения координат точки захвата C_1. Критерий пересечения выбирается из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y = k_3x + b_3, \\ (x - O_{2x})^2 + (y - O_{2y})^2 = R_2^2. \end{cases}$$

Если данная система не имеет решений, производится переход к следующему значению C_1.

В случае пересечения прямой и окружности выделяют две точки C_2' и C_2'' на второй окружности Аполлония. Затем алгоритм повторяется и определяются параметры прямых $C_2'D_2'$ и $C_2''D_2''$ и полученных путем отражения прямых C_1C_2' и C_1C_2'' от соответствующих касательных. И, наконец, определяется, проходят ли прямые $C_2'D_2'$ и $C_2''D_2''$ через точку B_3. Если это условие выполняется, то данный маршрут считается маршрутом с максимальной длиной пути. На этом выполнение алгоритма для трех убегающих завершается. Для любого количества убегающих алгоритм повторяется.

Анализ данных для разных вариантов начального положения и скоростей преследователя и убегающих показывает, что все они согласуются с данными, полученными методом перебора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Элементарные задачи преследования и убегания. Якутск: ЯГУ, 1989.

2. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, 1983.

г. Якутск *29 октября 2004 г.*

УДК 518.9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов

В работе рассматривается задача распределения [1] n объектов между n участниками. Сформулирована теорема о существовании распределений, удовлетворяющих некоему условию, которые могут рассматриваться как новый класс решений таких многокритериальных задач.

Пусть имеются $n \in \mathbb{N}$, $I \rightleftharpoons \{1, \ldots, n\}$, множество X кортежей вида

$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$

где $x_i \in I$, $i \in I$. Такие кортежи будем называть *распределениями* n объектов между n участниками.

Пусть имеются также положительные вещественные числа $c(i, j)$, $i, j \in I$, являющиеся оценками участника i объекта j.

Пусть

$$c_0 < c_1 < \cdots < c_m \tag{1}$$

суть числа из множества $\{c(i, j) \mid i, j \in I\}$, упорядоченные в порядке возрастания. Множество таких чисел (1) обозначим через C.

Рассмотрим отображения

$$F_i : X \to C \quad (i \in I) \tag{2}$$

такие, что

$$F_i(x) = c(i, x_i),$$

где $i \in I$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Отображения F_i (2) назовем *функциями выигрыша* участников распределения.

Соотношения

$$F_i(x) \to \max \quad (i \in I), \tag{3}$$

$$x \in X, \tag{4}$$

назовем *задачей распределения* n объектов между n участниками.

Рассмотрим отображение

$$K : X \times C \to I \cup \{0\}$$

такое, что любой паре $x \in X$ и $c \in C$ ставится в соответствие количество участников, которые при распределении x получают выигрыш c.

Теорема 1. *Существует $x^* \in X$ такое, что нельзя указать $x \in X$, удовлетворяющее следующему условию:*

$$(\exists c \in C)((K(x,c) < K(x^*,c)) \wedge ((\forall c_l < c)(K(x,c_l) \leqslant K(x^*,c_l)))).$$

Доказательство. Пусть B_0 — множество всех распределений $\hat{x} \in X$ таких, что $K(\hat{x},c_0) = \min\limits_{x \in X} K(x,c_0)$. Пусть B_1 есть, в свою очередь, множество всех распределений $\hat{x} \in B_0$ таких, что $K(\hat{x},c_1) = \min\limits_{x \in B_0} K(x,c_1)$. Пусть B_2 — множество всех распределений $\hat{x} \in B_1$ таких, что $K(\hat{x},c_2) = \min\limits_{x \in B_1} K(x,c_2)$.

Поступая далее аналогичным образом, получим множество B_m. Легко видеть, что распределение из B_m удовлетворяет условию теоремы.

Из теоремы вытекает

Следствие. *Распределение $x^* \in X$, удовлетворяющее условию теоремы, является решением задачи распределения* (3), (4) [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров Р. И., Кайгородов С. П.* Об одном подходе к решению многокритериальной задачи распределения, удовлетворяющему специальному принципу Парето-оптимальности // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 2. С. 51–56.

г. Якутск *11 января 2005 г.*

УДК 517.945

НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ*)

А. И. Кожанов

В работе изучается разрешимость задачи нахождения вместе с решением параболической системы также младших коэффициентов входящих в систему уравнений. В качестве условий переопределения рассматриваются условия интегрального типа. Для изучаемой системы доказываются теоремы существования и единственности. Работа является продолжением работы автора [1]; в указанной работе изучалась аналогичная задача, но с условиями финального переопределения.

Пусть x — точка ограниченной области D пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, t — точка конечного интервала $(0,T)$, Q — цилиндр $D\times(0,T)$, $S=\Gamma\times(0,T)$ — боковая граница цилиндра Q. Далее пусть $\lambda_i(x,t)$, $\mu_i(x,t)$, $f_i(x,t)$, $i=1,2,$ — заданные при $(x,t)\in\overline{Q}$ функции, $u_0(x)$, $v_0(x)$, $u_1(x)$ и $v_1(x)$ — заданные при $x\in\overline{D}$ функции, $\alpha_i(t)$, $i=1,2,$ — функции, заданные при $t\in[0,T]$, и, наконец, $\psi_i(x,t)$, $i=1,2,$ — функции, заданные при $x\in\Gamma$, $t\in[0,T]$.

Обратная задача. *Найти функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, $q_1(x)$ и $q_2(x)$, связанные в цилиндре Q уравнениями*

$$u_t-\Delta u+\lambda_1(x,t)u+q_1(x)u+\mu_1(x,t)v=f_1(x,t), \tag{1}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00796).

$$v_t - \Delta v + \lambda_2(x,t)v + q_2(x)v + \mu_2(x,t)u = f_2(x,t), \tag{2}$$

причем для функций $u(x,t)$ *и* $v(x,t)$ *должны выполняться условия*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in D, \tag{3}$$

$$u(x,t)|_S = \psi_1(x,t), \quad v(x,t)|_S = \psi_2(x,t), \tag{4}$$

$$\int\limits_0^T \alpha_1(t)u(x,t)\,dt = u_1(x), \quad \int\limits_0^T \alpha_2(t)v(x,t)\,dt = v_1(x), \quad x \in D. \tag{5}$$

В данной задаче условия (1)–(4) являются условиями прямой задачи (именно — первой начально-краевой задачи для системы параболических уравнений), условия же (5) суть интегральные условия переопределения, необходимые для нахождения дополнительных неизвестных функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Как говорилось выше, аналогичная задача, но с заменой условий (5) условиями финального переопределения, рассматривалась автором в работе [1].

В случае $\mu_1(x,t) \equiv \mu_2(x,t) \equiv 0$ система (1), (2) распадается на два независимых уравнения, рассматриваемая обратная задача — на две независимые задачи для функций $u(x,t)$, $v(x,t)$, $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Обратные задачи для одного параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при решении в случае задания условия интегрального переопределения изучались ранее в работах [2–4]: в работах [2, 3] — при некоторых условиях знакоопределенности входных данных, в работе [4] — при некоторых условиях малости. Именно подход работы [4] и будет нами использоваться.

Обозначим через H пространство

$$W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(D)),$$

снабженное нормой

$$\|u\|_H = \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u\|_{L_\infty(Q)} + \|u\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(D))}.$$

Определим необходимые нам функции и постоянные. Именно, положим

$$F_1(x) = \int\limits_0^T \alpha_1(t)f_1(x,t)\,dt + \alpha_1(0)u_0(x) + \Delta u_1(x),$$

$$F_2(x)=\int\limits_0^T \alpha_2(t)f_2(x,t)\,dt+\alpha_2(0)v_0(x)+\Delta v_1(x),$$

$$\lambda_{i0}=\min_{\overline{Q}}\lambda_i(x,t),\quad \mu_{i0}=\max_{\overline{Q}}|\mu_i(x,t)|,$$

$$c_i=\|f_i\|_{L_\infty(Q)},\quad \psi_{i0}=\|\psi_i\|_{L_\infty(S)},$$

$$a_1=\|u_0\|_{L_\infty(D)},\quad a_2=\|v_0\|_{L_\infty(D)},$$

$$K_i=\max\left\{\frac{c_i}{\lambda_{i0}},\,a_i,\,\psi_{i0}\right\},\quad i=1,2,$$

$$A_1=\frac{\lambda_{10}\lambda_{20}}{\lambda_{10}\lambda_{20}-\mu_{10}\mu_{20}}\left(K_1+\frac{\mu_{10}K_2}{\lambda_{10}}\right),$$

$$A_2=\frac{\lambda_{10}\lambda_{20}}{\lambda_{10}\lambda_{20}-\mu_{10}\mu_{20}}\left(K_2+\frac{\mu_{20}K_1}{\lambda_{20}}\right),$$

$$N_1=|\alpha_1(T)|A_1+\max_{\overline{\Omega}}\left[A_1\int\limits_0^T|\alpha_1'(t)-\alpha_1(t)\lambda_1(x,t)|\,dt\right.$$
$$\left.+A_2\int\limits_0^T|\alpha_1(t)\mu_1(x,t)|\,dt\right],$$

$$N_2=|\alpha_2(T)|A_2+\max_{\overline{\Omega}}\left[A_2\int\limits_0^T|\alpha_2'(t)-\alpha_2(t)\lambda_2(x,t)|\,dt\right.$$
$$\left.+A_1\int\limits_0^T|\alpha_2(t)\mu_2(x,t)|\,dt\right].$$

Теорема 1. *Пусть для функций* $\lambda_i(x,t)$, $\mu_i(x,t)$, $f_i(x,t)$, $\psi_i(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $i=1,2$, $u_0(x)$, $v_0(x)$, $u_1(x)$ *и* $v_1(x)$ *выполняются включения* $\lambda_i(x,t)\in C(\overline{Q})$, $\mu_i(x,t)\in C(\overline{Q})$, $f_i(x,t)\in L_\infty(Q)$, $\alpha_i(t)\in C^1([0,T])$, $\psi_i(x,t)\in L_\infty(S)$, $u_0(x)\in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $v_0(x)\in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $F_i(x)\in L_\infty(D)$. *Далее, пусть выполняются условия*

$$u_1(x)\geqslant k_1>0,\quad v_1(x)\geqslant k_2>0,\quad x\in\overline{D};\tag{6}$$

$$\lambda_{i0} > 0, \quad i = 1, 2; \tag{7}$$

$$F_i(x) \geqslant m_i > 0, \quad x \in \overline{D}; \tag{8}$$

$$\mu_{10}\mu_{20} < \lambda_{10}\lambda_{20}, \quad N_1 \leqslant m_1, \quad N_2 \leqslant m_2; \tag{9}$$

$$\psi_1(x,0) = u_0(x), \quad \psi_2(x,0) = v_0(x), \quad \int\limits_0^T \alpha_1(t)\psi_1(x,t)\,dt = u_1(x),$$

$$\int\limits_0^T \alpha_2(t)\psi_2(x,t)\,dt = u_2(x), \quad x \in \Gamma. \tag{10}$$

Наконец, пусть для функций $\psi_i(x,t)$, $u_0(x)$ *и* $v_0(x)$

$$\left.\begin{array}{c} \text{краевые задачи} \\ \left\{\begin{array}{l} U_{1t} - \Delta U_1 + \lambda_1(x,t)U_1 = 0, \\ U_1(x,t)|_S = \psi_1(x,t), \\ U_1(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} U_{2t} - \Delta U_2 + \lambda_2(x,t)U_2 = 0, \\ U_2(x,t)|_S = \psi_2(x,t), \\ U_2(x,0) = v_0(x), \quad x \in D, \end{array}\right. \\ \text{имеют решения } U_1(x,t) \text{ и } U_2(x,t), \\ \text{принадлежащие пространству } H \end{array}\right\} \tag{11}$$

Тогда обратная задача (1)–(5) *имеет решение* $\{u(x,t),\ v(x,t),\ q_1(x),\ q_2(x)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in H$, $v(x,t) \in H$, $q_1(x) \in L_\infty(D)$, $q_2(x) \in L_\infty(D)$, $q_1(x) \geqslant 0$, $q_2(x) \geqslant 0$ *при* $x \in \overline{D}$.

Доказательство. Определим срезающие функции $G_i(\xi)$, $i = 1, 2$:

$$G_i(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leqslant N_i, \\ N_i, & \text{если } \xi > N_i, \\ -N_i, & \text{если } \xi < -N_i. \end{cases}$$

Пусть $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ — произвольные функции из пространства H. Определим функции $\varphi_i(x, w_1, w_2)$ и $q_i(x, w_1, w_2)$:

$$\varphi_1(x, w_1, w_2) = -\alpha_1(T)u(x,T) + \int\limits_0^T [\alpha_1'(t) - \alpha_1(t)\lambda_1(x,t)]w_1(x,t)\,dt - \int\limits_0^T \alpha_1(t)\mu_1(x,t)w_2(x,t)\,dt,$$

$$\varphi_2(x,w_1,w_2) = -\alpha_2(T)v(x,T) + \int\limits_0^T [\alpha_2'(t) - \alpha_2(t)\lambda_2(x,t)]w_2(x,t)\,dt - \int\limits_0^T \alpha_2(t)\mu_2(x,t)w_1(x,t)\,dt,$$

$$q_1(x,w_1,w_2) = \frac{F_1(x) + G_1(\varphi_1(x,w_1,w_2))}{u_1(x)},$$

$$q_2(x,w_1,w_2) = \frac{F_2(x) + G_2(\varphi_2(x,w_1,w_2))}{v_1(x)}.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функции* $u(x,t)$ *и* $v(x,t)$, *связанные в цилиндре* Q *уравнениями*

$$u_t - \Delta u + \lambda_1(x,t)u + q_1(x,w_1,w_2)u = f_1(x,t) - \mu_1(x,t)w_2, \qquad (1')$$

$$v_t - \Delta v + \lambda_2(x,t)v + q_2(x,w_1,w_2)v = f_2(x,t) - \mu_2(x,t)w_1, \qquad (2')$$

причем для функций $u(x,t)$ *и* $v(x,t)$ *должны выполняться условия* (3) *и* (4).

Данная задача распадается на две независимые задачи, а именно на две первые начально-краевые для линейных параболических уравнений $(1')$ и $(2')$. Вследствие указанных в формулировке теоремы включений, условия (6), а также вследствие принадлежности функций $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ пространству H коэффициенты $\lambda_1(x,t)$, $\lambda_2(x,t)$, $q_1(x,w_1,w_2)$, $q_2(x,w_1,w_2)$ этих уравнений, а также правые части

$$f_1(x,t) - \mu_1(x,t)w_2(x,t), \quad f_2(x,t) - \mu_2(x,t)w_1(x,t)$$

будут ограничены в цилиндре $\overline{Q}$. Вместе с условиями согласования (первыми двумя равенствами условия (10)) и с условием (11) это означает, что рассматриваемая задача $(1')$, $(2')$, (3), (4) имеет решение $(u(x,t), v(x,t))$ такое, что $u(x,t) \in H$, $v(x,t) \in H$, см. [5].

Сказанное выше означает, в свою очередь, что краевая задача $(1')$, $(2')$, (3), (4) порождает оператор Φ, действующий из пространства $H \times H$ в себя. Докажем, что этот оператор имеет неподвижные точки.

Определим множество

$$W = \{(u,v) \in H \times H : \|u\|_{L_\infty(Q)} \leqslant R_1,\ \|v\|_{L_\infty(Q)} \leqslant R_2,$$
$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))} \leqslant R_3\}.$$

Покажем, что можно выбрать числа R_1–R_3 так, чтобы оператор Φ переводил множество W в себя.

Заметим, что вследствие условий (8) и (9) функции $q_1(x,w_1,w_2)$ и $q_2(x,w_1,w_2)$ будут неотрицательными на множестве $\overline{D}$. Учитывая это свойство, условие (7) и применяя априорную оценку решений первой краевой задачи для параболических уравнений, получаем два неравенства

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \leqslant K_1 + \frac{\mu_{10}}{\lambda_{10}} R_2, \quad \|v\|_{L_\infty(Q)} \leqslant K_2 + \frac{\mu_{20}}{\lambda_{20}} R_1. \qquad (12)$$

Выберем числа R_1 и R_2 так, чтобы для них выполнялись неравенства

$$R_1 \geqslant \frac{\lambda_{10}\lambda_{20}}{\lambda_{10}\lambda_{20} - \mu_{10}\mu_{20}} \left(K_1 + \frac{\mu_{10}K_2}{\lambda_{10}} \right),$$
$$R_2 \geqslant \frac{\lambda_{10}\lambda_{20}}{\lambda_{10}\lambda_{20} - \mu_{10}\mu_{20}} \left(K_2 + \frac{\mu_{20}K_1}{\lambda_{20}} \right)$$

(заметим, что вследствие первого неравенства условия (8) числа R_1 и R_2 можно выбрать заведомо конечными и неотрицательными). При таком выборе чисел R_1 и R_2 неравенства (12) означают выполнение неравенств

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \leqslant R_1, \quad \|v\|_{L_\infty(Q)} \leqslant R_2$$

т. е. первых двух неравенств, определяющих множество W.

Интегральные оценки для решений краевой задачи $(1')$, $(2')$, (3), (4) (т. е. оценки в пространстве $W_2^{2,1}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))$) выводятся с помощью стандартного анализа подходящих скалярных произведений (см., например, [5, 6]); эти оценки имеют вид

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))} \leqslant M_1,$$
$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))} \leqslant M_2.$$

Постоянные M_1 и M_2 в этих оценках определяются лишь коэффициентами $\lambda_i(x,t)$, $\mu_i(x,t)$, функциями $f_i(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\psi_i(x,t)$, $u_0(x)$, $v_0(x)$, $u_1(x)$ и $v_1(x)$, а также числами R_1 и R_2. Выберем теперь число R_3 так, чтобы выполнялось неравенство

$$R_3 \geqslant M_1 + M_2.$$

Очевидно, что при таком выборе числа R_3 для решений краевой задачи $(1')$, $(2')$, (3), (4) будет выполняться и третье неравенство, определяющее множество W.

Выполнение для решений краевой задачи $(1')$, $(2')$, (3), (4) неравенств, определяющих множество W, означает, что оператор Φ, порожденный этой задачей, переводит множество W в себя.

Докажем теперь, что оператор Φ непрерывен на пространстве $H \times H$.

Пусть $\{w_{1m}(x,t), w_{2m}(x,t)\}$ — сходящаяся в пространстве $H \times H$ к элементу $(w_1(x,t),\, w_2(x,t))$ последовательность,

$$(u_m(x,t), v_m(x,t)) \text{ и } (u(x,t), v(x,t))$$

суть образы при действии оператора Φ пар

$$(w_{1m}(x,t), w_{2m}(x,t)) \text{ и } (w_1(x,t), w_2(x,t))$$

соответственно,

$$(\bar{u}_m(x,t), \bar{v}_m(x,t)) = (u_m(x,t) - u(x,t),\; v_m(x,t) - v(x,t)).$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned}\bar{u}_{mt} - \Delta\bar{u}_m + \lambda_1(x,t)\bar{u}_m + q_1(x,w_1,w_2)\bar{u}_m = \mu_1(x,t)(w_2 - w_{2m})\\ + [q_1(x,w_1,w_2) - q_2(x,w_{1m},w_{2m})]u_m,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_{mt} - \Delta\bar{v}_m + \lambda_2(x,t)\bar{v}_m + q_2(x,w_1,w_2)\bar{v}_m = \mu_2(x,t)(w_1 - w_{1m})\\ + [q_2(x,w_1,w_2) - q_2(x,w_{1m},w_{2m})]v_m,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\bar{u}_m(x,0) = \bar{v}_m(x,0) = 0, \quad \bar{u}_m(x,t)|_S = \bar{v}_m(x,t)|_S = 0. \tag{15}$$

Далее, разности $q_i(x,w_1,w_2)-q_i(x,w_{1m},w_{2m})$, $i=1,2$, представляются в виде

$$q_1(x,w_1,w_2)-q_1(x,w_{1m},w_{2m}) = \frac{G_1(\varphi_1(x,w_1,w_2))-G_1(\varphi_1(x,w_{1m},w_{2m}))}{u_1(x)},$$

$$q_2(x,w_1,w_2)-q_2(x,w_{1m},w_{2m}) = \frac{G_2(\varphi_2(x,w_1,w_2))-G_2(\varphi_2(x,w_{1m},w_{2m}))}{v_1(x)}.$$

Указанные представления, липшицевость функций $G_i(\xi)$, а также сходимость функций $w_1(x,t)-w_{1m}(x,t)$, $w_2(x,t)-w_{2m}(x,t)$ почти всюду в цилиндре $\overline{Q}$ к тождественно нулевой функции (вытекающая из сходимости в $H\times H$ последовательности $\{(w_{1m},w_{2m})\}$ к элементу (w_1,w_2)) означают, что в равенствах (13) и (14) правые части почти всюду в $\overline{Q}$ сходятся к нулевой функции. Но тогда из оценок решений параболических уравнений в пространствах $L_\infty(Q)$ и $W_2^{2,1}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))$ и из равенств (15) следует, что последовательности $\{\bar u_m(x,t)\}$ и $\{\bar v_m(x,t)\}$ будут сходиться в пространстве H к нулевой функции. Эта сходимость дает сходимость $(u_m,v_m)\to(u,v)$ в $H\times H$ и тем самым — непрерывность оператора Φ.

Докажем теперь, что оператор Φ компактен на пространстве $H\times H$.

Пусть $\{(w_{1m}(x,t),w_{2m}(x,t))\}$ — ограниченная в пространстве $H\times H$ последовательность, $(u_m(x,t),v_m(x,t))$ суть образы при действии оператора Φ на пару (w_{1m},w_{2m}).

Семейства функций $\{w_{1m}(x,t)\}$, $\{w_{2m}(x,t)\}$, $\{u_m(x,t)\}$, $\{v_m(x,t)\}$ будут равномерно ограничены в пространстве H — первые два по предположению, вторые два — вследствие априорных оценок в пространстве H решений краевой задачи $(1')$, $(2')$, (3), (4). Из равномерной ограниченности указанных семейств вытекает, что существуют последовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел и функции $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$,

$u(x,t)$ и $v(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости

$$w_{1m_k}(x,t) \to w_1(x,t), \quad w_{2m_k}(x,t) \to w_2(x,t), \quad u_{m_k}(x,t) \to u(x,t),$$

$$v_{m_k}(x,t) \to v(x,t) \text{ почти всюду в } \overline{Q},$$

$$w_{1m_k}(x,t) \to w_1(x,t), \quad w_{2m_k}(x,t) \to w_2(x,t),$$

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t),$$

$$v_{m_k}(x,t) \to v(x,t) \text{ слабо в пространстве } W_2^{2,1}(Q).$$

Из этих сходимостей прежде всего следует, что предельные функции $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$, $u(x,t)$ и $v(x,t)$ будут связаны в цилиндре Q уравнениями $(1')$ и $(2')$, и что для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ будут выполняться равенства (3) и (4). Повторяя теперь для последовательностей $\{w_{1m_k}(x,t), w_{2m_k}(x,t)\}$ и $\{(u_{m_k}(x,t), v_{m_k}(x,t))\}$ рассуждения, с помощью которых мы доказали непрерывность оператора Φ, нетрудно показать, что имеет место сходимость

$$\Phi((w_{1m_k}, w_{2m_k})) \to \Phi((u,v)).$$

Другими словами, для любой ограниченной последовательности $\{(w_{1m}(x,t),\, w_{2m}(x,t))\}$ найдется такая ее подпоследовательность $\{(w_{1m_k}(x,t), w_{2m_k}(x,t))\}$, что последовательность $\Phi((w_{1m_k}, w_{2m_k}))$ сходится сильно в пространстве $H \times H$. А это и означает компактность оператора Φ.

Итак, оператор Φ переводит определенное выше множество W в себя и вполне непрерывен на пространстве $H \times H$. Очевидно, что множество W замкнуто, выпукло и ограничено. Следовательно, в силу теоремы Шаудера оператор Φ имеет на множестве W неподвижные точки. Другими словами, существуют функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ из пространства H такие, что для них выполняются уравнения

$$u_t - \Delta u + \lambda_1(x,t)u + q_1(x,u,v)u + \mu_1(x,t)v = f_1(x,t),$$

$$v_t - \Delta v + \lambda_2(x,t)v + q_2(x,u,v)v + \mu_2(x,t)u = f_2(x,t),$$

а также условия (3) и (4).

Нетрудно установить, что для функций u и v имеют место оценки

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \leqslant A_1, \quad \|v\|_{L_\infty(Q)} \leqslant A_2. \tag{16}$$

Следствием этих оценок являются неравенства

$$|\varphi_1(x,u,v)| \leqslant N_1, \quad |\varphi_2(x,u,v)| \leqslant N_2.$$

Но тогда будут выполняться равенства

$$G_i(\varphi_i(x,u,v)) = \varphi_i(x,u,v), \quad i = 1,2.$$

Положим

$$q_1(x) = \frac{F_1(x) + \varphi_1(x,u,v)}{u_1(x)}, \quad q_2(x) = \frac{F_2(x) + \varphi_2(x,u,v)}{v_1(x)}.$$

Очевидно теперь, что функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ и определенные указанным образом функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ будут связаны в цилиндре Q уравнениями (1) и (2).

Умножим уравнение (1) (с функцией $q_1(x)$, определенной выше) на функцию $\alpha_1(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. После несложных преобразований получим равенство

$$-\Delta\left[\int_0^T \alpha_1(t)u(x,t)\,dt - u_1(x)\right] + q_1(x)\left[\int_0^T \alpha_1(t)u(x,t)\,dt - u_1(x)\right] = 0, \tag{17}$$

справедливое в области D. Учитывая, что функция $q_1(x)$ неотрицательна и что функция

$$\int_0^T \alpha_1(t)u(x,t)\,dt - u_1(x)$$

обращается в нуль на границе Γ области D (см. условия (10)), получаем, что из равенства (17) вытекает равенство

$$\int_0^T \alpha_1(t)u(x,t)\,dt = u_1(x),$$

справедливое в области D. Другими словами, для функции $u(x,t)$ выполняется условие интегрального переопределения (5).

Аналогично показывается, что условие интегрального переопределения (5) будет выполняться и для функции $v(x,t)$.

Итак, найденные функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, $q_1(x)$ и $q_2(x)$ будут связаны в цилиндре Q уравнениями (1) и (2), для этих функций будут выполняться условия (3)–(5) и, наконец, эти функции будут принадлежать указанным в теореме классам. Следовательно, функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ дают искомое решение обратной задачи (1)–(5).

Теорема доказана.

Теорема Шаудера, использованная по ходу доказательства теоремы 1, не позволяет утверждать, что решение обратной задачи (1)–(5) будет единственным. Частично прояснить ситуацию могут следующие рассуждения.

Положим

$$M_1 = \frac{A_1}{\lambda_{10}k_1}\left[|\alpha_1(T)| + \max_{\overline{D}}\left(\int_0^T |\alpha_1'(t) - \alpha_1(t)\lambda_1(x,t)|\,dt\right)\right],$$

$$M_2 = \frac{\mu_{10}}{\lambda_{10}} + \frac{A_1}{\lambda_{10}k_1}\max_{\overline{D}}\left(\int_0^T |\alpha_1(t)\mu_1(x,t)|\,dt\right),$$

$$M_3 = \frac{A_2}{\lambda_{20}k_2}\left[|\alpha_2(T)| + \max_{\overline{D}}\left(\int_0^T |\alpha_2'(t) - \alpha_2(t)\lambda_2(x,t)|\,dt\right)\right],$$

$$M_4 = \frac{\mu_{20}}{\lambda_{20}} + \frac{A_2}{\lambda_{20}k_2}\max_{\overline{D}}\left(\int_0^T |\alpha_2(t)\mu_2(x,t)|\,dt\right),$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$M_1 < 1, \quad M_3 < 1, \quad M_2M_4 < (1-M_1)(1-M_3).$$

Тогда любые два решения

$$\{u(x,t), v(x,t), q_1(x), q_2(x)\}, \quad \{\bar u(x,t), \bar v(x,t), \bar q_1(x), \bar q_2(x)\}$$

обратной задачи (1)–(5) *такие, что*

$$u(x,t) \in H, \quad v(x,t) \in H, \quad \bar{u}(x,t) \in H, \quad \bar{v}(x,t) \in H,$$

$$q_1(x) \geqslant 0, \quad q_2(x) \geqslant 0, \quad \bar{q}_1(x) \geqslant 0, \quad \bar{q}_2(x) \geqslant 0,$$

совпадают.

Доказательство. Положим $w(x,t) = u(x,t) - \bar{u}(x,t)$, $z(x,t) = v(x,t) - \bar{v}(x,t)$. Имеют место равенства

$$w_t - \Delta w + \lambda_1(x,t)w + q_1(x)w = [\bar{q}_1(x) - q_1(x)]\bar{u} - \mu_1(x,t)z,$$

$$z_t - \Delta z + \lambda_2(x,t)z + q_2(x)z = [\bar{q}_2(x) - q_2(x)]\bar{v} - \mu_2(x,t)w,$$

$$w(x,0) = z(x,0) = 0, \quad w(x,t)|_S = z(x,t)|_S = 0.$$

Оценки принципа максимума для линейных параболических уравнений [5], неравенства (16) и введенные обозначения дают неравенства

$$\|w\|_{L_\infty(Q)} \leqslant M_1\|w\|_{L_\infty(Q)} + M_2\|z\|_{L_\infty(Q)},$$

$$\|z\|_{L_\infty(Q)} \leqslant M_3\|z\|_{L_\infty(Q)} + M_4\|w\|_{L_\infty(Q)}.$$

Очевидными следствиями этих неравенств и первых двух неравенств из условия теоремы является неравенство

$$\|w\|_{L_\infty(Q)} \leqslant \frac{M_2 M_4}{(1-M_1)(1-M_3)}\|w\|_{L_\infty(Q)}.$$

Это неравенство и третье неравенство из условия теоремы означают, что функция $w(x,t)$ тождественно нулевая.

Очевидно, что и функция $z(x,t)$ является тождественно нулевой.

Из совпадения функций $u(x,t)$ и $\bar{u}(x,t)$, $v(x,t)$ и $\bar{v}(x,t)$ следует совпадение функций $q_1(x)$ и $\bar{q}_1(x)$, $q_2(x)$ и $\bar{q}_2(x)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И.* Задача об определении коэффициентов при младших членах в слабо связанной параболической системе // Мат. заметки ЯГУ, 2000. Т. 7, вып. 2. С. 49–61.
2. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 146–155.
3. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68.
4. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, Вып. 6. С. 840–853.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
6. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716. $\blacksquare$

г. Новосибирск *11 августа 2005 г.*

УДК 517.958

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ

А. Ю. Костин, Е. Т. Софронов

В статье рассматривается математическая модель взаимодействия трех популяций, из которых два вида — жертвы, и один вид — хищник. Эта система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - bx_2 - ax_3), \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - bx_1 - x_2 - ax_3), \\ \dot{x}_3 &= -x_3(k - bx_1 - ax_2 - x_3), \end{aligned} \tag{1}$$

где a, b, r — положительные постоянные. Исследуется устойчивость состояния равновесия M с положительными координатами x_1^*, x_2^*, x_3^*, где

$$x_i^* = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\Delta = 1 - a^2 - ab - b^2 + a^2 b + ab^2 = (1 - a)(1 - b)(1 + a + b),$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = (1 - b)(1 - ak), \quad \Delta_3 = (1 - b)[(1 + b)k - a - b].$$

После преобразования вида

$$x_1 = x_1^* + x, x_2 = x_2^* + y, x_3 = x_3^* + z$$

получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x + x_1^*)(-x - by - az), \\ \dot{y} &= (y + x_2^*)(-bx - y - az), \\ \dot{z} &= (z + x_3^*)(bx + ay + z), \end{aligned} \tag{2}$$

характеристическое уравнение для соответствующей линейной системы представится так:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{3}$$

$$a_1 = 2x_1^* - x_3^*, \quad a_2 = (1-b^2)(x_1^*)^2 + (a^2+ab-2)x_1^*x_3^*,$$
$$a_3 = -\Delta(x_1^*)^2x_3^*.$$

Если $\Delta > 0$, то из условий Рауса — Гурвица следует, что состояние равновесия M неустойчиво. Поэтому в дальнейшем предполагается, что

$$\Delta < 0, \quad \Delta_1 < 0, \quad \Delta_3 < 0. \tag{4}$$

В статье [1] представлена классификация возможных случаев при условии (4) и доказана неустойчивость состояния равновесия M при $b \geqslant 1$, $a < 1$. В других случаях получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости состояния равновесия M. В данной статье рассмотрим оставшиеся варианты относительно параметров системы уравнений (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены неравенства* (4), $a > 1$, $b < 1$ *и* $(1+a)(1+b)k - 1 - a - 2b > 0$. *Тогда состояние равновесия M с положительными координатами асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$\frac{1}{a} < k < \frac{a+b}{1+b}, \quad k > \frac{1+a+2b}{(1+a)(1+b)} > \frac{1}{a}.$$

Покажем, что $a_1 > 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(1-b)[2+a+b-(1+2a+b)k]}{\Delta} \\ &> \frac{1-b}{\Delta}\left[2+a+b-(1+2a+b)\frac{1+a+2b}{(1+a)(1+b)}\right] \\ &= \frac{1-b}{\Delta(1+a)(1+b)}[(2+a+b)(1+a)(1+b) \\ &\qquad - (1+2a+b)(1+a+2b)] = \frac{1-b}{(1+a)(1+b)} > 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$a_1a_2 - a_3 = (2x_1^* - x_3^*)[(1-b^2){x_1^*}^2 + (a^2+ab-2)x_1^*x_3^*] + \Delta(x_1^*)^2x_3^*$$
$$= [(1+b)x_1^* - x_3^*][2(1-b){x_1^*}^2 + (a^2+ab-2)x_1^*x_3^*].$$

Будем различать два случая:

1) $a^2+ab-2 \geqslant 0$,

2) $a^2+ab-2 < 0$.

Так как

$$(1+b)x_1^* - x_3^* = \frac{(1+a)(1+b)k - (1+a+2b)}{(a-1)(1+a+b)} > 0,$$

то $a_1a_2 - a_3 > 0$ при $a^2+ab-2 \geqslant 0$.

Поэтому все условия Рауса — Гурвица отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения (3) выполняются, следовательно, нулевое решение системы уравнений (2) асимптотически устойчиво. Теорема доказана в этом случае.

Рассмотрим второй случай. Покажем, что $a_2 > 0$. Действительно,

$$a_2 = (1-b^2)(x_1^*)^2 + (a^2+ab-2)x_1^*x_3^*$$
$$= (1-b)x_1^*\frac{1}{\Delta}[(1-b^2)(1-ak)+(a^2+ab-2)(1+b)k-(a^2+ab-2)(a+b)] > 0,$$

если

$$\frac{1+a+2b}{(1+a)(1+b)} > \frac{(1-b^2)-(a^2+ab-2)(a+b)}{a(1-b^2)-(a^2+ab-2)(1+b)}.$$

Но

$$(1+a)[1-b^2-(a^2+ab-2)(a+b)] - (1+a+2b)[a(1-b)-(a^2+ab-2)]$$
$$= (2-ab-a^2)[(1+a)(a+b)-(1+a+2b)]+(1-b)[(1+a)(1+b)-a(1+a+2b)]$$
$$= -(a-1)^2(1+a+b)^2 < 0.$$

Отсюда следует, что $a_2 > 0$. Тогда

$$2(1-b){x_1^*}^2 + (a^2+ab-2)x_1^*x_3^*$$
$$= (1-b^2){x_1^*}^2 + (a^2+ab-2)x_1^*x_3^* + (1-b)^2{x_1^*}^2 > 0,$$
$$a_1a_2 - a_3 = [(1+b)x_1^* - x_3^*][a_2 + (1-b)^2{x_1^*}^2] > 0.$$

Ввиду того, что все условия Рауса — Гурвица выполнены, состояние равновесия M асимптотически устойчиво.

Теорема 2. *Пусть выполнены неравенства* (4), $a > 1$, $b < 1$ *и одно из следующих соотношений:*

(а) $a^2 + ab - 2 \geqslant 0$, $\quad (1+a)(1+b)k - (1+a+2b) < 0$,

(б) $a^2 + ab - 2 < 0$, $\quad (1+a)(1+b)k - (1+a+2b) < 0$,

$$[(1+b)(a^2+ab-2) + a(b^2-1)]k - (a+b)(a^2+ab-2) - (b^2-1) < 0.$$

Тогда состояние равновесия M с положительными координатами неустойчиво.

Доказательство. Если выполняются неравенства (а) или (б), то $a_1a_2 - a_3 < 0$. Это нарушение одного из условий Рауса — Гурвица отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения приводит к неустойчивости состояния равновесия M.

Теорема 3. *Пусть выполнены неравенства* (4), $a > 1$, $b < 1$ *и* $(1+a)(1+b)k - (1+a+2b) = 0$. *Тогда состояние равновесия M с положительными координатами устойчиво.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1}{(1+a)(1+b)}, \quad x_3^* = \frac{1}{1+a},$$
$$a_1 = (1-b)x_1^* = -\lambda_1, \quad a_2 = \frac{(a-1)(1+a+b)}{(1+a)^2(1+b)} = \beta^2.$$

Так как $a_1a_2 - a_3 = 0$, характеристическое уравнение (3) имеет корни $\lambda_1 < 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\beta i$.

С помощью преобразования

$$x = y_1 + y_2, \quad y = y_2, \quad z = y_3$$

систему уравнений (2) приведем к виду

$$\begin{aligned} \dot y_1 &= \lambda_1 y_1 - y_1^2 - 2y_1y_2 - ay_1y_3, \\ \dot y_2 &= (y_2 + x_1^*)[-by_1 - (1+b)y_2 - ay_3], \\ \dot y_3 &= (y_3 + x_3^*)[by_1 + (a+b)y_2 + y_3]. \end{aligned} \tag{5}$$

Для системы уравнений (5) $y_1 = 0$ есть интегральная плоскость, на которой могут лежать замкнутые или не замкнутые траектории. Для того чтобы определить картину расположения траекторий, сделаем еще одно преобразование на плоскости $y_1 = 0$:

$$v = -\frac{\beta}{ax_1^*}y_2, \quad u = \frac{1+b}{a}y_2 + y_3.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\dot{u} = -\beta v + u^2 - v^2 + \frac{x_1^*}{\beta}(2 + a + 2b - a^2)uv, \quad \dot{v} = \beta u - auv.$$

Из вида этой системы уравнений [2] следует, что на плоскости $y_1 = 0$ лежат замкнутые траектории. Отсюда получим [3] устойчивость состояния равновесия M.

Теорема 4. *Пусть выполнены неравенства* (4), $a > 1$, $b = 1$ *и*

$$\frac{3+a}{2(1+a)} = k < \frac{1}{2}(1+a).$$

Тогда состояние равновесия M неустойчиво.

Доказательство. При выполнении условий теоремы имеем

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2(1+a)}, \quad x_3^* = \frac{1}{1+a},$$
$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = \frac{(a-1)(a+2)}{2(a+1)^2} = \beta^2.$$

Характеристическое уравнение (3) имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\beta i$. Для исследования системы уравнений (2) введем следующую замену переменных:

$$y_1 = \frac{1}{a}(x+y) + z, \quad y_2 = \frac{-\beta x}{a(2+a)x_1^*} - \frac{2(1+a)^2\beta}{a(2+a)}y, \quad y_3 = x - y.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = -\beta y_2 + y_1^2 - y_2^2 + \frac{4+a-a^2}{2(1+a)\beta}y_1y_2 - \left[\frac{1+a}{2+a}y_1 + \frac{1-a}{2(1+a)}y_2\right]y_3, \\ &\dot{y}_2 = \beta y_1 - ay_1y_2, \dot{y}_3 = -ay_1y_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Система уравнений (6) имеет состояние равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = y_3^0$. На интегральной плоскости $y_3 = 0$ лежат периодические решения [2] в окрестности точки с координатами $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Также имеем интегральные плоскости $y_3 = (\beta - ay_2)c$, где c — const. Для системы уравнений (6) при $y_3 = 0$ имеем голоморфный интеграл [3] вида

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 + f(y_1, y_2) = c,$$

где $f(y_1, y_2)$ есть голоморфная функция, разложение которой в сходящийся ряд по целым положительным степеням начинается с членов не ниже третьего порядка. Для исследования устойчивости состояния равновесия возьмем функцию

$$V_1(y_1, y_2, y_3) = V(y_1, y_2) + \left(b_1 y_1^2 + b_2 y_1 y_2 + b_3 y_2^2\right)\frac{y_3}{\beta - ay_2}$$

такую, что производная ее, вычисленная в силу системы уравнений (6), имеет вид

$$\frac{dV_1}{dt} = \left[q\left(y_1^2 + y_2^2\right) + \ldots\right]y_3 + \psi(y_1, y_2)y_3^2,$$

где многоточием обозначен ряд, начинающийся с членов не ниже третьего порядка; $\psi(y_1, y_2)$ — голоморфная функция, разложение которой в ряд начинается с членов второго порядка. Если

$$b_1 = \frac{a-1}{2(1+a)\beta}, \quad b_2 = \frac{1+a}{2+a}, \quad b_3 = 0,$$

то $q = -\frac{1+a}{2+a}$. Тогда применим теорему 2.17 из [4], где $s = 1$. Получаем, что состояние равновесия M неустойчиво. Заметим, что состояния равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = y_3^0 > 0$ суть устойчивые фокусы, а состояния равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = y_3^0 < 0$ суть неустойчивые фокусы. Поэтому в этом случае происходит циклическое изменение количества особей всех видов при условии $x_1 = x_2$, а в случае $x_1 > x_2$ количество особей всех видов периодически меняется и со временем стремится к определенному числу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костин А. Ю., Софронов Е. Т.* Исследование одной математической модели «хищник и жертва» // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 2. С. 57–64.

2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.

3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

4. *Софронов Е. Т.* Устойчивость автономных систем в критических Новосибирск: Наука, 2000.

г. Якутск *29 декабря 2004 г.*

УДК 517.918

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ БИЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ

С. А. Исхоков, А. Г. Каримов

1. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, билинейные формы которых удовлетворяют условию коэрцитивности, хорошо исследована в работах С. М. Никольского, П. И. Лизоркина, Л. Д. Кудрявцева, Н. В. Мирошина и др. (см. обзорную работу [1] и имеющуюся там библиографию).

Случай дифференциальных операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейными формами, впервые был рассмотрен К. Х. Бойматовым в работе [2]. Результаты этой работы позже обобщались в работах [3–12]. Вопрос зависимости гладкости решения от гладкости коэффициентов билинейной формы и правой части уравнения рассматривался в работах [8–12]. По сравнению с этими работами в данной работе ослаблены некоторые требования к коэффициентам уравнения и изучен вопрос зависимости класса решений от гладкости граничных функций.

Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть r — натуральное число, p, α — вещественные числа, $p \geqslant 1$. Символом $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$ $(x \in \Omega)$, имеющих обобщенные производные порядка $\leqslant r$ с конечной нормой

$$\left\|u, W^r_{p,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{|k|=r}(\rho^{\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|)^p + |u(x)|^p\Big]\,dx\right\}^{1/p}.$$

Здесь и далее $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $u^{(k)}(x)$ — обобщенная производная мультииндекса k функции $u(x)$ в смысле Соболева, $\rho(x)$ — регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$. Далее, символом $B^m_p(\partial\Omega)$ обозначим пространство О. В. Бесова (определение см., например, в [13]).

Основные свойства пространства $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ изучены в гл. 10 монографии С. М. Никольского [13]. Некоторые из этих свойств сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Если целое число m таково, что $0 \leqslant m \leqslant r$, α, β — действительные числа, удовлетворяющие условиям $\beta > -\frac{1}{p}$ и $r - \alpha \geqslant m - \beta$, то справедливо вложение $W^r_{p,\alpha}(\Omega) \subset W^m_{p,\beta}(\Omega)$.*

Теорема 2. *Пусть*

$$-\frac{1}{p} < \alpha < r - \frac{1}{p} \tag{1}$$

и s_0 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам

$$r - \alpha - \frac{1}{p} \leqslant s_0 < r - \alpha + \frac{1}{p}. \tag{2}$$

Тогда любая функция $u(x) \in W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ имеет на границе Γ следы

$$\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\Big|_{\Gamma} = \varphi_s \ \in \ B^{r-\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma), \quad s = 0,\ 1, \dots, s_0 - 1, \tag{3}$$

и при этом выполняются неравенства

$$\|\varphi_s; B^{r-\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma)\| \leqslant C\left\|u, W^r_{p,\alpha}(\Omega)\right\|, \quad s = 0,\ 1, \dots, s_0 - 1,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внутренней нормали n к поверхности $\partial\Omega$, константа $C > 0$ не зависит от функции $u(x)$.

Обратно, если заданы функции $\varphi_s \in B^{r-\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma)$, $s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, *то существует функция* $u(x) \in W^r_{p,\alpha}(\Omega)$, *для которой выполнены равенства*

$$\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = \varphi_s \quad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1)$$

и справедлива оценка

$$\big\|u, W^r_{p,\alpha}(\Omega)\big\|, \leqslant C \sum_{s=0}^{s_0-1} \|\varphi_s; B^{r-\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma)\|,$$

константа $C > 0$ *не зависит от функций* $\varphi_s(x)$ $(s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1)$.

Следствие 1. *Оператор*

$$T : u \to \left(u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{s_0-1} u}{\partial n_{s_0-1}}\Big|_\Gamma\right)$$

является линейным непрерывным оператором из пространства $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ *в* $\prod\limits_{s=0}^{s_0-1} B_p^{r-\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma)$.

Символом $\overset{\circ}{W}{}^r_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в норме пространства $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$. Согласно теореме 1.2.1 из [1] $\overset{\circ}{W}{}^r_{p,\alpha}(\Omega)$ при выполнении условий (1) совпадает с подпространством функций из $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$, имеющих на Γ нулевые следы, т. е.

$$\overset{\circ}{W}{}^r_{p,\alpha}(\Omega) = \left\{u \in W^r_{p,\alpha}(\Omega) : \frac{\partial^s u}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = 0, s = \overline{0, s_0 - 1}\right\}. \tag{4}$$

Пусть m, σ — некоторые целые неотрицательные числа. Положим $\nu = \max\{m, \sigma\}$, $\mu = \max\{0, m - \sigma\}$. Символом $\mathscr{W}^{r,m,\sigma}_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство всех функций $u(x)$ $(x \in \Omega)$, допускающих представление

$$u = \omega + \Phi, \tag{5}$$

где $\omega \in \overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{p,\alpha+m}(\Omega)$ и $\Phi \in W^{r+\nu}_{p,\alpha+\mu}(\Omega)$. Норму пространства $\mathscr{W}^{r,m,\sigma}_{p,\alpha}(\Omega)$ определим равенством

$$\big\|u; \mathscr{W}^{r,m,\sigma}_{p,\alpha}(\Omega)\big\|^p = \inf\big\{\big\|\omega; W^{r+m}_{p,\alpha+m}(\Omega)\big\|^p + \big\|\Phi; W^{r+\nu}_{p,\alpha+\mu}(\Omega)\big\|^p\big\},$$

где инфимум берется по всем представлениям функции $u(x)$ вида (5).

Гладкость решения вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов хорошо описывается (см. [1, 8–12]) в терминах его принадлежности в пространствах типа $V^r_p(\Omega)$ с весом. Пусть p, β — вещественные числа, $p \geqslant 1$ и r — целое неотрицательное число. Символом $V^r_{p,\beta}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$ ($x \in \Omega$), имеющих все обобщенные производные по Соболеву до порядка r включительно с конечной нормой

$$\left\| u; V^r_{\rho,\beta}(\Omega) \right\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{|k| \leqslant r} (\rho^{\beta - r + |k|}(x) u^{(k)}(x))^p \Big] \, dx \right\}^{1/p}.$$

Если r — целое отрицательное число, то по определению положим $V^r_{\rho,\beta}(\Omega) = \big(V^{-r}_{q,-\beta}(\Omega)\big)'$, где $q = p/(p-1)$ и символ B' для любого нормированного пространства B обозначает множество всех антилинейных непрерывных на B функционалов, наделенное нормой сопряженного пространства. Известно (см. [1]), что если выполняется условие

$$\alpha + 1/p \notin \{1, 2, \dots, r\}, \tag{6}$$

то с точностью до эквивалентности норм выполняется равенство $V^r_{p,\alpha}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^r_{p,\alpha}(\Omega)$.

2. Рассмотрим интегродифференциальную билинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l| \leqslant r} \int\limits_{\Omega} a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} \, dx,$$

первоначально определенную на функциях $u, v \in C^\infty_0(\Omega)$. Предположим, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ — измеримые в Ω комплекснозначные функции, удовлетворяющие следующим условиям.

(I) Существуют положительное число $M > 0$ и вещественное число α такие, что

$$\left| a^{(\gamma)}_{kl}(x) \right| \leqslant M \rho^{2(\alpha - r) + |k| + |l| - |\gamma|}(x)$$

для всех $x \in \Omega$ и всех мультииндексов k, l, γ таких, что $|k|, |l| \leqslant r$, $|\gamma| \leqslant m_0$ (m_0 — фиксированное целое неотрицательное число).

(II) Существует число $\varepsilon \in (0, \pi)$ такое, что

$$|\arg A(x,\zeta)| < \pi - \varepsilon \quad (x \in \Omega,\ \zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r} \subset C),$$

где

$$A(x,\zeta) = \sum_{|k|,|l|\leqslant r} a_{kl}(x)\zeta_k\bar{\zeta}_l.$$

(Считается, что функция $\arg z$ принимает значения из $(-\pi, \pi]$.)

(III) Существует комплекснозначная непрерывная отличная от нуля в $\overline{\Omega}$ функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \leqslant M_1 \operatorname{Re}\{\varphi(x)A(x,\zeta)\} \quad (x \in \Omega,\ \zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r} \subset C).$$

Пусть выполняется условие (1) при $p = 2$ и s_0 — целое число, определяемое с помощью неравенств (2) при $p = 2$. Рассмотрим следующую вариационную задачу Дирихле с однородными граничными условиями.

Задача D_0. *Для заданного функционала* $F \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ *требуется найти функцию* $u \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$B[u,v] + \lambda(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{7}$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Здесь и далее символ $\langle F, v\rangle$ обозначает значение функционала F на функции v. Если же F — обычная функция, то $\langle F, v\rangle$ — скалярное произведение F и v в пространстве $L_2(\Omega)$.

Сформулируем результат о разрешимости задачи D_0, который следует из результатов работ [4, 9, 12] на основе равенства (4)

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (I)–(III) *и условия* (1), (6) *при* $p = 2$. *Тогда существует число* $\lambda_0 \geqslant 0$ *такое, что при* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *для любого заданного элемента* $F \in V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)$, *где* m *— целое число такое,* *что* $0 \leqslant m \leqslant m_0$, *существует единственное решение* $u(x)$ *задачи* D_0. *Это решение принадлежит пространству* $W^{r+m}_{p,\alpha+m}(\Omega)$, *при этом справедлива оценка*

$$\|u; W^{r+m}_{p,\alpha+m}(\Omega)\| \leqslant M\|F; V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)\|, \tag{8}$$

где число $M > 0$ *не зависит от* F *и от* λ.

Следствие 1. *Сужение оператора* A *задачи* D_0 *в условиях теоремы 1 на класс* $\overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{2;\alpha+m}(\Omega)$ *является алгебраическим и топологическим изоморфизмом* $\overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{2;\alpha+m}(\Omega)$ *на* $V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)$.

3. В этом пункте мы исследуем разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями и изучаем вопрос зависимости класса решений от гладкости граничных условий. Здесь мы предполагаем, что числа α, s_0 такие же, как в п. 2.

Задача D. *Для заданного функционала* $F \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$ *и заданных граничных функций* $\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $s_0 = 0, 1, \ldots, s_0 - 1$, *требуется найти функцию* $u(x) \in W^r_{2;\alpha}(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению* (7) *и граничным условиям*

$$\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1.$$

Разрешимость задачи D изучается при более жестком ограничении на рост коэффициентов $a_{kl}(x)$, чем в п. 2. Вместо условия (I) требуется выполнение условия

(IV) существует число $M > 0$ такое, что

$$\big|a^{(\gamma)}_{kl}(x)\big| \leqslant M\rho^{\alpha-r+|l|-|\gamma|+\beta(|k|)}(x),$$

где $\beta(|k|) = \alpha - r + |k|$, если $s_0 \leqslant |k| \leqslant r$, и $\beta(|k|) = \beta$, если $0 \leqslant |k| \leqslant s_0 - 1$. Здесь $\beta > -\frac{1}{2}$ — фиксированное число и мультииндекс γ такой, что $|\gamma| \leqslant m_0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (II)–(IV) *и условия* (1), (6) *при* $p = 2$. *Тогда существует число* $\lambda_0 \geqslant 0$ *такое, что при* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *для любого заданного функционала* $F \in V^{m-r}_{2,-\alpha-m}(\Omega)$, *где* m — *целое число такое, что* $0 \leqslant m \leqslant m_0$, *и заданных граничных функций* $\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\Gamma)$, $s_0 = 0, 1, 2. \dots, s_0 - 1$, *задача* D *имеет единственное решение. Это решение принадлежит пространству* $W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$, *и справедливо неравенство*

$$\big\|u; W^{r+m}_{p,\alpha+m}(\Omega)\big\| \leqslant M\left\{\big\|F; V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)\big\| + \sum_{s=0}^{s_0-1} \|\varphi_s; B^{r-\alpha-\frac{1}{p}-s}(\Gamma)\|\right\}, \tag{9}$$

где константа $M > 0$ *не зависит от* F, φ_s $(s = 0, 1, \dots, s_0 - 1)$.

Доказательство. Сначала докажем одну лемму.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 4 *для любой* $\Phi(x) \in W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$ *функционал* G, *определенный равенством*

$$\langle G, v\rangle = B[\Phi, v] + \lambda(\Phi, v), \tag{10}$$

принадлежит пространству $V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\big\|G; V^{m-r}_{2,-\alpha-m}(\Omega)\big\| \leqslant M\big\|\Phi; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\big\|, \tag{11}$$

где константа $M > 0$ *не зависит от* Φ.

Доказательство. Для определенности будем считать, что $\lambda = 0$, и вместо неравенства $A_1(u) \leqslant CA_2(u)$, где $C > 0$ не зависит от u, будем писать $A_1 \ll A_2$. Заметим, что при всех $k : |k| \leqslant r$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega (\rho^{\beta(|k|)}(x)|u^{(k)}(x)|)^2\, dx \ll \big\|u; W^r_{2,\alpha}(\Omega)\big\|^2 \quad (\forall u \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)). \tag{12}$$

Действительно, если мультииндекс k такой, что $0 \leqslant |k| \leqslant s_0 - 1$, то $|k| \leqslant r - \alpha - \frac{1}{2}$. Следовательно, $|k| - \beta(|k|) = |k| - \beta < |k| + \frac{1}{2} \leqslant r - \alpha$, и в силу теоремы 1 справедливо вложение $W^r_{2,\alpha}(\Omega) \subset W^{|k|}_{2,\beta}(\Omega)$, откуда и следует неравенство (12). Пусть теперь $s_0 \leqslant |k| \leqslant r$. Тогда $\beta(|k|) =$

$\alpha - r + |k|$ и, значит, $|k| - \beta(|k|) = r - \alpha$, $\beta(|k|) > -\frac{1}{2}$. Отсюда, вновь применяя теорему 1, имеем $W^r_{2,\alpha}(\Omega) \subset W^{|k|}_{2,\beta(|k|)}(\Omega)$.

Рассмотрим случай $0 \leqslant m \leqslant r$. Для мультииндексов $l : |l| \leqslant r - m$ имеем

$$\int\limits_\Omega (\rho^{\alpha - r + |l|}(x)|v^{(k)}(x)|)^2\,dx = \int\limits_\Omega (\rho^{\alpha - m - (r-m) + |l|}(x)|v^{(l)}(x)|)^2\,dx \\ \ll \left\|v; V^{r-m}_{2,\alpha-m}(\Omega)\right\|^2. \quad (13)$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского и неравенства (12), (13), имеем

$$\left|\int\limits_\Omega a_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx\right| \\ \ll \left(\int\limits_\Omega (\rho^{\beta(|k|)}(x)|\Phi^{(k)}(x)|)^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega (\rho^{\alpha - r + |l|}(x)|v^{(k)}(x)|)^2\,dx\right)^{1/2} \\ \ll \left\|\Phi; W^r_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \left\|v; V^{r-m}_{2,\alpha-m}(\Omega)\right\|^2. \quad (14)$$

Если же мультииндекс l такой, что $|l| > r - m$, то его представим в виде суммы двух мультииндексов l' и l'' так, чтобы $|l'| = r - m$. Учитывая это и интегрируя по частям, имеем

$$\left|\int\limits_\Omega a_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx\right| = \left|\int\limits_\Omega (a_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x))^{(l'')}\overline{v^{(l')}(x)}\,dx\right| \\ \ll \sum_{|k'| \leqslant m} \int\limits_\Omega \rho^{\alpha - r + |l'| + |k'| + \beta(|k|)}(x)|\Phi^{(k+k')}(x)|\,|v^{(l')}(x)|\,dx. \quad (15)$$

Аналогично неравенству (12) с помощью теоремы 1 доказывается неравенство

$$\sum_{|k'| \leqslant m} \int\limits_\Omega (\rho^{\beta(|k|) + |k'|}(x)|u^{(k+k')}(x)|)^2\,dx \\ \ll \left\|u; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\right\|^2 \quad (\forall u \in W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)).$$

Учитывая это, из (15) находим

$$\left|\int\limits_{\Omega} a_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}\,dx\right| \ll \left\|\Phi; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\right\| \left\|v; V^{r-m}_{2,\alpha-m}(\Omega)\right\|. \qquad (16)$$

Согласно теореме 1 $W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega) \subset W^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$. Поэтому из (14), (16) следует неравенство

$$|b[\Phi,\, v]| \ll \left\|\Phi; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\right\| \left\|v; V^{r-m}_{2,\alpha-m}(\Omega)\right\| \quad (\forall v; V^{r-m}_{2,\alpha-m}(\Omega)),$$

которое завершает доказательство леммы в случае $0 \leqslant m \leqslant r$.

Теперь пусть $m > r$. Тогда из (10) следует, что

$$G(x) = \sum_{|k|,|l| \leqslant r} (-1)^{|l|}(a_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x))^{(l)}.$$

Далее, используя условию (IV), непосредственными вычислениями можно показать, что $G(x) \in V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)$.

Лемма 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 4. Пусть задан набор граничных функций $\varphi_s(x) \in B_2^{r-\alpha-\frac{1}{2}-s}(\partial\Omega)$. Тогда согласно теореме 2 существует функция $\Phi(x) \in W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$ такая, что

$$\frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1,$$

и справедливо неравенство

$$\left\|\Phi; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\right\| \ll \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\|\varphi_s; B_2^{r-\alpha-\frac{1}{2}-s}(\partial\Omega)\right\|. \qquad (17)$$

Определим функционал G по формуле (10). Так как $G(x) \in V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)$, согласно теореме 3 при $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ существует единственное решение $\widehat{U} \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha}(\Omega)$ уравнения

$$B[\widehat{U},\, v] + \lambda(\widehat{U},\, v) = \langle F - G,\, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Это решение принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{2;\alpha+m}(\Omega)$, и справедливо неравенство

$$\left\|\widehat{U}; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\right\| \ll \left\|F; V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)\right\| + \left\|G; V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)\right\|. \qquad (18)$$

Далее, легко можно заметить, что функция $U(x) = \widehat{U} + \Phi(x)$ является решением задачи D. Оценка (9) следует из (11), (17), (18). Теорема 4 доказана.

Следствие 2. *Сужение оператора $\mathscr{B}$ задачи D в условиях теоремы 2 на класс $W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$ является алгебраическим и топологическим изоморфизмом $W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$ на $V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)$.*

Рассмотрим оператор $P = (\mathscr{B}, T)$, где $\mathscr{B}$ — оператор задачи D и T — оператор следа (см. п. 1). Каждой функции $u \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ оператор P сопоставляет вектор-функцию с $s_0 + 1$ компонентами

$$\left(\mathscr{B}u; u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma, \dots, \frac{\partial^{s_0-1} u}{\partial n^{s_0-1}}\Big|_\Gamma\right).$$

Так как $\mathscr{B}$ и T — линейные непрерывные операторы в соответствующих пространствах, то оператор P является линейным непрерывным оператором, действующим из $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ в $V^{-r}_{2,-\alpha}(\Omega) \times \sum\limits_{s=0}^{s_0-1} B_2^{r-\alpha-\frac{1}{2}-s}(\Gamma)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 4, целые числа m, σ такие, что $0 \leqslant m \leqslant m_0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant m_0$. Тогда сужение оператора $P = (\mathscr{B}; T)$ на класс $\mathscr{W}^{r,m,\sigma}_{2,\alpha}(\Omega)$ есть алгебраический и топологический изоморфизм пространства $\mathscr{W}^{r,m,\sigma}_{2,\alpha}(\Omega)$ на $V^{-r+m}_{2,-\alpha+m}(\Omega) \times \prod\limits_{s=0}^{s_0-1} B_2^{r+\sigma-\alpha-s-1/2}(\Gamma)$.*

Доказательство. Для удобства записи введем обозначения

$$\mathscr{W} = \mathscr{W}^{r,m,\sigma}_{2,\alpha}(\Omega), \quad \mathscr{V} = V^{-r+m}_{2,-\alpha+m}(\Omega) \times \prod_{s=0}^{s_0-1} B_2^{r+\sigma-\alpha-s-1/2}(\Gamma).$$

Докажем, что оператор P осуществляет взаимно однозначное непрерывное отображение $\mathscr{W}$ на $\mathscr{V}$.

Пусть $u \in \mathscr{W}$. Тогда (см. (5)) $u = \omega + \Phi$, где $\omega \in \overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$, $\Phi \in W^{r+\nu}_{2,\alpha+\mu}(\Omega)$ и $\nu = \max\{m, \sigma\}$, $\mu = \max\{0, m - \sigma\}$. Из теоремы 1 следует, что $W^{r+\nu}_{2,\alpha+\mu}(\Omega) \subset W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$. Поэтому (см. лемму 1) $\mathscr{B}u \in V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\big\|\mathscr{B}u; V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)\big\| \ll \big\|u; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\big\|. \tag{19}$$

С другой стороны, так как $\omega \in \overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$, то

$$\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = \frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\Big|_\Gamma, \quad s = 0,\ 1, \dots s_0 - 1. \tag{20}$$

Используя (19), (20) и представление (5), имеем

$$\|Pu; \mathscr{V}\|^2 \ll \big\|\omega; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\big\|^2 + \big\|\Phi; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\big\|^2$$
$$+ \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\| \frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\Big|_\Gamma ; B_2^{r+\sigma-\alpha-s-1/2}(\Gamma)\right\|^2$$
$$\ll \big\|\omega; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\big\|^2 + \big\|\Phi; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\big\|^2. \tag{21}$$

При получении последнего неравенства мы воспользовались оценкой (3) и вложением $W^{r+\nu}_{2,\alpha+\mu}(\Omega) \subset W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$. Так как неравенство (21) верно для любых ω, Φ, удовлетворяющих равенству (5), то

$$\|Pu; \mathscr{V}\| \ll \|u; \mathscr{W}\|, \tag{22}$$

что и означает непрерывность отображения $P : \mathscr{W} \to \mathscr{V}$.

Теперь докажем, что оператор P обратим и выполняется обратная по отношению к (22) оценка. Берем произвольный элемент $\mathscr{F} \in \mathscr{V}$. Тогда $\mathscr{F} = (F, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s_0-1})$, где $F \in V^{m-r}_{2,m-\alpha}(\Omega)$, $\varphi_s \in B_2^{r+\sigma-\alpha-s-1/2}(\Gamma)$. Пусть $\hat{s}_0$ — наименьшее натуральное число такое, что $-\frac{1}{2} < \alpha + \mu - r - \nu + \hat{s}_0 < \frac{1}{2}$. Заметим, что $\nu - \mu = \sigma$. Поэтому $s_0 \leqslant \hat{s}_0$. Рассмотрим систему функций $\{\widehat{\varphi}_s\}_{s=0}^{\hat{s}_0-1}$ такую, что $\widehat{\varphi}_s = \varphi_s$ при $s = 0, 1, \dots, s_0 - 1$ и $\widehat{\varphi}_s = 0$ при $s = s_0, s_0+1, \dots, \hat{s}_0 - 1$. Тогда согласно теореме 2 существует функция $\Phi \in W^{r+\nu}_{2,\alpha+\mu}(\Omega)$ такая, что

$$\frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = \widehat{\varphi}_s, \quad s = 0, 1, \dots, \hat{s}_0 - 1, \tag{23}$$

и справедливо неравенство

$$\big\|\Phi; W^{r+\nu}_{2,\alpha+\mu}(\Omega)\big\| \ll \sum_{s=0}^{s_0-1} \big\|\varphi_s; B_2^{r+\sigma-\alpha-s-1/2}(\Gamma)\big\|. \tag{24}$$

Так как $W^{r+\nu}_{2,\alpha+\mu}(\Omega) \subset W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$, то из леммы 1 следует, что $\mathscr{B}\Phi \in V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)$, и в силу (11), (24)

$$\big\|\mathscr{B}\Phi; V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)\big\| \ll \sum_{s=0}^{s_0-1} \big\|\varphi_s; B_2^{r+\sigma-\alpha-s-1/2}(\Gamma)\big\|. \tag{25}$$

Следовательно, $F - \mathscr{B}\Phi \in V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)$, и ввиду теоремы 3 существует единственный элемент $\omega \in \overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$ такой, что

$$\mathscr{B}\omega = F - \mathscr{B}\Phi \tag{26}$$

и имеет место неравенство

$$\left\|\omega; W^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)\right\|^2 \ll \left\|F; V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)\right\|^2 + \left\|\mathscr{B}\Phi; V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)\right\|^2. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим функцию $u = \omega + \Phi$. Из равенства (26) следует, что $\mathscr{B}u = F$. Так как $\omega \in \overset{\circ}{W}{}^{r+m}_{2,\alpha+m}(\Omega)$, то согласно (23)

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\right|_\Gamma = \widehat{\varphi}_s, \quad s = 0, 1, \dots, \hat{s}_0 - 1. \tag{28}$$

Используя (25), (26), (28), имеем

$$\|Pu; \mathscr{V}\|^2 = \left\|\mathscr{B}u; V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)\right\|^2 + \left\|Tu; \prod_{s=0}^{s_0-1} B_2^{r+\sigma-\alpha-s-1/2}(\Gamma)\right\|^2$$

$$= \left\|F; V^{m-r}_{2,-\alpha+m}(\Omega)\right\|^2 + \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\|\varphi_s; B_2^{r+\sigma-\alpha-s-1/2}(\Gamma)\right\|^2 = \|\mathscr{F}; \mathscr{V}\|^2. \tag{29}$$

Из неравенств (24), (27) и равенства (29) следует, что $\|u; \mathscr{W}\| \ll \|Pu; \mathscr{V}\|$. ∎ Теорема 5 доказана.

Сформулированный в теореме 5 результат является обобщением соответствующих результатов работы [14] на случай некоэрцитивных билинейных форм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирашин Н. В.* Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.
2. *Бойматов К. Х.* Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1992. Т. 327, № 1. С. 5–9.
3. *Бойматов К. Х.* Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 3. С. 285–290.

4. *Бойматов К. Х.* Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами // Докл. РАН. 1994. Т. 339, № 1. С. 5–10.

5. *Бойматов К. Х., Седдики К.* Граничные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 3. С. 295–297.

6. *Бойматов К. Х., Седдики К.* Некоторые спектральные свойства дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными формами // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 4. С. 439–442.

7. *Бойматов К. Х.* Граничные задачи для некоэрцитивных форм // Докл. АН РТ. 1998. Т. 41, № 10. С. 10–16.

8. *Исхоков С. А.* О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Докл. РАН. 1995. Т. 342, № 1. С. 20–22.

9. *Бойматов К. Х., Исхоков С. А.* О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой // Тр. Мат ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107–134.

10. *Бойматов К. Х., Исхоков С. А.* О собственных значениях и собственных функциях матричных дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Вестн. Хорогского Ун-та. Естественные науки. 2000. № 2. С. 13–24.

11. *Бойматов К. Х., Исхоков С. А.* Вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора, вырождающегося на многообразиях различных измерений // Докл. АН РТ. 2000. Т. 43, № 3. С. 53–60.

12. *Исхоков С. А.* Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Докл. РАН. 2003. Т. 392, № 5. С. 606–609.

13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977.

14. *Байдельдинов Б. Л.* Об одном аналоге первой краевой задачи для эллиптического уравнения порядка $2m$ со степенным вырождением на границе // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 5. С. 1038–1042; 1984. Т. 170. С. 3–11.

г. Душанбе *12 января 2005 г.*

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА СВЕДЕНИЕМ ЕЕ К ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

А. Р. Павлов, Е. А. Слепцова

Существующие методы численного решения задачи Стефана можно разбить на две группы: методы с явным выделением границы фазового перехода (см., например, [1–3]) и методы, основанные на замене эквивалентной задачей теплопроводности с источником (стоком) тепла, связанным с границей фазового перехода. Характерная особенность второй группы методов состоит в том, что в них решение задачи ищется как решение однородной разностной схемы. Впервые такие схемы были предложены одновременно в [4, 5]. Пространственное распределение источника тепла в уравнении теплопроводности определяется дельта-функцией Дирака. При построении разностных схем она аппроксимируется дельтаобразной функцией, что означает «размазывание» энтальпии фазового перехода на некоторую окрестность границы раздела фаз. В работе [6] вместо дельта-функции аппроксимируется ее первообразная — единичная функция Хевисайда — и тем самым энтальпия фазового перехода «размазывается» на некотором интервале температур, содержащем температуру фазового перехода. В [7] задача Стефана рассматривается как задача теплопроводности с движущимся источником тепла, связанным с поверхностью фазового перехода.

В настоящей работе многомерная задача Стефана с фиксированной температурой фазового перехода приводится к задаче теплопроводности с источником тепла, распределенным в малой окрестности границы раздела фаз, причем эта окрестность берется в области образующейся фазы. Ввиду непрерывного изменения положения поверхности фазового перехода вводимый источник тепла является движущимся вместе с границей раздела фаз.

1. Постановка задачи. Пусть имеются две фазы 1 и 2 и распределение температуры в них описывается уравнениями

$$c_1\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda_1 \,\mathrm{grad}\, T) + f_1, \quad T < T_*, \tag{1}$$

$$c_2\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda_2 \,\mathrm{grad}\, T) + f_2, \quad T > T_*, \tag{2}$$

где c_1, c_2 — объемные теплоемкости; λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности фаз; f_1, f_2 — плотности тепловых источников. Обозначим через $\Phi(\bar{r},\, t) = 0$ уравнение границы раздела фаз, $\bar{r} = \bar{r}(x_1,\, x_2, ..., x_p)$. Если точка лежит на поверхности фазового перехода, то $\bar{r} = \overline{R}$ и $\Phi(\overline{R}(t),\, t) = 0$. Условие теплового баланса (условие Стефана) на поверхности фазового перехода задается в виде [4, 5]

$$((\lambda \,\mathrm{grad}\, T)_1 - (\lambda \,\mathrm{grad}\, \mathrm{T})_2, \mathrm{grad}\, \Phi) + L\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,\, T = T_*, \tag{3}$$

где L — энтальпия фазового перехода.

На внешних поверхностях областей, занятых соответственно фазами 1 и 2, заданы граничные условия для моментов времени $t > 0$; задано также начальное распределение температуры при $t = 0$.

2. Эквивалентная задача теплопроводности. Введем кусочно непрерывную неотрицательную функцию $g(T)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $g(T) \neq 0$ в промежутке $[T_*, T_* + \Delta)$, а вне его тождественно равняется нулю;

2) $g(T_*) = 1$;

3) $dg/dT < 0$ для $T \in (T_*, T_* + \Delta)$.

Тогда справедливо следующее утверждение: сформулированная выше задача Стефана эквивалентна задаче теплопроводности, определяемой уравнением

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda \,\mathrm{grad}\, T) + f + L\frac{\partial g}{\partial t}, \tag{4}$$

с граничными и начальным условиями исходной задачи.

Для доказательства воспользуемся методикой работы [7]. Рассмотрим некоторый объем V, ограниченный поверхностью A и содержащий внутри себя поверхность раздела фаз Σ (рис. 1).

Рис. 1.

В момент времени t поверхность раздела фаз Σ делит область на две части V_1, V_2 с соответствующими внешними поверхностями A_1, A_2. За малое приращение времени Δt поверхность раздела фаз проходит через элементарное приращение объема δV и займет положение Σ'. При этом увеличится объем, занятый фазой 2, и соответственно уменьшится объем фазы 1.

Проинтегрируем уравнение (4) по объему V и воспользуемся формулой Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_V c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dV = \int\limits_A (\lambda \operatorname{grad} T, \bar{n})\,dA + \int\limits_V L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV + \int\limits_V f\,dV, \tag{5}$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к поверхности A.

Рассмотрим второй интеграл правой части (5):

$$\int\limits_V L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV = \int\limits_{V_1} L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV + \int\limits_{V_2} L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV = \int\limits_{V_1-\delta V} L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV + \int\limits_{V_2+\delta V} L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV.$$

Здесь интеграл по области $V_1 - \delta V$ равен нулю по определению функции $g(T)$, а второй интеграл по $V_2 + \delta V$ представим в виде суммы интегралов по V_2 и δV:

$$\int\limits_V L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV = \int\limits_{V_2} L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV \;+ \lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{\delta V} L\,\frac{(g)_{1,t+\Delta t} - (g)_{2,t}}{\Delta t}\,dV.$$

Из определения функции $g(T)$ следует, что $(g)_{1,t+\Delta t} = 0$ и $g(T) = 1$ на фазовой поверхности. При $\Delta t \to 0$ отношение $dV/\Delta t$ стремится к $v_n^* \cdot d\Sigma$, где v_n^* — локальная скорость элемента $d\Sigma$ фазовой поверхности по нормали к ней в сторону первой фазы. Кроме того, объем δV при этом стягивается к поверхности Σ, так что областью интегрирования становится Σ. Тогда предыдущее выражение примет вид

$$\int\limits_V L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV = \int\limits_{V_2} L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV \;- \int\limits_{\Sigma} L\,v_n^*\,d\Sigma. \tag{6}$$

Напишем соотношение (5) для каждой фазы:

$$\int\limits_{V_1} c_1\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dV = \int\limits_{A_1+\Sigma} (\lambda\,\mathrm{grad}\,T, \bar n)_1\,dA + \int\limits_{V_1} L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV + \int\limits_{V_1} f_1\,dV, \tag{7}$$

$$\int\limits_{V_2} c_2\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dV = \int\limits_{A_2+\Sigma} (\lambda\,\mathrm{grad}\,T, \bar n)_2\,dA + \int\limits_{V_2} L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV + \int\limits_{V_2} f_2\,dV. \tag{8}$$

Второй член правой части в (7) равен нулю по определению функции $g(T)$, а в равенстве (8) аналогичное слагаемое заменим его значением из (6). Затем, суммируя полученные соотношения, будем иметь

$$\int\limits_V c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dV = \int\limits_A (\lambda\,\mathrm{grad}\,T, \bar n)\,dA + \int\limits_\Sigma (\lambda\,\mathrm{grad}\,T, \bar n)_1\,d\Sigma$$
$$+ \int\limits_\Sigma (\lambda\,\mathrm{grad}\,T, \bar n)_2\,d\Sigma + \int\limits_V L\,\frac{\partial g}{\partial t}\,dV + \int\limits_\Sigma L\,v_n^*\,d\Sigma + \int\limits_V f\,dV.$$

Теперь, вычитая (5) из последнего соотношения, придем к равенству

$$\int\limits_\Sigma (\lambda\,\mathrm{grad}\,T, \bar n)_1\,d\Sigma \;+ \int\limits_\Sigma (\lambda\,\mathrm{grad}\,T, \bar n)_2\,d\Sigma \;+ \int\limits_\Sigma L\,v_n^*\,d\Sigma = 0.$$

Если локальную нормаль к Σ, направленную в сторону первой фазы, обозначить через $\bar{n}_*$, то в первом интеграле $\bar{n} = -\bar{n}_*$, а во втором $\bar{n} = \bar{n}_*$:

$$\int\limits_{\Sigma} [((\lambda \operatorname{grad} T)_2 - (\lambda \operatorname{grad} T)_1, \bar{n}_*) + L v_n^*] \, d\Sigma = 0.$$

В силу произвольности объема V и соответствующей поверхности Σ отсюда следует, что

$$((\lambda \operatorname{grad} T)_1 - (\lambda \operatorname{grad} T)_2, \bar{n}_*) - L v_n^* = 0.$$

С учетом соотношений

$$v_n^* = \frac{1}{|\operatorname{grad} \Phi|} \left(\frac{d\overline{R}}{dt}, \operatorname{grad} \Phi \right), \quad \bar{n}_* = \frac{\operatorname{grad} \Phi}{|\operatorname{grad} \Phi|}, \quad \left(\frac{d\overline{R}}{dt}, \operatorname{grad} \Phi \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

из последнего равенства получаем условие (3). Утверждение доказано.

3. Расчет температурного поля при сварочном нагреве. Разработанная методика применена при численном моделировании температурного поля электродуговой сварки встык тонких пластин. Математическая модель процесса теплопереноса сформулирована в виде следующей двухфазной задачи Стефана [8]:

$$c_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) - \frac{2\alpha}{\delta} (T - T_c) + f, \quad T < T_*, \tag{9}$$

$$c_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) - \frac{2\alpha}{\delta} (T - T_c) + f, \quad T > T_*, \tag{10}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = \alpha (T - T_c), \quad x_1 = 0, \tag{11}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = \alpha (T - T_c), \quad x_1 = l_1, \tag{12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0, \tag{13}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_2} = \alpha (T - T_c), \quad x_2 = l_2 \tag{14}$$

$$T(x_1,x_2,0)=T_c=\text{const}, \tag{15}$$

$$((\lambda\,\mathrm{grad}\,T)_1-(\lambda\,\mathrm{grad}\,\mathrm{T})_2,\mathrm{grad}\,\Phi)+L\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0, \tag{16}$$

$$T(P)=T_*=\text{const},\quad P(x_1,x_2,t)\in\Phi(x_1,x_2,t)=0, \tag{17}$$

где система координат выбрана таким образом, что ее начало находится на кромке пластин, ось $0x_1$ направлена вдоль шва, ось $0x_2$ — по кромке пластины перпендикулярно оси $0x_1$. Кроме того, учтена симметрия области распространения тепла относительно оси $0x_1$. В формулировке задачи введены следующие обозначения: T_c, T_* — температуры среды и фазового перехода, α — коэффициент теплоотдачи, вторые члены правых частей уравнений (9), (10) учитывают поверхностную теплоотдачу, f — объемный источник тепла, вносимого сварочной дугой, который выражается через параметры дуги в следующем виде [9]:

$$f=qk/\pi\delta\exp\,k\bigl[(x_1-v_c\,t)^2+x_2^2\bigr],$$

где q — эффективная мощность дуги, $q=\eta UI$, η — эффективный КПД процесса нагрева изделия; U, I — напряжение и сила тока соответственно; k — коэффициент сосредоточенности теплового потока дуги, v_c — скорость сварки.

Сформулированная задача согласно предыдущему пункту сводится к решению уравнения

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)-\frac{2\alpha}{\delta}(T-T_c)+f+L\frac{\partial g}{\partial t} \tag{18}$$

с граничными и начальным условиями (11)–(15). Коэффициенты c, λ имеют разрывы при $T=T_*$. Уравнение (18) с учетом определения функции $g(T)$ приводится к виду

$$\bar c\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)-\frac{2\alpha}{\delta}(T-T_c)+f, \tag{19}$$

$$\bar c=\begin{cases} c_1, & T<T_*,\\ c_2-L\,\frac{dg}{dT}, & T_*<T\leqslant T_*+\Delta,\\ \frac{c_1+c_2}{2}-L\frac{dg}{dT}, & T=T_*,\\ c_2, & T>T_*+\Delta,\end{cases}$$

и имеет конечные скачки в точках T_* и $T_* + \Delta$. В $[T_*, -\Delta, T_* + \Delta]$ проводится сглаживание функции λ, например, линейной функцией. Тогда в (19) коэффициент λ имеет следующую структуру:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, & T \leqslant T_* - \Delta, \\ \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{(T-T_*)}{2\Delta}, & T_* - \Delta \leqslant T \leqslant T_* + \Delta, \\ \lambda_2, & T \geqslant T_* + \Delta. \end{cases}$$

Полученная задача решена локально-одномерным методом. Расчеты по данному алгоритму проведены для случая сварки двух тонких пластин с размерами 10 см × 8 см, изготовленных из низкоуглеродистой стали. Принимались следующие значения параметров:

$$c_1 = 3634\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \quad c_2 = 5964\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}},$$

$$\lambda_1 = 173.052\frac{\text{кДж}}{\text{ч} \cdot \text{м} \cdot \text{град}}, \quad \lambda_2 = 123.408\frac{\text{кДж}}{\text{ч} \cdot \text{м} \cdot \text{град}},$$

$$q = 5400\frac{\text{кДж}}{\text{ч}} \quad v_c = 9\frac{\text{м}}{\text{ч}}, \quad \delta = 0.003\text{м}, \quad T_* = 1530°C,$$

$$T_c = 20°C, \quad L = 596.4 * 10^3\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}, \quad k = 3000\frac{1}{\text{м}^2},$$

$$\alpha = 400\frac{\text{кДж}}{\text{ч}\,\text{м}^2\,K} \text{ при } T > 500°C \quad \text{и} \quad \alpha = 80\frac{\text{кДж}}{\text{ч}\,\text{м}^2}K \text{ для } T \leqslant 500°C.$$

Расчеты температурного поля выполнены для двух различных видов функции источника:

$$g(T) = 1 - \frac{(T - T_*)}{\Delta}, \tag{20}$$

$$g(T) = \exp\{-0.69(T - T_*)/\Delta\}. \tag{21}$$

Для сравнения результатов численного решения в таблице приведены термические циклы точки B, лежащей на оси шва и отстоящей от левой кромки пластины на расстоянии 6 см, при двух выбранных функциях источника. В таблице T_1 — значения температуры, вычисленные при $g(T)$ вида (20); T_2 — значения температуры для $g(T)$, выраженного равенством (21); T_3 — значения температуры, полученные методом сглаживания $(4, 5)$.

Результаты расчетов показывают пригодность предлагаемого метода для практических целей.

Таблица. Распределение температуры в точке B по времени

$T, ^\circ C$	$t = 9$ сек	$t = 18$ сек	$t = 27$ сек	$t = 36$ сек	$t = 45$ сек	$t = 54$ сек
T_1	119.006	832,332	1547,538	1440,138	806,254	575,195
T_2	119,006	832,332	1547,538	1440,138	807,037	575,798
T_3	119,006	832,332	1547,538	1306,591	763,339	659,846

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ehrlich L. W.* A numerical method of solving heat flow problem with mouving boundary // J. Assoc. Comput. Machinery. 1958. V. 5, N 2. P. 161–176.
2. *Васильев Ф. П., Успенский А. Б.* Разностный метод решения двухфазной задачи Стефана // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 5. С. 874–886.
3. *Будак Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б.* Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные методы в газовой динамике / Сб. работ ВЦ МГУ. М., 1965. Вып. 4. С. 139–183.
4. *Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
5. *Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б.* Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.
6. *Мажукин В. И., Повещенко Ю. А., Попов С. Б., Попов Ю. П.* Об однородных алгоритмах численного решения задачи Стефана. М., 1985. 23 с. (Препринт / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР; № 122).
7. *Шамсундар Н., Спэрроу Е. М.* Применение метода энтальпии к анализу многомерной задачи теплопроводности при наличии фазового перехода // Теплопередача. 1975. № 3. С. 14–22.
8. *Ларионов В. П., Павлов А. Р., Тихонов А. Г., Слепцов О. И.* Применение ЭВМ для численного определения температурного поля при сварке встык тонких пластин // Автомат. сварка. 1979. № 11. С. 19–22.
9. *Рыкалин Н. Н.* Расчет тепловых процессов при сварке. М.: Машгиз, 1951.

г. Якутск *20 декабря 2004 г.*

УДК 517.956.4

КОНТАКТНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ГЁЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ*)

Н. Р. Пинигина, С. В. Попов

В работе [1] предлагается единообразный подход к построению моделей сопряжения различных физических процессов таких, как распространение тепла в неоднородных средах (задачи типа дифракции), взаимодействие фильтрационных и каналовых потоков жидкости (фильтрация в скважину), возвратные течения в пограничном слое за точкой его отрыва и др. В работах [2–6] устанавливается разрешимость краевых задач в гёльдеровских пространствах для некоторых классов уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени с границей раздела, имитирующей противоположные спутные потоки. В настоящей работе мы рассматриваем общий случай границы раздела двух сред, в который, в частности, включаются также и ортогональные потоки, косое соударение и т. д. Как и в работе [4], решение поставленной задачи разыскивается в виде параболических потенциалов двойного слоя с неизвестными плотностями.

В области $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$, рассмотрим уравнение

$$g(x)\, u_t = u_{xx}, \quad g(x) = \operatorname{sgn} x. \tag{1}$$

В пространстве Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/2}(Q^{\pm})$, $p = 2l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным усло-

*) Работа поддержана научной программой «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки РФ (код проекта 8427 и УР 04.01.449).

виям:

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ x>0,\quad u(x,T)=\varphi_2(x),\ x<0, \tag{2}$$

и условиям склеивания:

$$u(-0,t)=u(+0,t),\quad z\cdot u_x(-0,t)=u_x(+0,t), \tag{3}$$

где $l\geqslant 1$ — целое число, $Q^{\pm}=\mathbb{R}^{\pm}\times(0,T)$, $z=r\exp(i\varphi)$ — комплексное число.

Для удобства вместо уравнения (1) будем рассматривать систему уравнений

$$u^1_t=u^1_{xx},\quad -u^2_t=u^2_{xx} \tag{4}$$

в области Q^+. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид

$$u^1(x,0)=\varphi_1(x),\quad u^2(x,T)=\varphi_2(x),\ x>0, \tag{5}$$

$$u^1(0,t)=u^2(0,t),\quad u^1_x(0,t)+zu^2_x(0,t)=0. \tag{6}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x)\in H^p(\mathbb{R})$ $(i=1,2)$. Тогда функции

$$\begin{gathered}\omega_1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\Bigr)\varphi_1(\xi)\,d\xi,\\ \omega_2(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\Bigl(-\frac{(x-\xi)^2}{4(T-t)}\Bigr)\varphi_2(\xi)\,d\xi\end{gathered} \tag{7}$$

являются решениями уравнений (4), удовлетворяющими условиям (5) в $\mathbb{R}$. В силу метода исследования будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (4):

$$\begin{gathered}u^1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t x\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Bigr)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\alpha(\tau)\,d\tau+\omega_1(x,t),\\ u^2(x,t)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_t^T x\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4(\tau-t)}\Bigr)(\tau-t)^{-\frac{3}{2}}\beta(\tau)\,d\tau+\omega_2(x,t).\end{gathered} \tag{8}$$

Функции, представленные формулами (8), удовлетворяют начальным условиям (5) и уравнениям (4) соответственно.

Согласно [7, 8, 4] u^k принадлежат пространству $H_{x\ t}^{p,p/2}$, если введенные нами неизвестные плотности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{p/2}$, причем

$$\alpha^{(s)}(0) = \beta^{(s)}(T) = 0 \quad (s = 0, \dots, l). \tag{9}$$

Из условий склеивания (6) получим систему уравнений относительно α, β:

$$\begin{cases} \alpha(t) + \omega_1(0,t) = -\beta(t) + \omega_2(0,t), \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \alpha(0) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + \omega_{1x}(0,t) \\ \quad + \frac{z}{\sqrt{\pi}} (T-t)^{-\frac{1}{2}} \beta(T) - \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + z\omega_{2x}(0,t) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

или

$$\begin{cases} \alpha(t) + \beta(t) = \Phi_0(t), \\ \int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + z \int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau \\ \qquad + t^{-\frac{1}{2}} \alpha(0) - z(T-t)^{-\frac{1}{2}} \beta(T) = \Phi_1(t), \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\Phi_0(t) = \omega_2(0,t) - \omega_1(0,t), \quad \Phi_1(t) = \sqrt{\pi}(z\omega_{2x}(0,t) + \omega_{1x}(0,t)).$$

При выполнении условий

$$\beta(0) = \Phi_0(0), \quad \beta(T) = 0 \tag{12}$$

систему уравнений (11) можно переписать так:

$$\begin{cases} \alpha(t) + \beta(t) = \Phi_0(t), \\ \int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + z \int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau = \Phi_1(t). \end{cases} \tag{13}$$

Отметим, что первое условие в (12) необходимо и достаточно для того, чтобы было выполнено условие $\alpha(0) = 0$.

Если второе уравнение в (13) обратить при помощи известных формул обращения оператора Абеля, то

$$\begin{cases} \alpha(t)+\beta(t)=\Phi_0(t), \\ \alpha'(t)+\frac{z}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/2}\frac{\beta'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau. \end{cases} \tag{14}$$

Введем обозначения $F_0^s(t)=\Phi_0^{(s)}(t)-\Phi_0^{(s)}(0)$,

$$F_1^s(t)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\Phi_1^{(s-1)}(\tau)-\Phi_1^{(s-1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau \quad (s=1,\dots,l).$$

Легко видеть, что $F_0^l(t)$, $F_1^l(t)$ принадлежат пространству Гёльдера с показателем $\gamma/2$, причем $F_0^l(t)=F_1^l(t)=O(t^{\gamma/2})$ для малых t.

Предположим, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{p/2}(0,T)$. Тогда из системы (14) следует, что

$$z\int\limits_0^T\frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}}\,d\tau=\Phi_1(0). \tag{15}$$

При выполнении (15) систему (14) можно переписать так:

$$\begin{cases} \alpha'(t)+\beta'(t)=\Phi_0'(0)+F_0^1(t), \\ \alpha'(t)+\frac{z}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\beta'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=F_1^1(t). \end{cases} \tag{16}$$

Пусть выполнены условия

$$\beta'(0)=\Phi_0'(0), \quad \beta'(T)=0. \tag{17}$$

Введем в системе (16) новые искомые функции $\bar\beta'(t)=\beta'(t)-\beta'(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда систему (16) представим в виде

$$\begin{cases} \alpha'(t)+\bar\beta'(t)=\beta'(0)\frac{t}{T}+F_0^1(t), \\ \alpha'(t)+\frac{z}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\bar\beta'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{4z}{\pi}\beta'(0)F\left(-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};\frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}+F_1^1(t), \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T-\tau}{T(\tau-t)}\,d\tau = -\frac{4}{\pi}F\left(-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};\frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, если $l>1$, то продифференцируем полученную систему уравнений (18):

$$\begin{cases} \alpha''(t)+\bar\beta''(t)=\Phi_0''(t), \\ \alpha''(t)+\frac{z}{2\pi}\left(t^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^T \frac{\bar\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)}\,d\tau + t^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^T \frac{\bar\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)}\,d\tau\right) \\ \qquad = \frac{2z}{T\pi}\beta'(0)F\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2};\frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\Phi_1'(0)t^{-\frac{1}{2}} + F_1^2(t). \end{cases} \tag{19}$$

Из этой системы следует, что

$$\frac{z}{2}\int\limits_0^T \frac{\bar\beta'(\tau)}{\tau^{3/2}}\,d\tau = 2\frac{z}{\sqrt{T}}\beta'(0)+\Phi_1'(0). \tag{20}$$

Систему (19) при выполнении условия (20) и $\beta'(T)=0$ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha''(t)+\beta''(t)=\Phi_0''(0)+F_0^2(t), \\ \alpha''(t)+\frac{z}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\beta''(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = F_1^2(t). \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, мы получили уравнения (21), имеющие точно такой же вид, как и уравнения (16). Легко видеть, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \beta^{(s)}(0)=\Phi_0^{(s)}(0),\ \beta^{(s)}(T)=0, \\ \frac{z}{2}\int\limits_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau)-\beta^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}}\,d\tau = 2\frac{z}{\sqrt{T}}\beta^{(s)}(0)+\Phi_1^{(s)}(0), \\ s=2,\ldots,l-1, \end{cases} \tag{22}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^{(l)}(t)+\beta^{(l)}(t)=\Phi_0^{(l)}(0)+F_0^l(t), \\ \alpha^{(l)}(t)+\frac{z}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\beta^{(l)}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = F_1^l(t). \end{cases} \tag{23}$$

Потребуем выполнения условий

$$\beta^{(l)}(0)=\Phi_0^{(l)}(0), \quad \beta^{(l)}(T)=0 \tag{24}$$

и введем новую искомую функцию $\tilde{\beta}^{(l)}(t) = \beta^{(l)}(t) - \beta^{(l)}(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда систему (23) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha^{(l)}(t) + \tilde{\beta}^{(l)}(t) = \overline{F}_0^{\,l}(t), \\ \alpha^{(l)}(t) + \frac{z}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \overline{F}_1^{\,l}(t), \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\overline{F}_0^{\,l}(t) = \beta^{(l)}(0)\frac{t}{T} + F_0^l(t),$$

$$\overline{F}_1^{\,l}(t) = \frac{4z}{\pi}\beta^{(l)}(0)F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} + F_1^l(t),$$

принадлежат пространству $H^{\gamma/2}(0,T)$, причем $\overline{F}_0^{\,l}(t) = \overline{F}_1^{\,l}(t) = O(t^{\gamma/2})$ для малых t.

Исключая $\alpha^{(l)}(t)$ в системе (25), получим сингулярное уравнение относительно $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$:

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) - \frac{z}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = Q(t), \tag{26}$$

где

$$Q(t) = \overline{F}_0^{\,l}(t) - \overline{F}_1^{\,l}(t).$$

Сингулярное интегральное уравнение (26) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_0(t) = \tilde{\beta}^{(l)} t^{-\frac{1}{2}}$. Найдем решения $\beta_0(t)$, неограниченные при $t = 0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при $t = T$. Для этого введем кусочно голоморфную функцию (см. [9, 10])

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau - \zeta}\, d\tau.$$

Тогда на основании формул Сохоцкого — Племеля уравнение (26) эквивалентно решению краевой задачи Римана

$$\begin{gathered} \Psi^+(t) = \frac{1+iz}{1-iz}\Psi^-(t) + \frac{Q(t)}{t^{\frac{1}{2}}(1-iz)}, \quad t \in (0,T), \\ \Psi^+(t) = \Psi^-(t), \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \end{gathered} \tag{27}$$

при дополнительном условии $\Psi(\infty)=0$. Отметим, что

$$G=\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{(1-r\sin\varphi)+ir\cos\varphi}{(1+r\sin\varphi)-ir\cos\varphi}$$

и

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T\frac{\ln G}{\tau-\zeta}\,d\tau\right)=(\zeta-T)^{\theta-\theta_1 i}\zeta^{-\theta+\theta_1 i},\quad \theta_1=\frac{\ln|G|}{2\pi},$$

$$\theta=\frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{r\cos\varphi}{1-r\sin\varphi}+\operatorname{arctg}\frac{r\cos\varphi}{1+r\sin\varphi}\right),$$

$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ при $|r\sin\varphi|\leqslant 1$; $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ при $|r\sin\varphi|>1$. Кроме того,

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T\frac{\ln G}{\tau-\zeta}\,d\tau\right)=(\zeta-T)^{-\theta-\theta_1 i}\zeta^{\theta+\theta_1 i},$$

$\varphi\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ при $|r\sin\varphi|\leqslant 1$, $\varphi\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ при $|r\sin\varphi|>1$. В указанном выше классе каноническая функция равна $\chi(\zeta)=(\zeta-T)^{\theta}\zeta^{-\theta}\omega(\zeta)$ или $\chi(\zeta)=(\zeta-T)^{1-\theta}\zeta^{-1+\theta}\omega(\zeta)$, индекс $\varkappa$ равен 0, где $\omega(\zeta)=(\zeta-T)^{-\theta_1 i}\zeta^{\theta_1 i}$.

Согласно общей теории [9, 10]

$$\Psi(\zeta)=\frac{\chi(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_0^T\frac{Q(\tau)}{\tau^{\frac12}(1+r\sin\varphi-ir\cos\varphi)\chi^+(\tau)(\tau-\zeta)}\,d\tau.$$

Тогда

$$\tilde\beta^{(l)}(t)=t^{1/2}(\Psi^+(t)-\Psi^-(t))$$

$$\frac{Q(t)}{1+z^2}+\frac{z}{\pi(1+z^2)}(T-t)^{\theta}t^{\frac12-\theta}\omega(t)\int\limits_0^T\frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{\theta}\tau^{\frac12-\theta}\omega(\tau)(\tau-t)}\,d\tau \qquad (28)$$

или

$$\tilde\beta^{(l)}(t)=\frac{Q(t)}{1+z^2}+\frac{z}{\pi(1+z^2)}(T-t)^{1-\theta}t^{-\frac12+\theta}\omega(t)$$

$$\times\int\limits_0^T\frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{-\frac12+\theta}\omega(\tau)(\tau-t)}\,d\tau. \qquad (29)$$

Из формулы (29) следует, что $\tilde\beta^{(l)}(0)=0$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{\frac{1}{2}+\theta}\omega(\tau)}\,d\tau=0. \tag{30}$$

При выполнении (30) формула (29) примет вид

$$\tilde\beta^{(l)}(t)=\frac{Q(t)}{1+z^2}+\frac{z}{\pi(1+z^2)}(T-t)^{1-\theta}t^{\frac{1}{2}+\theta}\omega(t) \times\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{\frac{1}{2}+\theta}\omega(\tau)(\tau-t)}\,d\tau. \tag{31}$$

Так как $Q(t)$ принадлежит пространству $H^{\gamma/2}(0,T)$, то функция $\tilde\beta^{(l)}(t)$, представленная формулами (28), (31), удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ во всех точках контура $(0,T)$, отличных от концов. Рассмотрим поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [10, с. 76] легко видеть, что $\tilde\beta^{(l)}(0)=\tilde\beta^{(l)}(T)=0$. Для дальнейшего исследования поведения на концах контура воспользуемся леммой Мусхелишвили — Терсенова [10, с. 82–86; 2, с. 14–17].

В силу этой леммы получаем, что если $\theta\geqslant\frac{1}{4}$, то в формуле (28) функция $\tilde\beta^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0<\gamma<1-2\theta$, условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2}-\theta$ при $1-2\theta<\gamma<1$ и условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2}-\theta-\varepsilon$ при $\gamma=1-2\theta$. Кроме того, заметим, что если $\theta\leqslant\frac{1}{4}$, то функция $\tilde\beta^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0<\gamma<2\theta$, условию Гёльдера с показателем θ при $2\theta<\gamma<1$ и условию Гёльдера с показателем $\theta-\varepsilon$ при $\gamma=2\theta$.

В формуле (31) в силу леммы Мусхелишвили — Терсенова и неравенства $\frac{\gamma}{2}<\min\{1-\theta,\frac{1}{2}+\theta\}$ при $0<\gamma<1$ функция $\tilde\beta^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$.

Таким образом, при выполнении условий (12), (15), (17), (20), (22), (24), имеющих вид

$$
\begin{cases}
z\int\limits_0^T \frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}}\,d\tau=\Phi_1(0),\\
\frac{z}{2}\int\limits_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau)-\Phi_0^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}}\,d\tau\\
\qquad\qquad =2\frac{z}{\sqrt{T}}\Phi_0^{(s)}(0)+\Phi_1^{(s)}(0),\quad s=1,\dots,l-1,\\
\beta^{(k)}(T)=0,\quad k=0,1,\dots,l-1,
\end{cases}
\tag{32}
$$

мы получаем функцию $\beta(t)$ из искомого пространства $H^{p/2}(0,T)$, удовлетворяющую условиям

$$
\beta^{(s)}(0)=\Phi_0^{(s)}(0),\quad s=0,1,\dots,l-1,\quad \beta^{(l)}(T)=0.
$$

Значения $\beta^{(s)}(t)$ определяются по формуле Тейлора

$$
\beta^{(s)}(t)=\sum_{k=s}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!}t^{k-s}+\frac{1}{(l-1-s)!}\int\limits_0^t(t-\tau)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\tau)\,d\tau,
$$
$$
s=0,1,\dots,l-1.
$$

Тогда для выполнения условий $\beta^{(k)}(T)=0$ при $k=0,1,\dots,l-1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$
0=\sum_{k=s}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!}T^{k-s}+\frac{1}{(l-1-s)!}\int\limits_0^T(T-\tau)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\tau)\,d\tau,
\tag{33}
$$
$$
s=0,1,\dots,l-1.
$$

Подставив найденные значения функций $\beta^{(s)}(t)$ в первые l условий (32), получим

$$
\begin{cases}
\frac{z}{2(l-1-s)!}\int\limits_0^T \tau^{l-s-3/2}\,d\tau\int\limits_0^1(1-\sigma)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\sigma\tau)\,d\sigma\\
=-\frac{z}{2}\sum\limits_{k=s+1}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)T^{k-s-1/2}}{(k-s)!(k-s-1/2)}+\frac{z}{\sqrt{T}}\Phi_0^{(s)}(0)+\Phi_1^{(s)}(0),\\
s=0,\dots,l-1.
\end{cases}
\tag{34}
$$

Отметим, что функция $\beta^{(l)}(t)$ дана формулой (28).

Во втором случае при выполнении условий, аналогичных (12), (15), (17), (20), (22), (24) и (30), получим функцию $\beta(t)$ по формуле (31) из искомого пространства $H^{p/2}(0,T)$, удовлетворяющую условиям

$$\beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0),\ s = 0,1,\dots,l-1, \quad \beta^{(l)}(T) = 0.$$

Таким образом, доказаны

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1,\varphi_2 \in H^p$, $p = 2l+\gamma$, *и* $|r\sin\varphi| \leqslant 1$ *при* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $|r\sin\varphi| > 1$ *при* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Тогда при выполнении $2l$ *условий* (33), (34) *существует хотя бы одно решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3) *из пространства:*

1) $H_{x\ t}^{p,p/2}$, *если* $0 < \gamma < \min\{2\theta, 1-2\theta\}$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/2}$, $q = 2l + \min\{2\theta, 1-2\theta\}$, *если* $\min\{2\theta,1-2\theta\} < \gamma < 1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/2}$, *если* $\gamma = \min\{2\theta, 1-2\theta\}$, *где* ε *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_1,\varphi_2 \in H^p$, $p = 2l+\gamma$, *и пусть* $\varphi \in \left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ *при* $|r\sin\varphi| \leqslant 1$, $\varphi \in \left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ *при* $|r\sin\varphi| > 1$. *Тогда при выполнении* $2l+1$ *условий вида* (33), (34) *и* (30) *существует хотя бы одно решение уравнения* (1) *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/2}$, *удовлетворяющее условиям* (2), (3).

Замечание. Случаи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ были рассмотрены в работах [3,4]. При $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ имеем $G = \frac{1\mp r}{1\pm r}$, следовательно,

$$\chi(z) = (z-T)^{1-\theta_1 i} z^{-1+\theta_1 i}, \quad \theta_1 = \frac{\ln|G|}{2\pi},$$

при $0 < r < 1$ или $\chi(z) = (z-T)^{\frac{1}{2}-\theta_1 i} z^{-\frac{1}{2}+\theta_1 i}$ при $r > 1$. При этом, очевидно, мы находимся в условиях теоремы, аналогичной теореме 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов В. Н., Попов С. В.* Контактные задачи математической физики // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2000. Вып. 115. С. 62–72.

2. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

3. *Попов С. В.* О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1991. Вып. 102. С. 100–113.

4. *Пинигина Н. Р., Попов С. В.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, № 1. С. 71–82.

5. *Пинигина Н. Р., Попов С. В.* Гладкость решений параболических уравнений с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими производные первого и второго порядков // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, № 1. С. 86–97.

6. *Пинигина Н. Р., Попов С. В.* О параболических уравнениях с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими производные второго порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 1. С. 72–83.

7. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.

8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

10. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

г. Якутск *21 января 2005 г.*

УДК 512.6:519.61

О РЕШЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ф. М. Федоров, Т. Л. Осипова

Неоднородной бесконечной системой линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) с бесконечным множеством неизвестных называется система уравнений:

$$\begin{aligned} &b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_2 + \ldots = f_1, \\ &b_{2,1}x_1 + b_{2,2}x_2 + \ldots = f_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{i,k}$ — известные коэффициенты, f_i — свободные члены, не все равные нулю, и x_k — неизвестные. Система численных значений величин $x_1,\ x_2, \ldots$ называется *решением системы* (1), если после подстановки этих значений в левую часть равенств (1) мы получим сходящиеся ряды и все эти равенства будут удовлетворены.

В работе авторов [1] рассмотрена однородная БСЛАУ, т. е. когда $f_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots$, и в ней же дан самый краткий обзор работ по теории БСЛАУ. В настоящей статье идеи работы [1] обобщаются на случай неоднородных БСЛАУ, причем f_i имеют определенный вид.

Так же, как и в [1], методом Гаусса, используя математическую индукцию, систему (1) можно свести к ступенчатому виду:

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_{ji}x_i = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Далее предполагаем, что $a_{j,j} \neq 0$, т. е. определитель усеченной системы (2) любого порядка n не равен нулю. Рассмотрим усеченную систему вида (2), при этом число уравнений равно $n-1$, а число неизвестных — n, т. е. систему с одним свободным неизвестным.

Теорема 1 [2]. *Пусть задана следующая* СЛАУ*:*

$$\sum_{i=j}^{n} a_{ji}x_i = b_j, \quad a_{jj} \neq 0, \; j = \overline{1, n-1}. \tag{3}$$

Тогда неизвестные x_i выражаются через x_n следующим образом:

$$x_i = B_{n-i} + (-1)^{n-i} x_n \prod_{p=1}^{n-i} S_p, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{4}$$

где

$$B_j = \frac{b_{n-j}}{a_{n-j,n-j}} - \sum_{p=1}^{j-1} \frac{a_{n-j,n-p}}{a_{n-j,n-j}} B_p, \quad B_1 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}, \; j = \overline{2, n-1}, \tag{5}$$

и

$$\begin{gathered} S_j = \frac{a_{n-j,n-j+1}}{a_{n-j,n-j}} + \sum_{p=2}^{j} \frac{(-1)^{p+1} a_{n-j,n-j+p}}{a_{n-j,n-j} \prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{j-k}}, \\ S_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{2, n-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. Подставляя (4) в левую часть (3), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^{n} a_{ji}x_i = \sum_{i=j}^{n-1} a_{ji}B_{n-i} + (-1)^{n+j} a_{jj} x_n \prod_{k=1}^{n-j-1} S_k \\ \times \left[S_{n-j} - \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^p a_{j,j+p} \prod\limits_{k=1}^{n-j-p} S_k}{a_{j,j} \prod\limits_{k=1}^{n-j-1} S_k} \right]. \end{aligned}$$

Из формулы (6) легко видеть, что второе слагаемое в правой части последнего выражения равно нулю. Таким образом,

$$\sum_{i=j}^{n} a_{ji}x_i = \sum_{i=j}^{n-1} a_{ji}B_{n-i}.$$

Используя выражение (5), распишем сумму:

$$\sum_{i=j}^{n-1} a_{ji}B_{n-i} = a_{jj}\left(\frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=1}^{j-1}\frac{a_{j,n-p}}{a_{j,j}}B_p\right) + \sum_{i=j+1}^{n-1} a_{ji}B_{n-i}$$

$$= b_j - \sum_{p=1}^{n-j-1} a_{j,n-p}B_p + \sum_{i=j+1}^{n-1} a_{ji}B_{n-i} = b_j,$$

так как

$$\sum_{i=j+1}^{n-1} a_{ji}B_{n-i} = \sum_{p=1}^{n-j-1} a_{j,n-p}B_p,$$

т. е. убедились в справедливости (4).

Следствие 1. *В системе* (3) *соседние неизвестные связаны друг с другом следующим образом*:

$$x_i = B_{n-i} + S_{n-i}B_{n-i-1} - S_{n-i}x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{7}$$

Действительно,

$$x_i = B_{n-i} - S_{n-i}(-1)^{n-i-1}x_n \prod_{p=1}^{n-i-1} S_p = B_{n-i} + S_{n-i}(B_{n-i-1} - x_{i+1}).$$

Замечание 1. Очевидно, если $b_j = 0$, то и $B_j = 0$, следовательно, получаем соответствующую теорему для однородной СЛАУ, которая приведена в работах [1, 2]. Таким образом, формула (6) соответствует однородной системе, ассоциированной с неоднородной системой (3).

Замечание 2. Систему (3) можно рассмотреть двояко: во-первых, как самостоятельную конечную систему, во-вторых, как урезанную от бесконечной системы (2). В последнем случае, естественно, вместо x_i подразумеваем их приближенные значения $\overset{n}{x}_i$ и для простоты, предполагая, что $x_i = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{n}{x}_i$, опускаем верхний знак. Разумеется, такие системы существуют, например регулярные системы, для которых получена соответствующая теорема [3]. В этих терминах выражение (7) примет вид

$$x_i = \lim_{n\to\infty} B_{n-i} + \lim_{n\to\infty}(S_{n-i}B_{n-i-1}) - (\lim_{n\to\infty} S_{n-i})x_{i+1}, \quad i = \overline{1, \infty}. \tag{8}$$

Таким образом, исследование разрешимости бесконечной системы (2) сводится к изучению сходимости соответственно последовательностей (5) и (6), которые можно переписать в виде

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=1}^{n-j-1} \frac{a_{j,n-p}}{a_{j,j}} B_p, \quad B_1 = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}, \tag{9}$$

$$S_{n-j} = \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k}}, \quad S_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}},\ j = \overline{1, n-2}. \tag{10}$$

Систему (3) можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad j = \overline{1, n-1},\ a_{jj} \neq 0. \tag{11}$$

Предположим теперь , что коэффициенты $a_{j,j+p}$ и b_j в системе (11) соответственно имеют вид

$$a_{j,j+p} = a_p a_{jj} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k}, \quad \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} = \frac{a_{j+p,j+p}}{a_{j,j}},\ p \geqslant 1, \tag{12}$$

$$b_j = c\bar{b}_j, \quad b_{j+p} = c\bar{b}_j \bar{b}_p. \tag{13}$$

Для унификации обозначений будем считать, что $a_0 = 1$, $\prod\limits_{k=0}^{-1} \bar{a}_{j+k} = 1$ и $\bar{b}_0 = 1$; тогда можно принять $p \geqslant 0$.

Теорема 2. *Если коэффициенты системы* (11) *представимы в виде* (12), (13), *то решение системы* (11) *имеет вид*

$$x_i = \frac{c}{a_{i,i}} \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^{j+1} \bar{b}_{i-j}}{\prod\limits_{k=1}^{j-1} \overline{S}_{n-i+k}} \left(\frac{\overline{B}_{n-i+j}}{\overline{S}_{n-i+j}} + \bar{b}_1 \overline{B}_{n-i+j-1} \right) + \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=1}^{i} \bar{a}_{i-k} \overline{S}_{n-i+k}}, \tag{14}$$

где

$$\overline{B}_{n-j} = 1 - \sum_{p=1}^{n-j-1} a_p \bar{b}_p \overline{B}_{n-j-p}, \quad \overline{B}_1 = 1, \tag{15}$$

$$\overline{S}_{n-j} = a_1 + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} \overline{S}_{n-j-k}}, \quad \overline{S}_1 = a_1, \; j = \overline{1, n-2}. \tag{16}$$

Доказательство. Сначала получим соотношения (15) и (16). Выражение (9) можно преобразовать следующим образом:

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{a_{j,j}} \left[1 - \sum_{p=1}^{n-j-1} \frac{a_{j,n-p}}{b_j} B_p \right] = \frac{b_j}{a_{j,j}} \overline{B}_{n-j}. \tag{17}$$

Далее,

$$\overline{B}_{n-j} = 1 - \sum_{p=1}^{n-j-1} \frac{a_{j,n-p}}{b_j} B_p = 1 - \sum_{p=j+1}^{n-1} \frac{a_{j,p}}{b_j} B_{n-p}$$
$$= 1 - \sum_{p=j+1}^{n-1} \frac{a_{j,p} b_p}{b_j a_{p,p}} \overline{B}_{n-p} = 1 - \sum_{p=1}^{n-j-1} \frac{a_{j,j+p} b_{j+p}}{b_j a_{j+p,j+p}} \overline{B}_{n-j-p}.$$

Заметим, что при выполнении второго условия в (12) имеет место равенство $a_{j,j+p} = a_p a_{j+p,j+p}$. С учетом последнего и (13) получим выражение (14). Справедливость формулы (16) показана в работе [1]. Здесь отметим только, что выполнение второго условия в (12) необязательно. Кроме того,

$$S_{n-j} = \bar{a}_j \overline{S}_{n-j}. \tag{18}$$

Докажем справедливость представления (14). Учитывая соотношения (17) и (18), из (7) получим

$$x_i = \frac{b_{i-1}}{a_{i-1,i-1} \bar{a}_{i-1} \overline{S}_{n-i+1}} \overline{B}_{n-i+1} + \frac{b_i}{a_{i,i}} \overline{B}_{n-i} - \frac{1}{\bar{a}_{i-1} \overline{S}_{n-i+1}} x_{i-1}.$$

Отсюда, постепенно понижая индекс при x, с учетом соотношения

$$\frac{a_{j,j} \bar{a}_j}{a_{j+1,j+1}} = 1 \tag{19}$$

приходим к (14). Заметим, что, в необходимых случаях меняя индексы суммирования, выражение (14) можно переписать в виде

$$x_i = \frac{c}{a_{i,i}} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-1)^{i-k+1} \bar{b}_k}{\prod\limits_{l=1}^{i-k-1} \overline{S}_{n-i+l}} \left(\frac{\overline{B}_{n-k}}{\overline{S}_{n-k}} + \bar{b}_1 \overline{B}_{n-k-1} \right) + \frac{(-1)^i x_0}{\prod\limits_{k=0}^{i-1} \bar{a}_k \overline{S}_{n-k}}, \tag{20}$$

что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к беконечным системам. Полагая, что пределы последовательностей (15) и (16), не зависящие от индекса j, существуют при $n \to \infty$, введем для них обозначения $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{B}_{n-j} = B^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_{n-j} = S^*$. Тогда соответственно из соотношений (15) и (16) получим

$$a) \quad B^* = \frac{1}{\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p \bar{b}_p}, \quad b) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} a_p}{{S^*}^{p-1}} = 0. \tag{21}$$

Следовательно, переходя к пределу в выражении (20), имеем

$$x_i = (-1)^{i+1} \frac{c}{a_{i,i}} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \left(\frac{\bar{b}_k B^*}{{S^*}^{i-k}} + \frac{\bar{b}_1 \bar{b}_k B^*}{{S^*}^{i-k-1}} \right) + \frac{(-1)^i x_0}{{S^*}^{i-1} \prod\limits_{k=0}^{i-1} \bar{a}_k}. \tag{22}$$

Учитывая соотношение $\bar{b}_1 \bar{b}_k = \bar{b}_{k+1}$, выражение (22) можно упростить дальше, поскольку сумма в (22) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \left(\frac{\bar{b}_k B^*}{{S^*}^{i-k}} + \frac{\bar{b}_1 \bar{b}_k B^*}{{S^*}^{i-k-1}} \right) = \frac{\bar{b}_0 B^*}{{S^*}^{i}} + \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k \frac{\bar{b}_k B^*}{{S^*}^{i-k}}$$
$$- \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^k \frac{\bar{b}_k B^*}{{S^*}^{i-k}} - (-1)^{i-1} \frac{\bar{b}_i B^*}{{S^*}^{0}} = \frac{B^*}{{S^*}^{i}} + (-1)^i \bar{b}_i B^*.$$

Окончательно получим

$$x_i = \frac{(-1)^{i+1} c B^*}{a_{i,i}} \left(\frac{1}{{S^*}^{i}} + (-1)^{i-1} \bar{b}_i \right) + \frac{(-1)^i x_0}{{S^*}^{i-1} \prod\limits_{k=0}^{i-1} \bar{a}_k}. \tag{23}$$

Для проверки правомерности выражения (23) подставляем его в систему (2). При этом ряд K, содержащий x_0, примет следующий вид:

$$K=\sum_{i=j}^{\infty}a_{j,i}\frac{(-1)^i x_0}{{S^*}^{i-1}\prod\limits_{k=0}^{i-1}\bar a_k}=x_0\sum_{i=j}^{\infty}\frac{(-1)^i a_{i-j}a_{j,j}\prod\limits_{k=j}^{i-1}\bar a_k}{{S^*}^{i-1}\prod\limits_{k=0}^{i-1}\bar a_k}$$
$$=\frac{a_{j,j}x_0}{\prod\limits_{k=0}^{j-1}\bar a_k}\sum_{i=j}^{\infty}\frac{(-1)^i a_{i-j}}{{S^*}^{i-1}}=\frac{(-1)^{j-1}a_{j,j}x_0}{{S^*}^{j}\prod\limits_{k=0}^{j-1}\bar a_k}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}a_p}{{S^*}^{p-1}}=0.$$

Обозначим первый ряд через I, второй ряд — через J. Тогда получим

$$I=\sum_{i=j}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}a_{i-j}a_{j,j}\prod\limits_{k=j}^{i-1}\bar a_k cB^*}{a_{i,i}{S^*}^{i}}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+p+1}a_p a_{j,j}\prod\limits_{k=j}^{j+p-1}\bar a_k cB^*}{a_{j+p,j+p}{S^*}^{j+p}}.$$

Но с учетом второго соотношения в выражении (12) имеет место равенство

$$\frac{a_{j,j}\prod\limits_{k=j}^{j+p-1}\bar a_k}{a_{j+p,j+p}}=1. \tag{24}$$

Тогда

$$I=\frac{(-1)^j cB^*}{{S^*}^{j+1}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}a_p}{{S^*}^{p-1}}=0.$$

Вычислив второй ряд, согласно (24) получим

$$J=cB^*\sum_{p=0}^{\infty}a_p\bar b_{j+p}=cB^*\bar b_j\sum_{p=0}^{\infty}a_p\bar b_p=c\bar b_j=b_j,$$

т. е.

$$\sum_{i=j}^{\infty}a_{ij}x_i=I+J+K=b_j,\quad j=1,2,\ldots,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, эти рассуждения показывают, что исследование сходимости последовательности (15) не обязательно, лишь бы сходился ряд $\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_p\bar{b}_p$ и сумма его не была бы равна нулю. Тогда при выполнении соотношений (21) выражение (23) является решением системы (2).

Замечание 3. Условия сходимости последовательности (16), т. е. условия разрешимости уравнения b) в выражении (21), изучена в работе [4].

Перейдем к рассмотрению конкретного примера. Пусть задана следующая бесконечная неоднородная СЛАУ:

$$\begin{gathered}
x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = e^{\nu t},\\
1\cdot 2x_1 + 3\cdot 4x_2 + \dots + (2n-1)2nx_n + \dots = \frac{\nu}{\alpha}e^{\nu t},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(2n-2)!x_{n-1} + 3\cdot 4\cdot 5\dots 2nx_n + \dots = \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{n-1} e^{\nu t},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered} \tag{25}$$

Очевидно, система (25) уже имеет ступенчатый вид. Для того чтобы применить теорему 1 или 2, необходимо урезать бесконечную систему до конечной системы.

Результат урезания системы (25) можно записать в виде

$$\sum_{i=j}^{n} \frac{(2i)!}{(2i-2j)!} x_i = \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^j e^{\nu t} = b_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{26}$$

при этом необходимо помнить, что под x_i подразумевается $\overset{n}{x}_i$. Очевидно, система (26) имеет вид системы (3), и, следовательно, справедливы утверждения теоремы 1 и ее следствия.

Заметим, что систему (26) можно преобразовать к виду (11), при этом коэффициенты системы принимают вид соответственно (12) и (13):

$$a_{j,j+p} = \frac{1}{(2p)!}(2j)!\prod_{k=0}^{p-1}(2j+2k+1)(2j+2k+2),$$

т. е.

$$a_p = \frac{1}{(2p)!}; \quad a_{jj} = (2j)!; \quad \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} = \frac{(2j+2p)!}{(2j)!} \tag{27}$$

и
$$b_{j+p} = e^{\nu t}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^j\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^p = c\bar{b}_j\bar{b}_p. \tag{28}$$
Следовательно, для дальнейшего решения можно использовать теорему 2. Полагая, что для коэффициентов (21), (22) пределы последовательностей (15) и (16) при $n \to \infty$ существуют: $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{B}_n = B^*$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = S^*$, сначала находим эти пределы, исходя из (15) и (16). Имеем
$$1 - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}\left(\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^{2p} B^* = B^*, \quad \text{или} \quad 1 = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}\left(\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^{2p} B^*, \tag{29}$$
$$S^* = \frac{1}{2!} + \sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p)!(S^*)^{p-1}}, \quad \text{или} \quad \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!\sqrt{S^*}^{2p}} = \cos\frac{1}{\sqrt{S^*}} = 0. \tag{30}$$
Отсюда соответственно получим
$$B^* = \frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}, \quad S^* = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}, \; k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{31}$$

Как отмечено выше, исходя только из коэффициентов (27) и (28), можно составить выражения (29) и (30), если только сходятся соответствующие ряды. Тем самым приходим к формулам (31).

Заметим, что с учетом (27), (28) и (31) из выражений (17) и (18), переходя к пределу при $n \to \infty$, можно получить
$$\lim_{n\to\infty} B_{n-j} = \frac{e^{\nu t}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}(2j)!}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^j, \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-j} = \frac{4(2j+1)(2j+2)}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Решением же системы (25) согласно (23) с учетом (31) будет
$$x_i^{(k)} = \frac{(-1)^{i+1}e^{\nu t}}{(2i)!\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}\left\{\left[\frac{\pi(2k+1)}{2}\right]^{2i} - \left(-\frac{\nu}{\alpha}\right)^i\right\}$$
$$+ \frac{(-1)^i x_0}{(2i)!}\left[\frac{\pi(2k+1)}{2}\right]^{2(i-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \; i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{32}$$
где x_0 — произвольное число.

Подставляя (32) в бесконечную систему (25), убеждаемся, как и выше, что все уравнения системы удовлетворяются. Таким образом, вектор (32) является аналитическим решением системы (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М., Осипова Т. Л.* О решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 89–97.

2. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.

3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Гостехтеориздат, 1952.

4. *Федоров Ф. М., Абрамова М. Е.* О решении алгебраических уравнений бесконечной степени обобщенным методом Бернулли // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, вып. 2. С. 80–88.

г. Якутск *19 октября 2004 г.*

УДК 512.6:517.95

ГРАНИЧНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ф. М. Федоров, Т. Л. Осипова

Известно, что граничный метод сводит решение краевых задач математической физики к решению бесконечной системы алгебраических уравнений и соответствующей задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. В данной работе рассмотрим задачу, которая сводится граничным методом к решению бесконечных систем однородных и неоднородных алгебраических уравнений.

Для этого рассмотрим следующую простейшую модель тепловой задачи с переменными краевыми условиями:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1), \tag{1}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \tag{2}$$

$$T(x,t) = Ve^{\nu t} \quad \text{при } x = 1, \tag{3}$$

$$T(x,t) = 0 \quad \text{при } t = 0. \tag{4}$$

В соответствии с граничным методом [1] решение задачи (1)–(4) ищем в виде степенного ряда

$$T(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t) x^i. \tag{5}$$

Подставляя ряд (5) в исходное уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$b_i'(t) - (i+1)(i+2)\alpha b_{i+2}(t) = 0, \quad \text{где } b_i'(t) = db(t)/dt. \tag{6}$$

Далее, граничное условие (2) с учетом ряда (5) дает $b_1(t) = 0 = \mathrm{const}$, и, следовательно, из (6) получим, что все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, т. е. $b_{2i+1}(t) = 0$. Поэтому ряд (5) имеет вид

$$T(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) x^{2i}, \tag{7}$$

где неизвестные коэффициенты $a_i(t)$ находим из условий (3), (6) и из дополнительных граничных условий:

$$\left(\frac{\partial^j T(x,t)}{\partial t^j}\right)_{x=1} = V\mu^j e^{\mu t} = \left(\alpha^j \frac{\partial^{2j} T(x,t)}{\partial x^{2j}}\right)_{x=1}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

которые получены в соответствии с граничным методом [1]. При этом условия (6) примут вид

$$a_i'(t) - (2i+1)(2i+2)\alpha a_{i+1}(t) = 0, \quad \text{где } a_i'(t) = da(t)/dt. \tag{9}$$

Подставляя ряд (7) в дополнительные условия (8), получим следующую бесконечную неоднородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
a_0(t) + a_1(t) + a_2(t) + \cdots + a_n(t) + \cdots = Ve^{\nu t}, \\
1 \cdot 2a_1(t) + 3 \cdot 4a_2(t) + \cdots + (2n-1)2na_n(t) + \cdots = \frac{V\nu}{\alpha} e^{\nu t}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(2n-2)!a_{n-1}(t) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 2na_n(t) + \cdots = V\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{n-1} e^{\nu t}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{10}$$

В работе [2] приведены решения системы (10) ($V = 1$) как пример решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений в виде

$$\begin{aligned}
a_i^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{i+1} e^{\nu t}}{(2i)! \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}} \left\{ \left[\frac{\pi(2k+1)}{2}\right]^{2i} - \left(-\frac{\nu}{\alpha}\right)^i \right\} \\
+ \frac{(-1)^i a_0(t)}{(2i)!} \left[\frac{\pi(2k+1)}{2}\right]^{2(i-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \; i = 1, 2, 3, \ldots,
\end{aligned} \tag{11}$$

где $a_0(t)$ — произвольная функция.

Для определения функции $a_0(t)$ используем условие (9). Для этого, после несложных тождественных преобразований выражение (11) приведем к виду

$$a_i^{(k)}(t) = \frac{e^{\nu t}}{(2i)!\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^i + \frac{4e^{\nu t}}{\pi^2(2k+1)^2(2i)!\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{i+1} - \frac{4(2i+1)(2i+2)}{\pi^2(2k+1)^2}a_{i+1}^{(k)}(t).$$

Дифференцируя последнее соотношение по t и вычитая полученное выражение из (9), получим следующее линейное ОДУ первого порядка:

$$\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}\frac{da_i^{(k)}(t)}{dt} + \alpha a_i^{(k)}(t) - \frac{e^{\nu t}\nu^i}{(2i)!\alpha^{i-1}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}\left(1 + \frac{4\nu}{\pi^2(2k+1)^2\alpha}\right) = 0. \tag{12}$$

Очевидно, решение уравнения (12) можно искать в виде $a_i^{(k)}(t) = A_i^{(k)}e^{\nu t}$. Подставляя последнее выражение в (12), получим

$$A_i^{(k)}\alpha\left(1 + \frac{4\nu}{\pi^2(2k+1)^2\alpha}\right) = \frac{\nu^i}{(2i)!\alpha^{i-1}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}\left(1 + \frac{4\nu}{\pi^2(2k+1)^2\alpha}\right).$$

Отсюда

$$A_i^{(k)} = \frac{1}{(2i)!\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^i = A_i.$$

Следовательно,

$$a_i^{(k)}(t) = a_i(t) = \frac{e^{\nu t}}{(2i)!\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^i.$$

Таким образом, частное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), будет иметь вид

$$\widetilde{T} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{\nu t}}{(2i)!\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}}\left(\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}x\right)^{2i} = \frac{e^{\nu t}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}})}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}x. \tag{13}$$

Для удовлетворения начального условия (4) необходимо построить суперпозицию решения (13) и частных решений задачи (1), (2) при однородном граничном условии (3). Задачу также решаем граничным методом, тогда получим однородную систему, ассоциированную с системой (10), т. е. ту же систему (10), но с нулевыми правыми частями. Как показано в работе [2], при решении системы (10) решается соответствующая однородная система как вспомогательная задача. Следовательно, справедливо выражение [2]

$$a_i^{(k)}(t) = -\frac{4(2i+1)(2i+2)}{\pi^2(2k+1)^2} a_{i+1}^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{14}$$

Дифференцируя соотношение (14) по t, с учетом (9) получим ОДУ, интегрируя которое, имеем

$$a_i^{(k)}(t) = c_i^{(k)} \exp\left(\frac{-\pi^2(2k+1)^2}{4}\alpha t\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{15}$$

где $c_i^{(k)} = \mathrm{const}$.

Для определения постоянных коэффициентов $c_i^{(k)} = \mathrm{const}$ подставляем соотнощение (15) в выражение (9), тогда получим рекуррентное уравнение относительно $c_i^{(k)} = \mathrm{const}$:

$$\mathrm{c}_{i-1}^{(k)} = -\frac{4(2i-1)2i}{\pi^2(2k+1)^2} \mathrm{c}_i^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{16}$$

Решая уравнение (16) в обратном порядке, имеем

$$\mathrm{c}_i^{(k)} = -\frac{(-1)^i(\pi(2k+1))^{2i}}{4^i(2i)!} \mathrm{c}_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{17}$$

Поскольку c_0 — произвольная постоянная, имеющая свое значение для каждого значения k, то можно положить $c_0 = c_k$.

Таким образом, частное решение однородной задачи имеет вид

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_k &= c_k \exp\left(\frac{-\pi^2(2k+1)^2}{4}\alpha t\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left(\frac{\pi(2k+1)x}{2}\right)^{2i} \\ &= c_k \exp\left(\frac{-\pi^2(2k+1)^2}{4}\alpha t\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, общее решение задачи (1)–(4) примет вид

$$T = \frac{e^{\nu t}\,\mathrm{ch}(\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}x)}{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{-\pi^2(2k+1)^2}{4}\alpha t\right)\cos\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2}\right). \quad (18)$$

Постоянные c_k находим традиционным способом, т. е. разложением в ряд Фурье функции (18) и начальной функции (4), в результате получим известное точное решение задачи (1)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
2. *Федоров Ф. М., Осипова Т. Л.* О решении бесконечных систем неоднородных линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, вып. 1. С. ????????? ?Дать ссылку на предыдущую статью!! **?!**

г. Якутск *2 декабря 2004 г.*

УДК 514.752.437

МИНИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ В $\mathbb{R}^3$ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПЛОСКИХ КОНЦОВ*)

Э. И. Шамаев

В данной статье доказано

Предложение 1. *Пусть* ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\zeta(u)$ — ζ-*функция Вейерштрасса на торе* $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$, $\sum'$ — *суммирование по множеству* $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *и*

$$a = \frac{2i}{\pi}(\overline{\zeta(\omega_2)}\omega_1 - \overline{\zeta(\omega_1)}\omega_2). \tag{1}$$

Тогда для любого тора $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$ *условие*

$$\begin{cases} |a|^2 - |a|^4 = 20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2 \sum\limits_{m,n}{}'(m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}; \\ |a| > 1, \end{cases}$$

не выполнено.

Казнер и Шмитт в [1] доказали, что не существует полных минимальных торов в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с тремя плоскими концами. Условие (2) является ключевым в доказательстве Казнера и Шмитта — это необходимое условие существования таких торов. Доказательство предложения 1 носит технический характер, поэтому было опущено в [1].

Имеет место

Лемма 1. *Справедливость условия* (2) *зависит только от конформного класса тора.*

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00403).

Для краткости мы доказываем лемму 1 иначе, чем в [2].

Поскольку каждый тор конформно эквивалентен [2] тору с полупериодами $\omega_1 = 1$ и

$$\omega_2 \in \Omega = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| \geqslant 1,\ 1/2 > \operatorname{Re}\tau \geqslant -1/2,\ \operatorname{Im}\tau > 0\},$$

то достаточно доказать утверждение 1 для торов с $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 \in \Omega$.

Пусть $\sigma_1(n)$ и $\sigma_3(n)$ обозначают суммы всех натуральных делителей n в первой и третьей степени соответственно. Для $q = e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$ имеют место следующие равенства [2]:

$$60\sum_{m,n}{}'(m\omega_1 + n\omega_2)^{-4} = g_2 = \frac{\pi^4}{12}\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right),$$

$$\zeta(\omega_1) = \eta_1 = \frac{\pi^2}{12}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right).$$

Теперь мы представим оба выражения (2) в виде степенных рядов. Константу $\zeta(\omega_2)$ выразим через $\zeta(\omega_1)$ с помощью уравнения Лежандра [2]:

$$\zeta(\omega_2)\omega_1 - \zeta(\omega_1)\omega_2 = \frac{\pi i}{2}.$$

Область Ω рассматриваем как объединение двух областей:

$$\Omega_1 = \left\{\tau \in \Omega : \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \operatorname{Im}\tau < \frac{6}{\pi}(1 - 10^{-3})\right\};$$

$$\Omega_2 = \left\{\tau \in \Omega : \frac{6}{\pi}(1 - 10^{-3}) \leqslant \operatorname{Im}\tau\right\};$$

Справедлива

Лемма 2. *Пусть $\omega_1 = 1$. Тогда выполнены неравенства*

$$\begin{gathered} |a| - 1 < 0, \quad \omega_2 \in \Omega_1; \\ ||a|^2 - 1| < 10^{-2}, \quad \operatorname{Im}\omega_2 \in \left[\frac{6}{\pi}(1 - 10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1 + 10^{-3})\right]; \\ |a| - 1 > 0, \quad \operatorname{Im}\omega_2 \in \left(\frac{6}{\pi}(1 + 10^{-3}), \infty\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Также имеет место

Лемма 3. *При* $\omega_1 = 1$ *для всех* $\omega_2 \in \Omega_2$ *справедливо*

$$|a|^2 - |a|^4 \neq 20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2 {\sum_{m,n}}' (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}.$$

Из лемм 2 и 3 следует, что предложение 1 справедливо для $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 \in \Omega$. Поэтому из леммы 1 следует предложение 1 для множества всех торов.

Доказательство леммы 1. Для $\lambda \in \mathbb{C}^*$ справедливо соотношение [2]:

$$\zeta(\lambda\omega_1; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda}\zeta(\omega_1; \omega_1, \omega_2), \tag{5}$$

где $\zeta(u; \omega_1, \omega_2)$ — ζ-функция Вейерштрасса на $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$.

Из (1) и (5) следует, что

$$a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{\lambda}{\overline{\lambda}} a(\omega_1, \omega_2),$$

где $a(\omega_1, \omega_2)$ — постоянная (1) на $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$. Следовательно,

$$|a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)| = |a(\omega_1, \omega_2)|.$$

Рассмотрим правую часть (2). Простые выкладки показывают, что

$$a^2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)(\overline{\lambda\omega}_1\lambda\omega_2 - \overline{\lambda\omega}_2\lambda\omega_1)^2 {\sum_{m,n}}' (m\lambda\omega_1 + n\lambda\omega_2)^{-4}$$
$$= a^2(\omega_1, \omega_2)(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2 {\sum_{m,n}}' (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}.$$

Из (6) и $|a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)| = |a(\omega_1, \omega_2)|$ следует, что на торе $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$ условие (2) верно если и только если (2) верно на торе $\mathbb{C}/\{2\mathbb{Z} + 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\mathbb{Z}\}$. Поэтому далее считаем $\omega_1 = 1$, а ω_2/ω_1 обозначим через τ.

Таким образом, мы установили, что (2) не зависит от преобразования тора $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\} \mapsto \mathbb{C}/\big\{2\mathbb{Z} + 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\mathbb{Z}\big\}$, а зависит только от так называемого конформного параметра тора $\tau = \omega_2/\omega_1$.

Рассмотрим группу преобразований тора

$$\tau \mapsto \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}), \tag{7}$$

порожденную двумя своими элементами

$$T_1 : \tau \mapsto \tau + 1, \quad T_2 : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}.$$

Покажем, что уравнение (2) не зависит от преобразований вида (7). Для этого достаточно доказать инвариантность (2) относительно T_1 и T_2.

Функции η_1 и g_2 инвариантны относительно $\tau \mapsto T_1\tau$ согласно [2]. Очевидно, выражения

$$\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1 = i2\operatorname{Im}\tau \tag{8}$$

и

$$a = \frac{2i}{\pi}(\overline{\zeta(\omega_2)}\omega_1 - \overline{\zeta(\omega_1)}\omega_2) = \frac{4\operatorname{Im}\tau}{\pi}\bar{\eta}_1 - 1 \tag{9}$$

также инвариантны относительно T_1. Здесь мы воспользовались соотношением Лежандра $\zeta(\omega_2) = \eta_1\tau + \frac{\pi i}{2}$.

Согласно [3] для любого $\operatorname{Im}\tau > 0$ справедливы отношения

$$g_2(\tau) = \frac{1}{\tau^4} g_2\left(-\frac{1}{\tau}\right); \tag{10}$$

$$\eta_1(\tau) = \frac{1}{\tau^2}\eta_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \frac{\pi}{2i}\frac{1}{\tau}, \tag{11}$$

где $g_2(\tau)$ и $\eta_1(\tau)$ — постоянные Вейерштрасса (3) на $\mathbb{C}/\{2\mathbb{Z} + 2\tau\mathbb{Z}\}$.

Кроме этого, прямыми выкладками получаем равенства

$$\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1 = 2i\operatorname{Im}\tau = 2i\tau\bar{\tau}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right) = 2i\tau\bar{\tau}\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{\tau}\right);$$

и

$$a(\tau) = 2\tau\bar{\tau}\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(\frac{1}{\bar{\tau}^2}\overline{\eta_1(-1/\tau)} + \frac{\pi}{2i}\frac{1}{\bar{\tau}}\right) - 1$$
$$= 2\frac{\tau}{\bar{\tau}}\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(\bar{\eta}_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) - 1\right) = \frac{\tau}{\bar{\tau}}a\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

Подставив полученные выражения для a и g_2 в уравнение (2), убеждаемся в том, что (2) инвариантно относительно T_2.

Таким образом, (2) инвариантно относительно $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Теперь лемма следует из хорошо известного факта: для любой пары конформно эквивалентных торов с конформными параметрами τ и τ' существует преобразование
$$\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{Z}).$$
Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Из (9) следует, что
$$|a|^2 = \frac{16(\operatorname{Im}\tau)^2}{\pi^2}|\eta_1|^2 - \frac{8\operatorname{Im}\tau}{\pi}\operatorname{Re}\eta_1 + 1.$$
Подставим (3) в полученное выражение. Получим, что
$$|a|^2 - 1 = \frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2\left|1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right|^2 - \frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im}\tau)\left(1 - 24\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right). \quad (12)$$
Докажем вспомогательные леммы

Лемма 4. *Для $q \in [0,\varepsilon)$, где $\varepsilon < 1$, справедливы равенства*
$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \quad (13)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}, \quad (14)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 q^n = \frac{q+4q^2+q^3}{(1-q)^4}, \quad (15)$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n^5 q^n = \frac{32q^2+51q^3+46q^4-14q^5+6q^6-q^7}{(1-q)^6}. \quad (16)$$
Доказательство. Ряд (13) — это геометрическая прогрессия. Каждый ряд (13)–(16) является степенным с радиусом сходимости 1. Значит, справедливы следующие рекуррентные равенства для $q \in [0,\varepsilon)$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n = q\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n\right)', \quad k = 1,\ldots,5.$$
Откуда при помощи простых выкладок получаются формулы (13)–(16).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right| < \frac{13}{12}|q|, \quad \tau\in\Omega_1\cup\Omega_2. \tag{17}$$

Доказательство. Для каждого натурального n справедливо неравенство

$$\sigma_1(n)=\sum_{d|n}d\leqslant\sum_{1\leqslant d\leqslant n}d=\frac{n(n+1)}{2}\leqslant n^2. \tag{18}$$

Отсюда вытекает следующее неравенство:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^2|q|^n.$$

По лемме 4 мажорирующий ряд равен $\frac{1+|q|}{(1-|q|)^3}|q|$.

При $\operatorname{Im}\tau\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ производная функции

$$\frac{1+|q|}{(1-|q|)^3} \tag{19}$$

по переменной $\operatorname{Im}\tau$ отрицательна, и значение (19) меньше $13/12$ при $\operatorname{Im}\tau=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right|\leqslant\frac{1+|q|}{(1-|q|)^3}|q|<\frac{13}{12}|q|. \tag{20}$$

Лемма 5 доказана.

Имеет место неравенство

$$|q|<10^{-5}, \quad \tau\in\Omega_2. \tag{21}$$

Теперь докажем лемму 2.

Доказательство леммы 2. 1. Исследуем знак $|a|^2-1$. Пусть

$$\delta=24\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right|.$$

Из леммы 5 и (21) следует, что

$$\delta<26\cdot10^{-5}, \quad \tau\in\Omega_2.$$

Из (12) получим неравенство

$$|a|^2-1\leqslant\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2(1+\delta)^2+2\frac{\pi}{3}(\operatorname{Im}\tau)(-1+\delta). \tag{22}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|a|^2-1\leqslant\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)(1+\delta^2)\left(\operatorname{Im}\tau+\frac{6}{\pi}\left(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\right)\right). \tag{23}$$

Поскольку производная функции

$$\operatorname{Im}\tau+\frac{6}{\pi}\left(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\right)$$

по $\operatorname{Im}\tau$ положительна на Ω_1 и

$$\frac{6}{\pi}(1-10^{-3})+\frac{6}{\pi}\left(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\right)<0,$$

то правая часть (23) отрицательна на Ω_1.

Следовательно, справедливо неравенство $|a|^2-1<0$.

2. Из (12) следует неравенство

$$||a|^2-1|\leqslant\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)(1+\delta^2)\left|\operatorname{Im}\tau-\frac{6}{\pi}\left(\frac{1-\delta}{(1+\delta)^2}\right)\right|. \tag{24}$$

Для $\operatorname{Im}\tau\in\left[\frac{6}{\pi}(1-10^3),\frac{6}{\pi}(1+10^3)\right]$ выражение (24) меньше чем следующее:

$$\frac{\pi^2}{9}\frac{6}{\pi}(1+10^{-3})(1+\delta^2)\frac{6}{\pi}\left|1+10^{-3}-\frac{1-\delta}{(1+\delta)^2}\right|. \tag{25}$$

Поскольку $\delta<26\cdot 10^{-5}$, то (25) оценивается числом

$$8\cdot(10^{-3}+3\cdot10^{-5})<0,9\cdot10^{-2}.$$

Таким образом, справедливо неравенство $||a|-1|<10^{-2}$.

3. Из (12) получим неравенство

$$|a|^2-1\geqslant\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2(1-\delta)^2-2\frac{\pi}{3}(\operatorname{Im}\tau)(1+\delta). \tag{26}$$

Знак $|a|^2-1$ положителен для τ таких, что $\operatorname{Im}\tau-\frac{6}{\pi}\frac{(1+\delta)}{(1-\delta)^2}>0$.

Производная функции

$$\operatorname{Im}\tau - \frac{6}{\pi}\left(\frac{1+\delta}{(1-\delta)^2}\right)$$

по $\operatorname{Im}\tau$ положительна на Ω_2 и

$$\frac{6}{\pi}(1+10^{-3}) + \frac{6}{\pi}\left(\frac{1+\delta}{(1-\delta)^2}\right) > 0,$$

значит, правая часть (26) положительна на Ω_2.

Следовательно, справедливо неравенство $|a|^2 - 1 > 0$, $\tau \in \Omega_2$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Из (3) и (6) выводим, что

$$\bar{a}^2 = \frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right)^2 - \frac{2\pi}{3}\operatorname{Im}(\tau)\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right)+1. \tag{27}$$

Имеет место

Лемма 6. *Если $a \neq 0$, то следующие три условия равносильны:*

$$20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2\sum_{m,n}{}'(m\omega_1+n\omega_2)^{-4} = |a|^2 - |a|^4, \tag{28}$$

$$20|a|^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2\sum_{m,n}{}'(m\omega_1+n\omega_2)^{-4} = \bar{a}^2(1-|a|^2), \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2 &+ (|a|^2-1)\left(\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im}\tau)-1\right)\\ &= (|a|^2-1)\Bigg(64\pi^2(\operatorname{Im}\tau)^2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(k)\sigma_1(n-k)\right)q^n\\ &\quad - 16\pi\left(\frac{\pi}{3}(\operatorname{Im}\tau)-1\right)(\operatorname{Im}\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Bigg)\\ &\quad - \frac{\pi^2}{9}|a|^2(\operatorname{Im}\tau)^2\left(240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right).\end{aligned} \tag{30}$$

Доказательство. Умножив (28) на $\bar{a}/a$, получим (29). Следовательно, для $a \neq 0$ условия (28) и (29) эквивалентны.

Подставим выражения (12) и (27) в (29). Получим равенство

$$|a|^2 \frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2\left(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right) = \frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2(|a|^2-1)$$
$$+ \frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2\left(-48\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n + 24^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right)^2\right)(|a|^2-1)$$
$$+ \left(1 - \frac{2\pi}{3}\operatorname{Im}\tau\right)(|a|^2-1) + \frac{2\pi}{3}24(\operatorname{Im}\tau)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right)(|a|^2-1). \quad (31)$$

Перегруппировав слагаемые в (31), получим

$$\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2\left(1 + |a|^2 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right) + \left(\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im}\tau) - 1\right)(|a|^2-1)$$
$$= (|a|^2-1)\left(\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2 24^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right)^2\right.$$
$$\left.\times\left(-48\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2 + \frac{2\pi}{3}24(\operatorname{Im}\tau)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right).$$

Лемма 6 доказана.

Производная функции $|q|\cdot(\operatorname{Im}\tau)^4$ по $\operatorname{Im}\tau$ отрицательна на Ω_2. Кроме того,

$$|q|\cdot(\operatorname{Im}\tau)^4 < 10^{-4} \text{ при } \tau = i\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}).$$

Поэтому справедлива оценка

$$|q|\cdot(\operatorname{Im}\tau)^4 < 10^{-4}, \quad \tau \in \Omega_2. \quad (32)$$

Из (32) вытекает неравенство

$$|q|\cdot(\operatorname{Im}\tau)^2 < 10^{-4}, \quad \tau \in \Omega_2. \quad (33)$$

Лемма 7. *Пусть $\tau \in \Omega_2$. Тогда справедливы неравенства*

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\right)q^n\right| < \frac{21}{10}|q|; \quad (34)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right| < \frac{8}{5}|q|. \tag{35}$$

Доказательство. Для внутренней суммы справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2k^2\right| < \frac{1}{16}n^5.$$

Здесь в каждом слагаемом мы применили оценку $\sigma_1(n) \leqslant n^2$ и заметили, что функция $f(k) = (n-k)^2k^2$ достигает максимума на отрезке $\big[1,(n-1)\big]$ в точке $k = n/2$. Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\right)|q|^n < \frac{1}{16}\sum_{n=2}^{\infty}n^5|q|^n. \tag{36}$$

Ряд (36) по лемме 4 равен

$$\frac{1}{16}\sum_{n=2}^{\infty}n^5q^n = \frac{32q^2+51q^3+46q^4-14q^5+6q^6-q^7}{16\,(1-q)^6}.$$

Легко проверить справедливость неравенств

$$2 < \frac{32+51q+46q^2-14q^3+6q^4-q^5}{16(1-q)^6} < \frac{21}{10}, \quad \tau\in\Omega_2.$$

Поэтому ряд (36) меньше $\frac{21}{10}|q|$ при $\tau\in\Omega_2$.

Суммы $\sigma_3(n)$, $n\in\mathbb{N}$, оценим следующим образом:

$$\sigma_3(n) = \sum_{d|n}d^3 = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^3 \leqslant n^3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$$
$$\leqslant n^3\left(1+\int_1^n\frac{1}{x^3}dx\right) = \frac{3}{2}n^3 - \frac{1}{2}n < \frac{3}{2}n^3, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Воспользовавшись (15), получим

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\right| < \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^3|q|^n = \frac{3}{2}\frac{|q|+4|q|^2+|q|^3}{(1-|q|)^4}. \tag{37}$$

Справедливы неравенства

$$0 < \frac{3}{2}\frac{1+4|q|+|q|^2}{(1-|q|)^4} < \frac{8}{5}, \quad \tau\in\Omega_2.$$

Поэтому из (37) следует неравенство (35).

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть* $\tau \in \Omega_2$. *Тогда справедливо неравенство*

$$||a|^2 - 1| < 5(\operatorname{Im}\tau)^2.$$

Доказательство. Для $\operatorname{Im}\tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$ лемма 8 следует из утверждения 2 леммы 2. Поэтому считаем, что $\operatorname{Im}\tau > \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})$.

Правая часть неравенства (22) меньше

$$\frac{\pi^2}{9}(1+\delta)^2(\operatorname{Im}\tau)^2,$$

поскольку $\frac{2\pi}{3}(\operatorname{Im}\tau)(-1+\delta) < 0$, $\tau \in \Omega_2$. Следовательно, справедливы неравенства

$$|a|^2 - 1 < \frac{\pi^2}{9}(1+\delta)^2(\operatorname{Im}\tau)^2 < 5(\operatorname{Im}\tau)^2.$$

Из $|a|^2 - 1 > 0$ следует справедливость неравенства $\big||a|^2 - 1\big| < 5(\operatorname{Im}\tau)^2$. Лемма 8 доказана.

Доказательство леммы 3. Покажем, что при $\tau \in \Omega_2$ абсолютное значение правой части равенства (30) меньше 1, а левой части — больше 3.

Выпишем модуль левой части неравенства (30):

$$\left|\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2 + (|a|^2 - 1)\left(\frac{2\pi}{3}\operatorname{Im}\tau - 1\right)\right|. \tag{38}$$

Для $\operatorname{Im}\tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$ из $||a|^2 - 1| < 10^{-2}$ (справедливого по лемме 2) вытекает неравенство

$$||a|^2 - 1|\left|\frac{2\pi}{3}\operatorname{Im}\tau - 1\right| < 4 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, (38) больше, чем следующее выражение:

$$\left|\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2\right| - ||a|^2 - 1|\left|\frac{2\pi}{3}\operatorname{Im}\tau - 1\right| > 3$$

для $\operatorname{Im}\tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$.

Пусть $\operatorname{Im}\tau > \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})$. Тогда по лемме 2 справедливо неравенство

$$|a|^2 - 1 > 0.$$

Кроме того,

$$\frac{2\pi}{3}\operatorname{Im}\tau - 1 > 0.$$

Следовательно, выражение (38) больше, чем $\frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2 > 3$.

Таким образом, мы показали, что правая часть (30) больше 3 для $\tau \in \Omega_2$.

Выпишем правую часть (30):

$$(|a|^2 - 1)\left(64\pi^2(\operatorname{Im}\tau)^2\Sigma_1 - 16\pi\left(\frac{\pi}{3}\operatorname{Im}\tau - 1\right)(\operatorname{Im}\tau)\Sigma_2\right) - \Sigma_3, \qquad (39)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(k)\sigma_1(n-k)q^n, \quad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n,$$

$$\Sigma_3 = \frac{\pi^2}{9}(\operatorname{Im}\tau)^2|a|^2 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n.$$

По лемме 7 имеет место неравенство

$$|\Sigma_3| < \frac{384}{9}\pi^2|a|^2|q|(\operatorname{Im}\tau)^2.$$

Из леммы 8 следует, что $|a|^2 < 1 + 5(\operatorname{Im}\tau)^2$. Отсюда

$$|\Sigma_3| < 400|q|(\operatorname{Im}\tau)^2 + 2000|q|(\operatorname{Im}\tau)^4 < \frac{1}{4}.$$

Поскольку по лемме 7 справедливо

$$|\Sigma_1| < \frac{21}{10}|q|,$$

по лемме 5 имеет место

$$|\Sigma_2| < \frac{13}{12}|q|$$

и

$$\frac{\pi}{3}\operatorname{Im}\tau - 1 > 0,$$

то абсолютное значение (39) меньше следующего выражения:

$$||a|^2-1|\left(64\frac{21}{10}\pi^2(\operatorname{Im}\tau)^2|q|+16\frac{13}{12}\pi\left(\frac{\pi}{3}(\operatorname{Im}\tau)^2-\operatorname{Im}\tau\right)|q|\right)+\frac{1}{4}. \quad (40)$$

Теперь из неравенства

$$64\frac{21}{10}\pi^2+16\pi\frac{13}{12}\frac{\pi}{3}<1400$$

и леммы 8 вытекает, что (39) меньше чем $7000|q|(\operatorname{Im}\tau)^4+\frac{1}{4}$. Отсюда следует неравенство

$$\left|(|a|^2-1)\left(64\pi^2(\operatorname{Im}\tau)^2\Sigma_1-16\pi\left(\frac{\pi}{3}\operatorname{Im}\tau-1\right)(\operatorname{Im}\tau)\Sigma_2\right)-\Sigma_3\right|<1. \quad (41)$$

Следовательно, правая часть равенства (30) не может равняться левой части (30).

Лемма 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kusner R. Schmitt N.* The spinor representation of minimal surfaces in space. University of Massachusetts in Amherst. Preprint GANG preprint III.27, 1993.

2. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.

г. Якутск *8 августа 2005 г.*

УДК 517.956.4

БЕЗУСЛОВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*)

Е. Ф. Шарин

Работа посвящена исследованию безусловной разрешимости краевых задач для параболических уравнений в классах Гёльдера с разрывными коэффициентами [1]. В работе [2] предлагается единообразный подход к построению моделей сопряжения различных физических процессов таких, как распространение тепла в неоднородных средах (задачи типа дифракции), взаимодействие фильтрационных и каналовых потоков жидкости (фильтрация в скважину) и др. В работах [3, 4] устанавливается безусловная разрешимость краевых задач в гёльдеровских простанствах для некоторых классов уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени с границей раздела, имитирующей противоположные спутные потоки. В настоящей работе рассматривается случай односторонних спутных потоков, на границе раздела которых выполняются общие условия согласования.

В работе, состоящей из двух частей, рассматривается уравнение

$$g(x)u_t = u_{xx}, \qquad (1)$$

где $g(x) = A$, $x > 0$, и $g(x) = B$, $x < 0$.

*) Работа поддержана научной программой «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки РФ (код проекта 8427 и ур 04.01.449).

Решения данного уравнения удовлетворяют начальным условиям:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_1(x), & x > 0, \\ u(x,0) = \varphi_2(x), & x < 0, \end{cases} \tag{2}$$

и условиям склеивания:

$$\begin{pmatrix} u \\ u_x \end{pmatrix}\Bigg|_{x=+0} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_x \end{pmatrix}\Bigg|_{x=-0}. \tag{3}$$

Такие уравнения возникают во многих задачах физики и механики. Обзор таких задач и достаточно подробные библиографии приведены, например, в работах [3, 5, 6].

1. В области $Q = (0 < x < \infty) \times (0 < t < 1)$ для удобства вместо уравнения (1) будем исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} Au_t^1 = u_{xx}^1, \\ Bu_t^2 = u_{xx}^2. \end{cases} \tag{4}$$

Решение системы (4) ищется из пространства $H_{x\ \ t}^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}(Q) \cap C^{2,1}(Q)$, $0 < \gamma < 1$. При этом начальные условия примут вид

$$\begin{cases} u^1(x,0) = \varphi_1(x), \\ u^2(x,0) = \varphi_2(x), \end{cases} \quad 0 < x < \infty, \tag{5}$$

а условия склеивания —

$$\begin{cases} u^1(0,t) = au^2(0,t) + cu_x^2(0,t), \\ u_x^1(0,t) + bu_x^2(0,t) = 0, \end{cases} \quad 0 < x < \infty. \tag{6}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i \in H^{1+\gamma}$, $i = 1, 2$, и решения u_1 и u_2 будем искать в виде

$$\begin{aligned} u^1(x,t) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi A}} \int_0^t \exp\left(-\frac{Ax^2}{4(t-\tau)}\right)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\alpha(\tau)\,d\tau + \omega_1(x,t), \\ u^2(x,t) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi B}} \int_0^t \exp\left(-\frac{Bx^2}{4(t-\tau)}\right)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\beta(\tau)\,d\tau + \omega_2(x,t), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\omega_1\,(x,t) = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_R \exp\left(-\frac{A(x-\xi)^2}{4t}\right)\varphi_1(\xi)\,d\xi,$$

$$\omega_2\,(x,t) = \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_R \exp\left(-\frac{B(x-\xi)^2}{4t}\right)\varphi_2(\xi)\,d\xi.$$

Тогда функции, представленные формулами (7), удовлетворяют начальным условиям (2) и уравнениям (4) соответственно. Согласно [3] нужно найти $\alpha(t), \beta(t)$ из пространства $H^{\frac{\gamma}{2}}(0,1)$, причем удовлетворяющие условию

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0. \tag{8}$$

Удовлетворив условиям склеивания (6), получим систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{A}} \int\limits_0^t \frac{\alpha(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} + \frac{a}{\sqrt{B}} \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} - c\beta(t)\sqrt{\pi} = \Phi_0(t), \\ \alpha(t) + b\beta(t) = \Phi_1(t), \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\Phi_0(t) = \sqrt{\pi}(a\omega_2(0,t) - \omega_1(0,t) + c\omega_{2x}(0,t)),$$

$$\Phi_1(t) = -\omega_{1x}(0,t) - b\omega_{2x}(0,t).$$

Очевидно, что $\Phi_0(t), \Phi_1(t) \in H^{\gamma/2}$. Исключая $\alpha(t)$ в системе (9), приходим к уравнению

$$\beta(t) - \frac{a\sqrt{A} + b\sqrt{B}}{c\sqrt{\pi AB}} \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = \frac{-1}{c\sqrt{\pi}}\left(\Phi_0(t) + \frac{1}{\sqrt{A}} \int\limits_0^t \frac{\Phi_1(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\right).$$

Полученное уравнение является уравнением Вольтерра второго рода. и оно однозначно и безусловно разрешимо (см. [7]). Правая часть уравнения принадлежит пространству $H^{\frac{\gamma}{2}}$.

Мы должны доказать существование таких решений $\alpha(t)$, $\beta(t)$ системы (9) из пространства $H^{\frac{\gamma}{2}}$, которые удовлетворяют условиям (8).

Из системы (9) при $t = 0$ получаем, что условия (8) выполняются только при

$$\Phi_0(0) = 0, \quad \Phi_1(0) = 0. \tag{10}$$

Таким образом, при выполнении условий (10) получаем $\alpha(t)$, $\beta(t)$ из искомого пространства $H^{\frac{\gamma}{2}}$.

Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_i \in H^{1+\gamma}$, $i = 1, 2$. *Тогда при выполнении условий* (10) *существует решение задачи* (1)–(3) *из* $H_{x\ \ t}^{1+\gamma,(1+\gamma)/2}(Q) \cap C^{2,1}(Q), 0 < \gamma < 1$.

2. Теперь решения u^1 и u^2 системы уравнений (4) в той же области $Q = (0 < x < \infty) \times (0 < t < 1)$, удовлетворяющие начальным условиям (5) и условиям склеивания (6), будем искать в более широком пространстве $H_{xt}^{\gamma,\gamma/2}(Q) \cap C^{2,1}(Q)$, $0 < \gamma < 1$.

Пусть $\varphi_i(x) \in W_q^2(0, +\infty)$, $q = \frac{2}{2-\gamma}$, $i = 1, 2$. Решения u^1 и u^2 системы уравнений (4) ищем в виде (7). Тогда нужно найти $\alpha(t)$, $\beta(t)$ (см. [3]) из пространства L_p, $p = \frac{2}{1-\gamma}$.

Удовлетворив условиям склеивания (6), как и выше, получим систему уравнений (9). Заметим, что

$$\Phi_0(t), \Phi_1(t) \in L_p(0, 1).$$

В самом деле, из оценок

$$|\Phi_0(t)| < \frac{C}{t^{-1+1/2q}}\|\varphi_1\|_{L_q} + \frac{C}{t^{1/2p}}\|\varphi_2'\|_{L_p},$$

$$|\Phi_1(t)| < \frac{C}{t^{1/2p}}\|\varphi_1'\|_{L_p} + \frac{C}{t^{1/2p}}\|\varphi_2'\|_{L_p}$$

и из ограниченности вложения пространства W_q^1 в пространство L_p следует, что

$$\|\Phi_0'(t)\|_{L_q} < C, \quad \|\Phi_1(t)\|_{L_p} < C.$$

Исключая $\alpha(t)$ в системе (9), получим уравнение относительно $\beta(t)$:

$$\beta(t) - \frac{a\sqrt{A} + b\sqrt{B}}{c\sqrt{\pi AB}} \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = \frac{-1}{c\sqrt{\pi}}\left(\Phi_0(t) + \frac{1}{\sqrt{A}} \int\limits_0^t \frac{\Phi_1(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\right).$$

Заметим, что $\Phi_0(t) \in L_p$, $\Phi_1(t) \in L_p$. Полученное уравнение является уравнением Вольтерра второго рода, и для него доказаны существование и единственность решения. Решение такого уравнения можно найти в явном виде через резольвенту (см. [7]).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_i(x) \in W_q^2(0,+\infty)$, $q = \frac{2}{2-\gamma}$, $i = 1, 2$. *Тогда существует решение задачи* (1)–(3) *из пространства* $H_x^{\gamma,\gamma/2}{}_t(Q) \cap C^{2,1}(Q)$, $0 < \gamma < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Монахов В. Н., Попов С. В.* Контактные задачи математической физики // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2000. Вып. 115. С. 62–72.
3. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
4. *Попов С. В.* Безусловная разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика систем управления и вычислительные процессы. Якутск: Изд-во ЯГУ, 1991. С. 61–68.
5. *Beals R.* An abstract treatment of some forward-backward problems of transport and scattering // J. Funct. Anal. 1979. V. 34. P. 1–20.
6. *Kaper H. G., Kwong M. K., Lekkerkerker C. G., Zettl A.* Full-and partial-range eigenfunction expansions for Sturm–Liouville problems with indefinite weights // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. A. 1984. V. 98. P. 69–88.
7. *Васильева А. Б., Тихонов Н. А.* Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002. С. 102–110.

г. Якутск *28 января 2005 г.*

АННОТАЦИИ

УДК 514.755

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ СЕГРЕ $S(1,1)$ С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКЦИИ ГЕССЕ. *И. В. Бубякин, Е. А. Кузьмина.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматриваются алгебраические кривые на поверхности Сегре $S(1,1)$, которые определяются с помощью проекции Гессе. Показывется, в частности, что всякая кубическая кривая, лежащая на квадрике Сегре $S(1,1)$, представляет собой сечение либо другой квадрикой Сегре, либо конусом, которые имеют с данной поверхностью общую образующую и вдоль этой образующей не касаются. Библиогр. 3.

УДК 518.9

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. *Ю. В. Борисов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Изучается обратная задача для вырождающегося параболического уравнения, состоящая в нахождении вместе с решением неизвестного коэффициента при решении и неизвестной правой части. Условия переопределения задаются как информация о решении в два фиксированных различных ненулевых момента времени. Для изучаемой обратной задачи доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 6.

УДК 517.945

О РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. *Л. Ф. Борисова, А. И. Кожанов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Изучается обратная задача нахождения вместе с решением параболического уравнения коэффициента поглощения и неизвестных внешних нагрузок (неизвестной правой части). Наряду с обычной краевой информацией задаются также два условия переопределения — условие финального переопределения и условие интегрального переопределения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Библиогр. 5.

УДК 518.9

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПЯТЬЮ УБЕГАЮЩИМИ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ. *А. Г. Варламова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматривается задача преследования с пятью убегающими, в котором применяется геометрический метод. При этом максимизируется длина маршрута преследователя. Данный алгоритм был реализован в интегрированной среде Visual Basic версии 6. Ил. 1, табл. 1, библиогр. 2.

УДК 518.9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. *Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматривается задача распределения [1], n объектов между n участниками и предлагается новый класс решений таких многокритериальных задач. Библиогр. 1.

УДК 517.945

НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ. *А. И. Кожанов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Исследуется обратная задача нахождения вместе с решением неизвестных коэффициентов в слабо связанной параболической системе. В качестве условий переопределения задаются интегральные условия. Доказываются теоремы существования и единственности регулярного решения. Библиогр. 6.

УДК 517.958

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЭКОЛОГИИ. *А. Ю. Костин, Е. Т. Софронов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматривается математическая модель взаимодействия трех популяций, из которых два вида жертвы и один вид хищник. Получены условия устойчивого сосуществования этих трех видов. Библиогр. 4.

УДК 517.918

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ БИЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ. *С. А. Исхоков, А. Г. Каримов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Исследуются дифференциальные свойства решений вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейными формами, зависящих от гладкости коэффициентов билинейной формы, правой части уравнения и гладкости граничных функций. При этом эллиптические операторы определены в ограниченной области n-мерного евклидова пространства и вырождаются на границе. Библиогр. 14.

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА СВЕДЕНИЕМ ЕЕ К ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА. *А. Р. Павлов, Е. А. Слепцова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Предлагается метод решеня задачи Стефана сведением ее к задаче теплопроводности с распределенным в окрестности фазовой поверхности источником тепла. В качестве приложения метода рассмотрено численное моделирование температурного поля пластины при сварочном нагреве. Ил. 1, табл. 1, библиогр. 9.

УДК 517.956.4

КОНТАКТНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ГЁЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ. *Н. Р. Пинигина, С. В. Попов* . — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Устанавливается разрешимость краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с меняющимся направлением эволюции. Рассматривается общий случай границы раздела двух сред, в который, в частности, включаются ортогональные потоки, косое соударение и т. д. Библиогр. 10

УДК 512.6:519.61

О РЕШЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. *Ф. М. Федоров, Т. Л. Осипова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Предлагается метод решения бесконечной системы линейных неоднородных алгебраических уравнений. Найдена бесконечная система аналитических решений некоторых бесконечных систем линейных уравнений. Дан пример решения. Библиогр. 4.

УДК 512.6:517.95

ГРАНИЧНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ. *Ф. М. Федоров, Т. Л. Осипова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

На основе решения бесконечной системы линейных неоднородных алгебраических уравнений приведено точное аналитическое решение краевой задачи с переменными граничными условиями. Применен граничный метод решения прикладных задач математической физики. Библиогр. 2.

УДК 514.752.437

МИНИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ В $\mathbb{R}^3$ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПЛОСКИХ КОНЦОВ. *Э. И. Шамаев.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Надо написать аннотацию!!!!!

УДК 517.956.4

БЕЗУСЛОВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. *Е. Ф. Шарин.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Исследована безусловная разрешимость решений параболических уравнений в классах Гёльдера. Доказана безусловная разрешимость уравнения $g(x)u_t = u_{xx}$, где $g(x) = A$, $x > 0$ и $g(x) = B$, $x < 0$, в классах Гёльдера $H_{xt}^{\gamma/2}(Q) \cap C^{2,1}(Q)$, $0 < \gamma < 1$. Также приведены условия разрешимости в классах функций $H_{xt}^{(1+\gamma)/2}(Q) \cap C^{2,1}(Q), 0 < \gamma < 1$. Библиогр. 6

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации, шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом 210×300 мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, названия статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Формулы и математические обозначения должны быть вписаны черной пастой или чернилами черного цвета отчетливо, единообразно.

4. Пронумерованные формулы располагаются в отдельной строке. Номер формулы ставится у правого края листа.

5. Проводится дополнительная разметка формул.

6. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа ChiWriter, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

7. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа TEX и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Список литературы печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.

ВНИМАНИЮ ПОДПИСЧИКОВ!

Зарубежная подписка на «Математические заметки ЯГУ» оформляется через фирмы — партнеры ЗАО «Международная книга — Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК — Периодика» по адресу:

117049 Москва, ул. Б. Якимянка, 39, ЗАО «МК — Периодика». Тел. 238–14–85, 238–49–67, факс 238–46–34;

e-mail info@mkniga.msk.su. Internet: http://WWW.mkniga.ru

To effect subscription it is necessary to address to one of the partners of JSC Mazhdunarodnaya kniga – Periodica" in your country or to the JSC "MK – Periodica" directly.

Address: "MK – Periodica", ul. B. Yakimianka, 39, Moscow, 117049, Russia.

Tel.: (095) 238–14–85, 238–49–67, Fax: 238–46–34.

e-mail info@mkniga.msk.su.

Internet: http://www.mkniga.ru