ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. К. АММОСОВА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ЯГУ

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 15, вып. 2 **Июль—Декабрь, 2008**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ —ПРОТТЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПОЛИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М. Т. Акылбаева

Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = t + \varepsilon$, $|x| = 1 - t$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $0 \leqslant t \leqslant (1 - \varepsilon)/2$, а $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим многомерное поливолновое уравнение

$$L^n u \equiv \left(\Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^n u = 0, \qquad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geqslant 2$, а n — целое положительное число, на важность исследования которого обратил внимание еще А. В. Бицадзе [1].

Рассмотрим многомерный аналог задачи Дарбу для уравнения (1) [2].

Задача 1. *Найти в области D_ε решения уравнения* (1) *из класса $C^{2n-2}(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^{2n-1}(D_\varepsilon \cup S) \cap C^{2n}(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\left.\frac{\partial^{2j} u}{\partial t^{2j}}\right|_S = 0, \quad L^j u|_{S_\varepsilon} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \qquad (2)$$

или

$$\left.\frac{\partial^{2j+1} u}{\partial t^{2j+1}}\right|_S = 0, \quad L^j u|_{S_\varepsilon} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \qquad (3)$$

В дальнейшем нам будет удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m$, t к сферическим r, $\theta_1, \dots, \theta_{m-1}$, t, сохранив обозначения, использованные в [3, 4].

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Имеет место

Теорема 1. *Если $\varepsilon = 0$, то задача 1 имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.*

Теорема 2. *Решением задачи 1 является $u(x,t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon > 0$.*

Докажем теоремы индукцией по n.

Пусть $n = 2$. Если ввести новую неизвестную функцию $v(x,t) = Lu$, то задача 1 распадается на две следующие задачи.

Задача 2. *Найти в области D_ε решение уравнения $Lv = 0$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$v|_S = 0, \quad v|_{S_\varepsilon} = 0, \tag{4}$$

или

$$v_t|_S = 0, \quad v|_{S_\varepsilon} = 0. \tag{5}$$

Задача 3. *Найти в области D_ε решение уравнения*

$$Lu = v(x,t), \tag{6}$$

удовлетворяющее краевым условиям (4) *или* (5).

Для задачи 2 в [3, 4] доказана следующая

Теорема 3. *При $\varepsilon = 0$ задача 2 имеет бесчисленное множество ненулевых решений вида*

$$v(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{v}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

при этом $\bar{v}_n^k(r,t) \equiv 0$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,2$, *и* $\bar{v}_n^k(r,t) \neq 0$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=3,4,\ldots$, *а также в* [5] *установлена справедливость теоремы* 2.

Теперь будем доказывать теорему 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Для ее решения достаточно решить задачу (6), (4), где $v(x,t)$ определяются из (7). Решение $u(r,\theta,t)$ ищем в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Тогда, как и в [3,4], с учетом (7) для $\bar{u}_n^k(r,t)$ получим уравнение

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=\bar{v}_n^k(r,t), \quad \lambda_n=n(n+m-2), \tag{9}$$

$$k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\ldots.$$

Далее, из краевого условия (4) в силу (8) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,0)=0, \quad \bar{u}_n^k(r,r)=0, \quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots,\ 0\leqslant r\leqslant 1. \tag{10}$$

В (9) произведя замену переменных

$$\bar{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$$

и положив затем

$$\xi=\frac{r+t}{2}, \quad \eta=\frac{r-t}{2},$$

получим

$$u_{n\xi\eta}^k+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2}\bar{u}_n^k=f_n^k(\xi,\eta), \tag{11}$$

$$f_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(\xi+\eta)^{(m-1)/2}\bar{v}_n^k(\xi+\eta,\xi-\eta),$$

при этом краевое условие (10) запишется в виде

$$u_n^k(\xi,\xi)=\tau_n^k(\xi)=0, \quad u_n^k(\xi,0)=0, \quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots,\ 0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}. \tag{12}$$

С учетом общего решения уравнения (11) (см. [1]) в [6] получено решение задачи Коши для уравнения (11) в виде

$$u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\Big[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1}=\eta_1\Big]\,d\xi$$

$$+\int\limits_{1/2}^{\xi}\int\limits_{0}^{\eta}f_n^k(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1 d\eta_1, \qquad (13)$$

где

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\big[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\big]$$

— функция Римана уравнения (11) [7], а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu=n+(m-3)/2$,

$$\nu_n^k(\xi)=\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\bigg|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N'}\cdot\frac{\partial u_n^k}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N'}\cdot\frac{\partial u_n^k}{\partial\xi_1}\right)\bigg|_{\xi_1=\eta_1},$$

N' — нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\leqslant\xi$.

Из (13) при $\eta=0$, используя краевое условие (12), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)d\xi_1=0,\quad 0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (14)$$

В [3] доказано, что уравнение (14) в классе $C([0,\frac{1}{2}])$ при $\mu\geqslant 2$ имеет нетривиальные решения вида

$$\nu_n^k(\xi)=\xi^\beta,\quad \beta=\mu-2(s+1),\quad s=0,1,\ldots, \qquad (15)$$

и нулевое решение, если $-\frac{1}{2}\leqslant\mu<2$.

Таким образом, задача (6), (4) имеет ненулевые решения в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (16)$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из (13), в котором $\nu_n^k(\xi)$ находятся из (15), причем

$$\beta = \mu - 2(s+1) \geqslant \frac{3+m}{2}, \quad s = 0, 1, \ldots .$$

Как и в [3], нетрудно показать, что полученное решение вида (16) принадлежит искомому классу.

Используя результаты [3, с. 14], можно доказать, что задача (6), (5) также имеет ненулевые решения вида (16), где $u_n^k(r,t)$ находятся из (13), при этом

$$\tau_n^k(\xi) = \xi^\beta, \quad \beta = \mu - 2s > \frac{m+5}{2}, \quad s = 0, 1, \ldots .$$

Теорема 1 при $n = 2$ доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда из теоремы 2 для задачи 2 вытекает, что $v(x,t) \equiv 0$.

Далее, снова применяя теорему 2, теперь уже для задачи 3 будем иметь $u(x,t) \equiv 0$.

Первая часть теоремы 2 доказана.

Пусть теперь решением задачи 1 будет $u(x,t) \equiv 0$. Покажем, что $\varepsilon > 0$. Предположим противное, т. е. $\varepsilon = 0$. Если $\varepsilon = 0$, то из теоремы 1 вытекает, что задача 1 имеет нетривиальные решения вида (16). Приходим к противоречию.

Теорема 2 при $n = 2$ установлена.

Пусть теперь теорема 1 верна при $n = k$. Докажем ее при $n = k+1$. В этом случае задачу 1 можно разбить на две следующие задачи.

Задача 4. *Найти в области D_ε решения уравнения $L^k v = 0$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\left.\frac{\partial^{2j} v}{\partial t^{2j}}\right|_S = 0, \quad L^j v|_{S_\varepsilon} = 0, \quad j = \overline{0, k-1},$$

или

$$\left.\frac{\partial^{2j+1} v}{\partial t^{2j+1}}\right|_S = 0, \quad L^j v|_{S_\varepsilon} = 0, \quad j = \overline{0, k-1},$$

и задаче 3.

Пусть $\varepsilon = 0$. Тогда по теореме 1 для задачи 4 существуют нетривиальные решения $v(x,t)$. В этом случае задача 3 также имеет ненулевые решения вида (16).

Теорема 1 доказана.

Пусть теперь теорема 2 верна при $n = k$. Установим ее для $n = k+1$. По предположению при $\varepsilon > 0$ решением задачи 4 будет $v(x,t) \equiv 0$. Тогда уравнение (6) переходит в уравнение $Lu = 0$, а задача 3 — в задачу 2, которая по теореме 2 имеет решение $u(x,t) \equiv 0$.

Первая часть теоремы 2 доказана.

Пусть, далее, $u(x,t) \equiv 0$ — решение задачи 1. Покажем, что $\varepsilon > 0$.

Предположим противное, т. е. $\varepsilon = 0$. Тогда из теоремы 1 приходим к противоречию.

Теорема 2 установлена.

В [8] замечено, что если в уравнении (1) присутствуют младшие производные от $u(x,t)$, то условия (2) и (3) заменяются большим количеством краевых условий, что означает их влияние на постановку задачи 1.

Отметим, что некоторые задачи для уравнения (1) изучены в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

2. *Protter M. N.* New voundary value problems for the wave equation and of mixed type // J. Rath. Mech. Anal. 1954. V. 3, N 4. P. 435–446.

3. *Алдашев С. А.* Краевые задачи Дарбу для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994.

4. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, N 1. С. 1–5.

5. *Алдашев С. А.* О критериях единственности решения задачи Дарбу — Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Мат. журн. 2002. Т. 2, N 4. С. 26–29.

6. *Алдашев С. А.* Спектральные задачи Дарбу — Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. 2003. Т. 55, № 1. С. 100–107.

7. *Copson A. T.* On the Riemann — Green function // J. Rath. Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 324–348.

8. *Алдашев С. А., Акылбаева М. Т.* Критерий единственности решения задачи Дарбу — Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений высших порядков: Тез. республиканской 10-й межвузовской конф. по математике и механике. Алматы: КазГУ, 2004.

г. Алматы *20 января 2005 г.*

УДК 519.234

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. Г. Алексеев

Введение. Настоящая статья, как и предшествующие работы автора [1–6], посвящена прикладному спектральному анализу стационарных случайных процессов (ССП) с дискретным временем. По своей идейной направленности она наиболее близка к работе [6], в которой было предложено заменить весовую функцию $w(x)$, используемую для осреднения периодограммы при построении оценки спектральной плотности, дискретным набором весовых коэффициентов $\{w(k)\}$. Если при использовании весовой функции $w(x)$ важные ограничения, налагаемые нами на моменты вида $\int x^j w(x)\,dx$, могли выполняться лишь приближенно, то при переходе к набору весовых коэффициентов $\{w(k)\}$ все условия, налагаемые нами на моменты вида $\sum\limits_k k^j w(k)$, выполняются (в пределах разрядной сетки компьютера) безошибочно. Это последнее обстоятельство приобретает особую важность в случае использования весовых функций $w(x)$ высших порядков, т. е. в тех случаях, когда некоторые из моментов четных порядков функции $w(x)$ должны обращаться в нуль. Если же интересующие нас моменты функции $w(x)$ обращаются в нуль лишь с той или иной степенью приближения, то ожидаемое нами уменьшение смещения оценки спектральной плотности не происходит. Применение весовых функций высших порядков в этих условиях не достигает цели или достигает ее лишь частично. В настоящей статье рекомендации, аналогичные рекомендациям работы [6], формулируются для случая, когда нас интересуют производные спектральной плотности не выше четвертого порядка. Весовую функцию $v(x)$ (ядро оценки той или иной производной спектральной плотности исследуемого ССП) мы предлагаем заменить дискретным набором весовых коэффициентов $\{v(k)\}$. Что же дает нам вычисление производных спектральной плотности? Так как смещение непараметрической (классической периодограммной) оценки спектральной плотности в первом приближении пропорционально одной из ее производных четного порядка (в зависимости от условий, налагаемых нами на моменты весовой функции $w(x)$, используемой для осреднения периодограммы), а дисперсия оценки пропорциональна квадрату самой спектральной плотности, получаем возможность вместе с оценкой интересующей нас спектральной плотности вычислить и средний квадрат ошибки оценивания, равный сумме дисперсии оценки и квадрата ее смещения. Кроме того, оценивая производные спектральной плотности, получаем возможность проверить и уточнить наши априорные предположения относительно степени ее гладкости. Ближайший раздел статьи будет посвящен краткому описанию математического аппарата, используемого при построении оценок производных спектральной плотности. Что же касается собственно оценок производных спектральной плотности, то им будут посвящены четыре последующих раздела статьи.

1. Некоторые предварительные сведения. В качестве основного инструмента, используемого нами в дальнейшем для построения оценок производных спектральной плотности, будут избраны полиномиальные тригонометрические ядра типа Джексона и их разложения в ряд Фурье. Говоря о ядрах типа Джексона, имеем в виду конечные тригонометрические полиномы $J_{l,n}(\mu)$, определяемые для любых натуральных l и n соотношением

$$J_{l,n}(\mu) = C_{l,n}\left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)}\right]^{2l}, \tag{1}$$

где $C_{l,n}$ — нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение равенства

$$\int\limits_{\Pi} J_{l,n}(\mu)\,d\mu = 2\pi, \quad \Pi = [-\pi, \pi].$$

Для $l = \overline{1,5}$ нормирующие множители $C_{l,n}$ равны

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{3}{2n^3+n}, \quad \frac{20}{11n^5+5n^3+4n}, \quad \frac{315}{151n^7+70n^5+49n^3+45n}$$

и соответственно

$$\frac{36288}{15619n^9+7350n^7+5187n^5+4100n^3+4032n}.$$

Ядра $J_{1,n}(\mu)$, $J_{2,n}(\mu)$ широко известны под названием ядер Фейера и соответственно Джексона. Начиная с $l = 3$ принято говорить о ядрах типа Джексона. Объединяя все рассматриваемые нами ядра под общим названием «ядра типа Джексона», мы лишь констатируем их однотипность: каждое из ядер $J_{l,n}(\mu)$ пропорционально l-й степени ядра Фейера $J_{1,n}(\mu)$. Читателю, желающему ознакомиться с важнейшими свойствами ядер типа Джексона (включая ядра Фейера и Джексона), может быть рекомендована книга [7, гл. II, § 3]. Наибольший интерес для нас в дальнейшем будут представлять разложения в ряд Фурье ядер типа (1), т. е. коэффициенты $j_{l,n}(k)$ в формуле

$$J_{l,n}(\mu) = \sum_{k=-l(n-1)}^{l(n-1)} j_{l,n}(k) e^{ik\mu}.$$

Для $l = 1$ и 2 коэффициенты $j_{l,n}(k)$ описываются формулами

$$j_{l,n}(k) = 1 - |k|/n, \quad |k| \leqslant n,$$

и соответственно

$$j_{2,n}(k) = \begin{cases} 1 - \frac{3|k|+6nk^2-3|k|^3}{4n^3+2n}, & \frac{|k|}{n} \leqslant 1, \\ (2n-|k|)\frac{[(2n-|k|)^2-1]}{4n^3+2n}, & 1 \leqslant \frac{|k|}{n} \leqslant 2. \end{cases}$$

Для $l = 3, 4$ и 5 разложения в ряд Фурье ядер типа (1) описываются существенно более объемными формулами, приведенными в работах

[8, 9] и соответственно [5]. Воспроизводить эти формулы в настоящей работе за ненадобностью не будем. Как и в работе [6], положим

$$\begin{aligned}
w_{2,n}(k) &= q_{1,n}(k),\\
w_{4,n}(k) &= 2q_{1,n}(k) - q_{2,n}(k),\\
w_{6,n}(k) &= 3q_{1,n}(k) - 3q_{2,n}(k) + q_{3,n}(k),\\
w_{8,n}(k) &= 4q_{1,n}(k) - 6q_{2,n}(k) + 4q_{3,n}(k) - q_{4,n}(k)
\end{aligned}$$

и

$$w_{10,n}(k) = 5q_{1,n}(k) - 10q_{2,n}(k) + 10q_{3,n}(k) - 5q_{4,n}(k) + q_{5,n}(k),$$

где $n \in \mathbb{N}$ и

$$q_{l,n}(k) = j_{l,n}(k)/(n^{2l}C_{l,n}).$$

Выписанные выше наборы $\{w_{m,n}(k)\}$, $m = 2, 4, 6, 8, 10$, и являются тем завершающим звеном, которое позволяет нам приступить к построению оценок производных спектральной плотности. Основное свойство каждого из наборов $\{w_{m,n}(k)\}$ состоит в том, что он удовлетворяет условиям $w_{m,n}(-k) = w_{m,n}(k)$, $\sum\limits_k w_{m,n}(k) = 1$ и

$$\sum_k k^j w_{m,n}(k) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Замечание. Легко видеть, что формулы, определяющие предлагаемые нами наборы $\{w_{m,n}(k)\}$, не содержат никаких неопределенностей типа бесконечных сумм, интегралов или специальных функций. Кроме того, в табл. 1 каждой из работ [10, 8, 9, 11] приведены точные значения величин $n^{2l}q_{l,n}(k)$ для ряда значений n, равных целой положительной степени числа 2. Тем самым читателю предоставляется возможность в ряде случаев существенно ускорить вычисление интересующего его набора $\{w_{m,n}(k)\}$.

2. Оценки производной спектральной плотности. Итак, пусть $\{X(k),\, k \in \mathbb{Z}\}$ — стационарный в широком смысле случайный процесс со средним $\mathbf{E}X(k) \equiv 0$, корреляционной функцией $R(k) = \mathbf{E}X(j)X(j+k)$ и спектральной плотностью

$$f(\omega) = (2\pi)^{-1} \sum_{k \in Z} e^{-ik\omega} R(k), \quad \omega \in \Pi = [-\pi, \pi].$$

Пусть требуется по N последовательным отсчетам ССП $X(k)$ оценить производную $f'(\omega)$ в заданной точке $\omega = \omega_0 \in [0, \pi]$. Согласно формуле (12) работы [4] в качестве непараметрической оценки величины $f'(\omega_0)$ может быть принята случайная величина

$$Df_N(\omega_0) = h_N^{-2} \int\limits_{-\pi}^{2\pi} v\left(\frac{\omega - \omega_0}{h_N}\right) I_N(\omega)\, d\omega. \tag{2}$$

Здесь $I_N(\omega)$ — периодограмма, определяемая соотношением

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=1}^{N} X(k) e^{ik\omega} \right|^2,$$

h_N — некоторая числовая последовательность такая, что $0 < h_N \leqslant \pi$ для всех натуральных N и

$$h_N + \left(N h_N^3\right)^{-1} \to 0 \quad (N \to \infty),$$

а $v(x)$ — некоторая нечетная ограниченная функция, удовлетворяющая условиям $v(x) = 0$, если $|x| \geqslant 1$, и

$$\int\limits_{-1}^{1} x v(x)\, dx = 1.$$

Нечетное число $r \geqslant 3$ назовем *порядком весовой функции* $v(x)$, если она, в дополнение к сформулированным выше предположениям, удовлетворяет следующему условию:

$$\int\limits_{-1}^{1} x^j v(x)\, dx = \begin{cases} 0, & j = \overline{2, r-1}, \\ c \neq 0, & j = r. \end{cases} \tag{3}$$

Как и в случае оценивания самой спектральной плотности, применение весовых функций высших порядков (т. е. в данном случае порядков $r > 3$) может привести к очень большому выигрышу в точности оценивания, если только

а) объем выборки N не слишком мал,

б) оцениваемая спектральная плотность $f(\omega)$ является достаточно гладкой (многократно дифференцируемой) функцией.

Наши дальнейшие рассуждения, касающиеся вычисления оценки (2) величины $f'(\omega_0)$, совпадают с соответствующими рассуждениями работы [6], касающимися вычисления оценок самой спектральной плотности $f(\omega)$. При вычислении величины $Df_N(\omega_0)$ интеграл в правой части равенства (2) неизбежно заменяется интегральной суммой. При этом соотношение (3) для всех нечетных j, не превосходящих $r-2$, будет выполняться уже не точно, а приближенно и эффект (уменьшение смещения оценки $Df_N(\omega_0)$), ожидаемый нами от применения весовой функции $v(x)$ порядка $r > 3$, может быть не достигнут. Естественным образом мы приходим к необходимости замены весовой функции $v(x)$ дискретным набором весовых коэффициентов $\{v(k)\}$, удовлетворяющих условиям

$$v(-k) = -v(k), \tag{4}$$

$$\sum_k k v(k) = 1 \tag{5}$$

и

$$\sum_k k^j v(k) = 0, \quad j = \overline{2, r-1}. \tag{6}$$

Формула (2) для величины $Df_N(\omega_0)$ заменяется в этом случае соотношением

$$Df_N(\omega_0) = \frac{1}{\Delta\omega} \sum_k v(k) I_N(\omega_0 + k\Delta\omega),$$

где $\Delta\omega$ — шаг разбиения по частотному аргументу при переходе от интеграла (2) к интегральной сумме. Предлагаемые нами наборы весовых коэффициентов $\{v_{r,n}(k)\}$, удовлетворяющих условиям (4)–(6), описываются соотношениями

$$
\begin{aligned}
v_{3,n}(k) &= \frac{1}{2}[w_{2,n}(k-1) - w_{2,n}(k+1)],\\
v_{5,n}(k) &= \frac{1}{12}[-w_{4,n}(k-2) + 8w_{4,n}(k-1) - 8w_{4,n}(k+1) + w_{4,n}(k+2)],\\
v_{7,n}(k) &= \frac{1}{60}[w_{6,n}(k-3) - 9w_{6,n}(k-2) + 45w_{6,n}(k-1)\\
&\quad - 45w_{6,n}(k+1) + 9w_{6,n}(k+2) - w_{6,n}(k+3)],\\
v_{9,n}(k) &= \frac{1}{840}[-3w_{8,n}(k-4) + 32w_{8,n}(k-3)\\
&\qquad - 168w_{8,n}(k-2) + 672w_{8,n}(k-1) - 672w_{8,n}(k+1)\\
&\qquad + 168w_{8,n}(k+2) - 32w_{8,n}(k+3) + 3w_{8,n}(k+4)]
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
v_{11,n}(k) = \frac{1}{2520}&[2w_{10,n}(k-5) - 25w_{10,n}(k-4)\\
&+ 150w_{10,n}(k-3) - 600w_{10,n}(k-2) + 2100w_{10,n}(k-1)\\
&- 2100w_{10,n}(k+1) + 600w_{10,n}(k+2) - 150w_{10,n}(k+3)\\
&+ 25w_{10,n}(k+4) - 2w_{10,n}(k+5)],
\end{aligned}
$$

где величины $w_{m,n}(k)$, $n \in \mathbb{N}$, $m = 2, 4, 6, 8, 10$, определены в разд. 1. Число отличных от нуля коэффициентов в каждом из наборов $\{v_{r,n}(k)\}$ равно $n(r-1)+1$.

3. Оценки второй производной спектральной плотности. Для построения оценок второй производной спектральной плотности нам потребуются наборы весовых коэффициентов $\{v(k)\}$, удовлетворяющие следующим условиям: $v(-k) = v(k)$,

$$
\sum_k v(k) = 0, \quad \sum_k k^2 v(k) = 2
$$

и (для ряда четных значений $r \geqslant 4$)

$$
\sum_k k^j v(k) = 0, \quad j = \overline{3, r-1}.
$$

Предлагаемые нами наборы $\{v_{r,n}(k)\}$, удовлетворяющие всем перечисленным выше условиям, описываются соотношениями

$$
\begin{aligned}
v_{4,n}(k) &= w_{2,n}(k-1) - 2w_{2,n}(k) + w_{2,n}(k+1),\\
v_{6,n}(k) &= \frac{1}{12}[-w_{4,n}(k-2) + 16w_{4,n}(k-1)\\
&\quad - 30w_{4,n}(k) + 16w_{4,n}(k+1) - w_{4,n}(k+2)],\\
v_{8,n}(k) &= \frac{1}{180}[2w_{6,n}(k-3) - 27w_{6,n}(k-2) + 270w_{6,n}(k-1)\\
&\quad - 490w_{6,n}(k) + 270w_{6,n}(k+1)\\
&\quad - 27w_{6,n}(k+2) + 2w_{6,n}(k+3)],\\
v_{10,n}(k) &= \frac{1}{5040}[-9w_{8,n}(k-4) + 128w_{8,n}(k-3) - 1008w_{8,n}(k-2)\\
&\quad + 8064w_{8,n}(k-1) - 14350w_{8,n}(k) + 8064w_{8,n}(k+1)\\
&\quad - 1008w_{8,n}(k+2) + 128w_{8,n}(k+3) - 9w_{8,n}(k+4)]
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
v_{12,n}(k) &= \frac{1}{25200}[8w_{10,n}(k-5) - 125w_{10,n}(k-4)\\
&\quad + 1000w_{10,n}(k-3) - 6000w_{10,n}(k-2)\\
&\quad + 42000w_{10,n}(k-1) - 73766w_{10,n}(k)\\
&\quad + 42000w_{10,n}(k+1) - 6000w_{10,n}(k+2)\\
&\quad + 1000w_{10,n}(k+3) - 125w_{10,n}(k+4) + 8w_{10,n}(k+5)].
\end{aligned}
$$

Как и в предыдущем разделе, все величины $w_{m,n}(k)$, $n \in \mathbb{N}$, $m = 2, 4, 6, 8, 10$, заимствуются нами из разд. 1. Число отличных от нуля коэффициентов в каждом из наборов $\{v_{r,n}(k)\}$ равно $n(r-2)+1$. Полагая теперь

$$D^2 f_N(\omega_0) = \frac{1}{(\Delta\omega)^2} \sum_k v(k) I_N(\omega_0 + k\Delta\omega),$$

где $\Delta\omega$ — шаг разбиения по частоте и $\{v(k)\}$ — один из приведенных выше наборов $\{v_{r,n}(k)\}$, мы и получим оценку второй производной спектральной плотности.

4. Оценки третьей производной спектральной плотности. Для построения оценок третьей производной спектральной плотности нам потребуются наборы весовых коэффициентов $\{v(k)\}$, удовлетворяющие следующим условиям: $v(-k) = -v(k)$,

$$\sum_k kv(k) = 0, \quad \sum_k k^3 v(k) = 6$$

и (для ряда нечетных значений $r \geqslant 5$)

$$\sum_k k^j v(k) = 0, \quad j = \overline{4, r-1}.$$

Предлагаемые нами наборы $\{v_{r,n}(k)\}$, удовлетворяющие всем перечисленным выше условиям, описываются соотношениями

$$\begin{aligned}
v_{5,n}(k) &= \left[\frac{1}{2}w_{4,n}(k-2) - 2w_{4,n}(k-1) + 2w_{4,n}(k+1) - w_{4,n}(k+2)\right], \\
v_{7,n}(k) &= \frac{1}{8}[-w_{6,n}(k-3) + 8w_{6,n}(k-2) - 13w_{6,n}(k-1) \\
&\quad + 13w_{6,n}(k+1) - 8w_{6,n}(k+2) + w_{6,n}(k+3)], \\
v_{9,n}(k) &= \frac{1}{240}[7w_{8,n}(k-4) - 72w_{8,n}(k-3) + 338w_{8,n}(k-2) \\
&\quad - 488w_{8,n}(k-1) + 488w_{8,n}(k+1) - 338w_{8,n}(k+2) \\
&\quad + 72w_{8,n}(k+3) - 7w_{8,n}(k+4)]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
v_{11,n}(k) = \frac{1}{30240}&[-205w_{10,n}(k-5) + 2522w_{10,n}(k-4) \\
&- 14607w_{10,n}(k-3) + 52428w_{10,n}(k-2) - 70098w_{10,n}(k-1) \\
&+ 70098w_{10,n}(k+1) - 52428w_{10,n}(k+2) + 14607w_{10,n}(k+3) \\
&- 2522w_{10,n}(k+4) + 205w_{10,n}(k+5)].
\end{aligned}$$

Число отличных от нуля коэффициентов в каждом из наборов $\{v_{r,n}(k)\}$ равно $n(r-1)+1$. Оценка третьей производной спектральной плотности строится теперь с помощью соотношения

$$D^3 f_N(\omega_0) = \frac{1}{(\Delta\omega)^3} \sum_k v(k) I_N(\omega_0 + k\Delta\omega),$$

где $\{v(k)\}$ — один из предлагаемых нами наборов $\{v_{r,n}(k)\}$.

5. Оценки производной четвертого порядка спектральной плотности. Для построения оценок производной четвертого порядка спектральной плотности нам потребуются наборы весовых коэффициентов $\{v(k)\}$, удовлетворяющие следующим условиям: $v(-k) = v(k)$,

$$\sum_k v(k) = \sum_k k^2 v(k) = 0, \quad \sum_k k^4 v(k) = 24$$

и (для ряда четных значений $r \geqslant 6$)

$$\sum_k k^j v(k) = 0, \quad j = \overline{5, r-1}.$$

Предлагаемые нами наборы $\{v_{r,n}(k)\}$, удовлетворяющие всем перечисленным выше условиям, описываются соотношениями

$$\begin{aligned}
v_{6,n}(k) = \frac{1}{4}[&w_{4,n}(k-3) - 2w_{4,n}(k-2) - w_{4,n}(k-1) + \\
&4w_{4,n}(k) - w_{4,n}(k+1) - 2w_{4,n}(k+2) + w_{4,n}(k+3)],\\
v_{8,n}(k) = \frac{1}{48}[&-5w_{6,n}(k-4) + 32w_{6,n}(k-3) - 44w_{6,n}(k-2)\\
&- 32w_{6,n}(k-1) + 98w_{6,n}(k) - 32w_{6,n}(k+1)\\
&- 44w_{6,n}(k+2) + 32w_{6,n}(k+3) - 5w_{6,n}(k+4)],\\
v_{10,n}(k) = \frac{1}{240}[&8w_{8,n}(k-5) - 73w_{8,n}(k-4) + 264w_{8,n}(k-3)\\
&- 284w_{8,n}(k-2) - 272w_{8,n}(k-1) + 714w_{8,n}(k)\\
&- 272w_{8,n}(k+1) - 284w_{8,n}(k+2) + 264w_{8,n}(k+3)\\
&- 73w_{8,n}(k+4) + 8w_{8,n}(k+5)]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
v_{12,n}(k) = \frac{1}{30240}[&-293w_{10,n}(k-6) + 3352w_{10,n}(k-5)\\
&- 16816w_{10,n}(k-4) + 44984w_{10,n}(k-3) - 40179w_{10,n}(k-2)\\
&- 48336w_{10,n}(k-1) + 114576w_{10,n}(k) - 48336w_{10,n}(k+1)\\
&- 40179w_{10,n}(k+2) + 44984w_{10,n}(k+3) - 16816w_{10,n}(k+4)
\end{aligned}$$

$$+ 3352w_{10,n}(k+5) - 293w_{10,n}(k+6)].$$

Число отличных от нуля коэффициентов в каждом из наборов $\{v_{r,n}(k)\}$ равно $n(r-2)+3$. Полагая теперь

$$D^4 f_N(\omega_0) = \frac{1}{(\Delta\omega)^4} \sum_k v(k) I_N(\omega_0 + k\Delta\omega),$$

где $\{v(k)\}$ — один из приведенных выше наборов $\{v_{r,n}(k)\}$, мы и получим оценку производной четвертого порядка спектральной плотности.

Заключение. Предлагаемые нами алгоритмы статистического оценивания производных спектральной плотности $f(\omega)$ ССП $\{X(k), k \in \mathbb{Z}\}$ просты в исполнении, не требуют привлечения громоздких вычислительных процедур. Во всех случаях (при вычислении производных функции $f(\omega)$ порядков $v = 1, 2, 3, 4$) предлагаемые нами наборы весовых коэффициентов $\{v_{r,n}(k)\}$ предоставляют исследователю возможность широкого маневра в выборе параметров оценки производной спектральной плотности избранного им порядка. При этом во всех случаях устраняется погрешность, возникающая при переходе от теоретической оценки, включающей в себя интеграл от произведения периодограммы на ту или иную весовую функцию $v(x)$, к ее машинной реализации. Применительно к оценке первой производной функции $f(\omega)$ речь идет о погрешности, возникающей при переходе от интеграла (2) к интегральной сумме, реализуемой на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев В. Г.* О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16, № 1. С. 42–49.
2. *Алексеев В. Л.* К вопросу о построении сверхразрешающих спектральных оценок // Автометрия. 1986. № 1. С. 3–7.
3. *Алексеев А. Г.* Выбор спектрального окна при построении оценки спектральной плотности // Радиотехника. 1999. № 9. С. 38–40.
4. *Алексеев А. Г.* О непараметрических оценках спектральной плотности // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 2. С. 185–190.
5. *Алексеев В. Г.* Оценка спектральной плотности типа Уэлча. Случай дискретного аргумента // Автометрия. 2001. № 6. С. 91–97.

6. *Алексеев В. Г.* О непараметрических оценках спектральной плотности стационарного случайного процесса с дискретным временем // Автометрия. 2003. Т. 39, № 1. С. 82–87.

7. *Дзядык В. К* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

8. *Алексеев В. Г.* Ядра типа Джексона и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1994. Т. 30, № 1. С. 97–102.

9. *Алексеев В Г.* Полиномиальные тригонометрические ядра и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, № 4. С. 16–22.

10. *Алексеев В. Г.* О некоторых новых линейных цифровых фильтрах // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 2. С. 206–209.

11. *Алексеев В. Г.* Новые дискретные фильтры нижних частот // Радиотехника. 2002. № 6. С. 44–46.

г. Москва *11 мая 2004 г.*

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

С. А. Бейлин

Постановка задачи

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{p}{x} u_x \tag{1}$$

и поставим для него задачу отыскания ограниченного в $\overline{D}$ решения с начальными данными

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и нелокальным интегральным условием

$$\int\limits_0^l x^p u(x,t)\,dx = E(t), \tag{3}$$

где функции $\phi(x)$, $\psi(x)$, $E(t)$ заданы, $p = \mathrm{const} > 1$ и выполняются условия согласования:

$$\int\limits_0^1 x^p \phi(x)\,dx = E(0), \quad \int\limits_0^1 x^p \psi(x)\,dx = E'(0). \tag{4}$$

Уравнение (3) изучалось ранее в связи с исследованием сингулярной задачи Трикоми для уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0.$$

В работе [1] доказана разрешимость задач Коши и Коши — Гурса в области гиперболичности, ограниченной характеристиками уравнения.

Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения (3) при $p = 1$ рассматривалась в работе [2], однако полученный в этой статье результат нельзя распространить на случай $p \neq 1$.

Единственность решения

Теорема 1. *Существует не более одного ограниченного в* $\overline{D}$ *решения задачи* (1)–(3).

Для доказательства теоремы покажем, что соответствующая однородная задача имеет лишь тривиальное решение. Пусть $\varphi(x) = \psi(x) = E(t) \equiv 0$. Умножим уравнение (1) на $x^p u_t$ и проинтегрируем по области $D_\tau = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < \tau\}$, где τ принадлежит $[0, T]$ и выбрано произвольно:

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l x^p u_{tt} u_t \, dxdt = \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l u_t (x^p u_x)_x \, dxdt.$$

Интегрируя по частям и учитывая однородные граничное и начальные условия, получим

$$\int\limits_0^l x^p \big(u_t^2(x,\tau) + u_x^2(x,\tau)\big)\, dx - 2l^p \int\limits_0^\tau u_x(l,t) u_t(l,t)\, dt = 0.$$

Заметим, что если $u(x,t)$ — решение поставленной задачи, то из условия (3) следует, что $u_x(l,t) = l^{-p} E''(t)$, а так как по предположению $E(t) = 0$, то и $u_x(l,t) = 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^l x^p \big(u_t^2(x,\tau) + u_x^2(x,\tau)\big)\, dx = 0 \quad \forall \tau \in (0, T),$$

откуда в силу произвольности τ и однородности начальных условий вытекает, что $u = 0$ во всей области D. Единственность доказана.

Существование решения

Для доказательства существования решения поставленной задачи рассмотрим сначала вспомогательную задачу для уравнения (1) с данными Коши (2) и следующим граничным условием:

$$u(l,t) = \nu(t). \tag{5}$$

Решение задачи (1), (2), (5) найдем при помощи метода разделения переменных.

Вводя новую неизвестную функцию $w(x,t) = u(x,t) - \nu(t)$, получим следующую задачу с однородным граничным условием:

$$w_{tt} = w_{xx} + \frac{p}{x} w_x - \nu''(t), \tag{6}$$

$$w(x,0) = \phi(x), \quad w_t(x,0) = \psi(x), \tag{7}$$

$$w(l,t) = 0, \quad |w(0,t)| < \infty. \tag{8}$$

Поиск частных решений соответствующей задачи для однородного уравнения в виде

$$w_0(x,t) = X(x)T(t)$$

приводит к задаче отыскания ограниченного решения уравнения

$$X'' + \frac{p}{x} X' + \lambda^2 X = 0, \tag{9}$$

удовлетворяющего условию $X(l) = 0$.

Известно [3], что общее решение уравнения (9) имеет вид

$$X(x) = C_1 x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x) + C_2 x^{\frac{p-1}{2}} J_{\frac{1-p}{2}}(\lambda x). \tag{10}$$

Если воспользоваться представлением функций Бесселя в виде ряда, то видно, что при $x \to 0$ функция $X_1(x) = x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x)$ остается ограниченной для любого $p > 0$, тогда как $X_2(x) = x^{\frac{p-1}{2}} J_{\frac{1-p}{2}}(\lambda x) \to \infty$, если $p > 1$. Поэтому положим в (10) $C_2 = 0$.

Полагая $x = l$, получим

$$C_1 l^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda l) = 0,$$

откуда $\lambda_k = \mu_k/l$, где μ_k — корни уравнения $J_{\frac{p-1}{2}}(\mu) = 0$, которые, поскольку $p > 1$, вещественны и различны, и их счетное множество.

Таким образом, собственные функции нашей задачи имеют вид

$$X_k(x) = x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_k x}{l}\right). \tag{11}$$

Нетрудно проверить непосредственными вычислениями, что эти функции ортогональны с весом x^p и образуют полную систему.

Следуя известной схеме метода Фурье, получим решение задачи для однородного уравнения

$$w_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{\mu_k t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k t}{l}\right) x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_k x}{l}\right),$$

где коэффициенты A_k, B_k находятся по формулам

$$A_k = \frac{2}{l^2 J^2_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k)} \int\limits_0^l (\phi(x) - \phi(l)) x^{\frac{1+p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_k x}{l}\right) dx,$$

$$B_k = \frac{2}{l\mu_k J^2_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k)} \int\limits_0^l (\psi(x) - \psi(l)) x^{\frac{1+p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_k x}{l}\right) dx.$$

Будем, как обычно, искать решение неоднородного уравнения (6) в виде ряда

$$\bar{w}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_k x}{l}\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (6), раскладывая его правую часть в ряд по $J_{\frac{p-1}{2}}(\frac{\mu_k x}{l})$ и решая получившиеся дифференциальные уравнения с нулевыми начальными данными, получим

$$\bar{w}(x,t) = -2l^{\frac{p+1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\frac{\mu_k x}{l})}{\mu_k^2 J_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k)} \int\limits_0^l \nu''(t) \sin\frac{\mu_k(t-\tau)}{l}\, d\tau.$$

К полученному решению $u = \nu + w$ применим интегральное условие (3):

$$F(t) = \nu(t)\int\limits_0^l x^p\,dx - 2l^{\frac{p+1}{2}}\int\limits_0^l \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{1+p}{2}}J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_k x}{l}\right)}{\mu_k^2 J_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k)} \times \int\limits_0^t \nu''(\tau)\sin\frac{\mu_k(t-\tau)}{l}\,d\tau dx, \qquad (12)$$

где $F(t) = E(t) - \int\limits_0^l w_0 x^p\,dx$.

Покажем, что в (12) законно почленное интегрирования ряда.

Обозначим

$$a_k = \int\limits_0^t \nu''(t)\frac{\sin\frac{\mu_k(t-\tau)}{l}}{\mu_k}\,d\tau, \qquad b_k = \frac{2J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_k x}{l}\right)}{\mu_k J_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k)}.$$

Если $|\nu''('tau)| \leqslant N$, то последовательность $\{a_k\}$ ограничена в совокупности, так как $|a_k| \leqslant N\frac{T^2}{2l}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится при любом $x \in [0, l]$ [3, с. 637].

Тогда по признаку Абеля ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится равномерно.

Изменив порядок интегрирования и суммирования в (12), воспользовавшись тем, что [4]

$$\int\limits_0^l x^{\frac{1+p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_k x}{l}\right)dx = \frac{l^{\frac{3+p}{2}}}{\mu_k}J_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k),$$

придем к интегральному уравнению Вольтерра относительно неизвестной функции $\nu(t)$:

$$\beta\nu(t) - \int\limits_0^t \nu(\tau)K(t,\tau)\,d\tau = F(t), \qquad (13)$$

где

$$\beta = \frac{2}{l}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_k^2} - \frac{1}{p+1}\right), \quad K(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu_k(t-\tau)}{l}}{\mu_k}.$$

Исследуем ядро $K(t,\tau)$ уравнения (13). Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\mu_k(t-\tau)}{l}}{\mu_k}$$

и покажем, что он равномерно сходится при $t-\tau>0$.

Воспользуемся свойством корней функции Бесселя. Из теорем типа Шафхейтлина [3] известно, что если, например, $0<p\leqslant 2$, то все положительные корни уравнения $J_{\frac{p-1}{2}}(x)=0$ лежат в интервале $(k\pi+\frac{\pi}{2}+p\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{3\pi}{4}+p\frac{\pi}{8})$, а при $2<p\leqslant 5$ — в интервале $(k\pi,\ k\pi-\frac{\pi}{2}+p\frac{\pi}{4})$.

Обозначим $b_k=\sin\mu_k y$, $a_k=\frac{1}{\mu_k}$. Тогда

$$\sin\mu_k y=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{p\pi}{4}+\alpha\right)y,\quad 0<\alpha<\frac{\pi(2-p)}{8}.$$

Пусть $p=2+\delta$, $-2<\delta<1$, тогда

$$\sin\mu_k y=\sin\left(k\pi+\pi+\frac{\delta}{4}+\alpha\right)y=\sin k\pi y\cos\beta y+\sin\beta y\cos k\pi y,\ \beta=\frac{\delta}{4}+\alpha.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} B_N=\sum_{k=1}^{N}\sin\mu_k y&=\sum_{k=1}^{N}\sin\pi k y\cos\beta y+\sum_{k=1}^{N}\cos\pi k y\sin\beta y\\ &=\cos\beta y\frac{\sin\frac{N\pi y}{2}\sin\frac{(N+1)\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}+\sin\beta y\frac{\sin\frac{N\pi y}{2}\cos\frac{(N+1)\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$|B_N|\leqslant\left|\frac{2}{\sin\frac{\pi y}{2}}\right|.$$

Так как

$$\frac{1}{\mu_k}\leqslant\frac{1}{\pi k},$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mu_k}=0.$$

Таким образом, по признаку Дирихле ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\mu_k(t-\tau)}{l}}{\mu_k}$$

сходится равномерно при $t - \tau > 0$.

Однако уравнение (13) является уравнением первого рода, так как $\beta = 0$. Поскольку это не очевидно, приведем доказательство.

Используя рассуждения, проведенные выше, нетрудно показать, что решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{p}{x} u_x, \quad u(x,0) = u_0 = \text{const}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$

ограниченное при $x = 0$, имеет вид

$$u(x,t) = u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos \mu_k t}{\mu_k J_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k)} x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\mu_k x).$$

Проинтегрировав последнее равенство по x от 0 до 1, а затем положив $t = 0$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2} = \frac{1}{p+1}.$$

Таким образом, задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t \nu(\tau) K(t,\tau) d\tau = F(t). \tag{14}$$

Заметим, что необходимое условие разрешимости $F(0) = 0$ выполняется в силу условия согласования (4). Применив к обеим частям (14) преобразование Лапласа, получим

$$\bar{\nu}(\mathbf{p}) = \overline{F}(\mathbf{p}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \mu_k^2} \right)^{-1}.$$

Если при $\mathbf{p} \to \infty$

$$\left. \frac{\overline{F}(\mathbf{p})}{\overline{K}(\mathbf{p})} \right|_L \longrightarrow 0, \tag{15}$$

то, применив обратное преобразование Лапласа, найдем

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{F}(\mathbf{p})}{\overline{K}(\mathbf{p})} e^{\mathbf{p}t} d\mathbf{p}, \tag{16}$$

где прямая L расположена правее особых точек подынтегральной функции. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Если* $\phi(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$, $\psi(x) \in C[0,l] \cap C^1(0,l)$, $E(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T)$, $\phi(l) = \psi(l) = 0$ *и выполнены условия согласования* (4), *а также выполнено условие* (15), *то решение задачи* (1)–(3) *существует.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пулькин С. П.* Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$ // Уч. зап. Куйбышевск. пед. ин-та. 1958. Вып. 21. С. 3–55.
2. *Mesloub S., Bouziani A.* On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition // Internat. J. Math. Math. Sci. 1999. V 22, N 3. P. 511–519.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Иностр. лит., 1949.
4. *Градштейн И. С, Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

г. Самара *15 октября 2004 г.*

УДК 519.17

ХРОМАТИЧЕСКИ БИЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГРАФЫ

И. Г. Дмитриев, А. О. Иванова,
Т. К. Неустроева

Два графа называются *хроматически эквивалентными*, если они имеют один и тот же хроматический многочлен. Очевидно, изоморфные графы хроматически эквивалентны. Известно, что существуют неизоморфные хроматически эквивалентные графы. В работе доказано, что существуют даже неизоморфные хроматически эквивалентные графы с хроматически эквивалентными дополнениями. Такие графы будем называть *хроматически биэквивалентными.* Пример таких графов с наименьшим числом вершин показан на рис. 1.

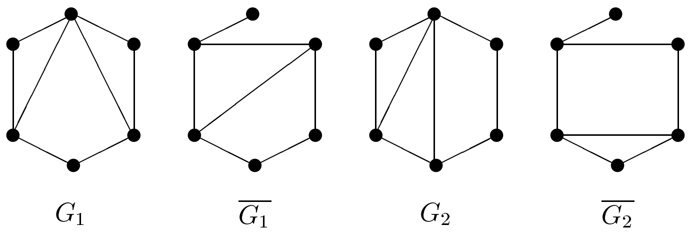


Рис. 1.

Теорема 1.1 [1]. *Если* $G = G_1 \cup G_2$, *где* $G_1 \cap G_2 = K_m$, *то* $f(G, \lambda) = f(G_1, \lambda) \cdot f(G_2, \lambda)/f(K_m, \lambda)$.

Следствие. *Если* x *— симплициальная вершина степени* k *графа* G, *то* $f(G, \lambda) = (\lambda - k) \cdot f(G - x, \lambda)$.

Используя следствие из теоремы 1.1, можно легко вычислить хроматический многочлен графов, изображенных на рис. 1:

$$f(G_1,\lambda) = f(G_2,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda^2-3\lambda+3),$$
$$f(\overline{G_1},\lambda) = f(\overline{G_2},\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+3).$$

Следующая теорема показывает существование набора из нескольких попарно не изоморфных хроматически биэквивалентных графов.

Теорема 1. *Для любого $n \geqslant 2$ существует n попарно не изоморфных хроматически биэквивалентных графов.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $n = 2k-1$, $k \geqslant 2$. Возьмем полный k-вершинный граф K_k с множеством вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Добавим к этому графу новые вершины $y_1, y_2, \ldots, y_k$, соединив y_i новыми ребрами с последними i вершинами графа K_k, $i = \overline{1,k}$. В полученном графе G' степени $s(y_i) = i$ и $s(x_i) = k+i-1$, $i = \overline{1,k}$, т. е. степенная последовательность графа G' равна $\{1,\ldots,k,\,k,\ldots,2k-1\}$. Добавим к графу G' новые вершины $z_1,\ldots,z_{2k-1}$, соединив y_i ребром с z_i, $i = \overline{1,k}$, а x_{i+1} — с z_{k+i}, $i = \overline{1,k-1}$. Наконец, добавим к полученному графу G'' (рис. 2) новую вершину z_{2k}, соединив ее со всеми вершинами графа G''. Последний граф обозначим через G (см. рис. 2).

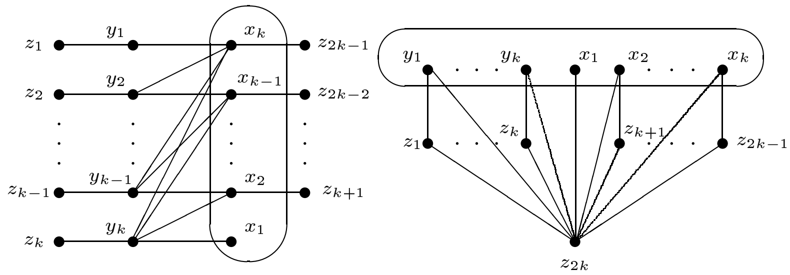


Рис. 2.

Построим граф G_m, удаляя из графа G ребро (z_m, z_{2k}), где m — некоторое натуральное число из интервала $[1; 2k-1]$.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant 2k-1$. В графе G_i единственная вершина степени 1 (z_i) смежна с вершиной степени $i+2$. Следовательно, все графы

$G_1, \dots, G_{2k-1}$ попарно не изоморфны.

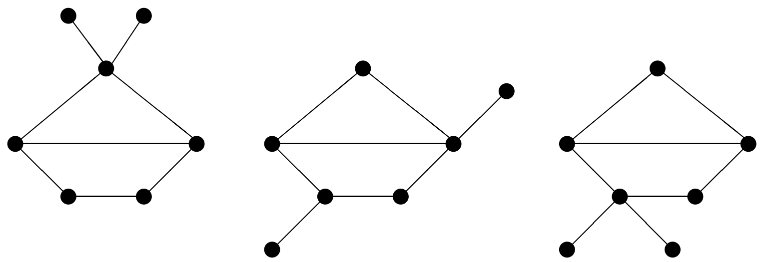
Покажем, что все графы $G_1, \dots, G_{2k-1}$ хроматически биэквивалентны. В самом деле, многократно используя следствие из теоремы 1.1, для графов G_m получим, что при любых $m = \overline{1, 2k-1}$ хроматический многочлен $f(G_m, \lambda)$ равен $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^{2k-2} \cdot f(G' + K_1, \lambda)$, где G' — граф, построенный в начале доказательства этой теоремы.

Поскольку по построению графа G_m граф $\overline{G_m}$ получается из графа $\overline{G''}$ добавлением вершины z_{2k} степени 1, смежной с вершиной z_m, хроматический многочлен $f(\overline{G_m}, \lambda)$ равен $(\lambda - 1) \cdot f(G'', \lambda)$ при любых $m = \overline{1, 2k-1}$, где $\overline{G''}$ — дополнение графа G'', показанного на рис. 2. Теорема 1 доказана.

Замечание. Существует бесконечно много наборов из $n \geqslant 2$ попарно неизоморфных хроматически биэквивалентных графов. Например, присоединяя к каждому графу только что построенного набора $\{G_m \mid m = \overline{1, n}\}$ произвольный граф G, получим новый набор $\{G + G_m \mid m = \overline{1, n}\}$ из n попарно неизоморфных хроматически биэквивалентных графов. Вообще возможны и совершенно иные построения графов искомого набора. При столь широких возможностях естественно возникают задачи нахождения таких наборов с дополнительными ограничениями. Например, найти набор из $n \geqslant 2$ попарно неизоморфных хроматически биэквивалентных графов с возможно меньшим количеством $p(n)$ вершин.

Как указано выше, $p(2) = 6$. Набор из трех графов, изображенных на рис. 3, показывает, что $p(3) = 7$, так как среди 6-вершинных графов не существует тройки хроматически биэквивалентных графов и

$$f(G_1, \lambda) = f(G_2, \lambda) = f(G_3, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 3),$$
$$f(\overline{G_1}, \lambda) = f(\overline{G_2}, \lambda) = f(\overline{G_3}, \lambda) = \lambda_{(7)} + 8\lambda_{(6)} + 15\lambda_{(5)} + 5\lambda_{(4)}.$$



G_1 G_2 G_3

Рис. 3.

Нетрудно также показать, что $p(4) \leqslant 8$. Вообще из доказательства теоремы 1 следует, что $p(n) \leqslant 2n+2$, но мы предполагаем, что $p(n) \leqslant c \ln n$ при достаточно больших n.

Прежде чем доказать теорему 2, приведем несколько определений и известных результатов о характеристических многочленах графов [2].

Характеристический многочлен $|\lambda E - A|$ матрицы смежности A графа G называется *характеристическим многочленом графа* G и обозначается через $\varphi_G(\lambda)$. Два графа G' и G'' называются *коспектральными*, если они имеют один и тот же характеристический многочлен. Для деревьев были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.2 [3]. *Пусть G — p-вершинное дерево, тогда*

$$\varphi_G(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_k \lambda^{p-2k},$$

где a_k $(k > 0)$ есть число паросочетаний порядка k дерева G, $a_0 = 1$ и $m = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$.

Одним из интересных результатов в теории характеристических многочленов является результат Швенка [4].

Теорема 1.3 [4]. *Для достаточно больших p почти для каждого p-вершинного дерева найдется неизоморфное ему коспектральное дерево.*

Теорема 1.4 [1]. *Коэффициент a_k при $\lambda_{(p-k)}$ в многочлене*

$$f(G,\lambda)=\sum_{k=0}^{p-\chi} a_k\lambda_{(p-k)}$$

равен числу различных $(p-k)$-раскрасок графа G.

Другими словами, a_k равен числу различных раскрасок графа G ровно $p-k$ цветами с точностью до перестановки цветов.

Теорема 2. *Два неизоморфных дерева хроматически биэквивалентны тогда и только тогда, когда они коспектральны.*

Доказательство теоремы 2. Поскольку любые два дерева хроматически эквивалентны [3], достаточно показать, что коспектральные деревья имеют хроматически эквивалентные дополнения, и наоборот.

Пусть дополнение p-вершинного дерева G имеет хроматический многочлен

$$f(\overline{G},\lambda)=\sum_{k=0}^{p-\chi} c_k\lambda_{(p-k)},$$

где $\chi=\chi(\overline{G})$. Тогда по теореме 1.4 коэффициент c_k равен числу различных раскрасок графа G ровно $p-k$ цветами с точностью до перестановки цветов. Так как дерево G не имеет клик с более чем двумя вершинами, то в $(p-k)$-раскраске графа $\overline{G}$ каждый цвет встречается не более двух раз, а именно: k цветов встречаются по два раза, а $p-2k$ цветов — по одному, $0<k\leqslant p-\chi$. Поэтому k пар одноцветных (т. е. несмежных в $\overline{G}$) вершин определяют в дереве G паросочетание порядка k. Обратно, каждому паросочетанию порядка k дерева G соответствует $(p-k)$-раскраска графа $\overline{G}$. Заметим также, что $c_0=1$. Следовательно, c_k при $0<k\leqslant p-\chi$ есть число паросочетаний порядка k в дереве G.

Таким образом, соответствующие коэффициенты характеристического многочлена дерева G (по теореме 1.2) и хроматического многочлена его дополнения совпадают, что и доказывает теорему 2.

Из результата Швенка [4] и теоремы 2 вытекает

Следствие. *Для достаточно больших n почти для каждого n-вершинного дерева найдется хроматически биэквивалентное ему дерево.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Read R. C.* An introductoion to chromatic polynomials // J. Combin. Theory. 1968. V. 4, N 1. P. 52–71.
2. *Cvetcovich D., Doob M., Sachs H.* Spectra of graphs. Theory and applications. Berlin: Deutscher Verl. der Wiss., 1980.
3. *Mowshowitz A.* The characteristic polynomial of a graph // J. Combin. Theory. 1972. V. 12, N 2. P. 177–193.
4. *Schwenk A. J.* Almost all trees are cospectral // New Direction in the theory of Graphs (ed. F. Harary). New York: Acad. Press, 1973. P. 275–307.

г. Якутск *18 июня 2004 г.*

УДК 518.9

О ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ КОРТЕЖЕЙ ЧИСЕЛ

Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов

Пусть имеем некоторое конечное семейство непересекающихся множеств конечных кортежей действительных чисел:

$$\widehat{F} = \{F_i \mid \in I\},$$

где $I \rightleftharpoons \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Положим $F = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$ и обозначим через K множество всех конечных кортежей действительных чисел, включая «пустой кортеж» $\varnothing$.

Назовем кортеж $b \in K$ *суммой кортежей*

$$a^i = \left(a_1^i, \ldots, a_{n(a^i)}^i\right) \in K \quad (i = 1, \ldots, k),$$

если $b = \sum\limits_{i=1}^{k} a^i \rightleftharpoons \left(a_1^1, \ldots, a_{n(a^1)}^1, a_1^2, \ldots, a_{n(a^2)}^2, \ldots, a_1^k, \ldots, a_{n(a^k)}^k\right)$.

Рассмотрим следующую проблему. Пусть имеется

$$c = \sum_{i=1}^{m} d^i \quad (d^i \in F,\ m \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Задачу идентификации каждого слагаемого данной суммы, т. е. установление принадлежности

$$d^i \in F_j \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = j(d^i)), \tag{2}$$

назовем *задачей распознавания кортежей.*

Решением задачи (1)–(2) назовем кортеж элементов из I

$$(j(d^1), \ldots, j(d^m)). \tag{3}$$

Приступим к решению данной задачи следующим образом.

Назовем кортеж $b = c + a + d$ $(a, b, c, d \in K)$ *покрытием кортежа* a, в свою очередь назовем a *частью кортежа* b.

Пусть для любого $a \in F_i$ $(i \in I)$ существует непустое $c \in K$, причем c является частью a и не является частью какого-либо другого кортежа из $\bigcup\limits_{j \in I \setminus \{i\}} F_j$. Множества таких частей c кортежа a обозначим через $P(a)$.

Пусть имеется отображение

$$G : \bigcup_{a \in F} P(a) \longrightarrow I, \tag{4}$$

которое любому элементу из $P(a)$ $(a \in F_k,\ k \in I)$ ставит в соответствие число k. Будем называть такие отображения *отображениями-идентификаторами*.

Пусть имеется отображение

$$R : K \longrightarrow \bigcup_{a \in F} P(a) \tag{5}$$

такое, что если кортеж $b \in K$ можно представить в виде $b = c+t+d$, где t есть некоторый элемент из $P(a)$, $a \in F_l$, $l \in I$ и никакой элемент из множества $\bigcup\limits_{s \in F \setminus F_l} P(s)$ не является частью c, то $R(b) = t$; в противном случае $R(b) = \varnothing$. Будем называть такое отображение *отображением-локализатором*.

Теорема. *Пусть имеем задачу распознавания кортежей* (1)–(2). *Тогда для нахождения решения* (3) *достаточно выполнения следующих условий.*

1. *Любые два рядом стоящие слагаемые суммы* c (1) *должны принадлежать различным элементам из* $\widehat{F}$.

2. *Отображение-идентификатор* G (4) *определено.*

3. *Отображение-локализатор* R (5) *определено.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда для суммы c (1) справедливо соотношение

$$R(c) = t^1 \in P(d^1).$$

Тогда кортеж c можно представить в виде $c = c^1 + t^1 + c^2$. Снова применяя отображение R к c^2, получим

$$R(c^2) = t^2, \quad c^2 = c^3 + t^2 + c^4.$$

Поступая далее так же, получим кортеж элементов из $\bigcup\limits_{a \in F} P(a)$

$$(t^1, \ldots, t^p), \quad p \geqslant m.$$

Исключая в силу первого условия теоремы повторяющиеся рядом стоящие элементы нового кортежа и применяя отображение-идентификатор G (4) к элементам получившегося кортежа, получим решение задачи (1)–(2) $(j^1, \ldots, j^m)$. Теорема доказана.

Примером задачи распознавания кортежей может служить проблема компьютерного распознавания человеческой речи. Доказанная теорема позволяет разработать некоторые алгоритмы обработки компьютерных wav-файлов.

г. Якутск *31 мая 2004 г.*

УДК 517.956

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДАРБУ — ПРОТТЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

Е. Ж. Ермекбаев

Рассмотрим на полупространстве $t > 0$ уравнение

$$t^p \Delta_x u - t^q u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$p, q = \mathrm{const} \geqslant 0$, $p \geqslant q$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geqslant 2$, на важность исследования которого обратил внимание еще А. В. Бицадзе [1]. Оно гиперболично при $t > 0$, а вдоль плоскости $t = 0$ имеет место вырождение его типа и порядка. Обозначим через D конечную область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченную поверхностями

$$|x| = \frac{2}{p-q+2} t^{(p-q+2)/2}, \quad |x| = 1 - \frac{2}{p-q+2} t^{(p-q+2)/2}$$

и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора x, $0 \leqslant t \leqslant \left(\frac{p-q+2}{4}\right)^{\frac{2}{p-q+2}}$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D области D, обозначим через S_0, S_1 и S соответственно.

Рассмотрим следующую задачу Дарбу — Проттера для уравнения (1).

Задача 1. *Найти в области D решение уравнения* (1) *из класса* $\mathrm{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^1(D \cup S) \cap \mathrm{C}^2(D)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_S = \tau(x), \quad u|_{S_0} = \sigma(x) \tag{2}$$

или

$$u_t|_S = v(x), \quad u|_{S_0} = \sigma(x). \tag{3}$$

В дальнейшим нам будет удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_m, t$, сохранив обозначения, использованные в [2].

Пусть Ω — проекция области D на плоскость (r,t) с границами

$$\Gamma_0 : r = \frac{2}{p-q+2} t^{(p-q+2)/2}, \quad \Gamma_1 : r = 1 - \frac{2}{p-q+2} t^{(p-q+2)/2},$$

$$\Gamma : t = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(D)$, $l = 0, 1, \dots,$ — пространство Соболева, а $\widetilde{S} = \left\{(r,\theta) \in S,\ 0 < r < \frac{1}{2}\right\}$.

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $\hat{a}_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{\tau}_n^k(r)$, $\tilde{\sigma}_n^k(r)$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения в ряд по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\tau(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, $i = 1, \dots, m$.

Введем множество функций

$$B_1^l(S) = \Bigg\{ f(r,\theta) : f \in W_2^l(S),\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left(\left\| f_n^k(r) \right\|_{c^3(0,1)}^2 \right.$$

$$\left. + \left\| f_n^k(r) \right\|_{c^1(0,1)}^2 \right) : \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty,\ l \geqslant m-1 \Bigg\}.$$

Пусть $\bar{a}_i = t^{-q} a_i$, $\bar{b} = t^{-q} b$, $\bar{c} = t^{-q} c$ и $\bar{a}_i$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in W_2^l(D)$, $i = 1, \dots, m$, $l \geqslant m+1$.

Теорема 1. *Если* $\tau(r,\theta) = r^3 r^*(r,\theta)$, $v(r,\theta) = r^3 v^*(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta) = r^2 \sigma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $v^*(r,\theta) \in B_1^l(S)$, $\sigma^*(r,\theta) \in B_1^l(\widetilde{S})$, *то задача* 1 *имеет бесконечное множество решений.*

Отметим, что при $q = 0$ это теорема установлена в [3].

Доказательство. Сначала докажем разрешимость задачи (1), (2). Так как искомое решение u принадлежит $C(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^2(D)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Тогда, как и в [2], для u_n^k получим ряд

$$\begin{gathered} t^p\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - t^q\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{t^p\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - t^q\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}_n^k - \frac{\lambda_n\rho_n^k t^p}{r^2} + \sum_{i=1}^m\left(\tilde{a}_{in-1}^k - n\hat{a}_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k\right\} = 0, \quad \lambda_n = n(n+m-2). \end{gathered} \tag{5}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$t^p\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - t^q\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} t^p\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - t^q\rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k u_{1r}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}t^p\rho_1^k\bar{u}_1^k& \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0\right),& \quad n=1,\ k=\overline{1,k_1}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} t^p\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - t^q\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}t^p\rho_n^k\bar{u}_n^k& \\ = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m \hat{a}_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k\right.& \\ \left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m\left(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)\hat{a}_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}&, \\ k=\overline{1,k_n}, \quad n=2,3,\ldots.& \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots,$ — решение системы (6), (7), то оно является и решением уравнения (5).

Учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [4], из краевого условия (2) имеем

$$\bar{u}_n^k|_\Gamma=\bar{\tau}_n^k(r),\quad \bar{u}_n^k|_{\Gamma_0}=\bar{\sigma}_n^k(r),\quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots,\ 0\leqslant r\leqslant 1. \quad (8)$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач Дарбу в области Ω для уравнений (6), (7). Теперь будем находить решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7), (8) можно представить в виде

$$t^p\bar{u}_{nrr}^k-t^q\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}t^p\bar{u}_n^k=\bar{f}_n^k(r,t), \quad (9)$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t)=0$. Произведя в (9) замену переменных

$$\bar{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$$

и положив затем

$$r=r,\quad x_0=\frac{2}{2+p-q}t^{(2+p-q)/2},$$

получим уравнение

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k\equiv u_{\alpha,nrr}^k-u_{\alpha,nx_0x_0}^k-\frac{\alpha}{x_0}u_{\alpha,nx_0}^k+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}u_{\alpha,n}^k \\ =f_{\alpha,n}^k(r,x_0), \quad (10)$$

$$0\leqslant\alpha=\frac{p-q}{2+p-q}<1,$$

$$f_{\alpha,n}^k(r,x_0)=r^{(m-1)/2}\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}q-2\alpha}\bar{f}_n^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right].$$

При этом краевое условие (8) запишется в виде

$$u_{\alpha,n}^k(r,0)=\tau_n^k(r),\quad u_{\alpha,n}^k(r,r)=\sigma_n^k(r),\quad 0\leqslant r\leqslant 1, \quad (11)$$

$$\tau_n^k(r)=r^{(m-1)/2}\bar{\tau}_n^k(r),\quad \sigma_n^k(r)=r^{(m-1)/2}\bar{\sigma}_n^k(r),\quad k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots.$$

Наряду с уравнением (10) рассмотрим уравнение

$$L_0 u^k_{0,n} \equiv u^k_{0,nrr} - u^k_{0,nx_0x_0} + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2} u^k_{0,n} = f^k_{0,n}(r,x_0). \tag{12}$$

Имеет место следующая функциональная связь, как доказано в [2] (см. также [5]), между решениями задачи Коши для уравнений (10) и (12).

Утверждение 1. *Если* $u^{k,1}_{0,n}(r,x_0)$ *— решение задачи Коши для уравнения* (12), *удовлетворяющее условию*

$$u^{k,1}_{0,n}(r,0) = \tau^k_n(r), \quad \frac{\partial}{\partial x_0} u^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0, \tag{13}$$

то функция

$$u^{k,1}_{\alpha,n}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int\limits_0^1 u^{k,1}_{0,n}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\, d\xi$$

$$\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) x_0^{1-\alpha} D^{-\alpha/2}_{0,x_0^2}\left[\frac{u^{k,1}_{0,n}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{14}$$

есть решение уравнения (10) *при* $\alpha > 0$ *с данными* (13).

Утверждение 2. *Если* $u^{k,1}_{0,n}(r,x_0)$ *является решением задачи Коши для уравнения* (12), *удовлетворяющим условию*

$$u^{k,1}_{0,n}(r,0) = \frac{v^k_n(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2s+1-\alpha)}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} u^{k,1}_{0,n}(r,0) = 0,$$

то при $0 < \alpha < 1$ *функция*

$$u^{k,2}_{\alpha,n}(r,x_0) = \gamma_{2-k+2s}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^s \left[x_0^{1-\alpha+2s}\int\limits_0^1 u^{k,1}_{0,n}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{s-\alpha/2}\, d\xi\right]$$

$$\equiv \gamma_{2-k+2s} 2^{s-1}\Gamma\left(s-\frac{\alpha}{2}+1\right) D^{\frac{\alpha}{2}-1}_{0,x_0^2}\left[\frac{u^{k,1}_{0,n}(r,x_0)}{x_0}\right] \tag{15}$$

является решением уравнения (10) *с начальными данными*

$$u^{k,2}_{\alpha,n}(r,0) = 0, \quad \lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} u^{k,2}_{\alpha,n} = v^k_n(r),$$

где

$$\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\lambda_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

$\Gamma(z)$ *— гамма-функция,* D_{0t}^{α} *— оператор Римана — Лиувилля* [6], *а* $s \geqslant 0$ *— наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $2-\alpha+2s \geqslant m-1$. *При этом функции* $f_{\alpha,n}^{k}(r,x_0)$, $f_{0,n}^{k}(r,x_0)$ *связаны формулами* (14) *в случае утверждения* 1 *и* (15)" в случае утверждения 2.

Теперь будем решать задачу (10), (11). Ее решение ищем в виде

$$u_{\alpha,n}^{k}(r,x_0) = u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) + u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0),$$

где $u_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (10), (13), а $u_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение задачи Дарбу для (10) с условием

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \quad u_{\alpha,n}^{k,2}(r,r) = \sigma_n^k(r) - u_{\alpha,n}^{k,1}(r,r), \tag{16}$$

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \quad k = \overline{1,k_n,} \quad n = 0,1,\ldots.$$

В [7] показано, что задача Коши (12), (13) однозначно разрешима. Учитывая обратимость оператора D_{0t}^{α} [6], из утверждения 1 получаем, что задача Коши (10), (13) также однозначно разрешима.

Далее, опираясь на формулу (15), задачу Дарбу (10), (16) сводим к задаче Дарбу для уравнения (12) с условием

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u_{0,n}^{k,}(r,0) = 0, \quad u_{0,n}^{k,1}(r,r)\varphi_n^k(r),$$

которая имеет бесчисленное множество решений [7], где $\varphi_n^k(r)$ — известная функция, выражающаяся через $\tau_n^k(r)$, $\sigma_n^k(r)$. Значит, задача (10), (16) также имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, показано, что решений задачи (10), (11) — бесчисленное множество.

Следовательно, сначала решив задачу (6), (8) ($n = 0$), а затем (7), (8) ($n = 1$) и т. д, найдем последовательно все $u_n^k(r,t)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$.

Далее, аналогично [2, 7] доказывается, что функция вида (4) является решением задачи (1), (2), где $u_n^{-k}(r,t)$ определяются из двумерных задач Дарбу, и принадлежит классу $\mathrm{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^1(D \cup S) \cap \mathrm{C}^2(D)$.

По вышеуказанной схеме устанавливается существование решения задачи (1), (3).

Теорема 1 доказана.

Отметим, что в работе [8] показано, что решение задачи 1 неединственно.

Замечание. Заметим, что в теореме 1 принадлежность заданных функций $\tau(r,\theta)$, $v(r,0) \in \mathrm{B}_1^l(S)$, $\sigma(r,\theta) \in \mathrm{B}_1^l(\widetilde{S})$ существенна. Как показывают примеры, построенные в [2], при нарушении этого условия решения задачи 1 даже для многомерного волнового уравнения могут не существовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

2. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994.

3. *Нуржанов Ш. Т.* Задачи Дарбу — Проттера для вырождающихся гиперболических многомерных гиперболических уравнений: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 2000.

4. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

5. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: НГУ, 1973.

6. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1985.

7. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 1–5.

8. *Алдашев С. А., Ермекбаев Е. Ж.* О критерии единственности решения задачи Дарбу — Проттера для многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка // Материалы междунар. российско-казахского симпоз. «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик: НИИПМА РАН, 2004. С. 18–20.

г. Алматы *20 января 2005 г.*

УДК 517.9:533.7

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ С СОГЛАСОВАННЫМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ ПОТОКОВЫХ ЧЛЕНОВ

Ф. В. Иванов

Введение

Для решения задач математической физики широко применяется метод расщепления по физическим процессам [1–4], учитывающий специфику задач и позволяющий эффективно получать их численное решение. Большой интерес представляет изучение возможности расщепления алгоритма численного решения задачи, обладающего такими важными свойствами, как устойчивость, консервативность, инвариантность и т. д.

В данной работе построены разностные схемы расщепления по физическим процессам, обладающие свойством полной консервативности (ПК). Здесь, следуя определению из книги [5], *полностью консервативной разностной схемой* (ПКРС) будем называть разностные схемы, для которых выполняются не только разностные аналоги основных законов сохранения, но также и дополнительные соотношения, выражающие баланс отдельных видов энергии. В работах [6–8] излагается алгоритм построения ПКРС и построен ряд семейств ПКРС. Данная работа является продолжением работы [9].

1. Уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных

Рассмотрим одномерные уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных, замыкаемые уравнением состояния $p = p(\rho, \varepsilon)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \varepsilon}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial x} = 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь t — время, x — эйлерова переменная, u — скорость газа, ρ — плотность, ε — удельная внутренняя энергия, p — давление.

Уравнение баланса кинетической энергии и закон сохранения полной энергии соответственно имеют вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \rho u^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \rho u^2 u}{\partial x} + u\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u}{\partial x} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0, \quad E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}.$$

Газодинамическое уравнение для энтропии имеет вид

$$\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) + \rho u\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = 0.$$

Для решения некоторых задач математической физики применяется двухэтапное расщепление системы (1). На первом этапе учитываются градиенты давления (в уравнении движения) и скорости (в уравнениях неразрывности и энергии), на втором этапе учитываются инерционные члены и производится перенос вектора состояния вдоль траектории. Подобные расщепления в два этапа применяются в методе частиц в ячейках, в методе больших частиц [4].

Первый этап:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\
\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p\frac{\partial u}{\partial x} = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Второй этап:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \varepsilon}{\partial x} = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

2. Двухэтапные разностные схемы

Приведем двухэтапные ПКРС.

ПКРС расщепления с термодинамическими параметрами, определенными в центре расчетной сетки.

Первый этап:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde\rho_{i+1/2} - \rho^n_{i+1/2}}{\tau} + (\tilde\rho_{i+1/2})_\alpha \frac{\Delta_x \tilde u_i}{h} &= 0,\\ \rho^n_{i+1/2}\frac{\tilde u_i - u_i^{n-1}}{\tau} + \frac{\Delta_x}{h} p^n_{i-1/2} &= 0,\\ \rho^n_{i+1/2}\frac{\tilde\varepsilon_{i+1/2} - \varepsilon^n_{i+1/2}}{\tau} + p^n_{i+1/2}\frac{\Delta_x}{h} u_i^n &= 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Второй этап:

$$\begin{aligned}\frac{\rho^{n+1}_{i+1/2} - \tilde\rho_{i+1/2}}{\tau} + \tilde u_i \frac{\Delta_x}{h}(\tilde\rho_{i-1/2})_\alpha &= 0,\\ \frac{1}{\tau}\left[\left(\rho^{n+1}_{i-1/2}\right)_\beta \frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{2} - \left(\rho^n_{i-1/2}\right)_\beta \frac{u_i^n + \tilde u_i}{2}\right] &\\ + \frac{\Delta_x}{h}\left[\left(\left(\tilde\rho_{i-3/2}\right)_\alpha \tilde u_{i-1}\right)_\beta \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2}\right] &= 0,\\ \frac{1}{\tau}\left(\rho^{n+1}_{i+1/2}\varepsilon^{n+1}_{i+1/2} - \rho^n_{i+1/2}\tilde\varepsilon_{i+1/2}\right) + \frac{\Delta_x}{h}\left[\left(\tilde\rho_{i-1/2}\tilde\varepsilon_{i-1/2}\right)_\alpha \tilde u_i\right] &= 0,\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$(\varphi_{i-1/2})_\alpha = (\alpha T'_x + (1-\alpha)E)\varphi_{i-1/2}, \quad \varphi = \{\rho, \varepsilon, p\}.$$

Здесь $\alpha, \beta \in [0; 1]$.

ПКРС расщепления с газодинамическими параметрами, определенными в узлах расчетной сетки.

Первый этап:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}\big(\tilde\rho_i - \rho_i^n\big) + \left[\tilde\rho_i \frac{\Delta_x}{h}\tilde u_{i-1}\right]_\alpha &= 0,\\
\rho_i^n \frac{1}{\tau}\big(\tilde u_i - u_i^{n-1}\big) + \left[\frac{\Delta_x}{h} p_{i-1}^n\right]_{(1-\alpha)} &= 0,\\
\rho_i^n \frac{1}{\tau}\big(\tilde\varepsilon - \varepsilon_i^n\big) + p_i^n\left[\frac{\Delta_x}{h} u_{i-1}^n\right]_\alpha &= 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Второй этап:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}\big(\rho_i^n - \tilde\rho_i\big) + \left[\tilde u_{i-1}\frac{\Delta_x}{h}\tilde\rho_{i-1}\right]_\alpha &= 0,\\
\frac{1}{\tau}\left[\rho_i^{n+1}\frac{u_i^{n+1}+u_i^n}{2} - \rho_i^n\frac{u_i^n+\tilde u_i}{2}\right] + \frac{\Delta_x}{h}\left[(\tilde\rho_{i-1}\tilde u_{i-1})_\alpha \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2}\right] &= 0,\\
\frac{1}{\tau}\big(\rho_i^{n+1}\varepsilon_i^{n+1} - \rho_i^n\tilde\varepsilon_i\big) + \frac{\Delta_x}{h}(\tilde\rho_{i-1}\tilde u_{i-1}\tilde\varepsilon_{i-1})_\alpha &= 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Легко проверить, что в разностных схемах (4)–(7) после исключения во временны́х разностях из второго этапа газодинамических параметров, найденных на первом этапе, получим ПКРС. Это означает, что построенные двухэтапные разностные схемы обладают свойством полной консервативности. Отличительной чертой изложенных разностных схем является то, что все потоковые члены взаимно согласованы.

Построенные двухэтапные разностные схемы (4)–(7) обладают суммарной аппроксимацией на уравнениях системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
2. *Яненко Н. Н., Ковеня В. М.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
3. *Марчук Г. И.* Метод расщепления. М.: Наука, 1988.
4. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
5. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.

6. *Головизнин В. М., Разанов М. А., Самарский А. А., Сороковникова О. С.* Разностные схемы газовой динамики со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков. М., 1984. 29 с. (Препринт / ИПМ им. Келдыша АН СССР; № 56).

7. *Ivanov F. V., Fedotova Z. I.* On new classes of completely conservative difference schemes of gas dynamics // Sympos. on advanced problems and methods in fluid mechanics. Paland, Mragano, 1987. P. 190–191.

8. *Ivanov F. V., Fedotova Z. I., Shokin Yu. I.* On complete conservatism of difference schemes // Numerical methods in fluid dynamics. M.: Мир, 1984. P. 225–244.

9. *Иванов Ф. В.* Полностью консервативные двухэтапные разностные схемы // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т 10, вып. 1. С. 132–139.

г. Якутск *11 июня 2004 г.*

УДК 517.95

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

А. П. Львов

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей S. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, рассмотрим нелокальные краевые задачи для параболического уравнения

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u + C(x)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $(x,t) \in Q$, $f(x,t) \in L_2(Q)$, $k(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $C(x) \in C(\overline{\Omega})$.

Так как на знак функции $k(x,t)$ не сделано никаких предположений, то уравнение (1) входит в класс эллиптико-параболических уравнений, в класс уравнений с меняющимся направлением времени [1].

Локальные краевые задачи для таких классов уравнений математической физики рассматривались во многих работах [1–3]. Нелокальные краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений изучались в работах [4, 5].

Нелокальная задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Q, если выполнены следующие краевые условия:

$$u|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \alpha(x)u(x,T), \quad k(x,0) > 0, \quad k(x,T) > 0, \ x \in \Omega. \tag{3}$$

где $\alpha(x)$ — непрерывная функция в $\overline{\Omega}$.

Введем весовую функцию $\psi(t) = t^2(T-t)^2$, при этом $|\psi_t| \leqslant C\sqrt{\psi}$ и гильбертово пространство

$$H_L(Q) = \{u : u, u_{x_i}, \sqrt{\psi}u_{tx_i}, \sqrt{\psi}\Delta u, \sqrt{\psi}u_t \in L_2(Q),\ i = \overline{1,n}\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H_L} = \int\limits_Q \left[\psi(\Delta u)^2 + \psi\sum_{i=1}^n u^2_{tx_i} + \psi u_t^2 + \sum_{i=1}^n u^2_{x_i} + u^2\right] dQ.$$

Для $\varepsilon > 0$ положим

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{tt} + Lu.$$

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — фундаментальная система в $W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормированная в $L_2(\Omega)$ и такая, что $\varphi_k(x)$ является решением спектральной задачи

$$-\triangle\varphi_l = \lambda_l\varphi_l, \quad \varphi_l|_S = 0,\ l = 1, 2, 3, \ldots.$$

Заметим, что $W_2^2(\Omega)$ есть пространство Соболева с обобщенными производными из $L_2(\Omega)$ по x до II-го порядка, а $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_1^2 = \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^n u^2_{x_i} + u^2\right] dx.$$

Приближенные решения

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv \omega = \sum_{l=1}^N C_l^{N,\varepsilon}(t)\varphi_l(x)$$

ищем как решение краевой задачи

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \tag{4}$$

$$C_l^{N,\varepsilon}(0) = \sum_{k=1}^N C_k^{N,\varepsilon}(T)\alpha_{kl}, \tag{5}$$

$$C_{lt}^{N,\varepsilon}(T)=\sum_{k=1}^{N}C_{kt}^{N,\varepsilon}(0)\alpha_{kl}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_{kl}=\int\limits_{\Omega}\alpha(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx,\quad \widehat{k,l}=\overline{1,N}.$$

Умножим (4) на коэффициент Фурье $C_l^{N,\varepsilon}(t)$ и просуммируем полученное равенство по l от 1 до N, в результате имеем

$$(L_\varepsilon\omega,\omega)_0=(f,\omega)_0. \tag{7}$$

Проинтегрируем по частям равенство (7) по t от 0 до T:

$$\begin{aligned}(f,\omega)=-\varepsilon\int\limits_{\Omega}[\omega(x,T)\omega_t(x,T)-\omega(x,0)\omega_t(x,0)]\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\omega_t^2\,dQ\\ +\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[k(x,T)\omega^2(x,T)-k(x,0)\omega^2(x,0)]\,dx\\ +\int\limits_{Q}\left[\left(C(x)-\frac{1}{2}k_t\right)\omega^2+\sum_{l=1}^{n}\omega_{x_i}^2\right]dQ.\end{aligned} \tag{8}$$

При этом из краевых условий (5) и (6) следует, что

$$\int\limits_{\Omega}[\omega(x,T)\omega_t(x,T)-\omega(x,0)\omega_t(x,0)]\,dx=0.$$

А неравенство

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}[k(x,T)\omega^2(x,T)-k(x,0)\omega^2(x,0)]\,dx\\ \geqslant\int\limits_{\Omega}[\min_{\overline{\Omega}}k(x,T)-\max_{\overline{\Omega}}k(x,0)\alpha^2(x)]\omega^2(x,T)\,dx\geqslant 0\end{aligned}$$

справедливо вследствие условий (5), (6), неравенства Бесселя и предположения $\alpha^2(x)\leqslant\dfrac{\min_{\overline{\Omega}}k(x,T)}{\max_{\overline{\Omega}}k(x,0)}$. Пусть в дальнейшем выполнены условия

$C(x) \geqslant C_0 > 0$, $2C - |k_t| \geqslant \delta > 0$, $\sqrt{\psi} f_t \in L_2(Q)$. В итоге из (8) получим следующее неравенство:

$$\varepsilon ||\omega_t||^2 + ||\omega||^2_{1,0} \leqslant C_1 ||f||^2, \quad C_1 > 0. \tag{9}$$

Из априорной оценки (9) следует единственность решения краевой задачи (4)–(6) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений краевая задача (4)–(6) однозначно разрешима в $W_2^2(0,T)$.

Умножим (4) на

$$-\psi \frac{\partial^2 C_l^{N,\varepsilon}(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\psi_t \frac{\partial C_l^{N,\varepsilon}(t)}{\partial t},$$

просуммируем по l и проинтегрируем по t. Тогда имеем

$$-\left(f, -\psi\omega_{tt} - \frac{1}{2}\psi_t\omega_t\right) = \varepsilon \int\limits_Q \psi\omega_{tt}^2 dQ + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_Q \psi_t\omega_t\omega_{tt} dQ$$

$$+\int\limits_Q \psi\left[\left(C(x) + \frac{1}{2}k_t\right)\omega_t^2 + \sum_{k=1}^n \omega_{tx_i}^2\right] dQ - \int\limits_Q \psi_{tt}\left(\frac{1}{2}C(x)\omega^2 + \sum_{k=1}^n \omega_{x_i}^2\right) dQ.$$

Так как

$$\frac{\varepsilon}{2}|\psi_t\omega_{tt}\omega_t| \leqslant \varepsilon\gamma\psi\omega_{tt}^2 + \varepsilon C_\gamma \omega_t^2, \quad \gamma > 0,$$

в силу неравенства Коши и априорной оценки (9) из последнего равенства получим следующую оценку:

$$\varepsilon(1-\gamma)\|\sqrt{\psi}\omega_{tt}\|^2 + \int\limits_Q \psi\left[\delta\omega_t^2 + \sum_{k=1}^n \omega_{tx_i}^2\right] dQ \leqslant C_2[\|f\|^2 + \|\sqrt{\psi} f_t\|^2], \quad C_2 > 0, \tag{10}$$

где $1 - \gamma > 0$.

Теперь (4) умножим на $\psi\lambda_l C_l^{N,\varepsilon}(t)$ и просуммируем по l. Получим

$$-(L_\varepsilon\omega, \psi\Delta\omega)_0 = -(f, \psi\Delta\omega)_0.$$

Проинтегрировав последнее равеннство по t от 0 до T и используя неравенство Коши, получим неравенство

$$\varepsilon\int\limits_Q \psi\sum_{k=1}^n \omega_{tx_i}^2 dQ + \int\limits_Q \psi(\Delta\omega)^2 dQ \leqslant C_3[\|f\|^2 + \|\sqrt{\psi} f_t\|^2], \quad C_3 > 0. \tag{11}$$

Из оценок (9)–(11) следует, что предельный элемент $u(x,t)$ некоторой подпоследовательности $\{u^{N,\varepsilon}\}$ является решением краевой задачи (1)–(3) из пространства $H_L(Q)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $C(x)\geqslant C_0>0$, $2C-k_t\geqslant \delta>0$, $2C+k_t\geqslant\delta>0$, $k(x,0)>0$, $k(x,T)>0$ *и* $|\alpha(x)|\leqslant\sqrt{\frac{\min\limits_{\overline{\Omega}} k(x,T)}{\max\limits_{\overline{\Omega}} k(x,0)}}$ *при* $x\in\overline{\Omega}$.

Тогда для любой функции f *из* $L_2(Q)$ *такой, что* $\sqrt{\psi}f_t\in L_2(Q)$, *существует, и притом единственное, решение краевой задачи* (1)–(3) $u(x,t){\in}H_L(Q)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$.

Нелокальная задача 2. Найти решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u|_{S_T}=0, \tag{12}$$

$$u(x,0)=\beta(x)u(x,T),\quad k(x,0)<0,\quad k(x,T)<0,\ x\in\Omega, \tag{13}$$

где $\beta(x)$ — непрерывная функция в $\overline{\Omega}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $C(x)\geqslant C_0>0$, $2C-k_t\geqslant \delta>0$, $2C+k_t\geqslant\delta>0$, $k(x,0)<0$, $k(x,T)<0$ *и* $|\beta(x)|\leqslant\sqrt{\frac{\max\limits_{\overline{\Omega}}(k(x,0))}{\min\limits_{\overline{\Omega}}(k(x,T))}}$ *при* $x\in\overline{\Omega}$. *Тогда для любой функции* f *из* $L_2(Q)$ *такой, что* $\sqrt{\psi}f_t\in L_2(Q)$, *существует, и притом единственное, решение краевой задачи* (1), (12), (13) $u(x,t){\in}H_L(Q)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q)$.

Доказательство. Рассуждаем аналогично доказательству теоремы 1. Но в этом случае мы рассматриваем задачу

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon},\varphi_l)_0=(f,\varphi_l)_0, \tag{14}$$

$$C_l^{N,\varepsilon}(T)=\sum_{k=1}^{N}C_k^{N,\varepsilon}(0)\beta_{kl}, \tag{15}$$

$$C_{lt}^{N,\varepsilon}(0) = \sum_{k=1}^{N} C_{kt}^{N,\varepsilon}(T)\beta_{kl}, \tag{16}$$

где

$$\beta_{kl} = \int\limits_{\Omega} \beta(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx, \quad \widehat{k,l} = \overline{1,N}.$$

Также на основании неравенства Бесселя следует, что

$$\int\limits_{\Omega}[k(x,T)\omega^2(x,T) - k(x,0)\omega^2(x,0)]\,dx$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega}[\max_{\overline{\Omega}}(k(x,0)) - \min_{\overline{\Omega}}(k(x,T))\beta^2(x)]\omega^2(x,t)]\,dx \geqslant 0.$$

Дальше, как и в теореме 1, получаются априорные оценки (9)–(11) и на их основании доказывается теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

2. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

3. *Пятков С. Г.* Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. АН СССР/ Сиб. отделение. Ин-т математики. Новосибирск, 1986. С. 65–84

4. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

5. *Керефов А. А.* О нелокальных задачах для уравнений параболического типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 81–87.

г. Якутск *11 июня 2004 г.*

УДК 517.946

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

Р. Р. Сафиуллова

Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. Теория нелокальных краевых задач важна и сама по себе как раздел общей теории краевых задач для уравнений с частными производными, и как раздел математики, имеющий многочисленные приложения в механике, физике, биологии и других естественно-научных дисциплинах.

Особое место (прежде всего вследствие многочисленных приложений) среди нелокальных задач занимают краевые задачи для нестационарных уравнений с нелокальным по времени условием. В настоящее время достаточно хорошо изучены подобные задачи для параболических уравнений (см. работы [1–7]), в случае же уравнений второго порядка столь же исчерпывающие результаты отсутствуют. Именно последнему вопросу — исследованию разрешимости новой нелокальной по времени задачи для одного класса уравнений второго порядка — и посвящена настоящая работа.

Пусть Q — цилиндр

$$\{(x,t) : x \in D = (0,1),\ t \in (0,T),\ 0 < T < +\infty\},$$

$a(x,t)$, $a_0(x,t)$, $b(x,t)$, $b_0(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — заданные при $x \in \overline{D}$, $t \in [0,T]$ функции.

Определим операторы A и B:

$$Au = \frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)u_x) + a_0(x,t)u, \quad Bu = \frac{\partial}{\partial x}(b(x,t)u_x) + b_0(x,t)u,$$

и пусть эти операторы будут эллиптическими.

Определим пространство V:

$$V = \big\{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty\big(0,T; W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)\big),$$
$$v_t(x,t) \in L_\infty\big(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)\big) \cap L_2\big(0,T; W_2^2(D)\big),\ v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\big\}.$$

Пусть Φ, Ψ_0, Ψ_1 — линейные операторы, переводящие пространство V в пространство $L_2(D)$.

Краевая задача. *Найти в Q решение уравнения*

$$u_{tt} - Au_t - Bu = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \Phi u + u_0(x), \quad x \in D, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \Psi_0 u + \Psi_1 u_t + u_1(x), \quad x \in D, \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{4}$$

В случае нулевых операторов Φ, Ψ_0 и Ψ_1 рассматриваемая краевая задача есть обычная начально-краевая задача для уравнения составного типа (1); результаты о разрешимости такой задачи приведены, например, в монографии [8].

Уточним, что всюду ниже фраза «постоянная … определяется лишь входными данными задачи» означает, что данная постоянная определяется с помощью коэффициентов операторов A и B, функций $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ через величины, которые будут конечны в силу выполнения условий соответствующей теоремы.

Положим

$$b_1 = \max_{[0,1]} |b_0(x,0)|, \ \ b_2 = \max_{[0,1]} b(x,0).$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a(x,t), b(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad a_0(x,t), b_0(x,t) \in C(\overline{Q}); \tag{5}$$

$$a(x,t) \geqslant a_0 > 0, \quad b(x,t) \geqslant b_0 > 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}; \tag{6}$$

$$a_0(x,t) \leqslant -\bar{a}_0 < 0, \quad b_0(x,t) \leqslant -\bar{b}_0 < 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}; \tag{7}$$

$$a_t(x,t) \leqslant 0, \quad b_t(x,t) \leqslant 0, \quad b_{0t}(x,t) \geqslant 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}. \tag{8}$$

Далее, пусть операторы Φ, Ψ_0, Ψ_1 *представимы в виде* $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, $\Psi_0 = \Psi_{01} + \Psi_{02}$, $\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12}$ *и для операторов* Φ_1, Φ_2, Ψ_{01}, Ψ_{02}, Ψ_{11}, Ψ_{12} *выполняются условия*

$$\begin{gathered}
\|\Phi_1 v\|^2_{L_2(D)} \leqslant \alpha_1 \|v(x,t)\|^2_{L_2(Q)},\\
\widetilde{\Phi}_1 : \widetilde{\Phi}_1 v = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_1 v - \Phi_1 v_x, \quad \|\widetilde{\Phi}_1 v\|^2_{L_2(D)} \leqslant \alpha_2 \|v(x,t)\|^2_{L_2(Q)},\\
\|\Psi_{01} v\|^2_{L_2(D)} \leqslant \alpha_3 \|v(x,t)\|^2_{L_2(Q)},\\
\|\Psi_{11} v\|^2_{L_2(D)} \leqslant \alpha_4 \|v(x,t)\|^2_{L_2(Q)},\\
\|\Phi_2 v\|^2_{L_2(D)} \leqslant \beta_1 \|v(x,t)\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D))},\\
\widetilde{\Phi}_2 : \widetilde{\Phi}_2 v = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_2 v - \Phi_2 v_x, \quad \|\widetilde{\Phi}_2 v\|^2_{L_2(D)} \leqslant \beta_2 \|v(x,t)\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D))},\\
\|\Psi_{02} v\|^2_{L_2(D)} \leqslant \beta_3 \|v(x,t)\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D))},\\
\|\Psi_{12} v\|^2_{L_2(D)} \leqslant \beta_4 \|v(x,t)\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D))};
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
b_0 > 4\beta_1 b_2 + 4\alpha_1\beta_2 T + \max([4(\alpha_3 + \alpha_2 b_2) + 2\alpha_1 b_1]T&\\
- \bar{b}_0 + 4\beta_3 + 4\beta_1 b_1 + 4\beta_2 b_2, 0),&
\end{aligned} \tag{10}$$

$$1 > 4\beta_4, \ \bar{a}_0 > 2\alpha_4, \quad b_0 > 2b_1\beta_1.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *из пространства* $L_2(D)$ *и любых функций* $u_0(x)$ *из пространства* $W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $u_1(x)$ *из пространства* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *краевая задача* (1)–(4) *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V, *и это решение единственно.*

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = \lambda\Phi u + u_0(x), \quad x \in D, \tag{2_λ}$$

$$u_t(x,0) = \lambda[\Psi_0 u + \Psi_1 u_t] + u_1(x), \tag{3_λ}$$

а также условие (4). Обозначим через Λ множество тех чисел из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (1), (2_λ), (3_λ), (4) разрешима в пространстве V при произвольных функциях $f(x,t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$ из пространств $L_2(Q)$, $W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ соответственно. Как известно, если множество Λ непусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает со всем отрезком $[0,1]$. Множество Λ не пусто, поскольку число 0 принадлежит ему [8]. Для доказательства же открытости и замкнутости множества Λ нам понадобятся априорные оценки решений задачи (1), (2_λ), (3_λ), (4). Установим их наличие.

Пусть Q_t есть цилиндр $\{(x,\tau) : 0 < \tau < t, x \in D\}$ $(t \leqslant T)$.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_t} Luu_\tau \, dxd\tau = \int\limits_{Q_t} fu_\tau \, dxd\tau.$$

Интегрируя по частям в левой части данного равенства, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(x,0)\,dx + \int_0^t\int_0^1 a u_{x\tau}^2\,dxd\tau - \int_0^t\int_0^1 a_0 u_\tau^2\,dxd\tau$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 b(x,t)u_x^2(x,t)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 b(x,0)u_x^2(x,0)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 b_\tau u_x^2\,dxd\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1 b_0(x,t)u^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 b_0(x,0)u^2(x,0)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 b_{0\tau}u^2\,dxd\tau = \int_0^t\int_0^1 f u_\tau\,dxd\tau.$$

Используя условия (6)–(8) теоремы и применяя к правой части данного равенства неравенство Юнга, приходим к неравенству

$$\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + 2a_0\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau + 2\bar{a}_0\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + b_0\int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx$$
$$+\bar{b}_0\int_0^1 u^2(x,t)\,dx \leqslant \int_0^1 u_t^2(x,0)\,dx + b_1\int_0^1 u^2(x,0)\,dx + b_2\int_0^1 u_x^2(x,0)\,dx$$
$$+\frac{1}{\delta^2}\int_0^t\int_0^1 f^2\,dxd\tau + \delta^2\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau,$$

где δ есть произвольное положительное число.

С помощью условий (2_λ), (3_λ) и (9) оценим первое, второе и третье слагаемые правой части данного неравенства:

$$\int\limits_0^1 u_t^2(x,0)\,dx \leqslant (4+\delta_1)\left[\alpha_3 \int\limits_0^T\int\limits_0^1 u^2\,dxd\tau + \alpha_4 \int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + \beta_3 \max_{[0,T]} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx + \beta_4 \max_{[0,T]} \int\limits_0^1 u_t^2(x,t)\,dx\right] + \left(1+\frac{4}{\delta_1^2}\right)\int\limits_0^1 u_1^2(x)\,dx;$$

$$b_1 \int\limits_0^1 u^2(x,0)\,dx \leqslant \big(2+\delta_1^2\big) b_1 \left[\alpha_1 \int\limits_0^T\int\limits_0^1 u^2\,dxdt + \beta_1 \max_{[0,T]} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx\right] + b_1\left(1+\frac{2}{\delta_1^2}\right)\int\limits_0^1 u_0^2(x)\,dx;$$

$$b_2 \int\limits_0^1 u_x^2(x,0)\,dx \leqslant \big(4+\delta_1^2\big) b_2 \left[\alpha_1 \int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_x^2\,dxdt + \alpha_2 \int\limits_0^T\int\limits_0^1 u^2\,dxdt + \beta_1 \max_{[0,T]} \int\limits_0^1 u_x^2(x,t)\,dx + \beta_2 \max_{[0,T]} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx\right] + b_2\left(1+\frac{4}{\delta_1^2}\right)\int\limits_0^1 u_{0x}^2(x)\,dx$$

(здесь δ_1 — произвольное положительное число). Следствием выше-приведенных неравенств является неравенство

$$
\begin{aligned}
k_1 \max_{[0,T]} \int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + 2a_0 \int_0^T\!\!\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau \\
+ k_2 \int_0^T\!\!\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + k_3 \max_{[0,T]} \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx \\
+ k_4 \max_{[0,T]} \int_0^1 u^2(x,t)\,dx \leqslant \left(1 + \frac{4}{\delta_1^2}\right) \int_0^1 u_1^2(x)\,dx + b_2 \left(1 + \frac{4}{\delta_1^2}\right) \int_0^1 u_{0x}^2\,dx \\
+ b_1 \left(1 + \frac{2}{\delta_1^2}\right) \int_0^1 u_0^2(x)\,dx + k_5 \int_0^T\!\!\int_0^1 u^2\,dxd\tau \\
+ k_6 \int_0^T\!\!\int_0^1 u_x^2\,dxd\tau + \frac{1}{\delta^2} \int_0^T\!\!\int_0^1 f^2\,dxd\tau, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

в котором числа k_1–k_6 определяются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
k_1 = 1 - \big(4 + \delta_1^2\big)\beta_4, \quad k_2 = 2\bar{a}_0 - \big(4 + \delta_1^2\big)\alpha_4 - \delta^2, \\
k_3 = b_0 - \big(4 + \delta_1^2\big)b_2\beta_1, \quad k_4 = \bar{b}_0 - \big(4 + \delta_1^2\big)(\beta_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2), \\
k_5 = \big(4 + \delta_1^2\big)(\alpha_3 + \alpha_2 b_2) + \big(2 + \delta_1^2\big)\alpha_1 b_1, \quad k_6 = \big(4 + \delta_1^2\big)\alpha_1 b_2.
\end{gathered}
$$

С помощью очевидных неравенств

$$
\int_0^1 u^2(x,t)\,dx \leqslant \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx, \qquad \int_0^T\!\!\int_0^1 u_x^2\,dxd\tau \leqslant T \max_{[0,T]} \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx
$$

мы можем от неравенства (11) перейти к следующему неравенству:

$$
\begin{gathered}
k_1 \max_{[0,T]} \int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + 2a_0 \int_0^T\!\!\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau + k_2 \int_0^T\!\!\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau \\
+ k_3 \max_{[0,T]} \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx \leqslant [k_6 T + \max(k_5 T - k_4, 0)] \max_{[0,T]} \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx \\
+ \left(1 + \frac{4}{\delta_1^2}\right) \int_0^1 u_1^2(x)\,dx + b_2 \left(1 + \frac{4}{\delta_1^2}\right) \int_0^1 u_{0x}^2(x)\,dx \\
+ b_1 \left(1 + \frac{2}{\delta_1^2}\right) \int_0^1 u_0^2(x)\,dx + \frac{1}{\delta^2} \int_0^T\!\!\int_0^1 f^2\,dxd\tau.
\end{gathered}
$$

Первые три неравенства условия (10) позволяют подобрать числа δ и δ_1 настолько малыми, что коэффициенты k_1 и k_2, а также числа $k_3 - k_6 T - \max(k_5 T - k_4, 0)$ окажутся положительными. Фиксируя их (т. е. фиксируя числа δ и δ_1), мы придем к первой априорной оценке решений краевой задачи (1), (2_λ), (3_λ), (4):

$$
\begin{gathered}
\max_{[0,T]} \int u_t^2(x,t)\,dx + \int_0^T\!\!\int_0^1 u_{x\tau}^2\,dxd\tau + \int_0^T\!\!\int_0^1 u_\tau^2\,dxd\tau + \max_{[0,T]} \int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx \\
+ \max_{[0,T]} \int_0^1 u^2(x,t)\,dx \leqslant C_1 \big(\|f\|^2_{L_2(Q)} + \|u_0\|^2_{W_2^1(D)} + \|u_1\|^2_{L_2(D)}\big), \qquad (12)
\end{gathered}
$$

где число C_1 определяется лишь входными данными задачи.

Рассмотрим теперь равенство

$$
-\int_{Q_t} Lu\, u_{xx\tau}\,dxd\tau = -\int_{Q_t} f\, u_{xx\tau}\,dxd\tau.
$$

С помощью неравенства Юнга, условий (6), (8) теоремы и оценки

(12) нетрудно от данного равенства перейти к неравенству

$$\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx + b_0\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx + a_0\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx\tau}^2\,dxd\tau \leqslant \int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,0)\,dx + b_1\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,0)\,dx + M_1\big(\|f\|^2_{L_2(Q)} + \|u_0\|^2_{W_2^1(D)} + \|u_1\|^2_{L_2(D)}\big). \quad (13)$$

Имеют место равенства

$$u_{xx}(x,0) = \Phi_1 u_{xx} + \Phi_2 u_{xx} + \widetilde{\Phi}_1 u_x + \widetilde{\Phi}_2 u_x + \widetilde{\widetilde{\Phi}}_1 u + \widetilde{\widetilde{\Phi}}_2 u + u_0''(x),$$

$$u_{xt}(x,0) = \Psi_{11}u_{xt} + \Psi_{12}u_{xt} + \Psi_0 u_x + \widetilde{\Psi}_{11}u_t + \widetilde{\Psi}_{12}u_t + \widetilde{\Psi}_{01}u + \widetilde{\Psi}_{02}u + u_1'(x).$$

Условие (9) и оценка (12) позволяют перейти от данных равенств к неравенствам

$$\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,0)\,dx \leqslant (2+\delta_1)\left[\beta_1\max_{[0,T]}\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx + \alpha_1\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xx}^2\,dxdt\right] + M_2\big(\|f\|^2_{L_2(Q)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(D)} + \|u_1\|^2_{L_2(D)}\big), \quad (14)$$

$$\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,0)\,dx \leqslant (2+\delta_1)\beta_4\max_{[0,T]}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx + M_3\big(\|f\|^2_{L_2(Q)} + \|u_0\|^2_{W_2^1(D)} + \|u_1\|^2_{W_2^1(D)}\big) \quad (15)$$

с произвольным положительным числом δ_1 и числами M_2 и M_3, определяющимися входными данными задачи и числом δ_1. Следствием неравенств (13)–(15) является неравенство

$$[1-(2+\delta_1)\beta_4]\max_{[0,T]}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+[b_0-(2+\delta_1)b_1\beta_1]\max_{[0,T]}\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx$$
$$+a_0\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xxt}^2\,dxdt\leqslant(2+\delta_1)b_1\alpha_1\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xx}^2\,dxdt$$
$$+M_4\bigl(\|f\|^2_{L_2(Q)}+\|u_0\|^2_{W_2^2(D)}+\|u_1\|^2_{W_2^1(D)}\bigr). \quad (16)$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_t} Luu_{xx}\,dxd\tau=-\int\limits_{Q_t} fu_{xx}\,dxd\tau.$$

Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга, используя условия (7) и (8), приходим к неравенству

$$2a_0\int\limits_0^1 u_{xx}^2(x,t)\,dx+(2b_0-\delta_2)\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx}^2\,dxd\tau$$
$$\leqslant\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,0)\,dx$$
$$+M_5\bigl(\|f\|^2_{L_2(Q)}+\|u_0\|^2_{W_2^1(D)}+\|u_1\|^2_{L_2(D)}\bigr) \quad (17)$$

с произвольным положительным числом δ_2 и числом M_4, определяющимся лишь входными данными задачи и числом δ_2.

Четвертое неравенство условия (10) означает, что при достаточно малых числах δ_1 будет выполняться неравенство

$$b_0-(2+\delta_1)b_1\beta_1>0. \quad (18)$$

Если δ_1 — именно такое число, то следствием неравенства (16) будет следующее неравенство:

$$\max_{[0,T]}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx\leqslant\frac{(2+\delta_1)\alpha_1 b_1}{1-(2+\delta_1)\beta_4}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xx}^2\,dxdt$$
$$+M_4'\bigl(\|f\|^2_{L_2(Q)}+\|u_0\|^2_{W_2^2(D)}+\|u_1\|^2_{W_2^1(D)}\bigr).$$

Оценивая с помощью данного неравенства правую часть неравенства (17), приходим к оценке

$$\left[2b_0 - \delta_2 - \frac{2(2+\delta_1)\alpha_1 b_1}{1-(2+\delta_1)\beta_4}\right] \int\limits_0^T \int\limits_0^1 u_{xx}^2\,dxdt \leqslant M_6\big(\|f\|^2_{L_2(Q)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(D)} + \|u_1\|^2_{W_2^1(D)}\big) \qquad (19)$$

с постоянной M_6, определяющейся входными данными задачи и числами δ_1 и δ_2. Последнее неравенство условия (10) означает, что можно найти числа δ_1 и δ_2 настолько малыми, что будет выполняться неравенство (19), а также неравенство

$$2b_0 - \delta_2 - \frac{2(2+\delta_1)\alpha_1 b_1}{1-(2+\delta_1)\beta_4} > 0.$$

Фиксируя числа δ_1 и δ_2 указанным образом, мы получим априорную оценку в пространстве $L_2(Q)$ для функции $u_{xx}(x,t)$; используя эту оценку и неравенство (16), приходим ко второй априорной оценке для решений краевой задачи (1), (2_λ), (3_λ), (4):

$$\max_{[0,T]} \int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx + \max_{[0,T]} \int\limits_0^1 u_{xx}(x,t)\,dx + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 u_{xxt}^2\,dxdt \leqslant C_2\big(\|f\|^2_{L_2(Q)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(D)} + \|u_1\|^2_{W_2^1(D)}\big) \qquad (20)$$

с постоянной C_2, определяющейся лишь входными данными задачи.

Оценка второй производной $u_{tt}(x,t)$ в пространстве $L_2(Q)$ очевидным образом вытекает из доказанных оценок. Окончательная же оценка для решений краевой задачи (1), (2_λ), (3_λ), (4) имеет вид

$$\|u\|_V \leqslant C_0\big[\|f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(D)} + \|u_1\|_{W_2^1(D)}\big], \qquad (21)$$

где C_0 определяется лишь входными данными задачи.

С помощью оценки (21) мы и докажем открытость и замкнутость множества Λ.

Для доказательства открытости множества Λ достаточно показать, что при принадлежности числа λ_0 множеству Λ число $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$ при малой величине $|\tilde{\lambda}|$ будет принадлежать ему же.

Итак, пусть λ_0 — элемент множества Λ, и пусть $v(x,t)$ — произвольная функция из пространства V. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (4) и условия

$$u(x,0) = \lambda_0[\Phi_1 u + \Phi_2 u] + \tilde{\lambda}[\Phi_1 v + \Phi_2 v] + u_0(x), \tag{$2_{\lambda_0,v}$}$$

$$\begin{aligned} u_t(x,0) = \lambda_0[\Psi_{01}u + \Psi_{02}u + \Psi_{11}u_t + \Psi_{12}u_t] \\ + \tilde{\lambda}[\Psi_{01}v + \Psi_{02}v + \Psi_{11}v_t + \Psi_{12}v_t] + u_1(x). \end{aligned} \tag{$3_{\lambda_0,v}$}$$

Поскольку функция $\Phi_1 v + \Phi_2 v$ принадлежит пространству $W_2^2(D)$, функция $\Psi_{01}v + \Psi_{02}v + \Psi_{11}v_t + \Psi_{12}v_t$ — пространству $W_2^1(D)$, данная краевая задача будет иметь решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V. Следовательно, определен оператор G, переводящий пространство V в себя: $G(v) = u$.

Оценка (21) и условия (9) означают, что имеет место неравенство

$$\|G(v_1) - G(v_2)\|_V \leqslant |\tilde{\lambda}| \cdot \widetilde{C}\|v_1 - v_2\|_V,$$

где $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ — две произвольные функции из пространства V, число $\widetilde{C}$ определяется лишь числами α_1–α_4, β_1–β_4, C_0. Если теперь число $\tilde{\lambda}$ настолько малое, что выполняется неравенство $|\tilde{\lambda}| \cdot \widetilde{C} < 1$, то оператор G сжимающий. Неподвижная точка этого оператора даст функцию $u(x,t)$, являющуюся решением из пространства V краевой задачи (1), (2_λ), (3_λ), (4). А это и означает, что число λ при указанном выше ограничении на число $\tilde{\lambda}$ будет принадлежать множеству Λ и, далее, — что множество Λ открыто.

Докажем теперь, что множество Λ замкнуто.

Пусть $\{\lambda_m\}$ — последовательность чисел из множества Λ, сходящаяся к числу λ_0, $\{u_m(x,t)\}$ — последовательность решений задач (1),

(2_{λ_m}), (3_{λ_m}), (4). Положим $w_{mk}(x,t) = u_m(x,t) - u_k(x,t)$. Для функции $w_{mk}(x,t)$ имеют место равенства

$$Lw_{mk}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q,$$

$$w_{mk}(x,0) = \lambda_m[\Phi_1 w_{mk} + \Phi_2 w_{mk}] + (\lambda_m - \lambda_k)[\Phi_1 u_k + \Phi_2 u_k],$$

$$\begin{aligned} w_{mkt}(x,0) = \lambda_m[\Psi_{01} w_{mk} + \Psi_{02} w_{mk} + \Psi_{11} w_{mkt} + \Psi_{12} w_{mkt}] \\ + (\lambda_m - \lambda_k)[\Psi_{01} u_k + \Psi_{02} u_k + \Psi_{11} u_{kt} + \Psi_{12} u_{kt}], \end{aligned}$$

$$w_{mk}(0,t) = w_{mk}(1,t) = 0.$$

Оценка (21) дает для функций $w_{mk}(x,t)$ неравенство

$$\begin{aligned} \|w_{mk}\|_V \leqslant \widetilde{C}|\lambda_m - \lambda_k|[\|\Psi_{01} u_k + \Psi_{02} u_k + \Psi_{11} u_{kt} + \Psi_{12} u_{kt}\|_{W_2^1(D)}] \\ + \widetilde{C}|\lambda_m - \lambda_k|[\|\Phi_1 u_k + \Phi_2 u_k\|_{W_2^2(D)}]. \quad (22) \end{aligned}$$

Условия (9) и вновь оценка (21) влекут равномерную ограниченность последовательностей $\{\|\Phi_1 u_k + \Phi_2 u_k\|_{W_2^2(D)}\}$ и $\{\|\Psi_{01} u_k + \Psi_{02} u_k + \Psi_{11} u_{kt} + \Psi_{12} u_{kt}\|_{W_2^1(D)}\}$. Сходимость последовательности $\{\lambda_m\}$ и неравенство (22) означают тогда, что последовательность $\{u_m(x,t)\}$ фундаментальна в пространстве V. Следовательно, существует функция $u(x,t)$, принадлежащая пространству V и такая, что $u_m(x,t) \to u(x,t)$ при $m \to \infty$ в пространстве V. Очевидно, что для предельной функции $u(x,t)$ будут выполняться уравнение (1) и условие (4). Далее, равенства

$$\begin{aligned} \lambda_m[\Phi_1 u_m + \Phi_2 u_m] - \lambda_0[\Phi_1 u + \Phi_2 u] = (\lambda_m - \lambda_0)[\Phi_1 u_m + \Phi_2 u_m] \\ + \lambda_0[\Phi_1(u_m - u) + \Phi_2(u_m - u)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_m[\Psi_{01} u_m + \Psi_{02} u_m + \Psi_{11} u_{mt} + \Psi_{12} u_{mt}] - \lambda_0[\Psi_{01} u + \Psi_{02} u + \Psi_{11} u_t + \Psi_{12} u_t] \\ = (\lambda_m - \lambda_0)[\Psi_{01} u_m + \Psi_{02} u_m + \Psi_{11} u_{mt} + \Psi_{12} u_{mt}] \\ + \lambda_0[\Psi_{01}(u_m - u) + \Psi_{02}(u_m - u) + \Psi_{11}(u_{mt} - u_t) + \Psi_{12}(u_{mt} - u_t)], \end{aligned}$$

условия (9), сходимость последовательностей $\{\lambda_m\}$, $\{u_m(x,t)\}$ и оценка (21) дают сходимость $\lambda_m \Phi_1 u_m \to \lambda_0 \Phi_1 u$, $\lambda_m \Phi_2 u_m \to \lambda_0 \Phi_2 u$ при $m \to$

∞ в пространстве $W_2^2(D)$, $\lambda_m\Psi_{01}u_m \to \lambda_0\Psi_{01}u$, $\lambda_m\Psi_{02}u_m \to \lambda_0\Psi_{02}u$, $\lambda_m\Psi_{11}u_{mt} \to \lambda_0\Psi_{11}u_t$, $\lambda_m\Psi_{12}u_{mt} \to \lambda_0\Psi_{12}u_t$ при $m \to \infty$ в пространстве $W_2^1(D)$.

Но тогда для предельной функции $u(x,t)$ будут выполняться условия (2_{λ_0}), (3_{λ_0}).

Принадлежность функции $u(x,t)$ пространству V, выполнение для нее уравнения (1) и условий (2_{λ_0}), (3_{λ_0}), (4) означают, что число λ_0 будет принадлежать множеству Λ. Принадлежность предельной точки множества ему же и означает его замкнутость.

Итак, множество Λ непусто, открыто и замкнуто. Следовательно, оно совпадает со всем отрезком [0,1]. Но тогда краевая задача (1)–(4) будет иметь решение, принадлежащее пространству V.

Единственность решения краевой задачи (1)–(4) доказывается методом от противного. Пусть задача имеет более одного решения.

Пусть $u(x,t)$, $v(x,t)$ — два ее произвольных решения. Тогда верны равенства

$$u_{tt} - Au_t - Bu = f(x,t), \quad v_{tt} - Av_t - Bv = f(x,t).$$

Составим разность $w = u - v$. Для функции $w(x,t)$ имеют место равенства

$$w_{tt} - Aw_t - Bw = 0, \quad w(x,0) = \Phi_1 w + \Phi_2 w,$$
$$w_t(x,0) = \Psi_{01}w + \Psi_{02}w + \Psi_{11}w_t + \Psi_{12}w_t, \quad w(0,t) = w(1,t) = 0.$$

Повторим рассуждения, аналогичные приведенным ранее. Придем к следующей оценке:

$$\|w\|_V \leqslant C_0 \cdot 0.$$

Следовательно, $w \equiv 0$. А это и означает, что решение краевой задачи (1)–(4) единственно.

Теорема полностью доказана.

Приведем примеры операторов $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{11}, \Psi_{12}$, удовлетворяющих всем условиям теоремы.

В качестве операторов Φ_1, Ψ_{01} и Ψ_{11} можно взять операторы

$$\Phi_1 v = \int\limits_0^T K_1(x,t)v(x,t)\,dt, \quad \Psi_{01} v = \int\limits_0^T K_2(x,t)v(x,t)\,dt,$$

$$\Psi_{11} v = \int\limits_0^T K_3(x,t)v(x,t)\,dt$$

с гладкими функциями $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ и $K_3(x,t)$; в качестве операторов Φ_2, Ψ_{02} и Ψ_{12} можно взять следующие операторы:

$$\Phi_2 v = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x)v(x,t_k), \quad \Psi_{02} v = \sum_{k=1}^{p} \beta_k(x)v(x,t_k^*),$$

$$\Psi_{12} v = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k(x)v(x,t_k^{**}),$$

$0 < t_1 < \cdots < t_m \leqslant T$, $0 < t_1^* < \cdots < t_p^* \leqslant T$, $0 < t_1^{**} < \cdots < t_r^{**} \leqslant T$, $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $\gamma_k(x)$ — гладкие функции. Условия (10) будут выполняться при выполнении условий малости на функции $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$, $K_3(x,t)$, $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$ и $\gamma_k(x)$.

Можно привести и другие примеры.

Заметим также следущее. Результат, аналогичный полученному в работе, имеет место и в многомерном случае. Все выкладки вполне соответствуют приведенным выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Керефов А. А.* Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 5, № 1. С. 74–78.
2. *Chabrowski J.* On nonlocal problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. 1984. N. 93. P. 109–131.
3. *Chabrowski J.* On the nonlocal problem with a functional for parabolic equation // Funkcial. Ekvac. Ser. Futern. 1984. N. 27. P. 101–123.
4. *Шелухин В. В.* Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 154–165.
5. *Шелухин В. В.* Нелокальные по времени задачи для уравнений гидродинамики и вариационные принципы: Дис. … д.ф-м.н. Новосибирск, 1992.

6. *Либерман Г. М.* Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. В честь акад. О. А. Ладыженской. Т. 1. Новосибирск, 2002. С. 233–254.

7. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.

8. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.

г. Стерлитамак *15 октября 2004 г.*

УДК 517.958:57

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ЖЕРТВЫ-ХИЩНИК»

Е. Т. Софронов

В статье рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1 - bx_2 - ax_3),\\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - bx_1 - x_2 - bx_3), \qquad (1)\\ \dot{x}_3 &= -x_3(r - ax_1 - bx_2 - x_3), \end{aligned}$$

где a, b, r — положительные постоянные, x_i рассматриваются в положительной области, т. е. $x_i > 0$. Такая система уравнений может быть математической моделью в экосистеме типа «жертвы-хищник». В работе устанавливается существование устойчивого состояния равновесия при определенных условиях, налагаемых на параметры. Эти условия должны быть более простыми, чем условия Рауза — Гурвица, понятными для биологов, занимающихся данным вопросом.

Найдем состояние равновесия с положительными координатами из системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + bx_2 + ax_3 &= 1,\\ bx_1 + x_2 + bx_3 &= 1,\\ ax_1 + bx_2 + x_3 &= r. \end{aligned}$$

Это состояние равновесия M имеет координаты

$$x_1^* = \frac{1-b}{1+a-2b^2} + \frac{r-1}{\Delta}(b^2 - a), \quad x_2^* = \frac{1+a-2b}{1+a-2b^2} + \frac{r-1}{\Delta}b(a-1),$$
$$x_3^* = \frac{1-b}{1+a-2b^2} + \frac{r-1}{\Delta}(1-b^2). \qquad (2)$$

Возможны следующие случаи:

1) $r = 1$;
2) $r > 1,\ a > 1,\ b < 1$;
3) $r < 1,\ a > 1,\ b < 1$;
4) $r > 1,\ a < 1,\ b > 1$;
5) $r < 1,\ a < 1,\ b > 1$.

Теорема 1. *Если $r = 1$, $a > 1$, $b < 1$, то состояние равновесия M имеет положительные координаты и асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из формул (2) видно, что координаты точки положительны. Сделаем замену переменных

$$x_1 = x_1^* + y_1, \quad x_2 = x_2^* + y_2, \quad x_3 = x_3^* + y_3.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (x_1^* + y_1)(-y_1 - by_2 - ay_3), \\ \dot{y}_2 &= (x_2^* + y_2)(-by_1 - y_2 - by_3), \\ \dot{y}_3 &= (x_3^* + y_3)(ay_1 + by_2 + y_3), \end{aligned} \tag{3}$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы уравнений имеет вид

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{4}$$

где

$$a_1 = x_1^* + x_2^* - x_3^*, \quad a_2 = (1 - b^2)x_2^*(x_1^* - x_3^*) + (a^2 - 1)x_1^* x_3^*,$$
$$a_3 = (a - 1)(1 + a - 2b^2)x_1^* x_2^* x_3^*.$$

При условиях теоремы

$$x_1^* = x_3^*, \quad a_1 > 0,$$
$$a_1 \cdot a_2 - a_3 = x_2^*(a^2 - 1)x_1^{*2} + \Delta \cdot x_1^{*2} \cdot x_2^* = (a - 1) \cdot 2b^2 x_1^{*2} \cdot x_2^* > 0.$$

Отсюда следует, что состояние равновесия M асимптотически устойчиво.

Нетрудно доказать следующее предложение.

Теорема 2. *Если $r = 1$, $a < 1$, $b > 1$, то существует состояние равновесия M с положительными координатами, которое неустойчиво.*

Теорема 3. *Если $r = 1$, $a = 1$, $b \neq 1$, то существует состояние равновесия M с положительными координатами, которое неустойчиво.*

Доказательство. Из формул (2) имеем

$$x_1^* = x_3^* = \frac{1}{2(1+b)}, \quad x_2^* = \frac{1}{1+b}, \quad a_1 = x_2^*, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

Потому уравнение (4) для системы уравнений (3) имеет два нулевых корня, один отрицательный корень $\lambda = -\frac{1}{1+b}$. В системе уравнений (3) сделаем преобразование:

$$x = \frac{2}{b-1}y_1 + \frac{b}{1-b}y_2, \quad y = y_1 + y_3, \quad z = b(y_1 + y_3) + y_2.$$

Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = y + \left[x + \frac{b}{b-1}(z - by)\right] \cdot [(b^2-1)y - bz] + \frac{b}{b-1}z(z - by),\\
&\dot{y} = [(1-b^2)y + bz] \cdot [(1-b)x + (1+b^2)y - bz],\\
&\dot{z} = \lambda z + z(z - by) + b[(1-b^2)y + bz][(1-b)x + (1+b^2)y - bz].
\end{aligned} \tag{5}$$

Возьмем функцию

$$V(x, y, z) = x \cdot y - z^2 + P(x) + Q(x) \cdot z,$$

ее производную по времени t вычислим в силу системы уравнений (5). Функции $P(x)$, $Q(x)$ выберем так, чтобы в функции $\dot{V}$ не было членов вида $c(x)y$, $d(x)z$, т. е. членов, линейных относительно y, z. Тогда эти функции должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{dP}{dx}[1 + (b^2-1)x] + (1-b)(1-b^2)x(x + bQ) = 0,$$
$$\frac{dP}{dx}bx - b(1-b)x(x + bQ) - \lambda Q = 0.$$

Из этих уравнений найдем

$$Q(x) = \frac{b(b^2-1)x^2}{1-(1-b^4)x}, \quad \frac{dP}{dx} = (1-b)x + \frac{(b-1)x[1 + b^2(1-b^2)x]}{1-(1-b^4)x}.$$

При таком выборе функций $P(x)$, $Q(x)$ функция $\dot{V}$ имеет вид

$$\dot{V} = -2\lambda z^2 + y^2 + W(x, y, z).$$

Она положительна и обращается в нуль только при $y = z = 0$. А функция $V(x, y, z)$ при $x = 0$ отрицательна, $P(x)$ есть ряд, начинающийся с членов третьего порядка. Поэтому существует область $V > 0$, где $\dot{V} > 0$. Теперь, применяя теорему Н. Г. Четаева [1], доказываем нашу теорему.

Пусть теперь рассматривается второй случай: $r > 1$, $a > 1$, $b < 1$.

Теорема 4. *Если*

$$a > 1, \quad b < 1, \quad 0 < r - 1 < \frac{a-1}{1+b}, \tag{6}$$

то существует состояние равновесия M с положительными коэффициентами, которое асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из (2) видно, что $x_1^* > 0$. Покажем, что при выполнении неравенств (6) $x_2^* > 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1+a-2b}{1+a-2b^2} &+ \frac{(r-1)b(a-1)}{(1-a)(1+a-2b^2)} \\ &> \frac{1+a-2b}{1+a-2b^2} + \frac{b(a-1)^2}{(1-a)(1+a-2b^2)(1+b)} \\ &= \frac{(1+b)(1+a-2b) - b(a-1)}{(1+a-2b^2)(1+b)} = \frac{1}{1+b}. \end{aligned}$$

Итак, все x_i^* больше 0. Нетрудно показать, что $a_1 > 0$, $a_3 > 0$. Выражение $a_1 \cdot a_2 - a_3$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 - a_3 = (1-b^2)x_2^*(x_1^* - x_3^*)^2 + \big[(1-b^2)x_2^{*2} + (a^2-1)x_1^* x_3^*\big](x_1^* - x_3^*) \\ + 2(a-1)b^2 x_1^* x_2^* x_3^*. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $x_1^* - x_3^* = \frac{r-1}{a-1} > 0$, то $a_1 \cdot a_2 - a_3 > 0$. Следовательно, состояние равновесия M асимптотически устойчиво. Рассмотрим теперь $r < 1$, $a > 1$, $b < 1$.

Теорема 5. *Пусть $r < 1$, $a > 1$, $b < 1$. Тогда существует положительное число r_0 такое, что при $-r_0 < r - 1 < 0$ состояние равновесия M с положительными коэффициентами асимптотически устойчиво.*

Доказательство. При условиях теоремы $x_2^* > 0$, $x_3^* > 0$. Из неравенства $x_1^* > 0$ следует, что

$$\frac{(1-b)(1-a)}{a-b^2} < r - 1 < 0.$$

При таких значениях $(r-1)$ имеем

$$a_1 = \frac{1+a-2b}{1+a-2b^2} + \frac{r-1}{\Delta}(b-1)(1+a+2b) > \frac{1+a-2b}{1+a-2b^2} - \frac{(1-b)^2(1+a+2b)}{(a-b^2)(1+a-2b^2)} > 0.$$

Выражение $a_1a_2 - a_3$ можно представит в виде

$$a_1a_2 - a_3 = (1-b^2)x_2^*(x_1^* + x_2^* - x_3^*)\left[x_1^* - x_3^* + \frac{a^2-1}{(1-b^2)x_2^*}x_1^*x_3^*\right] + (1-a)(1+a-2b^2)x_1^*x_2^*x_3^*.$$

Отсюда следует, что из уравнения $a_1a_2 - a_3 = 0$ можно найти два отрицательных значения: $(x_1^* - x_3^*)$ и $a_1a_2 - a_3 > 0$ при $(x_1^* - x_3^*) = 0$. Поэтому существует положительное число r_1 такое, что $a_1a_2 - a_3 > 0$ при $-r_1 < r - 1 < 0$. Тогда, учитывая неравенства (8), можно утверждать, что $a_1a_2 - a_3 > 0$ при $-r_0 < r - 1 < 0$, где

$$r_0 = \min\left\{r_1; \frac{(1-b)(a-1)}{a-b^2}\right\}.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай $r > 1$, $a < 1$, $b > 1$.

Теорема 6. *Пусть $r > 1$, $a < 1$, $b > 1$. Тогда существует положительное r_0 такое, что при*

$$0 < r_0 < r - 1 < \frac{(b-1)(1-a)}{b^2-a}$$

состояние равновесия M с положительными координатами асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$x_2^* > 0, \quad x_3^* > 0.$$

Координата x_1^* больше 0, если

$$0 < r - 1 < \frac{(b-1)(1-a)}{b^2 - a},$$

и

$$a_1 = \frac{1+a-2b}{1+a-2b^2} + \frac{r-1}{\Delta}(b-1)(1+a+2b)$$
$$> \frac{1+a-2b}{1+a-2b^2} + \frac{(b-1)^2(1+a+2b)}{(1+a-2b^2)(b^2-a)} > 0$$

при $a < 1$, $1 + a - 2b^2 < 0$. Если a_2 представить как квадратный многочлен относительно $\frac{r-1}{1-a}$, т. е.

$$(1+a-2b^2)^2 a_2 = C_0 \left(\frac{r-1}{1-a}\right)^2 + C_1 \left(\frac{r-1}{1-a}\right) + C_2,$$

где $C_0 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 < 0$, то $a_2 = 0$ имеет один отрицательный, один положительный корни. Далее, имеем

$$a_2 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0$$

при

$$\frac{r-1}{1-a} = \frac{b-1}{b^2-a}.$$

Тогда найдется такое число $r_0 > 0$, что

$$a_1 a_2 - a_3 > 0$$

при

$$0 < r_0 < r - 1 < \frac{(b-1)(1-a)}{b^2-a}.$$

Отсюда следует, что состояние равновесия M асимптотически устойчиво при условиях

$$a < 1, \quad b > 1, \quad 0 < r_0 < r - 1 < \frac{(b-1)(1-a)}{b^2-a}.$$

Теорема доказана.

При выполнении условий $r - 1 < 0$, $a < 1$, $b > 1$ из равенства (7) следует, что $a_1 a_2 - a_3 < 0$. Поэтому состояние равновесия M с положительными координатами неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Г. Четаев.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955.

г. Якутск *20 мая 2004 г.*

УДК 512.6:519.61

О РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ БЕРНУЛЛИ

Ф. М. Федоров, М. Е. Абрамова

В работе [1] предложен обобщенный метод Бернулли для решения полиномиальных уравнений конечной (n-й) степени. В настоящей заметке рассматривается применение обобщенного метода Бернулли к решению алгебраических уравнений бесконечного порядка, основная идея которого изложена в [2]. Как показано в работе [2], аналитическое решение некоторых бесконечных систем алгебраических уравнений сводится к нахождению минимального по модулю корня алгебраического уравнения бесконечного порядка, т. е. к вычислению вещественных нулей аналитической функции.

Пусть задано полиномиальное уравнение с вещественными коэффициентами степени m:

$$p(y) \equiv a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \cdots + a_{m-1} y + a_m = 0, \quad a_0 \neq 0. \tag{1}$$

Не нарушая общности, можно положить $a_0 \equiv 1$. Следуя работе [1], в зависимости от значения степени m уравнения (1) введем характеристические определители порядка n вида: при $n > m$

$$A_n(m) = \begin{vmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & -a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ (-1)^m a_m & (-1)^{m-1} a_{m-1} & (-1)^{m-2} a_{m-2} & \ldots & 0 \\ 0 & (-1)^m a_m & (-1)^{m-1} a_{m-1} & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

и при $n \leqslant m$

$$A_n(m) = \begin{vmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & -a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ (-1)^{n-1} a_{n-1} & (-1)^{n-2} a_{n-2} & (-1)^{n-3} a_{n-3} & \ldots & 1 \\ (-1)^n a_n & (-1)^{n-1} a_{n-1} & (-1)^{n-2} a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

В выражении (1) сделаем замену $x = \frac{1}{y}$ и устремим m в бесконечность, тогда вместо полинома $p(y)$ получим аналитическую функцию $f(x)$ (в случае сходимости соответствующего ряда) и рассматриваемая задача заменяется задачей определения нулей функции $f(x)$:

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{4}$$

Заметим, что в этом случае, очевидно, определитель $A_n(m)$ выражается только соотношением (3), поскольку $m = \infty$ и поэтому вместо $A_n(m)$ можем писать просто A_n. Заметим также, что в работе [2] вместо коэффициентов a_n взяты коэффициенты $(-1)^n a_n$. Аналогично работе [1] введем понятия характеристических определителей и характеристической последовательности.

Определение 1. Если степенной ряд, составленный из коэффициентов a_n, сходится, то уравнение (4) называется *алгебраическим* (*полиномиальным*) *уравнением бесконечной степени.*

Определение 2. Определители A_n вида (3) называются *характеристическими определителями порядка* n полиномиального уравнения бесконечной степени (4).

Рассмотрим последовательность характеристических определителей: $A_0 = 1$; $A_1 = -a_1$;

$$A_2 = \begin{vmatrix} -a_1 & 1 \\ a_2 & -a_1 \end{vmatrix}; \quad A_3 = \begin{vmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 \end{vmatrix}; \quad \ldots; A_n; \ldots, \tag{5}$$

где A_n определяется формулой (3). Очевидно, последовательность главных миноров определителя (3) составляют последовательность (5).

Определение 3. Последовательность (5) называется *характеристической последовательностью* полиномиального уравнения бесконечной степени (4).

Условие 1. Пусть последовательность $\{a_p\}$ такая, что $A_n \neq 0$ для любого натурального n.

При выполнении условия 1 в случае полинома бесконечного порядка можно ввести так же, как и в работе [1], две последовательности: исходя из характеристической последовательности составляем последовательность $\frac{A_n}{A_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$, и исходя из коэффициентов a_i ряда (4) составляем другую последовательность:

$$s_n = -a_1 - \sum_{p=2}^{n} \frac{a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{n-k}}, \quad s_1 = -a_1, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{6}$$

Так же, как и в работах [1, 2], можно показать, что эти последовательности совпадают, т. е.

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = s_n = -a_1 - \sum_{p=2}^{n} \frac{a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{n-k}}, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{7}$$

Действительно, разлагая определитель A_n по первым строкам, получим

$$A_n = -a_1 A_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & -a_1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ (-1)^n a_n & (-1)^{n-2} a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -a_3 & 1 & \dots & 0 \\ a_4 & -a_1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ (-1)^n a_n & (-1)^{n-3} a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2} - a_3 A_{n-3} - \dots - a_n. \quad (8)$$

Очевидно, при $n = 1$ соотношение (7) верно. Пусть для $m \leqslant n-1$ равенство (7) выполняется. По индуктивному предположению справедливо

$$\frac{A_{n-1}}{A_{n-k}} = \frac{A_{n-1} A_{n-2}}{A_{n-2} A_{n-3}} \dots \frac{A_{n-k+1}}{A_{n-k}} = \prod_{k=1}^{n-1} s_{n-k}. \quad (9)$$

Разделив выражение (8) на A_{n-1} и учитывая равенство (9), получим

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = -a_1 - a_2 \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} - a_3 \frac{A_{n-3}}{A_{n-1}} - \dots - a_{n-1} \frac{A_1}{A_{n-1}} - a_n \frac{A_0}{A_{n-1}}$$

$$= -a_1 - \sum_{p=2}^{n} \frac{a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{n-k}} = s_n,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. В случае $A_k = 0$ (или $s_k = 0$) обе последовательности A_n/A_{n-1} и s_n обрываются на соответствующем шаге.

Непосредственно из равенства $\frac{A_n}{A_{n-1}} = s_n$ вытекают следствия.

Следствие 1. *При выполнении условия* 1 *справедливо равенство*

$$A_n = \prod_{j=1}^{n} s_j \quad \forall\, n < \infty. \quad (10)$$

Следствие 2. *При выполнении условия* 1 *справедливо неравенство*

$$s_n \neq 0 \quad \forall\, n < \infty. \tag{11}$$

Далее, введем следующее

Условие 2. Пусть степенной ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p a_p x^p = f(x) \tag{12}$$

абсолютно сходится в $|x| \leqslant r > 0$, где r — радиус сходимости ряда (12), и пусть существует ближайшая от нуля точка x_0 на вещественной оси такая, что $|x_0| \leqslant r$ и $f(x_0) = 0$, т. е.

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p a_p x_0^p = 0, \tag{13}$$

причем полагаем, что в области $x \leqslant |x_0|$ функция $f(x)$ не имеет других (комплексных) нулей.

Лемма 1 [3]. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* x_1, *отличном от нуля, то он абсолютно сходится для всех* x, $|x| < |x_1|$.

Теорема 1. *При выполнении условия* 2 *обратная функция* $1/f(x)$ *в области* $x < |x_0|$ *разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \tag{14}$$

где A_n — *характеристические определители* (5) *и радиус сходимости* R *ряда* (14) *равен* $|x_0|$, *т. е.* $R = |x_0|$.

Доказательство. Действительно, по лемме обратная функция $1/f(x)$ в области $x < |x_0|$ разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

причем коэффициенты d_n однозначно определяются из бесконечной системы уравнений [4]

$$d_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} = 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots . \tag{15}$$

Покажем, что $d_n = A_n$. Действительно, $d_0 = 1 = A_0$. Далее, из (15) имеем

$$d_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k d_{n-k}.$$

В силу разложения (7) получим $d_n = A_n$, т. е.

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \tag{16}$$

что и требовалось доказать.

Условие 3. Пусть коэффициенты a_i заданы таким образом, что выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+m}A_{n-1} - A_{n+m-1}A_n}{A_{n+m-1}A_{n-1}} = 0 \quad \forall\, m = 1, 2, \dots . \tag{17}$$

Естественно, такие последовательности существуют. Например, для последовательности $a_n = (-1)^n/n!$ нетрудно проверить выполнение условия (17). Действительно, сначала составляем функцию $f(x)$ по формуле (4)

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{p!} x^p = \exp(-x).$$

Теперь разлагаем обратную функцию $1/\exp(-x)$ в степенной ряд, что возможно на всей вещественной оси:

$$\frac{1}{\exp(-x)} = \exp(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} x^p = \sum_{p=0}^{\infty} A_p x^p.$$

Отсюда следует, что $A_n = 1/n!$. Далее вычисляем

$$\frac{A_{n+m}A_{n-1} - A_{n+m-1}A_n}{A_{n+m-1}A_{n-1}} = \frac{-m}{n(n+m)}.$$

Следовательно, условие (17) выполняется для любого натурального m.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* a_i *удовлетворяют условиям* 1–3 *и* $|x_0|$ *является единственным, причем вещественным, нулем функции* $f(x)$ *в области* $x \leqslant |x_0|$. *Тогда существует предел последовательности* (6), *верно равенство*

$$|s| = \frac{1}{|x_0|}, \quad \text{где } \lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

и возможен предельный переход под знаком суммы в выражении (6), *т. е. имеет место равенство*

$$s = -a_1 - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{a_p}{s^{p-1}}. \tag{18}$$

Доказательство. В силу (7) из условия (18) вытекает, что

$$|s_{n+m} - s_n| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \quad \forall\, m = 1, 2, \ldots .$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A_{n-1}} = s,$$

причем s — вещественное число, поскольку последовательность (6) может иметь только вещественный предел. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{|A_{n-1}|} = |s| = \frac{1}{R},$$

где R — радиус сходимости ряда (16). Очевидно $R = |x_0|$, поэтому $|s| = 1/|x_0|$.

Докажем предельный переход. Пусть s — предел последовательности (6), тогда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{s^p} = 0.$$

Следовательно, для некоторого N справедливо

$$1 + \sum_{p=1}^{N} \frac{a_p}{s^p} + \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{a_p}{s^p} = 0, \tag{19}$$

где последнее слагаемое стремится к нулю при $N \to \infty$. Разделив выражение (6) на s_n ($s_n \neq 0$), выпишем последовательность (6) в виде

$$-1 - \sum_{p=1}^{N} \frac{a_p}{\prod\limits_{k=0}^{p-1} s_{N-k}} = 0. \tag{20}$$

Складывая (19) и (20) и переходя к пределу $N \to \infty$ в полученном выражении, получим

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{a_1}{s} + \frac{1}{s}\sum_{p=2}^{N}\frac{a_p}{s^{p-1}}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{a_1}{s_N} + \frac{1}{s_N}\sum_{p=2}^{N}\frac{a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{N-k}}\right).$$

Отсюда имеем

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{p=2}^{N}\frac{a_p}{s^{p-1}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{p=2}^{N}\frac{a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} s_{N-k}}. \tag{21}$$

Переходя в выражении (6) к пределу, с учетом (21) получим (18), что и требовалось доказать.

Отметим, что теорема 2 имеет силу и при $s = 0$, т. е. при $R = |x_0| = \infty$. Вернемся к приведенному выше примеру. Поскольку $\exp(x)$ является аналитической функцией на всей числовой оси, т. е. $R = |x_0| = \infty$, по теореме 2 имеем $s = 1/|x_0| = 0$. Действительно, непосредственные вычисления по алгоритму (6) дают $s_n = 1/n$, отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$. Данный пример замечателен тем, что на первый взгляд из вида (6) кажется, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$ невозможно, поскольку второй член неограниченно возрастает при $n \to \infty$.

В заключение отметим следующее

Замечание 2. В силу рекуррентности уравнения (8) и равенства $s_n = A_n/A_{n-1}$ подход, описанный в данной заметке, можно называть обобщенным методом Бернулли.

Таким образом, на основании изложенного и результатов работ [1, 2] можно заключить, что обобщенный метод Бернулли позволяет находить корни алгебраического уравнения конечной или бесконечной степени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М.* О новом подходе изучения вещественных корней полиномиального уравнения // Мат. ЯГУ. 2003. Т. 10, № 1. С. 105–113.

2. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.

3. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1964. Т. 2.

4. *Математическая энциклопедия.* М.: Советская энциклопедия, 1988. Т. 5. С. 218–222.

г. Якутск *18 июня 2004 г.*

УДК 512.6:519.61

О РЕШЕНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ф. М. Федоров, Т. Л. Осипова

Бесконечной системой линейных алгебраических уравнений с бесконечным множеством неизвестных называется система уравнений

$$\begin{aligned} &a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... = b_1, \\ &a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_{i,k}$ — известные коэффициенты, b_i — свободные члены и x_k — неизвестные. Система численных значений величин $x_1, x_2, \dots$ называется *решением системы* (1), если после подстановки этих значений в левую часть равенств (1) мы получим сходящиеся ряды и все эти равенства будут удовлетворены.

Теория бесконечных систем линейных уравнений возникла и развилась в связи с теми приложениями, которые она имеет в вопросах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, в теории интегральных уравнений и в особенности при решении граничных задач математической физики [1, 2].

Теорию бесконечных систем линейных уравнений с бесчисленным множеством неизвестных начали разрабатывать в конце XIX — начале XX вв., и, как отмечает автор работы [1], имеется достаточно обширная литература, посвященная ей. Следует отметить, что теория имеет вполне законченный вид (с точки зрения приближенного численного решения) только в тех случаях, когда система регулярная и вполне регулярная или имеет мажорантную систему. Кроме того, для нормальной системы может быть развита теория определителей [1]. Вместе с тем, как отмечено в работе [1], до сих пор теория бесконечных систем линейных уравнений не получила вполне законченного вида, в настоящее время появляются эпизодические работы типа [3–6]. В частности, автор работы [4] исследует разрешимость системы, коэффициенты которой обладают следующим свойством: для всякого натурального числа $n \geqslant 2$ найдется строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_i такая, что

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{j+1,n_i}}{a_{j,n_j}}\right| = \infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Подавляющее большинство работ, в которых предлагаются методы решения (алгоритмически реализуемые без труда) бесконечных систем линейных уравнений, посвящено приближенному численному решению.

Данная работа в отличие от упомянутых посвящена аналитическому решению однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида [2]

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_{ij}x_i = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Методом Гаусса, используя математическую индукцию, систему (2) можно свести к ступенчатому виду:

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_{ij}x_i = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Далее предполагаем, что $a_{j,j} \neq 0$, т. е. определитель усеченной системы (3) любого порядка n не равен нулю. Рассмотрим усеченную систему вида (3), при этом (чтобы иметь ненулевое решение) число уравнений равно n, а число неизвестных равно $n+1$.

Теорема 1. *Пусть задана* СЛАУ

$$\sum_{i=j}^{n} a_{ji}x_i = 0, \quad a_{jj} \neq 0, \ j = \overline{0, n-1}. \tag{4}$$

Тогда неизвестные x_i выражаются через x_n следующим образом:

$$x_i = (-1)^{n-i} x_n \prod_{p=1}^{n-i} S_p, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} S_j = \frac{a_{n-j,n-j+1}}{a_{n-j,n-j}} + \sum_{p=2}^{j} \frac{(-1)^{p+1} a_{n-j,n-j+p}}{a_{n-j,n-j} \prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{j-k}}, \\ S_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{2, n-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. Подставляя (5) в левую часть (4), имеем

$$\sum_{i=j}^{n} a_{ji} x_i = (-1)^{n+j} a_{jj} x_n \prod_{k=1}^{n-j-1} S_k \Bigg[S_{n-j} - \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^p a_{j,j+p} \prod\limits_{k=1}^{n-j-p} S_k}{a_{j,j} \prod\limits_{k=1}^{n-j-1} S_k} \Bigg],$$

причем для унификации обозначений будем считать, что $\prod\limits_{k=1}^{0} S_k = 1$. Теперь, учитывая соотношение

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-j-p} S_k}{\prod\limits_{k=1}^{n-j-1} S_k} = \left(\prod_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k} \right)^{-1}$$

и используя выражение (6), убеждаемся в справедливости (5).

Следствие 1. *В системе* (4) *соседние неизвестные связаны друг с другом следующим образом*:

$$x_i = -S_{n-i} x_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{7}$$

Замечание 1. Систему (4) можно рассмотреть двояко: во-первых, как самостоятельную конечную систему, во-вторых, как урезанную от бесконечной системы (3). В последнем случае, естественно, вместо x_i подразумеваются их приближенные значения $\overset{n}{x}_i$ и для простоты, предполагая, что $x_i = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{n}{x}_i$, опускаем верхний знак. Разумеется, такие системы существуют, хотя бы регулярные системы, для которых получена соответствующая теорема [1]. В этих терминах выражение (7) примет вид

$$x_i = -(\lim_{n\to\infty} S_{n-i})x_{i+1}, \quad i = \overline{0,\infty}. \tag{8}$$

Таким образом, исследование разрешимости бесконечной системы (3) сводится к изучению сходимости предела (6), который можно переписать в виде

$$S_{n-j} = \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_{j,j+p}}{a_{j,j} \prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k}}, \quad S_1 = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}, \quad j = \overline{0, n-2}.$$

Систему (4) можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p} x_{j+p} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad a_{jj} \neq 0. \tag{9}$$

Предположим теперь, что коэффициенты $a_{j,j+p}$ в системе (9) имеют вид

$$a_{j,j+p} = a_p a_{jj} \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k}, \quad p \geqslant 1. \tag{10}$$

Как и выше, для унификации обозначений будем считать, что $a_0 = 1$ и $\prod\limits_{k=0}^{-1} \bar{a}_{j+k} = 1$, тогда можно принять $p \geqslant 0$.

Теорема 2. *Если коэффициенты системы* (9) *представимы в виде* (10), *то решение системы* (9) *сводится к решению системы*

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_p y_{j+p} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{11}$$

при этом неизвестные y_i выражаются через y_n по формуле

$$y_i = (-1)^{n-i} y_n \prod_{k=1}^{n-i} S_k, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{12}$$

где

$$S_{n-j} = a_1 + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_p}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k}}, \quad S_1 = a_1, \quad j = \overline{0, n-2}. \tag{13}$$

Доказательство. Легко видеть, что, подставляя (10) в систему (9) и обозначая

$$y_{j+p} = \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} x_{j+p}, \tag{14}$$

получим систему (11), при этом каждое j-е уравнение в (9) умножим на выражение $\prod\limits_{k=1}^{j-1} \bar{a}_{j-k}$.

С учетом (5) выражение (14) можно записать в виде

$$y_{j+p} = (-1)^{n-j-p} y_n \frac{\prod\limits_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k}}{\prod\limits_{k=0}^{n-j-1} \bar{a}_{j+k}} \prod_{k=1}^{n-j-p} S_k. \tag{15}$$

Для коэффициентов (10) из соотношения (6) следует, что

$$S_{n-j} = \bar{a}_j \left[a_1 + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_p \prod\limits_{k=1}^{p-1} \bar{a}_{j+k}}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k}} \right] = \bar{a}_j \overline{S}_{n-j}, \tag{16}$$

где

$$\overline{S}_{n-j} = a_1 + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1} a_p \prod\limits_{k=1}^{p-1} \bar{a}_{j+k}}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} (\overline{S}_{n-j-k} \bar{a}_{j+k})}.$$

Отсюда и вытекает равенство (13). Кроме того, $\overline{S}_1 = a_1$, поскольку справедливо (16). Так как

$$\frac{\prod\limits_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} \prod\limits_{k=1}^{n-j-p} \bar{a}_{n-k}}{\prod\limits_{k=0}^{n-j-1} \bar{a}_{j+k}} = 1,$$

то, учитывая (16), из соотношения (15) получим (12), что и требовалось доказать.

Замечание 2. Сходимость последовательности (13) рассмотрена в работе [7].

Перейдем к рассмотрению конкретного примера. Пусть задана следующая бесконечная однородная СЛАУ:

$$\begin{gathered}
x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = 0, \\
2 \cdot 3x_1 + 4 \cdot 5x_2 + \cdots + 2n(2n+1)x_n + \cdots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(2n-1)!x_{n-1} + 4.5\ldots n(2n+1)x_n + \cdots = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{17}$$

Очевидно, система (17) уже имеет ступенчатый вид. Для того чтобы применить теорему 1 или 2, необходимо урезать бесконечную систему конечной системой.

Тогда систему (17) можно записать в виде

$$\sum_{i=j}^{n} \frac{(2i+1)!}{(2(i-j)+1)!} x_i = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{18}$$

при этом необходимо помнить, что под x_i подразумевается $\overset{n}{x}_i$. Очевидно, система (18) имеет вид системы (4), и, следовательно, справедливы утверждение теоремы 1 и ее следствия.

Заметим, что систему (18) можно преобразовать к виду (9), при этом коэффициенты системы принимают вид (10)

$$a_{j,j+p} = \frac{1}{(2p+1)!}(2j+1)! \prod_{k=o}^{p-1}(2j+2k+3)(2j+2k+2),$$

т. е.

$$a_p = \frac{1}{(2p+1)!}; \quad a_{jj} = (2j+1)!; \quad \prod_{k=0}^{p-1} \bar{a}_{j+k} = \frac{(2j+2p+1)!}{(2j+1)!}.$$

Очевидно, ряд, составленный из коэффициентов a_p, будет сходящимся, следовательно, справедлива теорема 2 работы [7], и в дальнейшем можно использовать ее.

Связывая каждое неизвестное с последующим, на основании следствия 1 имеем

$$x_i = -S_{n-i}\frac{(2i+3)!}{(2i+1)!}x_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{19}$$

$$S_j = \frac{1}{3!} + \sum_{p=2}^{j} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)!\prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{j-k}}, \ j = \overline{2, n}, \quad S_1 = \frac{1}{3!}. \tag{20}$$

Действительно, подставляя выражение

$$\frac{a_{j,j+p}}{a_{jj}} = \frac{(2j+(2p+1))!}{(2i+1)!(2p+1)}$$

в (6), получим

$$S_{n-j} = \frac{(2j+3)!}{(2j+1)!}\left[\frac{1}{3!} + \sum_{p=2}^{n-j} \frac{(-1)^{p+1}(2j+4)\dots(2j+2p+1)}{(2i+1)!\prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k}}\right] = \frac{(2j+3)!}{(2j+1)!}\overline{S}_{n-j}. \tag{21}$$

Рассмотрим

$$\prod_{k=1}^{p-1} S_{n-j-k} = \prod_{k=1}^{p-1}(2j+2k+2)(2j+2k+3)\overline{S}_{n-j-k} = (2j+4)(2j+5)\dots(2j+2p+1)\prod_{k=1}^{p-1}\overline{S}_{n-j-k}.$$

Подставляя последнее выражение в (21), а (21) в (7), приходим к соотношениям (19) и (20), при этом непосредственно из последнего уравнения системы (18) следует $S_1 = 1/3!$. Здесь для простоты опустили черточку над S_j. На основании теоремы 2 из [7] существует предел

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, причем в выражении (20) возможен предельный переход, тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \frac{1}{3!} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)! \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{p-1} S_{n-k}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} S^{1-p}}{(2p+1)!}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} S^{1-p}}{(2p+1)!} = 0, \quad \text{т. е. } \sin(1/\sqrt{S}) = 0. \tag{22}$$

Поэтому $S = 1/\pi^2 k^2$, $k = 1, 2 \ldots$, а непосредственные вычисления по алгоритму (20) убеждают, что $S = 1/\pi^2$.

Следовательно, соотношение (19) примет вид (необходимо помнить, что по предположению $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{n}{x}_i = x_i$)

$$x_i = -\frac{(2i+3)!}{\pi^2 (2i+1)!} x_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Решая рекуррентное уравнение (23) в обратном порядке, получим

$$x_i = \frac{(-1)^i \pi^{2i}}{(2i+1)!} x_0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где x_0 — произвольное число. Подставляя (24) в бесконечную систему (17), убеждаемся, что все уравнения системы удовлетворяются, поскольку $\sin\pi = 0$. Таким образом, выражение (24) является аналитическим решением системы (17).

Замечание 3. Если уравнение типа (22) имеет несколько корней, в нашем случае — бесконечное множество корней $S_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$, то столько же различных решений имеет соответствующая бесконечная система. В данном случае такими решениями-векторами для каждого k будут

$$x_i^{(k)} = \frac{(-1)^i \pi^{2i} k^{2i}}{(2i+1)!} x_0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Замечание 4. Очевидно, все ряды, составленные из абсолютных величин коэффициентов бесконечной системы (17), не сходятся. Кроме того, не существует никакой мажорантной для нее системы, следовательно, все ранее полученные результаты не пригодны для решения рассмотренного примера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Гостехтеориздат, 1952.

2. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.

3. *Тузик А. И.* О разрешимости одной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с комплексно сопряженными неизвестными // Изв. АН БССР. Сер. мат. Минск, 1983.

4. *Abian A.* A solvable case of an infinite system of infinitelinear equations and two examples of applications // Util. Math. 1983. N 24. P. 107–124.

5. *Chew Kim Ho.* An infinite linear systems of equations // Util. Math. 1976. N 9. P. 49–57.

6. *Abian A.* Solvability of infinite systems of linear equations // Arch. Mat. 1976. V. 12, N 1. P. 43–44.

7. *Федоров Ф. М., Абрамова М. Е.* О решении алгебраических уравнений бесконечной степени обобщенным методом Бернулли // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 2. С. 66–74.

г. Якутск *18 июня 2004 г.*

УДК 517.956

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ш. Б Халилов

Первым примером эллиптической по Петровскому системы, для которой нарушалась нётеровость задачи Дирихле, является система А. В. Бицадзе [1]

$$-\Delta u + 2\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = 0, \quad -\Delta v + 2\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) = 0.$$

По аналогии с системой А. В. Бицадзе были построены примеры эллиптических по Петровскому систем уравнений второго порядка с тремя и четырьмя независимыми переменными [2, 3], а также с произвольным числом переменных [4], для которых нарушалась нётеровость задачи Дирихле. М. И. Вишик [5] определил класс сильно эллиптических систем, которые в смысле разрешимости классических граничных задач ведут себя точно так же, как одно эллиптическое уравнение, т. е. эти задачи нётеровы. Корректность же классических граничных задач для многомерных общих эллиптических по Петровскому систем, даже с постоянными коэффициентами, исследована очень мало, а также далеки от полного решения и задачи гомотопической классификации таких систем.

В данной работе исследуется система уравнений в частных производных:

$$-\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}(X)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk}(X)\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n} l_i(u_i) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

где

$$l_i(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(X)\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = \overline{1,n},$$

а $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является точкой n-мерного евклидова пространства R^n. Предполагается, что $\lambda_{ji} = -\lambda_{ji}$, $i \neq j$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \cdots = \lambda_{nn} = \lambda$, $a_{ik} = a_{ki}$ и $A \cdot \Lambda_0 = \Lambda_0 A$, где $A = (a_{ik})_n$,

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ -\lambda_{12} & 0 & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический определитель системы (1) имеет следующий вид:

$$\sigma(\xi) = (-1)^{n-1}(\lambda(X) - 1)[L(\xi)]^n, \quad L(\xi) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(X)\xi_i\xi_k.$$

Отсюда видно, что если квадратичная форма $L(\xi)$ положительно или отрицательно определенная и $\lambda(X) \neq 1$, то система уравнений (1) является эллиптической. Но характеристическая матрица системы (1) имеет собственные значения:

$$\mu_j = -L(\xi), \quad \mu_n = (\lambda(X) - 1)\lambda(\xi).$$

Если $\lambda(X) < 1$, то эти собственные значения имеют одинаковые знаки, т. е. характеристическая матрица системы является определенной. Следовательно, в этом случае система (1) является сильно эллиптической. Если $\lambda(X) > 1$, то μ_j, $j = \overline{1, n-1}$, имеют одинаковые знаки, а μ_n — противоположные им. В этом случае характеристическая матрица системы (1) не является сильно эллиптической. Если $\lambda(x) = 1$, то $\sigma(\xi) \equiv 0$ и в этом случае система (1) не является эллиптической, т. е. она вырождается. Случай $\lambda(X) < 1$ не представляет для исследования особого интереса. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $\lambda(X) > 1$. Следует отметить, что в случае, когда $L = \Delta$ и $\lambda_{ji} = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$, $\lambda(X) = 2$, система (1) совпадает с многомерным аналогом системы А. В. Бицадзе [4].

Пусть система уравнений (1) задана в некоторой ограниченной области D_1, содержащей замкнутую область $\overline{D} = D \cup S$, где граница $\partial D = S$ области D является поверхностью Ляпунова, и пусть $a_{ik}(X)$, $\lambda_{ik}(X) \in C^{1,\alpha}(D_1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $i, k = \overline{1, n}$. Задачу Дирихле для системы (1) в области D рассмотрим в следующей постановке: найти регулярные в области D решения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ системы (1), удовлетворяющее на границе S области D краевым условиям

$$u_j|_S = f_j(X), \quad j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $f_j(X) \in C^1(S)$, $j = \overline{1, n}$.

Введем обозначение

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} l_i(u_i). \tag{3}$$

Теперь систему (1) можно переписать следующим образом:

$$Lu_j = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}(X) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} = \lambda_j(X), \quad j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где

$$\lambda_j(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk}(X) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Предполагая, что правые части уравнений системы (4) известны, будем искать ее решение в виде

$$u_j(X) = -\int_D H(X, Y, 0) \rho_j(Y) d_Y V$$
$$- 2 \int_S \sigma_j(Y) \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(Y) \frac{\partial H(X, Y, \rho)}{\partial y_k} \omega_i(Y) d_Y S, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $\rho_j(X)$, $j = \overline{1, n}$, — неизвестные функции, определенные в области D, а $\sigma_j(X)$, $j = \overline{1, n}$, на поверхности S, $p \geqslant 2$, $d_Y V$ — элементы объема области D, $d_Y S$ — элемент площади поверхности S. Знак Y означает, что интегрирование производится по переменным Y. Будем считать $\rho_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, непрерывными по Гёльдеру, а $\sigma_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, непрерывным. Здесь

$$H(X,Y,0)=\frac{\Gamma(n/2-1)}{4\sqrt{\pi^n D(Y)}}\left[\sum_{i,k=1}^{n}A_{i,k}(Y)(x_i-y_i)(x_k-y_k)\right]^{(2-n)/n},\quad n\geqslant 3,$$

$$H(X,Y,\rho)=H(X,Y,0)+\sum_{m=1}^{p}\int\limits_D H(X,Z,0)K^{(m)}(Z,Y)\,d_Z V,$$

$$K^{(m)}(X,Y)=\int\limits_D K^{(m-1)}(X,Z)K(Z,Y)d_Z V,\ K(X,Y)=L_X[H(X,Y,0)],$$

$D(Y)$ — определитель матрицы $A(Y)=(a_{ik}(Y))_n$, $A_{ik}(Y)$ — алгебраические дополнения элементов $a_{ik}(Y)$ матрицы $A(Y)$. Подставляя значение функции $u_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, из равенства (5) в уравнения (4), находим

$$\rho_j(x)-\mu\int\limits_D K(X,Y)\rho_j(Y)d_Y V$$
$$-2\int\limits_S\sigma_j(Y)\sum_{i,k}^{n}a_{ik}(Y)\frac{\partial K^{(p+1)}(X,Y)}{\partial y_k}\omega_i(Y)\,d_Y S=\lambda_j(\varphi),\quad j=\overline{1,n},\tag{6}$$

а удовлетворяя граничному условию, получим

$$\sigma_j(x)-\mu\int\limits_D K(X,Y,0)\rho_i(Y)\,d_Y V$$
$$-2\int\limits_S\sigma_j(Y)\sum_{i,k}^{n}a_{ik}(Y)\frac{\partial H(X,Y,0)}{\partial y_k}\omega_i(Y)\,d_Y S=f_j(X),\quad j=\overline{1,n}.\tag{7}$$

Полученные $2n$ соотношений представляют собой для каждой пары функций $\rho_j(X)$ и $\sigma_j(X)$ соответственно систему двух уравнений Фредгольма. Здесь через ω_i обозначено i-е составляющее единичного вектора нормали к поверхности S, внешней относительно D, а

$$\mu=1/4\pi^{-(n/2)}\Gamma(n/2-1).$$

Если полученные системы интегральных уравнений Фредгольма разрешимы, то функции $u_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, выражаемые формулами (5), удовлетворяют системе уравнений (4) и на границе области D принимают значения $f_j(X)$, $j=\overline{1,n}$. По условию функции $f_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, непрерывно дифференцируемы, интегралы, входящие в (7), непрерывны по Гёльдеру [6]. Следовательно, функции $\sigma_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, непрерывные. Если предполагать, что $\varphi(X)\in C^{1,\beta}(D_1)$, $0<\beta\leqslant 1$, то правые части равенства (6) будут функциями, непрерывными по Гёльдеру, а интегралы по S являются непрерывными функциями по Гёльдеру [6]. Значит, и сами функции $\rho_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, также являются непрерывными по Гёльдеру, а это означает, что функции $u_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, выражаемые формулами (5), имеют вторые производные в D и из уравнения (6) следуют уравнения $Lu_j=\lambda_j(\varphi)$, $j=\overline{1,n}$. В силу равенства (7) функции $u_j(X)$ удовлетворяют и граничному условию (2). Уравнения (6) и (7) разрешимы, когда все коэффициенты a_{ik} постоянные. Теперь уравнения (6) превращаются в уравнения $\rho_j(X)=\lambda_j(\varphi)$, $j=\overline{1,n}$, а уравнения (7) линейной заменой переменных сводятся к аналогичным уравнениям, связанным с оператором Лапласа, причем разрешимость этих последних уравнений известна. В общем случае разрешимость этих интегральных уравнений можно доказать методом последовательных приближений для малых областей. Если область D и площадь поверхности S достаточна малы, то

$$u_j(X)=-2\int\limits_S P_1(X,Y)f_j(Y)\,d_YS-\int\limits_D P_2(X,Y)\lambda_j[\varphi(Y)]\,d_YV,\quad j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$$P_2(X,Y)=G(X,Y)+2\int\limits_S P_1(X,Y)G(Z,Y)\,d_ZS,$$

$$P_1(X,Y)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(Y)\frac{\partial H(X,Y,p)}{\partial y_k}\cdot\omega_i(Y)$$
$$+2\int\limits_S\sum_{i,k+1}^{n}a_{ik}(Z)\frac{\partial H(X,Z,p)}{\partial z_k}\cdot\omega_i(Z)\cdot P(Z,Y)\,d_ZS,$$

$$G(X,Y) = H(X,Y,0) + \int\limits_D H(X,Z,0)N(Z,Y)\,d_Z V,$$

где $P(X,Y)$ и $N(X,Y)$ — резольвенты Фредгольма ядер

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(Y)\frac{\partial H(X,Y,p)}{\partial y_k}\cdot\omega_i(Y) \quad \text{и} \quad K(X,Y)$$

соответственно. Ядро $P_1(X,Y)$ имеет непрерывные вторые производные по переменным x_i и удовлетворяет уравнению $L_X P_1(X,Y) = 0$ в каждой подобласти, строго лежащей в области D. При $X \in S$ и $X \neq Y$ ядро $P_1(X,Y)$ является аналитической функцией по переменной X, а по переменной Y — непрерывной по Гёльдеру функцией. Кроме того,

$$P_1(X,Y) = o\bigl(r_{XY}^{1-n}\bigr) \quad \text{при } X \to Y.$$

Аналогичные свойства имеет и ядро $G(X,Y)$, и в силу свойства функции Леви $H(X,Y,0)$ справедливо

$$G(X,Y) = o\bigl(r_{XY}^{2-n}\bigr) \quad \text{при } X \to Y.$$

Интегрируя по частям во втором интеграле правой части (8), найдем

$$\begin{aligned} u_j(X) = -2\int\limits_S P_1(X,Y)f_j(Y)\,d_Y S \\ - \int\limits_S \sum_{i,k}^{n} \lambda_{jk}(Y)P_2(X,Y)\omega_k(Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_Y S \\ + \int\limits_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}[\lambda_{jk}(Y)P_2(X,Y)]\varphi(Y)\,d_Y V, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Функции

$$\varphi_j(X) = -\int\limits_S P_1(X,Y)f_j(Y)\,d_Y S, \quad j = \overline{1,n},$$

являются обобщенным потенциалом двойного слоя, который во всех точках области D является функцией класса C^2, а при $X \to X_0 \in S$

имеет конечный предел [7]. Ядро $P_1(X,Y)$ равно $o\big(r_{XY}^{2-n}\big)$ при $X \to Y$. Так как $\lambda_{ik}(Y) \in C^{1,\alpha}(D_1)$, $0<\alpha\leqslant 1$, $j,k=\overline{1,n}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}[\lambda_{jk}(Y)P_2(X,Y)] = o\big(r_{XY}^{1-n}\big) \quad \text{при } X \to Y.$$

Следовательно, все интегралы, входящие в выражения для функции $u_j(X)$, $j=\overline{1,n}$, имеют слабую особенность и определяют непрерывно дифференцируемые функции. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \varphi(X) = 2\sum_{k=1}^{n} l_i(\varphi_i) - \sum_{i=1}^{n} l_i\left[\int_D P_2(X,Y)\lambda_i[\varphi(Y)]\,d_Y V\right] \\ = 2\sum_{k=1}^{n} l_i(\varphi_i) - \sum_{i=1}^{n} l_i\left[\int_S \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}(Y)P_2(X,Y)\omega_k(Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_Y S\right] \\ + \sum_{i=1}^{n} l_i\left[\int_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}[\lambda_{ik}(Y)P_2(X,Y)]\varphi(Y)\,d_Y V\right]. \end{aligned}$$

Если $X \in D$, то в поверхностном интеграле ядро является непрерывно дифференцируемой функцией по переменной X, и его можно дифференцировать под знаком интеграла, а ядро

$$\sum_{i,k=1}^{n} \lambda_{ik}(Y) l_j^X[P_2(X,Y)]\omega_k(Y)$$

непрерывно. Объемные интегралы перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}[\lambda_{ik}(Y)P_2(X,Y)]\varphi(Y)\,d_Y V = \int_D \alpha_i(Y)P_2(X,Y)\varphi(Y)\,d_Y V \\ + \sum_{k=1}^{n} \int_D [\lambda_{ik}(Y) - \lambda_{ik}(X)] \frac{\partial P_2(X,Y)}{\partial y_k}\,d_Y V \\ + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}(X) \int_D \frac{\partial P_2(X,Y)}{\partial y_k}\varphi(Y)\,d_Y V, \quad i=\overline{1,n}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_i(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial y_k}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Первые интегралы являются обобщенными потенциалами объемной массы с плотностями $\alpha_i(Y)\varphi(Y)$, которые представляют собой дважды непрерывно дифференцируемые функции [7]. В силу того, что $\lambda_{jk}(X) \in C^{1,\alpha}(D)$, ядра во вторых интегралах имеют особенности не выше $o\big(r_{XY}^{1+\alpha-n}\big)$ при $X \to Y$. Кроме того,

$$\frac{\partial P_2(X,Y)}{\partial y_k} = o\big(r_{XY}^{1-n}\big),\ k = \overline{1,n}, \quad \text{при } X \to Y.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \int\limits_D \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}[\lambda_{ik}(Y)P_2(X,Y)]\varphi(Y)\,d_YV = \int\limits_D A(X,Y)\varphi(Y)\,d_YV$$
$$+ \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_{ik}(X) l_i \Bigg[\int\limits_D \frac{\partial}{\partial y_k} P_2(X,Y)\varphi(Y)\,d_YV\Bigg],$$

где

$$A(X,Y) = o\big(r_{XY}^{\alpha-n}\big),\ 0 < \alpha \leqslant 1, \quad \text{при } X \to Y.$$

Кроме того [7],

$$\frac{\partial P_2(X,Y)}{\partial y_k} = -\frac{\partial P_2(X,Y)}{\partial x_k} + o\big(r_{XY}^{\alpha-n}\big), \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Отсюда находим

$$\varphi(X) = 2\sum_{i=1}^{n} l_i(\varphi_i) - \int\limits_S B_1(X,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_YS$$
$$+ \int\limits_S B_2(X,Y)\varphi(Y)\,d_YV - \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_{ik}(X) l_i \left[\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_k}\right],$$

где

$$\Phi(X) = \int\limits_D P_2(X,Y)\varphi(Y)\,d_YV.$$

Но

$$\sum_{i,k=1}^{n} \lambda_{ik}(X) l_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right] = \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_{ik}(X) \sum_{l=1}^{n} a_{il}(X) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_k}$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik}(X) a_{il}(X)\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_k} = \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}(X) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_k}.$$

Так как $\Lambda_0 \cdot A = A \cdot \Lambda_0$ и $\Phi''_{x_k x_l} = \Phi''_{x_l x_k}$, то

$$\sum_{k,l}^{n} b_{kl}(X) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_k} = \lambda(X) L\Phi,$$

и в силу обобщенной формулы Пуассона [7]

$$L\Phi = -\varphi(X) + \int\limits_D L_X[P_2(X,Y)]\varphi(Y)\, d_Y V,$$

$$L_X[P_2(X,Y)] = o\big(r_{XY}^{\alpha-n}\big),\ 0 < \alpha \leqslant 1, \quad \text{при } X \to Y.$$

Отсюда при $X \in D$ имеем

$$(1-\lambda(X))\varphi(X) - \int\limits_D B(X,Y)\varphi(Y)\, d_Y V + \int\limits_S B_1(X,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\, d_Y S = 2\sum_{i=1}^{n} l_i(\varphi_i), \quad (9)$$

$$B(X,Y) = o\big(r_{XY}^{\alpha-n}\big),\ 0 < \alpha \leqslant 1, \quad \text{при } X \to Y.$$

Пусть теперь $X \to X_0 \in S$ изнутри области D. Тогда

$$(1-\lambda(X_0))\widetilde{\varphi}(X_0) + \int\limits_D B(X_0,Y)\varphi(Y)\, d_Y V + \int\limits_S B_1(X_0,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\, d_Y S = \widetilde{F}(X_0),$$

$$\widetilde{F}(X_0) = \sum_{i=1}^{n} l_i(\varphi_i)|_{X_0 \in S}.$$

Здесь интеграл по поверхности понимается в смысле главного значения. Так как

$$\sum_{i,k=1}^{n} \lambda_{ik}(Y) l_i^X[P_2(X_0,Y)]\omega_k(Y) = \sum_{i,k=1}^{n} [\lambda_{ik}(Y) - \lambda_{ik}(X_0)] l_i^X[P_2(X,Y)]\omega_k(Y)$$

$$+\sum_{i,k=1}^{n}\lambda_{ik}(Y)l_i^X[P_2(X_0,Y)][\omega_k(X_0)-\omega_k(Y)]$$

$$+\sum_{i,k=1}^{n}\lambda_{ik}(X_0)l_i^X[P_2(X_0,Y)]\omega_k(X_0),$$

то

$$\int_S B_1(X_0,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_YS=\int_S B_3(X_0,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_YS$$

$$+\sum_{i,k=1}^{n}\lambda_{ik}(X_0)\omega_k(X_0)l_i\left[\int_S P_2(X_0,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_YS\right]$$

$$=\int_S B_3(X_0,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_YS+\lambda(X_0)\Theta(\widetilde{\Phi})+\chi(\widetilde{F}),$$

где

$$\Theta(\widetilde{\Phi})=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}(X_0)\omega_k(X_0)\right)\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x_l},$$

$$\chi(\widetilde{\Phi})=\sum_{k,l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\delta_{ki})\lambda_{ik}(X_0)a_{il}(X_0)\right)\omega_k(X_0)\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x_l},$$

$$\widetilde{\Phi}(X_0)=\int_S P_2(X_0,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_YS,$$

δ_{ik} — символ Кронекера. Ядро $B_3(X_0,Y)$ при $X_0\to Y$ имеет слабую особенность.

Рассуждая аналогично [6], можно показать, что предел выражения $\Theta(\widetilde{\Phi})$, когда точка X стремится к точкам поверхности S, находясь по одну сторону от нее, существует. Этот предел может быть различным при стремлении с разных сторон S. Значение $\Theta(\widetilde{\Phi})$ при стремлении X изнутри D к S дается формулой [7]

$$\Theta(\widetilde{\Phi})=\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}(X_0)+\int_S\Theta[P_2(X_0,Y)]\widetilde{\varphi}(Y)\,d_YS. \tag{10}$$

Аналогично

$$\chi(\widetilde{\Phi}) = \frac{1}{2}\cos(l,n)\widetilde{\varphi}(X_0) + \int\limits_S \chi[P_2(X_0,Y)]\widetilde{\varphi}(Y)\,d_Y S, \tag{11}$$

где интеграл в формуле (11) понимается в смысле главного значения. Но в силу коммутативности матрицы Λ_0 и A непосредственным вычислением можно убедиться в том, что $\cos(l,n)=0$. Отсюда

$$\frac{1}{2}(1-\lambda(X_0))\widetilde{\varphi}(X_0) - \int\limits_D B(X_0,Y)\varphi(Y)\,d_Y V$$
$$+ \int\limits_S X[P_2(X_0,Y)]\widetilde{\varphi}(Y)\,d_Y S + \int\limits_S B_4(X_0,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_Y S = \widetilde{F}(X_0),$$

где ядро $B_4(X_0,Y)$ при $X_0 \to Y$ имеют слабую особенность. Равенство (9) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма третьего рода относительно функции $\varphi(x)$. Если функция $1-\lambda(x)$ нигде в $D \cup S$ не обращается в нуль, то оно превращается в интегральное уравнение Фредгольма второго рода, и в силу малости области D его решение можно записать через резольвенту Фредгольма методом последовательных приближений. Подставляя найденное выражение для функции $\varphi(X)$ в (12), находим

$$\frac{1}{2}(2-\lambda(X_0))\widetilde{\varphi}(X_0) + \int\limits_S X[P_2(X_0,Y)]\widetilde{\varphi}(Y)\,d_Y S$$
$$+ \int\limits_S B_5(X_0,Y)\widetilde{\varphi}(Y)\,d_Y S = g(X_0), \tag{13}$$

где

$$g(X_0) = \widetilde{F}(X_0) + \int\limits_D [1 - \lambda(Y)]^{-1} B(X_0, Y) \psi(Y) \, d_Y V,$$

$$\psi(Y) = \sum_{i=1}^{n} l_i[\varphi_i(Y)] + \int\limits_D R(Y, Z) \sum_{i=1}^{n} l_i[\varphi_i(Z)] \, d_Z V,$$

$$B_5(X_0, Y) = B_4(X_0, Y) + \int\limits_D B(X_0, Y)(1 - \lambda(Z))^{-1} R_0(Z, Y) \, d_Z Y,$$

$$R_0(Z, Y) = B_1(Z, Y) + \int\limits_D R(Z, T) B_1(T, Y) \, d_T V,$$

а $R(X,Y)$ — резольвента Фредгольма ядра $B(X,Y)$. Оно имеет особенности не выше $o\big(r_{XY}^{\alpha-n}\big)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, при $X \to Y$. Так как функции $f_i(X_0)$, $j = \overline{1,n}$, являются функциями класса $C^1(S)$, то $F(X_0) \in C^{1,\alpha}(S)$. Следовательно, $\psi(X_0) \in C^{0,\alpha}(S)$ и $g(X_0) \in C^{0,\alpha}(S)$. Ядро $B_5(X_0,Y)$ имеет слабую особенность при $X_0 \to Y$, а ядро $X[P_2(X_2,Y)]$ является сингулярным. Сингулярный оператор в (13) содержит символ [8]

$$d(X_0, \Theta) = \frac{1}{2}(2 - \lambda(X_0)) + \frac{1}{2} i \cos(v, l),$$

где v — любое направление в касательной плоскости и в рассматриваемой точке X_0 поверхности S и

$$\inf |d(X_0, \Theta)| \geqslant \frac{1}{2} \inf |2 - \lambda(X_0)|.$$

Отсюда следует, что если $\lambda(X_0) \neq 2$, то сингулярное интегральное уравнение (13) допускает регуляризацию [8], а если $1 < \lambda(X_0) < 2$, то оно допускает эквивалентную регуляризацию. Таким образом, верна следующая

Теорема. *Пусть*

$$\Theta_1 = \{X \in D_1 : \lambda(X) - 1 = 0\}, \quad \Theta_2 = \{X \in D_1 : \lambda(X) - 2 = 0\}.$$

Тогда если $\Theta_1 \cap \overline{D} = \varnothing$ *и* $\Theta_2 \cap S = \varnothing$ *и если область* D *достаточно мала, то задача Дирихле* (2) *для системы* (1) *в ограниченной области* D

всегда фредгольмова. Если $\Theta_1 \cap \overline{D} \neq \varnothing$ *или* $\Theta_2 \cap S \neq \varnothing$, *то нарушается фредгольмовость задачи Дирихле.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Об единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 6. С. 211–212.

2. *Антохин Ю. Т.* О некоторых некорректных задачах теории потенциала // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 4. С. 525–532.

3. *Янушаускас А. И.* Задача о наклонной производной теории потенциала. Новосибирск: Наука, 1985.

4. *Тренова Т. В.* Многомерный аналог системы А. В. Бицадзе // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. Новосибирск: Наука, 1982. С. 56–58.

5. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1951. Т. 29, № 3. С. 615–676.

6. *Янушаускас А. И.* Методы потенциала в теории эллиптических уравнений. Вильнюс: Мокслас, 1990.

7. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

8. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Наука., 1962.

г. Душанбе *20 мая 2004 г.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ЖУРНАЛЕ ЗА 1999–2003 гг.

1999, т. 6

№ п/п	Автор, заглавие статьи	№ вып.	стр.
1	Антонов Ю. С. Численные алгоритмы для одного нелинейного параболического уравнения с переменным направлением времени	1	3–9
2	Бегматов Акрам Х. Об одной задаче интегральной геометрии для семейства конусов	1	10–18
3	Бокий И. Б., Соловьев С. В. Численное решение задачи контактного взаимодействия двух упругих тел при ударе с трением	2	101–108
4	Борисов В. З., Чистяков М. Г. Последовательная непараметрическая идентификация стохастических систем	2	3–8
5	Васильев М. Д., Софронов Е. Т. Исследование математической модели конкуренции между двумя видами	1	104–107
6	Григорьев Ю. М. Плоская задача о переносе масс приливными волнами	2	9–20
7	Гусев Е. Л. Качественные свойства оптимальных слоистых структур при воздействии акустических волн	1	108–114
8	Данилов Н. Н. Динамическая устойчивость в математических моделях олигополии	1	115–131
9	Данилов Н. Н. О равновесии Курно и Штакельберга в динамической модели олигополии	2	21–27
10	Егоров И. Г. О поведении решений некоторых нелинейных уравнений второго порядка	1	19–25

2000, т. 7

42	Кириллова Г. А., Кожанов А. И. О некоторых обратных задачах для параболического уравнения четвертого порядка	1	35–48
43	Кожанов А. И. Задача об определении коэффициентов при младших членах в слабо связанной параболической системе	2	49–61
44	Крутиков В. Н. Квазиньютоновские методы на основе рассредоточенных способов восстановления гессиана	2	62–81
45	Матвеева Н. Н., Попов С. В. Нелинейные вырождающиеся параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции	2	82–92
46	Матвеева О. И. Апериодические колебания в электромагнитном поле	1	105–109
47	Мерлин А. В. О несуммируемых решениях интегрального уравнения с логарифмическим ядром	1	49–57
48	Местников С. В., Муксунов А. И. Об одной повторяющейся иерархической игре	1	110–119
49	Николаева Е. А. Анализ параметрической зависимости множества допустимых портфелей на рынке ценных бумаг	1	120–128
50	Павлов А. Р. Численное моделирование температурных деформаций упруго-ползучего тела	1	129–136
51	Попов С. В. Контактные задачи для линейных уравнений математической физики	1	58–67
52	Попов С. В. Параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции	2	93–112
53	Титов А. В. Об аддитивности биекций, сохраняющих коммутатор в матричной алгебре	1	68–71

2001, т. 8

2002, т. 9

101	Егоров Р. И., Кайгородов С. П. Об одном подходе к решению многокритериальной задачи распределения, удовлетворяющему специальному принципу Парето-оптимальности	1	51–56
102	Иванов Ф. В. Разностные схемы с согласованными аппроксимациями потоковых членов	1	142–152
103	Кириллова Г. А. Линейная обратная задача с интегральным переопределением для одного класса параболических уравнений высокого порядка	2	57–73
104	Кожанов А. И. Об определении источников в линеаризованном уравнении Кортевега — де Фриза	2	74–82
105	Константинова Т. П. О метода разностных схем для параболического уравнения с меняющимся направлением времени	1	153–158
106	Костин А. Ю., Софронов Е. Т. Исследование одной математической модели «хищник и жертва»	2	83–90
107	Львов А. П. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени	2	91–95
108	Матвеева Н. Н. Разрешимость задачи Дирихле для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений переменного типа	1	47–57
109	Местников С. В. Аппроксимация информационного множества дифференциальной игры поиска с нарядом ищущих	1	58–70
110	Пинигина Н. Р., Попов С. В. Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени	1	71–82

2003, т. 10

131	Изаксон В. Ю. Осесимметричная задача геомеханики многолетнемерзлых горных пород	1	140–146
132	Изаксон М. В., Крамсков Н. П., Изаксон В. Ю. Теплоизоляция уступа карьера «Мир» под водоводами	1	147–153
133	Истомина Н. Е., Подгаев А. Г. Теорема единственности для нелинейного параболического уравнения в нецилиндрической области	1	27–33
134	Кириллова Г. А. Обратная задача для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при решении в случае интегрального переопределения	1	34–44
135	Кобысова И. Ю. Об оценке снизу одного показателя аппроксимативных возможностей линейных положительных операторов	2	52–57
136	Колтуновский О. А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с финальным условием переопределения	1	45–72
137	Колтуновский О. А. О разрешимости обратной задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений с неизвестным коэффициентом при старших производных	2	59–82
138	Михайлов Л. Г., Шарипов Б. Представление решений одного класса переопределенных систем дифференциальных уравнений, интегрируемых явно	1	73–80
139	Петров Н. Г. Оценки погрешностей метода механических квадратур при использовании теории близких уравнений	1	81–85

Именной указатель авторов

СПИСОК УЧРЕЖДЕНИЙ, ЧЬИ СОТРУДНИКИ ПРИНИМАЮТ УЧАСТИЕ В ПУБЛИКАЦИЯХ ЖУРНАЛА

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж.

Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск.

Вычислительный центр СО РАН, г. Новосибирск.

Институт горного дела Севера ЯНЦ СО РАН, г. Якутск.

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск.

Институт математики АН Республики Таджикистан, г. Душанбе.

Институт неметаллических материалов ЯНЦ СО РАН, г. Якутск.

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

Институт физики атмосферы РАН, г. Москва.

Институт физико-технических проблем Севера СО РАН, г. Якутск.

Институт угля и углехимии СО РАН, г. Кемерово.

Кемеровский государственный университет, г. Кемерово.

Мирнинский филиал ЯГУ, г. Мирный.

Московский государственный педагогический универстет, г. Москва.

Нерюгринский филиал ЯГУ, г. Нерюнгри.

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск.

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск.

Новосибирский педагогический государственный университет, г. Новосибирск.

Пограничный институт ФСБ РФ, г. Хабаровск.

Рязанский государственный университет, г. Рязань.

Самарканский государственный университет, г. Самарканд, Узбекистан.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург.

Санкт-Петербургский государственный технологический университет, г. Санкт-Петербург.

Таджикский государственный университет коммерции, г. Душанбе

Таджикский государственный национальный университет, г. Душанбе.

Таджикский государственный университет, г. Душанбе.

Хабаровский государственный технический университет, г. Хабаровск.

Чебоксарский государственный университет, г. Чебоксары.

Читинский государственный технический университет, г. Чита.

Якутский государственный университет, г. Якутск.

Ярославский государственный университет, г. Ярославль.

АННОТАЦИИ

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ —ПРОТТЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПОЛИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. *М. Т. Акылбаева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Для многомерного поливолнового уравнения получен критерий единственности решения задачи Дарбу — Проттера. Библиогр. 8.

УДК 519.234

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ. *В. Г. Алексеев.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассмотрены непараметрические оценки производных (до четвертого порядка включительно) спектральной плотности стационарного случайного процесса с дискретным временем. Во всех случаях предлагается весовую функцию (ядро оценки) $v\leftharpoonup x\leftharpoondown$, зависящую от непрерывного аргумента, заменить дискретным набором весовых коэффициентов $\{v\leftharpoonup k\leftharpoondown\}$. Тем самым устраняется погрешность, возникающая при переходе от теоретической оценки, включающей в себя интеграл от произведения периодограммы на ту или иную весовую функцию $v\leftharpoonup x\leftharpoondown$, к ее машинной реализации. Библиогр. 11.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ. *С. А. Бейлин.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Доказано существование единственного классического решения нелокальной задачи для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом. Библиогр. 4.

УДК 519.17

ХРОМАТИЧЕСКИ БИЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГРАФЫ. *И. Г. Дмитриев, А. О. Иванова, Т. К. Неустроева.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Вводится понятие хроматически биэквивалентных графов. Доказывается теорема о существовании бесконечного набора из n попарно неизоморфных хроматически биэквивалентных графов. Показывается связь между характеристическими и хроматическими многочленами дополнениями деревьев. Ил. 3, библиогр. 5.

УДК 518.9

О ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ КОРТЕЖЕЙ ЧИСЕЛ. *Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматривается задача распознавания кортежей действительных чисел. Доказывается теорема, обеспечивающая достаточные условия для нахождения решения этой задачи.

УДК 517.956

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДАРБУ — ПРОТТЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА. *Е. Ж. Ермекбаев.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Доказана разрешимость задачи Дарбу — Проттера для многомерного гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка. Библиогр. 8.

УДК 517.9:533.7

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ С СОГЛАСОВАННЫМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ ПОТОКОВЫХ ЧЛЕНОВ. *Ф. В. Иванов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Для решения задач математической физики широко применяется метод расщепления по физическим процессам, учитывающий специфику задач и позволяющий эффективно получать их численное решение. Большой интерес представляет изучение возможности расщепления алгоритма численного решения задачи, обладающего такими важными свойствами, как устойчивость, консервативность, инвариантность и т. д. В работе построены разностные схемы расщепления по физическим процессам для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных. На первом этапе учитываются градиенты давления (в уравнении движения) и скорости (в уравнениях неразрывности и энергии), на втором этапе учитываются инерционные члены, и производится перенос вектора состояния вдоль траектории. Отличительной чертой изложенных разностных схем является то, что все потоковые члены взаимно согласованы и для них выполняются не только разностные аналоги основных законов сохранения, но также и дополнительные соотношения, выражающие баланс отдельных видов энергии. Библиогр. 9.

УДК 517.95

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ. *А. П. Львов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

В цилиндрической области $Q = \Omega\times(0,T)$, $S_T = S\times(0,T)$ рассматриваются две нелокальные краевые задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени

$$Lu\equiv k(x,t)u_t - \Delta u + C(x)u = f(x,t).$$

Доказываются теоремы о существовании гладких и единственных решений поставленных задач. Библиогр. 6.

УДК 517.946

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА. *Р. Р. Сафиуллова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Для уравнения второго порядка

$$u_{tt} - Au_t - Bu = f(x,t)$$

с эллиптическими операторами A и B по пространственным переменным рассматривается краевая задача, в которой вместо обычных начальных условий задаются нелокальные условия. Для поставленной задачи доказывается теорема существования и единственности регулярного решения.

УДК 517.958:57

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ЖЕРТВЫ-ХИЩНИК». *Е. Т. Софронов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматривается система дифференциальных уравнений третьего порядка, исследуется на устойчивость состояния равновесия с положительными координатами. Исследован также критический случай двух нулевых корней. Библиогр. 1.

УДК 512.6:519.61

О РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ БЕРНУЛЛИ. *Ф. М. Федоров, М. Е. Абрамова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматривается обобщение метода Бернулли нахождения вещественных корней полиномиальных уравнений на случай поиска вещественных нулей аналитической функции. Указаны условия сходимости вычислительных процессов. Библиогр. 4.

УДК 512.6:519.61

О РЕШЕНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. *Ф. М. Федоров, Т. Л. Осипова.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Предлагается метод решения бесконечной системы линейных однородных алгебраических уравнений. Найдена бесконечная система аналитических решений некоторых бесконечных систем линейных уравнений. Библиогр. 7.

УДК 517.956

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. *Ш. Б Халилов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Исследуется корректность граничных задач для многомерных общих эллиптических систем. Методом потенциалов доказывается теорема фредгольмовости задачи Дирихле для указанной системы в ограниченной области. Библиогр. 8.