

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ЗАМЕТКИ ЯГУ**

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1994 ГОДА

ВЫХОДИТ 2 РАЗА В ГОД

Том 15, вып. 2

Июль—Декабрь, 2008

*СОДЕРЖАНИЕ***Математика**

<b>Антонов Ю. С.</b> Численный алгоритм решения одной модельной контактной задачи для уравнения параболического типа .....	<b>2</b>
<b>Егоров Р. И., Кайгородов С. П.</b> О многокритериальной задаче распределения с отношениями предпочтения участников .....	<b>13</b>
<b>Иванова М. А.</b> Построение области притяжения для одной системы автоматического регулирования .....	<b>17</b>
<b>Кожанов А. И.</b> Краевая задача с нелокальным по времени условием для одномерного уравнения с кратными характеристиками .....	<b>40</b>
<b>Никитина Е. С., Бубякин И. В.</b> К геометрии многообразия Сегре $S(m, n)$ .....	<b>56</b>
<b>Нурублов М.</b> Краевые задачи для одной многомерной эллиптической системы высшего порядка .....	<b>62</b>
<b>Пинигина Н. Р., Попов С. В.</b> О параболических уравнениях с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими производные второго порядка .....	<b>71</b>
<b>Попов С. В.</b> Гёльдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением эволюции .....	<b>83</b>
<b>Софронов Е. Т.</b> Устойчивость в целом одной системы четырех уравнений в случае кратных корней .....	<b>100</b>

<b>Туласынов М. С.</b> Краевые задачи для сингулярных параболических уравнений с меняющимся направлением времени с весовыми условиями склеивания .....	<b>106</b>
<b>Федоров Ф. М.</b> О некоторых свойствах характеристических подгрупп примарных абелевых групп .....	<b>115</b>
<b>Математическое моделирование</b>	
<b>Кондаков А. С., Старостин Н. П.</b> Исследование эффективности восстановления функции тепловыделения в подшипнике скольжения по температурным данным .....	<b>120</b>
<b>Павлов М. Н.</b> Метод прыжкового переноса для задачи Баклея — Леверетта .....	<b>135</b>
<b>Федоров Ф. М., Павлов Н. Н.</b> Граничный метод и дробное дифференцирование в задачах теплообмена .....	<b>143</b>
<b>Аннотации</b> .....	<b>154</b>

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ  
ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ю. С. Антонов

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим для модельного параболического уравнения следующую контактную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & (x, t) \in Q_T^+, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g(x, t), & (x, t) \in Q_T^-, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ u(1, t) &= \mu_1(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ u(x, 1) &= \mu_2(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0-, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(0+, t), & 0 < t \leq 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_T^+ &= \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\}, \\ Q_T^- &= \{(x, t) \mid -1 \leq x < 0, 0 < t < 1\}. \end{aligned}$$

Пусть  $\gamma$  — линия  $x = 0$ , разделяющая области  $Q_T^-$  и  $Q_T^+$ . Будем искать непрерывное в  $Q_T^- \cup Q_T^+ \cup \gamma$  решение.

Краевые задачи сопряжения для модельных линейных уравнений параболического типа рассматривались в работах М. С. Боуенди, П. Гривара, К. Д. Пагани, Г. Таленти, О. Арены, С. А. Терсенова, А. М. Нахушева, И. Е. Егорова, А. А. Керефова, Н. В. Кислова, С. Г. Пяткова

и других авторов (библиография имеется в работе [6]). Аналогично этим работам можно показать разрешимость и единственность поставленной задачи как в пространствах Соболева, так и в пространствах Гёльдера.

Численные реализации для задач сопряжения рассматривались в работах [2, 5, 7]. В данной работе в отличие от этих работ рассматривается алгоритм численного решения для случая ортогональных потоков. В одной части области рассматривается уравнение теплопроводности, в другой части также уравнение теплопроводности, однако роль времени здесь играет пространственная переменная.

## 2. Разностная задача

Для численной реализации задачи (1) используем разностный метод. Возьмем равномерную по  $x, t$  сетку. Пусть  $h, \tau$  — шаги сетки соответственно по  $x$  и  $t$ ,  $x = ih$ ,  $Nh = 1$ ,  $t = k\tau$ ,  $M\tau = 1$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $k = \overline{0, M}$ .

Заменяем задачу (1) разностной задачей:

$$\begin{aligned}
 y_{\bar{t}} &= y_{\bar{x}x}^{(\sigma^+)} + f_h, & (ih, k\tau) \in Q_T^+, \\
 y_{\bar{x}} &= -y_{\bar{t}t}^{(\sigma^-)} + g_h, & (ih, k\tau) \in Q_T^-, \\
 y_i^0 &= \varphi(ih), & -1 \leq ih \leq 1, \\
 y_N^k &= \mu_1(k\tau), & 0 \leq k\tau \leq 1, \\
 y_i^M &= \mu_2(ih), & -1 \leq ih \leq 0, \\
 y_0^k - y_{-1}^k &= y_1^k - y_0^k, & 0 < k\tau \leq 1.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 y &= y_i = y_i^k = y(ih, k\tau), & \check{y} &= y(ih, (k-1)\tau), \\
 y_{\bar{t}} &= \frac{y - \check{y}}{\tau}, & y_{\bar{x}} &= \frac{y_i^k - y_{i-1}^k}{h}, \\
 y_x &= \frac{y_{i+1}^k - y_i^k}{h}, & y_{\bar{x}x} &= \frac{y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k}{h^2}, \\
 (y_i^k)^{(\sigma^+)} &= \sigma^+ y_i^k + (1 - \sigma^+) y_i^{k-1}, \\
 (y_i^k)^{(\sigma^-)} &= \sigma^- y_i^k + (1 - \sigma^-) y_{i-1}^k, & 0 \leq \sigma^+, \sigma^- \leq 1.
 \end{aligned}$$

### 3. Итерационный алгоритм

Для численной реализации задачи (2) применим следующий итерационный алгоритм. Зададим на линии  $x = 0$  итерационное условие

$$y^s(0, k\tau) = \xi_0^s(k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1.$$

Тогда задача (2) распадается на три задачи:

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}}^{s+1} &= -(y_{\bar{t}t}^{(\sigma^-)})^{s+1} + g_h, \quad (ih, k\tau) \in Q_T^-, \\ y_i^{0,s+1} &= \varphi(ih), \quad -1 \leq ih \leq 0, \\ y_i^{M,s+1} &= \mu_2(ih), \quad -1 \leq -ih \leq 0, \\ y_{-1}^{k,s+1} &= \xi_{-1}^{k,s+1}(k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}}^{k,s+1} &= (y_{\bar{x}x}^{(\sigma^+)})^{s+1} + f_h, \quad (ih, k\tau) \in Q_T^+, \\ y_N^{k,s+1} &= \mu_1(k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \\ y_{-1}^{k,s+1} &= \xi_{-1}^{k,s+1}(k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \\ y_i^{0,s+1} &= \varphi(ih), \quad 0 \leq ih \leq 1, \\ y_0^{k,s+1} - y_{-1}^{k,s+1} &= y_1^{k,s+1} - y_0^{k,s+1}, \quad 0 \leq k\tau \leq 1; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_{-1}^{k,s+1} - y_0^{k,s}}{h} &= (y_{\bar{t}t}^{(\sigma^-)})^{s+1}(-h, k\tau) + (g_h)_{-1}, \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \\ y_0^{s,k} &= \xi_0^s(k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \\ y_{-1}^{0,s+1} &= \varphi(-h), \quad y_{-1}^{M,s+1} = \mu_2(-h). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\xi_{-1}^{s+1}(k\tau)$  вычисляется при решении задачи (5). Докажем сходимость решения итерационных задач (3)–(5) к решению разностной задачи (2).

Однородная задача (2) имеет только нулевое решение, поэтому решение разностной задачи (2) существует и единственно. Рассмотрим переменную  $z_i^{k,s} = y_i^k - y_i^{k,s}$ . Очевидно, эта переменная будет решением следующих задач:

$$z_{\bar{x}}^{s+1} = -(z_{\bar{t}t}^{(\sigma^-)})^{s+1}, \quad (ih, k\tau) \in Q_T^-, \quad (6)$$

$$z_i^{0,s+1} = 0, \quad -1 \leq ih \leq 0, \quad (7)$$

$$z_i^{M,s+1} = 0, \quad -1 \leq -ih \leq 0, \quad (8)$$

$$z_{-1}^{k,s+1} = \bar{\xi}_0^{s+1}(k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1; \quad (9)$$

$$z_i^{k,s+1} = (z_{ix}^{(\sigma^+)})^{s+1}, \quad (ih, k\tau) \in Q_T^+, \quad (10)$$

$$z_N^{k,s+1} = 0, \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \quad (11)$$

$$z_{-1}^{k,s+1} = \bar{\xi}_{-1}^{s+1}(k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \quad (12)$$

$$z_i^{0,s+1} = 0, \quad 0 \leq i\tau \leq 1, \quad (13)$$

$$z_0^{k,s+1} - z_{-1}^{k,s+1} = z_1^{k,s+1} - z_0^{k,s+1}, \quad 0 < k\tau < 1; \quad (14)$$

$$\frac{z_{-1}^{k,s+1} - z_0^{k,s}}{h} = (z_{it})^{s+1}(-h, k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \quad (15)$$

$$z_0^{k,s+1} = \bar{\xi}_0^s(k\tau), \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \quad (16)$$

$$z_{-1}^{0,s+1} = 0, \quad z_{-1}^{M,s+1} = 0. \quad (17)$$

Докажем сперва сходимость итераций при  $x = 0$  и при  $x = -h$ . Для этого аналогично работам [2, 5] воспользуемся принципом максимума.

Рассмотрим задачу (15)–(17). По принципу максимума

$$\max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|z(-1, k\tau)^{s+1}\|_{C(0,1)} \leq \max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|z(0, k\tau)^s\|_{C(0,1)}. \quad (18)$$

Пусть  $\Xi^s = \max_{i,k} |z_i^{k,s}|$  в области  $Q_T^+$  и на линиях  $x = 0$  и  $x = -h$ . Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \bar{z}_i^{k,s} &= (\bar{z}_{ix}^{(\sigma^+)})^s, \quad (ih, k\tau) \in Q_T^+, \quad \bar{z}_N^{k,s} = 0, \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \\ \bar{z}_{-1}^{k,s} &= \Xi^s, \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \\ \bar{z}_0^{k,s} - \bar{z}_{-1}^{k,s} &= \bar{z}_1^{k,s} - \bar{z}_0^{k,s}, \quad 0 < k\tau < 1, \\ \bar{z}_i^{0,s} &= (1 - (i+1)h)\Xi^s, \quad -h \leq ih \leq 1 - h. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение задачи (19) мажорирует решение задачи (10)–(14), и для нее верна оценка

$$\max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|z(0, k\tau)^s\|_{C(0,1)} \leq \max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|\bar{z}(0, k\tau)^s\|_{C(0,1)}. \quad (20)$$

Задача (19) имеет точное решение  $\bar{z}_i^{k,s} = (1 - (i + 1)h)\Xi^s$ . Используя это решение, имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|\bar{z}(0, k\tau)^s\|_{C(0,1)} &= (1 - h)\Xi^s = (1 - h) \max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|\bar{z}(-h, k\tau)^s\|_{C(0,1)} \\ &= (1 - h) \max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|z(-h, k\tau)^s\|_{C(0,1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) и объединяя с неравенством (18), имеем

$$\max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|z(-h, k\tau)^{s+1}\|_{C(0,1)} \leq (1 - h) \max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|z(-h, k\tau)^s\|_{C(0,1)}.$$

Отсюда

$$\max_{0 \leq k\tau \leq 1} \|z(-h, k\tau)^{s+1}\|_{C(0,1)} \leq (1 - h)^s \|z(-h, k\tau)^0\|_{C(0,1)}.$$

Это означает, что  $z(-h, k\tau)^s \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ . Возвращаясь к (21), получим  $z(0, k\tau)^s \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Докажем теперь сходимость итераций по всей области  $Q_T^+$ . Для этого введем аналогично работе [1] следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (u, v) &= \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, & (u, v] &= \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \\ [u, v) &= \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i h, & [u, v] &= \sum_{i=0}^N u_i v_i h. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (10) на  $2h\tau(z_i^{k,s+1})^{(\sigma^+)}$  и просуммируем по  $i$  от 1 до  $N - 1$ :

$$\begin{aligned} (z^{s+1}, z^{s+1}) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5)(z_{\bar{t}}^{s+1}, z_{\bar{t}}^{s+1}) \\ = 2\tau((z_{\bar{x}\bar{x}}^{s+1})^{(\sigma^+)}, (z^{s+1})^{(\sigma^+)}) + (\check{z}^{s+1}, \check{z}^{s+1}). \end{aligned}$$

Уравнение (14) перепишем в виде

$$0 = 2\tau(z_0^{k,s+1})^{(\sigma^+)}((z_1^{k,s+1} - z_0^{k,s+1}) - (z_0^{k,s+1} - z_{-1}^{k,s+1}))^{(\sigma^+)}/h.$$

Сложим два последних уравнения и применим формулу Грина:

$$\begin{aligned} (z^{s+1}, z^{s+1}) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5)(z_{\bar{t}}^{s+1}, z_{\bar{t}}^{s+1}) + 2\tau((z_{\bar{x}}^{s+1})^{(\sigma^+)}, (z_{\bar{x}}^{s+1})^{(\sigma^+)}) \\ = (\check{z}^{s+1}, \check{z}^{s+1}) - 2\tau(z_{-1}^{s+1})^{(\sigma^+)}(z_{\bar{x},0}^{s+1})^{(\sigma^+)}. \end{aligned}$$

Используем неравенство Коши и просуммируем по  $k$  от 1 до  $M$ :

$$\begin{aligned}
& (z^{M,s+1}, z^{M,s+1}) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5) \sum_{k=1}^M (z_{\bar{t}}^{k,s+1}, z_{\bar{t}}^{k,s+1}) \\
& + 2\tau \sum_{k=1}^M ((z_{\bar{x}}^{k,s+1})^{(\sigma^+)}, (z_{\bar{x}}^{k,s+1})^{(\sigma^+)}) \leq \\
& \leq -2\tau \sum_{k=1}^M (z_{-1}^{k,s+1})^{(\sigma^+)} (z_{\bar{x},0}^{k,s+1})^{(\sigma^+)}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Перепишем уравнение (15) в виде

$$\left( \frac{z_{-1}^{k,s+1} - z_0^{k,s}}{h} \right)^{(\sigma^+)} = ((z_{\bar{t}t}^{k,s+1}(-h, k\tau))^{(\sigma^+)}, \quad 0 \leq k\tau \leq 1.$$

Умножим это уравнение на  $2\tau(z_{i,-1}^{k,s+1})^{(\sigma^+)}$ , просуммируем по  $k$  от 1 до  $M$  и, используя формулу Грина, получим

$$-2\tau \sum_{k=1}^M (z_{-1}^{s+1})^{(\sigma^+)} \left( \frac{z_0^{k,s+1} - z_{-1}^{k,s}}{h} \right)^{(\sigma^+)} + 2\tau \sum_{k=1}^M (z_{\bar{t}}^{k,s+1})_{-1}^2 = 0. \quad (23)$$

Подставим (23) в неравенство (22):

$$\begin{aligned}
& (z^{M,s+1}, z^{M,s+1}) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5) \sum_{k=1}^M (z_{\bar{t}}^{k,s+1}, z_{\bar{t}}^{k,s+1}) \\
& + 2\tau \sum_{k=1}^M ((z_{\bar{x}}^{k,s+1})^{(\sigma^+)}, (z_{\bar{x}}^{k,s+1})^{(\sigma^+)}) + 2\tau \sum_{k=1}^M (z_{\bar{t}}^{k,s+1})_{-1}^2 \\
& \leq 2\tau \sum_{k=1}^M (z_{-1}^{s+1})^{(\sigma^+)} \left( \left( \frac{z_0^{k,s+1} - z_{-1}^{k,s}}{h} \right)^{(\sigma^+)} - (z_{\bar{x},0}^{k,s+1})^{(\sigma^+)} \right). \quad (24)
\end{aligned}$$

Правая часть неравенства (24) стремится к нулю при  $s \rightarrow \infty$ . Это означает, что решения задач (4), (5) при  $s \rightarrow \infty$  стремятся в  $Q_T^+$  к решению задачи (2). Разностные производные  $(y_{\bar{x}})_i^{k,s}$  и  $(y_{\bar{t}})_i^{k,s}$  при  $s \rightarrow \infty$  стремятся в  $Q_T^+$  к соответствующим разностным производным задачи (2).



В области  $Q_T^-$  введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (u, v) &= \sum_{k=1}^{M-1} u_i^k v_i^k \tau, & (u, v] &= \sum_{k=1}^M u_i^k v_i^k \tau, \\ [u, v) &= \sum_{k=0}^{M-1} u_i^k v_i^k \tau, & [u, v] &= \sum_{k=0}^M u_i^k v_i^k \tau. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (6) на  $2h\tau z_i^{k,s+1}$ . Просуммируем по  $k$  от 1 до  $M-1$ . Используя формулу Грина и суммируя по  $i$ , получим

$$(z_m^{k,s+1}, z_m^{k,s+1}) + h \sum_{i=-1}^k ((z_{\bar{x}}^{s+1}, z_{\bar{x}}^{s+1}) + 2(z_{\bar{t}}^{s+1}, z_{\bar{t}}^{s+1})) \leq (z_0^s, z_0^s). \quad (25)$$

Это означает, что решение задачи (3)  $y_i^{k,s}$  при  $s \rightarrow \infty$  стремятся в  $Q_T^-$  к решению задачи (2). Разностные производные  $(y_{\bar{x}})_{i,s}^{k,s}$  и  $(y_{\bar{t}})_{i,s}^{k,s}$  задачи (7) при  $s \rightarrow \infty$  стремятся в  $Q_T^-$  к соответствующим разностным производным задачи (2).

#### 4. Сходимость численного алгоритма

Рассмотрим разность между решениями дифференциальной задачи (1) и разностной задачи (2):  $w_i^k = u(ih, k\tau) - y_i^k$ . Эта разность, в свою очередь, является решением задачи

$$\begin{aligned} w_{\bar{t}} &= w_{\bar{x}x}^{(\sigma^+)} + f_h, & (ih, k\tau) &\in Q_T^+, \\ w_{\bar{x}} &= -w_{\bar{x}x}^{(\sigma^-)} + g_h, & (ih, k\tau) &\in Q_T^-, \\ w_i^0 &= 0, & -1 \leq ih \leq 1, & \quad w_N^k = 0, \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \\ w_i^M &= 0, & -1 \leq ih \leq 0, & \quad w_0^k - w_{-1}^k = w_1^k - w_0^k, \quad 0 < k\tau < 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Разобьем задачу (26) на две задачи:

$$\begin{aligned} w1_{\bar{t}} &= w1_{\bar{x}x}^{(\sigma^+)} + f_h, & (ih, k\tau) &\in Q_T^+, \\ w1_{\bar{x}} &= -w1_{\bar{x}x}^{(\sigma^-)} + g_h, & (ih, k\tau) &\in Q_T^-, \\ w1_i^0 &= 0, & -1 \leq ih \leq 1, \\ w1_N^k &= 0, & 0 \leq k\tau \leq 1, \\ w1_i^M &= 0, & -1 \leq ih \leq 0, \\ w1_0^k - w1_{-1}^k &= w1_1^k - w1_0^k, & 0 < k\tau < 1; \end{aligned} \quad (27)$$

$$w2_{\bar{i}} = w2_{\bar{x}x}^{(\sigma^+)}, \quad (ih, k\tau) \in Q_T^+, \quad (28)$$

$$w2_{\bar{x}} = -w2_{\bar{x}x}^{(\sigma^-)}, \quad (ih, k\tau) \in Q_T^-, \quad (29)$$

$$w2_i^0 = 0, \quad -1 \leq ih \leq 1, \quad (30)$$

$$w2_N^k = 0, \quad 0 \leq k\tau \leq 1, \quad (31)$$

$$w2_i^M = 0, \quad -1 \leq ih \leq 0, \quad (32)$$

$$w2_0^k - w2_{-1}^k = w2_1^k - w2_0^k, \quad 0 < k\tau < 1. \quad (33)$$

Функция  $w1$  имеет нулевой след на линии  $\gamma$ .

Умножим уравнения (28) и (33) на  $2\tau h(w2_i^k)^{(\sigma^+)}$ . Сложив эти уравнения и просуммировав по  $i$  от 1 до  $N-1$  и по  $k$  от 1 до  $M$ , аналогично (22) получим

$$\begin{aligned} & (w2^M, w2^M) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5) \sum_{k=1}^M (w2_{\bar{i}}^k, w2_{\bar{i}}^k) \\ & + 2\tau \sum_{k=1}^M ((w2_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)}, (w2_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)}) \leq -2\tau \sum_{k=1}^M (w2_{-1}^k)^{(\sigma^+)} (w2_{\bar{x},0}^k)^{(\sigma^+)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Из уравнения (29) при  $i = -1$ ,  $\sigma^- = 1$  аналогично (23) получим

$$\begin{aligned} & -2\tau \sum_{k=1}^M (w2_{-1}^k)^{(\sigma^+)} (w2_{\bar{x},0}^k)^{(\sigma^+)} + 2\tau \sum_{k=1}^M ((w2_{\bar{x},s+1}^k)^{(\sigma^+)})_{-1}^2 \\ & \leq ((w2_{-1}^k)^{(\sigma^+)}, (w2_{-1}^k)^{(\sigma^+)}). \end{aligned} \quad (35)$$

Сложим (34) и (35):

$$\begin{aligned} & (w2^M, w2^M) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5) \sum_{k=1}^M (w2_{\bar{i}}^k, w2_{\bar{i}}^k) + 2\tau \sum_{k=1}^M ((w2_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)}, (w2_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)}) \\ & + 2\tau \sum_{k=1}^M ((w2_{\bar{i},s+1}^k)^{(\sigma^+)})_{-1}^2 \leq ((w2_{-1}^k)^{(\sigma^+)}, (w2_{-1}^k)^{(\sigma^+)}). \end{aligned} \quad (36)$$

Умножая уравнение (29) на  $2\tau h(w2_i^k)^{(\sigma^-)}$  и преобразуя, получим в  $Q_T^-$

$$(w2^N, w2^N) + 2h(\sigma^- - 0.5) \sum_{i=1}^N ((w2_{\bar{x}})_i, (w2_{\bar{x}})_i) + 2h \sum_{i=1}^N (((w2_{\bar{t}})_i)^{(\sigma^-)}, ((w2_{\bar{t}})_i)^{(\sigma^-)}) \leq (w2_0, w2_0). \quad (37)$$

Из уравнения (29) при  $i = -1$ ,  $\sigma^- = 1$  можно получить

$$((w2_{-1}^k)^{(\sigma^+)}, (w2_{-1}^k)^{(\sigma^+)}) \leq ((w2_0^k)^{(\sigma^+)}, (w2_0^k)^{(\sigma^+)}). \quad (38)$$

Складывая (36)–(38), имеем

$$(w2^M, w2^M) + (w2^N, w2^N) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5) \sum_{k=1}^M (w2_{\bar{t}}^k, w2_{\bar{t}}^k) + 2\tau \sum_{k=1}^M (((w2_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)}, (w2_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)})] + 2\tau \sum_{k=1}^M (((w2_{\bar{t}}^{k,s+1})^{(\sigma^+)})_{-1}^2 + 2h(\sigma^- - 0.5) \sum_{i=1}^N ((w2_{\bar{x}})_i, (w2_{\bar{x}})_i) + 2h \sum_{i=1}^N (((w2_{\bar{t}})_i)^{(\sigma^-)}, ((w2_{\bar{t}})_i)^{(\sigma^-)}) \leq 2((w2_0^k)^{(\sigma^+)}, (w2_0^k)^{(\sigma^+)}). \quad (39)$$

Строя итерационный алгоритм, аналогично (6)–(17) можно показать, что  $w2(0, k\tau)^s \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ . Так как  $w2(0, k\tau)$  является пределом  $w2(0, k\tau)^s$  при  $s \rightarrow \infty$ , то  $w2(0, k\tau) = 0$ .

Для задачи (27) можно получить оценку

$$0.5(w1^M, w1^M) + 0.5(w1^N, w1^N) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5) \sum_{k=1}^M (w1_{\bar{t}}^k, w1_{\bar{t}}^k) + 2\tau \sum_{k=1}^M (((w1_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)}, (w1_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)})] + 2h(\sigma^- - 0.5) \sum_{i=1}^N ((w1_{\bar{x}})_i, (w1_{\bar{x}})_i) + 2h \sum_{i=1}^N (((w1_{\bar{t}})_i)^{(\sigma^-)}, ((w1_{\bar{t}})_i)^{(\sigma^-)}) \leq 2h \sum_{i=1}^N (f_h^2) + 2\tau \sum_{k=1}^M (g_h^2). \quad (40)$$

Объединяя (39) и (40) и применяя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}
& 0.5(w^M, w^M) + 0.5(w^N, w^N) + 2\tau(\sigma^+ - 0.5) \sum_{k=1}^M (w_{\bar{t}}^k, w_{\bar{t}}^k) \\
& \quad + 2\tau \sum_{k=1}^M ((w_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)}, (w_{\bar{x}}^k)^{(\sigma^+)}) \\
& + 2h(\sigma^- - 0.5) \sum_{i=1}^N ((w_{\bar{x}})_i, (w_{\bar{x}})_i) + 2h \sum_{i=1}^N (((w_{\bar{t}})_i)^{(\sigma^-)}, ((w_{\bar{t}})_i)^{(\sigma^-)}) \\
& \leq 2h \sum_{i=1}^N (f_h^2) + 2\tau \sum_{k=1}^M (g_h^2). \quad (41)
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что при  $h, \tau \rightarrow 0$  решение  $y$  сходится слабо в  $W_2^{1,1}(Q_T^-) \cup W_2^{1,1}(Q_T^+)$  к  $u(x, t)$ .

Таким образом, доказана следующая

**Теорема.** *Решение разностной задачи (2) слабо сходится в  $W_2^{1,1}(Q_T^-) \cup W_2^{1,1}(Q_T^+)$  к решению дифференциальной задачи (1).*

## 5. Численные расчеты

Для проверки правильности теоретических выкладок проводились следующие численные расчеты.

При  $f(x, t) = 0$ ,  $g(x, t) = x$  задача (1) имеет точное решение

$$u(x, t) = t - \frac{x^2}{2} \text{ в } Q_T^- \text{ и } u(x, t) = t + \frac{x^2}{2} \text{ в } Q_T^+.$$

На линии  $x = 0$  итерационное условие задавалось в виде  $y^0(0, k\tau) = 0, 0 \leq k\tau \leq 1$ . При  $h = 0.01$ ,  $\tau = 0.01$  после 100 итераций максимальная погрешность между точным и приближенным решениями равнялась 0.0001.

При  $f(x, t) = 0$ ,  $g(x, t) = (1 + x)e^{-t}$  задача (1) имеет точное решение  $u(x, t) = xe^{-t}$  в  $Q_T^-$  и  $u(x, t) = e^{-t} \sin(x)$  в  $Q_T^+$ . На линии  $x = 0$  итерационное условие задавалось в виде  $y^0(0, k\tau) = 1, 0 \leq k\tau \leq 1$ . При

$h=0.01$ ,  $\tau = 0.01$  после 100 итераций максимальная погрешность между точным и приближенным решениями равнялась 0.0005.

При  $f(x, t) = (1-x)e^{t-(x^2/2)}$ ,  $g(x, t) = -x^2e^{t+(x^2/2)}$  задача (1) имеет точное решение  $u(x, t) = e^{t-(x^2/2)}$  в  $Q_T^-$  и  $u(x, t) = e^{t+(x^2/2)}$  в  $Q_T^+$ . На линии  $x = 0$  итерационное условие задавалось в виде  $y^0(0, k\tau) = 0$ ,  $0 \leq k\tau \leq 1$ . При  $h = 0.01$ ,  $\tau = 0.01$  после 100 итераций максимальная погрешность между точным и приближенным решениями равнялась 0.0032.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
2. Вабищевич П. Н. Численное решение краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 3. С. 432–442.
3. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
4. Попов С. В. Контактные задачи для линейных уравнений математической физики // Мат. заметки ЯГУ. 1997. Т. 3, вып. 1. С. 58–67.
5. Антонов Ю. С. Численное решение одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 1996. Т. 3, вып. 1. С. 3–7.
6. Пятков С. Г. Некоторые свойства собственных функций линейных пучков // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 111–124.
7. Васильев В. И., Тихонова О. А. Численное решение задач теплопроводности с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 1995. Т. 2, вып. 2. С. 84–91.

О МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ОТНОШЕНИЯМИ  
ПРЕДПОЧТЕНИЯ УЧАСТНИКОВ

Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов

Пусть имеются некоторые множества

$$E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}, \quad S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\},$$

натуральные числа  $m_i$  такие, что

$$i \in I = \{1, 2, \dots, m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n, \quad \sum_{i=1}^m m_i = n.$$

Назовем элементы множества  $E$  *объектами распределения*, а элементы множества  $S$  — *участниками распределения*. Число  $m_i$  есть количество объектов, на которые претендует участник  $S_i$ .

Пусть вектор  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$  таков, что  $x_j^i$  равняется либо 0, либо 1,  $\sum_{j=1}^n x_j^i = m_i$ . Вектор  $x^i$  назовем *вектором заявок участника*  $S_i$ . Обозначим через  $X^i$  ( $i \in I$ ) множество всех векторов заявок участника  $S_i$ .

Пусть

$$X = \left\{ (x^1, x^2, \dots, x^m) \in \prod_{i=1}^m X^i \mid (\forall p, q \in I, p \neq q) (\langle x^p, x^q \rangle = 0) \right\}.$$

Элементы множества  $X$  будем обозначать через  $x$ , а само множество будем называть *множеством допустимых распределений*.

Обозначим через  $f^i : X^i \rightarrow R^1$  отображения такие, что

$$\max_{x^i \in X^i} f^i(x^i) = 1, \quad \min_{x^i \in X^i} f^i(x^i) = 0 \quad (i \in I).$$

Задача заключается в том, чтобы распределить объекты  $E_j$  между участниками  $S_i$  согласно их долям  $m_i$  в распределении и отображениям  $f^i$ , которые назовем *функционалами выигрыша участника  $i \in I$* :

$$f^1(x^1) \rightarrow \max, \quad \dots, \quad f^m(x^m) \rightarrow \max, \\ (x^1, x^2, \dots, x^m) \in X.$$

Будем говорить, что распределение  $x^* \in X$  *удовлетворяет специальному принципу Парето-оптимальности*, если выполняется следующее условие:

$$((\forall i \in I)(\forall x \in \{y \in X | f^i(y^i) > f^i(x^{*i})\}))((\exists j \in I \setminus \{i\}) \\ ((f^j(x^j) < f^j(x^{*j})) \wedge (f^j(x^j) \leq f^i(x^{*i}))))).$$

Существует ряд задач распределения, которые легко укладываются в данную схему, см., например, [1]. Однако в некоторых задачах распределения бывает трудно определить функции  $f^i$ , поэтому попытаемся обойтись без задания функций  $f^i$ . В дальнейшем изложении без специальных оговорок будем использовать следующие понятия: предпорядок, отношение предпочтения и др. [2]. Пусть для любого  $i \in I$  имеется некоторое отношение предпочтения  $\succsim_i$  на множестве  $X^i$ .

В данном случае постановка многокритериальной задачи распределения может выглядеть следующим образом:

$$|\{y \in X | x^i \succsim_i y^i\}| \rightarrow \max, \quad i \in I, \quad (1)$$

$$(x^1, x^2, \dots, x^m) \in X, \quad (2)$$

где  $|A|$  обозначает мощность множества  $A$ .

Будем называть распределение  $x \in X$  *паретовским*, если не существует  $y \in X$  такого, что  $y^i \succsim_i x^i$  для всех  $i \in I$  и существует  $j \in I$ ,  $y^j \succ_j x^j$ .

Пусть имеется некоторый предпорядок  $\succ_s$  на  $X$  и выполняется условие

$$((\forall i \in I)(x^i \sim_i y^i)) \Rightarrow \neg((x \succ_s y) \vee (y \succ_s x)), \quad (3)$$

где  $x, y \in X$ . Введем следующее обозначение:

$$S_x \equiv \{y \in X \mid y \succ_s x\}, \quad S^x \equiv \{y \in X \mid x \succ_s y\}, \quad x \in X.$$

**Теорема 1.** Пусть  $x^* \in X$  такое, что  $S_{x^*}$  пусто. Тогда для того чтобы  $x^*$  было паретовским распределением, необходимо выполнение условия

$$(\forall y \in S^{x^*})(\exists i \in I)(x^{*i} \succ_i y^i).$$

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть выполняется условие теоремы и

$$(\exists z \in S^{x^*})(\forall i \in I)(z^i \succ_i x^{*i}).$$

Так как  $x^* \succ_s z$ , ввиду условия (3) существует  $j \in I$  такое, что  $z^j \succ_j x^{*j}$ . А это противоречит тому, что  $x^*$  — паретовское распределение. Теорема доказана.

Данная теорема позволяет ввести понятие решения многокритериальной задачи распределения с отношениями предпочтения  $\succ_i$  и предпорядком  $\succ_s$ . Действительно, рассмотрим многокритериальную задачу распределения с отношениями предпочтения  $\succ_i$  (1), (2). Разные паретовские распределения в этой задаче по-разному учитывают интересы любого отдельно взятого участника. Если ввести некоторый предпорядок на  $X$ , служащий неким «эталонном», по которому «сверяются» все участники распределения, то можно уже более осмысленно искать решения многокритериальной задачи распределения с отношениями предпочтения участников и некоторым предпорядком на  $X$ .

Утверждение теоремы дает необходимое условие, которому должен удовлетворять предпорядок на  $X$ . Рассматриваемое в теореме распределение  $x^*$  может служить решением такой задачи.



*ЛИТЕРАТУРА*

1. Егоров Р. И., Кайгородов С. П. О специальном парето-оптимальном решении многокритериальной задачи распределения // Респ. научно-практ. конф. посвященной 25-летию математического факультета ЯГУ «Математика. Информатика. Образование». Тез. докл. Якутск: Изд. УНПО МНиПО РС(Я), 2002. С. 62–63.
2. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.

г. Якутск

13 января 2003 г.

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ  
ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ\*)

М. А. Иванова

1. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = h_1(y)x + h_2(x)y = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_3(x) + h_4(x)y. \quad (1)$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что функции, входящие в правую часть этой системы, непрерывны при всех значениях своих аргументов;  $f_3(0) = 0$  и  $h_2(x) > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ ; выполнены обобщенные условия Рауза — Гурвица

$$h_1(y) + h_4(x) < 0, \quad h_1(y)h_4(x) - h_2(x)h_3(x) > 0, \quad xy \neq 0, \quad (2)$$

где  $h_3(x) = f_3(x)/x$ ,  $x \neq 0$ .

После введения нового параметра  $\tau$  по формуле

$$\tau = \int_0^t h_2(x(t)) dt \quad (3)$$

получим систему

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{h_1(y)}{h_2(x)}x + y, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{f_3(x)}{h_2(x)} + \frac{h_4(x)}{h_2(x)}y. \quad (1')$$

Решения  $x = y = 0$  систем (1) и (1') либо одновременно асимптотически устойчивы, либо одновременно таковыми не являются. Другими словами, преобразование (3) является для системы (1) допустимой заменой времени [1] по отношению к устойчивости в целом.

---

\*) Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (код проекта А03-2.8-541).

2. Предположим, что

$$h_1(y) \leq 0, \quad h_4(x) \leq 0. \quad (4)$$

Пусть  $H_1(x) = h_1(\varphi(x))$ , где  $\varphi(x)$  — единственная непрерывная невязная функция, определенная уравнением  $P(x, y) = 0$ . Ясно, что функция  $H_1(x)$  определена при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

В работе [1] доказана следующая

**Теорема.** Пусть выполнены условия Рауза — Гурвица (2) и существуют числа  $r > 0$ ,  $d > 0$  такие, что

$$r(H_1 h_4 - h_2 h_3) > 2(h_1 h_4 - h_2 h_3) \quad (5)$$

при  $|x| > d$ . Тогда в случае (4) для асимптотической устойчивости в целом решения  $x = y = 0$  системы (1) необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

1) имеет место равенство

$$\int_0^{\pm\infty} \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx + \left| \int_0^{\pm\infty} \frac{h_4(x)}{h_2(x)} dx \right| = +\infty; \quad (6)$$

2) уравнение  $P(x, y) = 0$  определяет единственную непрерывную кривую  $L$ , проходящую через начало координат, вдоль которой

$$\sup y = +\infty, \quad \inf y = -\infty. \quad (7)$$

Далее предположим, что условия (6) и (7) нарушаются. Тогда возникает проблема построения области притяжения состояния равновесия. Данная проблема является одной из трудных и недостаточно разработанных проблем качественной теории дифференциальных уравнений. Конфигурация области притяжения существенно зависит от того, каким образом нарушаются условия (6) и (7).

Возможны следующие варианты.

I. Хотя бы одно из условий (6) и (7) выполняется при  $x < 0$  и не выполняется при  $x > 0$ , т. е.

$$\int_0^{+\infty} \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx + \left| \int_0^{+\infty} \frac{h_4(x)}{h_2(x)} dx \right| < +\infty, \quad (8)$$

$$\int_0^{-\infty} \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx + \left| \int_0^{-\infty} \frac{h_4(x)}{h_2} dx \right| = +\infty, \quad (9)$$

$$\sup y < +\infty, \quad x > 0, \quad (10)$$

$$\inf y = -\infty, \quad x < 0. \quad (11)$$

II. Хотя бы одно из условий (6) и (7) выполняется при  $x > 0$  и не выполняется при  $x < 0$ , т. е.

$$\int_0^{+\infty} \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx + \left| \int_0^{+\infty} \frac{h_4(x)}{h_2(x)} dx \right| = +\infty, \quad (8')$$

$$\int_0^{-\infty} \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx + \left| \int_0^{-\infty} \frac{h_4(x)}{h_2} dx \right| < +\infty, \quad (9')$$

$$\sup y = +\infty, \quad x > 0, \quad (10')$$

$$\inf y < -\infty, \quad x < 0. \quad (11')$$

III. Условия (6) и (7) не выполняются как при  $x < 0$ , так и при  $x > 0$ , т. е.

$$\int_0^{\pm\infty} \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx + \left| \int_0^{\pm\infty} \frac{h_4(x)}{h_2(x)} dx \right| < +\infty, \quad (12)$$

$$|y| < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

**3.** В случае I изучается поведение сепаратрисных кривых, ограничивающих область притяжения состояния равновесия, в I и IV координатных четвертях. Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Предположим, что выполняются все условия теоремы [1], за исключением (6), (7), которые нарушаются при  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда для дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h_3(x)x + h_4(x)y}{h_1(y)x + h_2(x)y} \quad (14)$$

существуют

- 1) решение  $y = y^*(x)$ , лежащее в первой четверти и такое, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^*(x) = K_5$ , где  $K_5 \geq K_1$ ;
- 2) решение  $y = y^{**}(x)$ , лежащее в четвертой четверти и такое, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^{**}(x) = -2K_4$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из условий (8) и (10) следует, что существуют положительные числа  $K_1$ ,  $K_3$  и  $K_4$  такие, что

$$y = \varphi(x) \leq K_1 < +\infty \quad \text{при } x > 0, \quad (15)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|h_3|}{h_2} x dx = K_3 < +\infty, \quad \left| \int_0^{+\infty} \frac{h_4}{h_2} dx \right| = K_4 < +\infty. \quad (16)$$

Тогда существуют траектории, не примыкающие при  $t \rightarrow +\infty$  к началу координат. Покажем это.

Введем в рассмотрение функцию [1]

$$V_3(x, y) = r \int_0^x \frac{H_1 h_4 - h_2 h_3}{h_2^2} x dx + \frac{1}{2} \left( y - \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx \right)^2, \quad (17)$$

производная которой в силу системы (1')

$$\frac{dV_3}{d\tau} > 0 \quad \text{в области } D_1 = \left\{ (x, y) : x > d, y - \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx > 2(K_1 + K_4) \right\}.$$

Так как интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{H_1 h_4 - h_2 h_3}{h_2^2} x dx$$

сходится (см. [1]), положим

$$K_2 = \int_0^{+\infty} \frac{H_1 h_4 - h_2 h_3}{h_2^2} x dx \quad (18)$$

и рассмотрим линию уровня

$$V_3(x, y) = rK_2 + 2(K_1 + K_4)^2 = K \quad (19)$$

функции (17). Вследствие (18) она незамкнута и состоит из двух ветвей, дуга одной из которых содержится в  $D_1$ , где  $dV_3/d\tau > 0$ . Поэтому в  $D_1$  кривая (19) пересекается траекториями (1') в сторону возрастания функции (17). Кроме того, в  $D_1$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{h_1}{h_2}x + y = \left( \frac{h_1}{h_2}x + \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx \right) + \left( y - \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx \right) \\ &\geq -(K_1 + K_4) + \left( y - \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx \right) > -2(K_1 + K_4) + \left( y - \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx \right) > 0. \end{aligned}$$

Поэтому траектории (1'), начинающиеся при  $t = 0$  в области

$$D_2 = \left\{ (x, y) : x > d, y - \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx > 2(K_1 + K_4), V_3(x, y) > K \right\},$$

в дальнейшем ее не покидают. Следовательно, решение  $x = y = 0$  системы (1') не является асимптотически устойчивым в целом. Так как преобразование (3) является допустимой заменой времени, то и решение  $x = y = 0$  системы (1) не является асимптотически устойчивым в целом.

Таким образом, существуют траектории, уходящие в бесконечность, т. е. существует множество  $E = \{y\}$  точек  $(0, y)$ , через которые проходят положительные полутраектории, уходящие в бесконечность. Состояние равновесия системы асимптотически устойчиво по Ляпунову, поэтому множество  $E$  ограничено снизу, а это означает, что оно имеет точную нижнюю грань  $y^*$ . Обозначим через  $y = y^*(x)$  положительную полутраекторию, выходящую из точки  $(0, y^*)$ . Очевидно, данная траектория будет точней нижней гранью траекторий, уходящих в бесконечность.

Пусть  $y = y^*(x)$  — полутраектория, не уходящая в бесконечность. Тогда имеется два варианта:

1)  $y = y^*(x)$  — положительная устойчивая траектория, но это противоречит теореме о непрерывной зависимости решений от начальных

данных, ибо в любой сколь угодно малой окрестности точки  $N$  данной траектории существуют точки, через которые проходят неустойчивые траектории с монотонно возрастающей абсциссой;

2)  $y = y^*(x)$  — положительная неустойчивая траектория, но при этом не уходит в бесконечность, т. е. она имеет замкнутую предельную траекторию  $L_0$ . Так как область, заключенная внутри  $L_0$ , целиком принадлежит области определения системы, внутри  $L_0$  лежит по крайней мере одно состояние равновесия, что противоречит единственности состояния равновесия.

Таким образом,  $y = y^*(x)$  — полутраектория, уходящая в бесконечность. Очевидно, она удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y^*(x) = K_5,$$

где  $K_5$  — некоторое число, которое больше либо равно  $K_1$ .

2. Рассмотрим функцию

$$V_2^-(x, y) = \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx - y, \quad (20)$$

производная которой в силу системы (1') (см. [1])

$$\frac{dV_2^-}{d\tau} > 0 \quad \text{при } x > 0. \quad (21)$$

Далее, рассмотрим линию уровня

$$V_2^- = K_4 \quad (22)$$

функции (20). Решая уравнение (22) относительно переменной  $y$ , находим решение, которое обозначим через

$$y_1^{**}(x) = \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx - K_4. \quad (23)$$

Ввиду (16)  $y_1^{**}(x) \rightarrow -2K_4$  при  $x \rightarrow +\infty$ . При  $x = 0$  имеем

$$y_1^{**}(0) = -K_4.$$

Ясно, что кривая (25) лежит в области

$$D_3 = \left\{ (x, y) : x > 0, y < \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx \right\}.$$

Так как  $\frac{dV_2^-}{d\tau} > 0$  в этой области, кривая (23) пересекается траекториями системы (1') в сторону возрастания функции.

Введем в рассмотрение линию уровня

$$V_3 = \frac{1}{2}K_4^2 + rK_2 \quad (24)$$

функции (17). Аналогично, решая уравнение (24), получаем следующий вид нижней ветви:

$$y_2^{**}(x) = \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx - \sqrt{2rK_2 + K_4^2 - 2r \int_0^x \frac{H_1 h_4 - h_2 h_3}{h_2^2} x dx}. \quad (25)$$

В силу (18), (16) кривая  $y_2^{**}(x)$  стремится к  $-2K_4$  при  $x \rightarrow +\infty$ . При  $x = 0$  имеем  $y_2^{**}(0) = -\sqrt{2rK_2 + K_4^2}$ , которая лежит ниже, чем точка  $(0; -K_4)$ . Кривая (25) также принадлежит области  $D_3$ . Так как  $\frac{dV_3}{d\tau} < 0$  в области

$$D_4 = \left\{ (x, y) : x \geq d, y - \int_0^x \frac{h_4}{h_2} dx < 2(K_1 + K_4) \right\}$$

и тем более в области  $D_3$ , эта кривая пересекается траекториями системы (1') в сторону убывания функции.

Рассмотрим область

$$D_5 = \{(x, y) : y_2^{**}(x) < y < y_1^{**}(x)\}.$$

Границы  $y = y_1^{**}(x)$  и  $y = y_2^{**}(x)$  области  $D_5$  являются точками строгого входа. Поэтому по теореме Важевского [2] существует хотя бы одно решение, которое лежит между линиями уровней (22), (24). Обозначим через  $y = y^{**}(x)$  точную верхнюю грань решений такого вида. Это решение удовлетворяет условию  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^{**}(x) = -2K_4$ .



**Следствие.** Полутраектория  $f^+(p, t)$ , обладающая свойством

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f^+(p, t) = (+\infty, K_5),$$

является сепаратрисной полутраекторией, отделяющей семейство полутраекторий со свойством

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f^+(p, t) = (+\infty, K_5)$$

от семейства положительных полутраекторий  $f^+(p, t)$ , которые пересекают график функции

$$y = -\frac{h_1}{h_2}x \tag{26}$$

и для которого  $p$  лежит на положительной части оси  $OY$ .

Доказательство вытекает из доказательства п. 1 теоремы 1. Так как решение  $y = y^*(x)$  уравнения (14) является самой нижней из траекторий, уходящих в бесконечность при  $x \rightarrow +\infty$ , то любое решение  $y = y(x)$  этого уравнения с начальным значением  $y(0)$ , удовлетворяющее неравенствам  $0 < y(0) < y^*(0)$ , пересекает график функции (26). Теперь ясно, что график функции  $y = y^*(x)$  и является той положительной полутраекторией  $f^+(p, t)$ , которая удовлетворяет требованиям следствия.

**4.** Конфигурация области притяжения существенно зависит от того, каким образом нарушаются условия (6) и (7). В случае I из условия (9) следует, что возможны два подслучая

$$1) \int_0^{-\infty} \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx = +\infty;$$

$$2) \int_0^{-\infty} \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx = K_3^- < +\infty \quad \text{и} \quad \left| \int_0^{-\infty} \frac{h_4(x)}{h_2(x)} dx \right| = +\infty.$$

Рассмотрим случай 1. Введем в рассмотрение знакоположительную функцию

$$V_1(x, y) = \int_0^x \frac{|h_3(x)|}{h_2(x)} x dx + \frac{y^2}{2}. \tag{27}$$

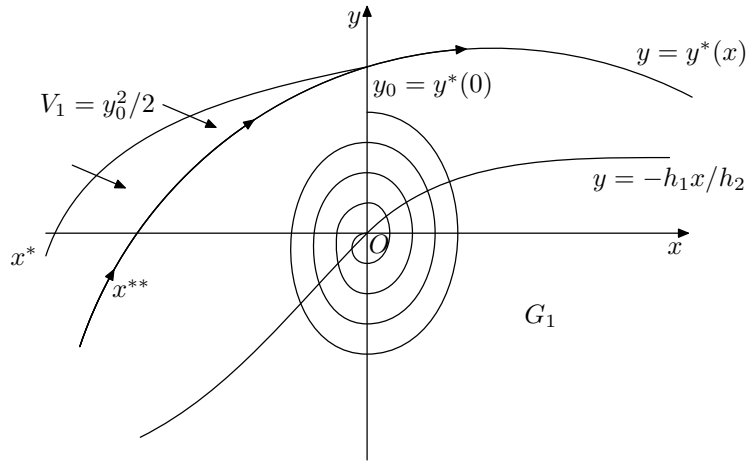


Рис. 1.

В работе [1] показано, что

$$\frac{dV_1(x, y)}{d\tau} \leq 0 \quad \text{при всех } (x, y) \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^2. \quad (28)$$

Далее, из точки  $y_0^* = y^*(0)$  выпустим линию уровня

$$V_1(x, y) = \frac{y_0^{*2}}{2}. \quad (29)$$

Она обязательно пересечет отрицательную полуось абсцисс в некоторой точке  $x^*$ . В силу условия (28) траектории системы (1) пересекают линию уровня (29) снаружи во внутрь. Поэтому продолжение  $y = y^*(x)$  в направлении отрицательной полуоси абсцисс не может пересечь эту линию уровня. Тогда она пересечет отрицательную полуось  $Ox$  в некоторой точке  $x^{**} > x^*$ . Далее, возможны 2 случая:

- 1а) траектория  $y = y^*(x)$  не пересекает графика функции (26);
- 1б) траектория  $y = y^*(x)$  пересекает этот график функции.

Рассмотрим область (рис.1)

$$G_1 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y < y^*(x)\}.$$

**Теорема 2.** В случае 1а)  $G_1$  является областью притяжения состояния равновесия системы (1).

Доказательство. Так как область  $G_1$  ограничена траекторией  $y = y^*(x)$ , обе ветви которой уходят в бесконечность, решение  $(x(t), y(t))$  системы (1) будет всегда оставаться в том множестве ( $G_1$  или  $\mathbb{R}^2 \setminus G_1$ ), в котором лежит точка  $(x_0, y_0)$ , и, следовательно, не может стремиться к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$ , если  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus G_1$ .

Пусть поэтому  $(x_0, y_0) \in G_1$ , и пусть  $x_0 = 0$ ,  $0 < y_0 < y_0^*$ . Из следствия теоремы 1 рассматриваемое решение пересечет график функции (26) в первой четверти. Затем ввиду того, что

$$\dot{x} < 0 \quad \text{при } y < -\frac{h_1}{h_2}x,$$

оно либо будет стремиться к началу координат, либо пересечет график функции (26) в третьей четверти. Далее, так как  $(x(t), y(t))$  не может пересечь решение  $y = y^{**}(x)$ , оно либо стремится к началу координат, либо пересечет положительную полуось ординат, причем в силу (28) ниже точки  $(0, y_0)$ . Таким образом, мы пришли к исходному положению. Через какое-то число оборотов вокруг начала координат  $(x(t), y(t))$  будет стремиться к точке  $(0, 0)$ , в противном случае оно будет стремиться к положению равновесия по спирали. Теорема доказана.

Рассмотрим случай 1б). Покажем, что траектория  $y = y^*(x)$  пересекает отрицательную полуось ординат. По предположению она пересекает график функции (26). В дальнейшем в силу условия  $dV_2^-/d\tau < 0$  при  $x < 0$  она не может пересечь линию уровня функции (20) и, следовательно, пересечет отрицательную полуось ординат в некоторой точке.

Из этой же точки выпустим линию уровня функции (27). В силу (28) траектория  $y = y^*(x)$  лежит ниже этой линии и при  $x \rightarrow +\infty$  будет асимптотически стремиться снизу к некоторой прямой  $y = \text{const}$ , т. е. область притяжения целиком содержит положительную полуось  $Ox$ .

Обозначим через  $G_2$  область, ограниченную траекторией  $y = y^*(x)$  (рис. 2).

**Теорема 3.** В случае 1б)  $G_2$  является областью притяжения состояния равновесия системы (1).

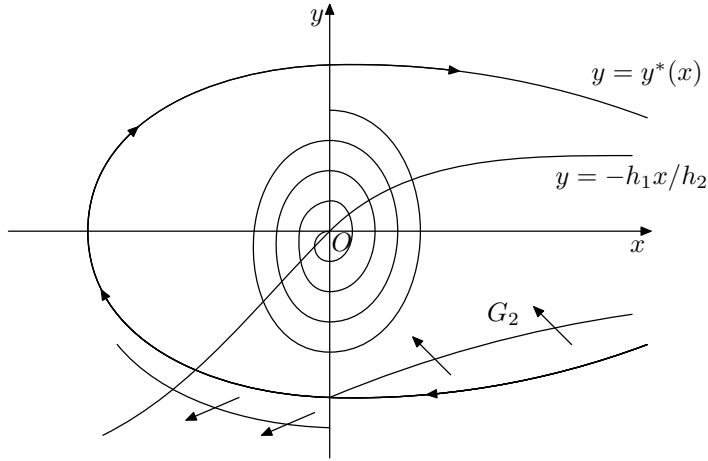


Рис. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как область  $G_2$  ограничена траекторией  $y = y^*(x)$ , обе ветви которой уходят в бесконечность, решение  $(x(t), y(t))$  системы (1) будет всегда оставаться в том множестве ( $G_2$  или  $\mathbb{R}^2 \setminus G_2$ ), в котором лежит точка  $(x_0, y_0)$ , и, следовательно, не может стремиться к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$ , если  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus G_2$ .

Пусть поэтому  $(x_0, y_0) \in G_2$ , и пусть  $x_0 = 0$ ,  $0 < y_0 < y_0^*$ . Далее рассуждаем, как при доказательстве теоремы 2.

Рассмотрим случай 2. Из уравнения (29) найдем  $y$ :

$$y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{y_0^{*2} - 2 \int_0^x \frac{|h_3|}{h_2} x dx}. \quad (30)$$

Отсюда получаем, что

2а) если  $y_0^{*2} \geq 2K_3$ , то линия уровня (30) функции (27) пересекает отрицательную полуось абсцисс в некоторой точке; дальнейшие рассуждения сводятся к рассмотрению случая 1: получаются области  $G_1^*$  и  $G_2^*$ , аналогичные областям  $G_1$  и  $G_2$  соответственно;

2б) если  $y_0^{*2} < 2K_3$ , то линия уровня (30) функции (27) не пересекает отрицательную полуось  $Ox$ .

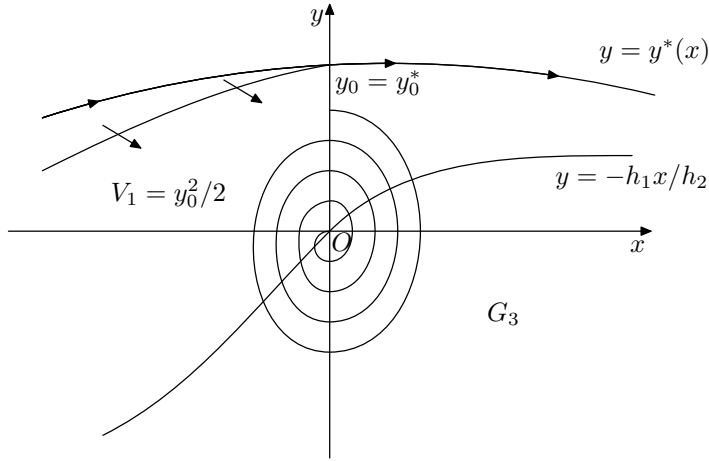


Рис. 3.

Из точки  $y_0^*$  в сторону убывания  $t$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_-(x)$ . Она не может пересечь линию уровня (30) в силу условия (28) и, следовательно, асимптотически будет стремиться сверху к прямой  $y = \text{const} > 0$ . Полутраектории  $y = y_-(x)$  и  $y = y^*(x)$  образуют траекторию  $y = y_1^*(x)$ .

Рассмотрим область  $G_3$ , лежащую ниже траектории  $y = y_1^*(x)$  (рис. 3).

**Теорема 4.** В случае 2б)  $G_3$  является областью притяжения состояния равновесия системы (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается аналогично теореме 2.

5. Рассмотрим случай II, когда выполняются условия (8')–(11'). Относительно свойств траекторий в левой полуплоскости ( $x < 0$ ) справедливы утверждения, аналогичные теореме 1 и его следствию. Картина расположения областей устойчивости  $G_1^*$ ,  $G_2^*$ ,  $G_3^*$  отличается от  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  соответственно лишь поворотом на  $180^\circ$  вокруг начала координат. Аналогичным образом доказываются теоремы (2)–(4) при замене  $x = -x$  и  $y = -y$ .

**6.** Далее рассмотрим случай, когда выполняются условия (12) и (13). Аналогично рассмотренным выше случаям I, II существуют решения уравнения (14), обладающие следующими свойствами:

- 1)  $y = y_1^+(x)$ ,  $y_1^+(0) = y_{10} > 0$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_1^+(x) = K_5$ ;
- 2)  $y = y_2^+(x)$ ,  $y_2^+(0) = y_{20} < 0$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y_2^+(x) = -K_5$ ;
- 3)  $y = y_3^-(x)$ ,  $y_3^-(0) = y_{30} < 0$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_3^-(x) = -2K_4$ ;
- 4)  $y = y_4^-(x)$ ,  $y_4^-(0) = y_{40} > 0$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y_4^-(x) = 2K_4$ .

Логически возможны 9 случаев взаимного расположения точек  $y_{10}$ ,  $y_{20}$ ,  $y_{30}$ ,  $y_{40}$  на оси ординат:

- 6.1)  $y_{10} = y_{40}$ ,  $y_{20} = y_{30}$ ;
- 6.2)  $y_{10} = y_{40}$ ,  $y_{20} > y_{30}$ ;
- 6.3)  $y_{10} = y_{40}$ ,  $y_{20} < y_{30}$ ;
- 6.4)  $y_{10} > y_{40}$ ,  $y_{20} = y_{30}$ ;
- 6.5)  $y_{10} < y_{40}$ ,  $y_{20} = y_{30}$ ;
- 6.6)  $y_{10} > y_{40}$ ,  $y_{20} > y_{30}$ ;
- 6.7)  $y_{10} > y_{40}$ ,  $y_{20} < y_{30}$ ;
- 6.8)  $y_{10} < y_{40}$ ,  $y_{20} > y_{30}$ ;
- 6.9)  $y_{10} < y_{40}$ ,  $y_{20} < y_{30}$ .

**6.1.** Рассмотрим случай 6.1. При данных условиях полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_4^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1^+(x)$ , а полутраектории  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_3^-(x)$  — траекторию  $y = y_2(x)$ . Обозначим через  $G_4$  область (рис. 4)

$$G_4 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

**Теорема 5.** В случае 6.1  $G_4$  является областью притяжения состояния равновесия системы (1').

**Доказательство.** Так как область  $G_4$  ограничена траекториями, обеими ветвями уходящими в бесконечность, то решение  $(x(t), y(t))$  системы (1') не может стремиться к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$ ,

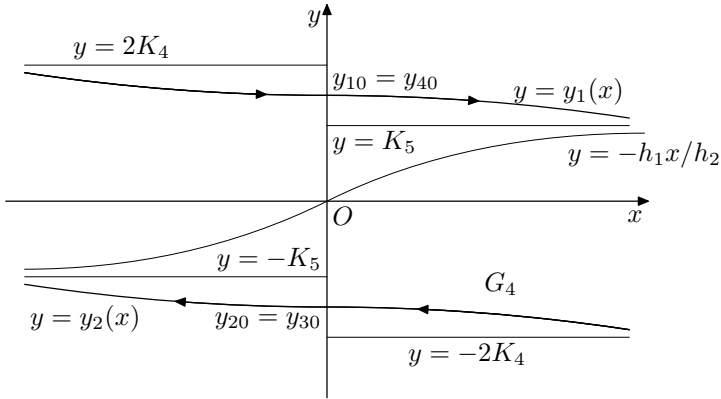


Рис. 4.

если  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus G_4$ . Если же  $(x_0, y_0) \in G_4$ , то, используя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2, убеждаемся, что  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Теорема доказана.

**6.2.** В случае 6.2 из точки  $(0, y_{20})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_2^-(x)$ . При убывании  $t$  возникает альтернатива:

а) отрицательная полутраектория  $y = y_2^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность, так что  $x(t) \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = c_1$ , где  $y_{30} < c_1 < 0$ ;

б) отрицательная полутраектория  $y = y_2^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность, так что  $x(t) \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = c_2$ , где  $0 < c_1 < K_5$ ;

в) полутраектория  $y = y_2^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  описывает дугу, лежащую в правой полуплоскости ( $x > 0$ ), и пересекает положительную полуось ординат в некоторой точке.

Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_4^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1(x)$ , а полутраектории  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_2^-(x)$  — траекторию  $y = y_2(x)$ .

В случае а), б) обозначим через  $G_5$  ( $G_6$ ) область (рис. 5)

$$G_5 \text{ (} G_6 \text{)} = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

Область  $G_5$  ( $G_6$ ) обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и  $G_4$ , за исключением того, что для нее  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_2(x) = c_1$ , где  $y_{30} < c_1 < 0$

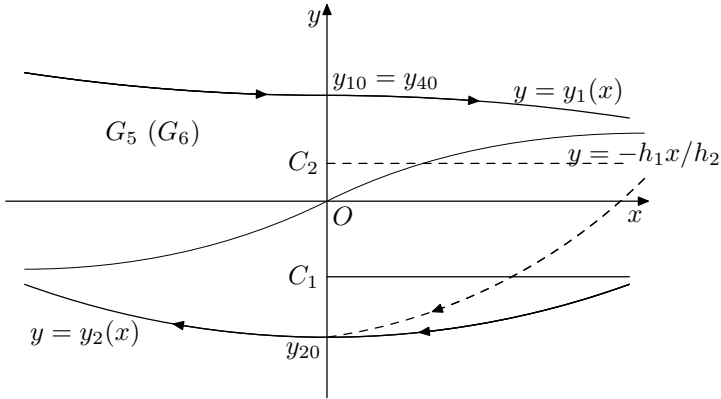


Рис. 5.

( $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_2(x) = c_2$ , где  $0 < c_1 < K_5$ ), тогда как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_2(x) = -2K_4$  для  $G_4$ . Поэтому аналогично показывается, что область  $G_5 (G_6)$  в случаях 6.2а), 6.2б) является областью притяжения состояния равновесия системы (1').

Обращаясь к случаю в), заметим, что при дальнейшем убывании  $t$  снова возникают альтернативы а), б) и в), но в левой полуплоскости: либо  $x(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow -\infty$ , а  $y(t)$  асимптотически стремится к прямой  $y = \text{const} > 0$ , либо к прямой  $y = \text{const} < 0$ , либо полутраектория  $y = y_2^-(x)$  опишет дугу, лежащую в левой полуплоскости, и пересечет отрицательную полуось ординат в точке  $(0, y^*)$ . Таким образом,  $y = y_2^-(x)$  опишет вокруг начала координат виток спирали. Функция (27) монотонно убывает вдоль любого решения системы (1'), поэтому, рассматривая ее поведение вдоль траектории  $y = y_2^-(x)$ , найдем, что  $y^{*2} > y_{20}^2$ . Но это невозможно, так как  $|y^*| < |y_{20}|$ . Следовательно, третья альтернатива не имеет места, и, значит, реализуются первая и вторая. Пусть  $G_7 (G_8)$  — область, содержащая начало координат и ограниченная траекторией  $y = y_2(x)$ ,  $G_7$  — область, которая обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и область  $G_2^*$ . Поэтому рассмотрим область  $G_8$  (рис. 6). Нетрудно показать, что  $G_8$  в случае 6.2 в) является областью притяжения состояния равновесия системы (1').



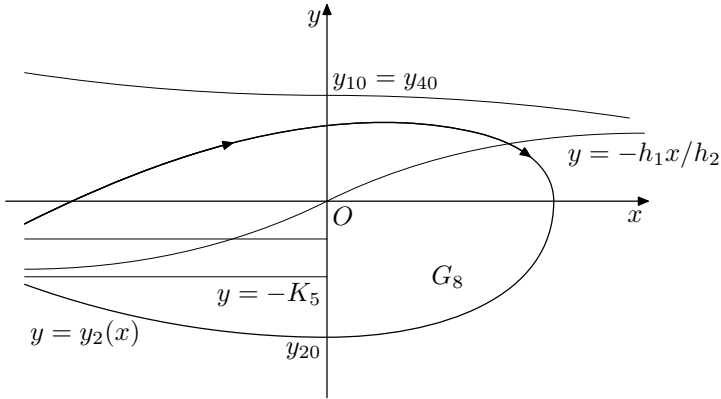


Рис. 6.

**6.3.** Рассмотрим случай 6.3. Продолжаем полутраекторию  $y = y_2^+(x)$  в сторону убывания  $t$ . Тогда полутраектория  $y = y_2^-(x)$  пройдет ниже полутраектории  $y = y_3^-(x)$  и будет асимптотически стремиться к прямой  $y = \text{const} < -2K_4$ . Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_4^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1(x)$ , а полутраектории  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_2^-(x)$  — траекторию  $y = y_2(x)$ . Рассмотрим область

$$G_9 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

Область  $G_9$  обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и  $G_5$ , за исключением того, что для нее  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_2(x) = \text{const} < -2K_4$ , тогда как для  $G_5$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_2(x) = \text{const} > -2K_4.$$

**6.4.** Рассмотрим случай 6.4. Из точки  $(0, y_{10})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_1^-(x)$ . Эта полутраектория при  $x \rightarrow -\infty$  будет асимптотически стремиться сверху к прямой  $y = \text{const} > 2K_4$ . Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_1^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1(x)$ , а полутраектории  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_3^-(x)$  образуют  $y = y_2(x)$ . Обозначим через  $G_{10}$  область

$$G_{10} = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

Нетрудно заметить, что область  $G_{10}$  получается поворотом  $G_5$  на  $180^\circ$  вокруг начала координат.

**6.5.** Рассмотрим случай 6.5. Из точки  $(0, y_{10})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_1^-(x)$ . Возникают альтернативы:

а) отрицательная полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} > 0$ ;

б) полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} < 0$ ;

в) полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  описывает дугу, лежащую в левой полуплоскости ( $x < 0$ ), и пересекает отрицательную полуось ординат в некоторой точке.

Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_1^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1(x)$ , а полутраектории  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_3^-(x)$  — траекторию  $y = y_2(x)$ .

В случаях 6.5а), 6.5б) областью притяжения будет

$$G_{11} (G_{12}) = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

Заметим, что область  $G_{11} (G_{12})$  отличается от  $G_5 (G_6)$  лишь поворотом на  $180^\circ$  вокруг  $(0,0)$ .

Рассмотрим возможность в). При дальнейшем убывании  $t$  снова возникают альтернативы а), б), но в левой полуплоскости либо  $x(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow -\infty$ , а  $y(t)$  асимптотически стремится к прямой  $y = \text{const} < 0$ , либо к прямой  $y = \text{const} > 0$ . Тогда область  $G_{13} (G_{14})$ , содержащая начало координат и ограниченная траекторией  $y = y_1(x)$ , будет областью притяжения состояния равновесия системы (1') в случае 6.5в). Область  $G_{13}$  обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и  $G_2, G_{14}$  отличается от  $G_8$  поворотом на  $180^\circ$  вокруг  $(0,0)$ .

**6.6.** Рассмотрим случай 6.6. Из точки  $(0, y_{20})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_2^-(x)$ . Возникают альтернативы:

а)  $x(t) \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} < 0$ ;

б)  $x(t) \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} > 0$ ;

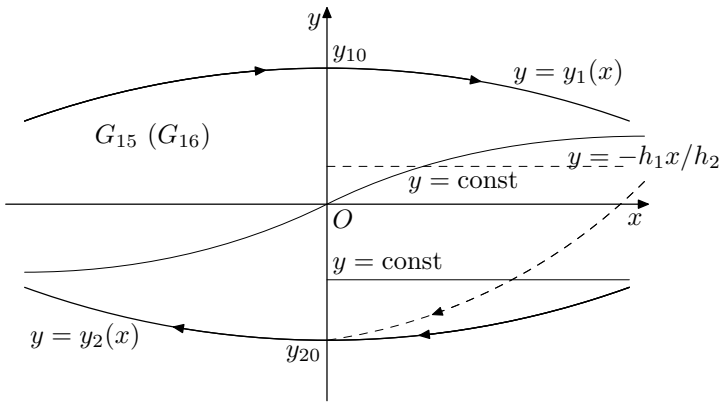


Рис. 7.

в) полутраектория  $y = y_2^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  описывает дугу, лежащую в правой полуплоскости ( $x > 0$ ), и пересекает положительную полуось ординат в некоторой точке.

В случаях а), б) из точки  $(0, y_{10})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_1^-(x)$ , которая при убывании  $t$  пройдет выше полутраектории  $y = y_4^-(x)$  и будет асимптотически стремиться сверху к прямой  $y = \text{const} > 0$ .

Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_1^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1(x)$ , а полутраектории  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_2^-(x)$  — траекторию  $y = y_2(x)$ .

В случаях 6.6а), 6.6б) областью асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (1') будет область (рис. 7)

$$G_{15} (G_{16}) = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

Рассмотрим возможность в). Возникает вопрос: каким образом полутраектория  $y = y_2(x)$  пересекает положительную полуось ординат? Возможны три случая:

- в<sub>1</sub>) точка пересечения лежит между точками  $y_{40}$  и  $y_{10}$ ;
- в<sub>2</sub>) точка пересечения совпадает с точкой  $y_{40}$ ;
- в<sub>3</sub>) точка пересечения лежит ниже точки  $y_{40}$ .

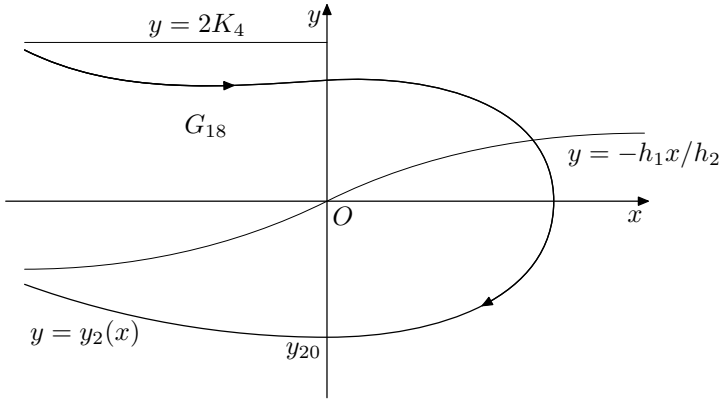


Рис. 8.

В случае  $v_1$  полутраектория  $y = y_2^-(x)$ , монотонно убывая, асимптотически стремится сверху к прямой  $y = \text{const} > 2K_4$ . Полутраектории  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_2^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_2(x)$ . Обозначим через  $G_{17}$  область, содержащую начало координат и ограниченную траекторией  $y = y_2(x)$ . Эта область обладает той же конфигурацией, что и  $G_2^*$ .

В случае  $v_2$  полутраектории  $y = y_2^+(x)$ ,  $y = y_2^-(x)$  и  $y = y_4^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_2(x)$ . Область  $G_{18}$ , содержащая точку  $(0,0)$  и ограниченная траекторией  $y = y_2(x)$ , будет областью притяжения состояния равновесия системы  $(1')$  в случае 6.6 $v_2$  (рис. 8).

В случае  $v_3$  полутраектория  $y = y_2^-(x)$  при убывании  $t$  будет либо асимптотически стремиться сверху к прямой  $y = \text{const} > 0$ , либо пересечет отрицательную полуось абсцисс и будет асимптотически стремиться сверху к прямой  $y = \text{const} < 0$ . Полутраектории  $y = y_2^+(x)$ ,  $y = y_2^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_2(x)$ . Область, содержащую начало координат и ограниченную траекторией  $y = y_2(x)$ , обозначим через  $G_{19}$  ( $G_{20}$ ). Область  $G_{19}$  ( $G_{20}$ ) обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и  $G_2^*$  ( $G_8$ ).

**6.7.** Рассмотрим случай 6.7. Из точки  $(0, y_{10})$  выпустим отрица-

тельную полутраекторию  $y = y_1^-(x)$ . Она, монотонно убывая, будет асимптотически стремиться сверху к прямой  $y = \text{const} > 2K_4$ . Из точки  $(0, y_{20})$  также выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_2^-(x)$ , которая при убывании  $t$  будет асимптотически стремиться снизу к прямой  $y = \text{const} < -2K_4$ . Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_1^-(x)$ , а также  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_2^-(x)$  образуют траектории  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  соответственно. Обозначим через  $G_{21}$  область притяжения состояния равновесия системы (1') в случае 6.7:

$$G_{21} = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

Свойства и конфигурация области  $G_{21}$  те же, что и у  $G_{15}$ , за исключением того, что для нее  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y_2(x) = \text{const} < -2K_4$ , тогда как  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y_2(x) = \text{const} > -2K_4$  для  $G_{15}$ .

**6.8.** Рассмотрим случай 6.8. Из точки  $(0, y_{10})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_1^-(x)$ . Тогда возникают альтернативы:

а) отрицательная полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} > 0$ ;

б) полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} < 0$ ;

в) полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  описывает дугу, лежащую в левой полуплоскости ( $x < 0$ ), и пересекает отрицательную полуось ординат в некоторой точке.

В случаях а), б) из точки  $(0, y_{20})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_2^-(x)$ . Тогда снова возникают альтернативы:

а<sub>1</sub>), б<sub>1</sub>) отрицательная полутраектория  $y = y_2^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} < 0$ ;

а<sub>2</sub>), б<sub>2</sub>) полутраектория  $y = y_2^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} > 0$ ;

а<sub>3</sub>), б<sub>3</sub>) полутраектория  $y = y_2^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  описывает дугу, лежащую в правой полуплоскости ( $x > 0$ ), и пересекает положительную полуось ординат в некоторой точке.

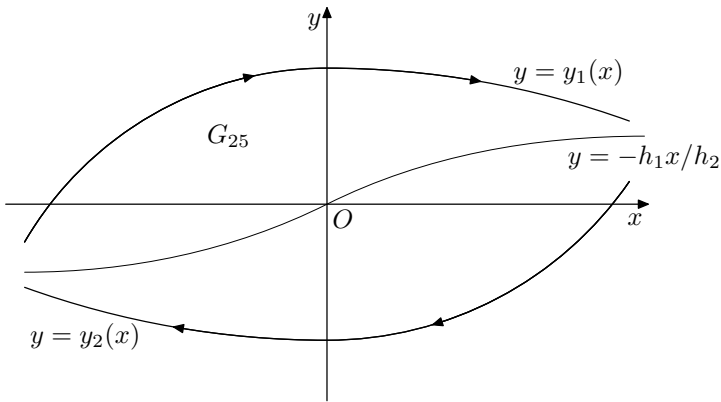


Рис. 9.

Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_1^-(x)$ , а также  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_2^-(x)$  образуют траектории  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  соответственно.

В случае  $a_1), b_1)$  областью притяжения будет область

$$G_{22} (G_{23}) = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

Область  $G_{22}$  обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и  $G_{15}$ , за исключением того, что для нее  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_1(x) = \text{const} < 2K_4$ , тогда как для  $G_{15}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_2(x) = \text{const} > 2K_4,$$

$G_{23}$  получается из  $G_{15}$  поворотом на  $180^\circ$  вокруг начала координат.

В случаях  $a_2), b_2)$  областью притяжения будет область (рис. 9)

$$G_{24} (G_{25}) = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\},$$

где  $G_{24}$  обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и  $G_{16}$ .

В случаях  $a_3), b_3)$  полутраектория  $y = y_2^-(x)$  либо при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} > 0$ , либо пересекает отрицательную полуось абсцисс и будет асимптотически стремиться сверху к прямой  $y = \text{const} < 0$ . Отсюда получаем область притяжения  $G_{26} (G_{27})$ , содержащую начало координат и ограниченную траекторией  $y = y_2(x)$ . Область  $G_{26} (G_{27})$  обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и  $G_2^* (G_8)$ .

В случае в) при дальнейшем убывании  $t$  полутраектория  $y = y_1^-(x)$  либо уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} < 0$ , либо пересечет положительную полуось абсцисс и будет асимптотически стремиться снизу к прямой  $y = \text{const} > 0$ . Обозначим через  $G_{28}$  ( $G_{29}$ ) область притяжения, содержащую начало координат и ограниченную траекторией  $y = y_1(x)$ . Область  $G_{28}$  ( $G_{29}$ ) обладает теми же свойствами, что и  $G_2$  ( $G_{14}$ ).

**6.9.** Рассмотрим случай 6.9. Из точки  $(0, y_{10})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_1^-(x)$ . Возникают альтернативы:

а) отрицательная полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} > 0$ ;

б) полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  уходит в бесконечность так, что  $x(t) \rightarrow -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \text{const} < 0$ ;

в) полутраектория  $y = y_1^-(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$  описывает дугу, лежащую в левой полуплоскости ( $x < 0$ ), и пересекает отрицательную полуось ординат в некоторой точке.

В случае а), б) из точки  $(0, y_{20})$  выпустим отрицательную полутраекторию  $y = y_2^-(x)$ , которая будет асимптотически стремиться снизу к прямой  $y = \text{const} < -2K_4$ . Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_1^-(x)$ , а также  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_2^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  соответственно. Через  $G_{30}$  ( $G_{31}$ ) обозначим область

$$G_{30} (G_{31}) = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y_2(x) < y < y_1(x)\}.$$

Область  $G_{30}$  ( $G_{31}$ ), обладающая теми же свойствами и конфигурацией, что и область  $G_{15}$  ( $G_{16}$ ), повернутая на  $180^\circ$  вокруг  $(0,0)$ , будет областью притяжения состояния равновесия системы (1') в случаях 6.9а), 6.9б).

В случае в), как и в случае 6.бв), возникает вопрос: каким образом полутраектория пересекает отрицательную полуось ординат? Возможны три случая:

в<sub>1</sub>) точка пересечения лежит между точками  $y_{30}$  и  $y_{20}$ ;

в<sub>2</sub>) точка пересечения совпадает с точкой  $y_{30}$ ;

в<sub>3</sub>) точка пересечения лежит ниже точки  $y_{30}$ .

Полутраектории  $y = y_1^+(x)$  и  $y = y_1^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1(x)$ .

В случае в<sub>1</sub>) полутраектория  $y = y_1^-(x)$ , монотонно убывая, асимптотически стремится снизу к прямой  $y = \text{const} < 2K_4$ . Область, содержащая начало координат и ограниченную траекторией  $y = y_1(x)$ , обозначим через  $G_{32}$ . Область  $G_{32}$  обладает той же конфигурацией, что и  $G_2$ .

В случае в<sub>2</sub>) полутраектории  $y = y_1^+(x)$ ,  $y = y_1^-(x)$  и  $y = y_3^-(x)$  образуют траекторию  $y = y_1(x)$ . Тогда область притяжения  $G_{33}$ , содержащая начало координат и ограниченная траекторией  $y = y_1(x)$ , будет областью притяжения состояния равновесия системы (1'). Область  $G_{33}$  получается из  $G_{18}$  поворотом на  $180^\circ$  вокруг начала координат.

В случае в<sub>3</sub>) областью притяжения будет область  $G_{34}$  ( $G_{35}$ ), содержащая начало координат и ограниченная траекторией  $y = y_1(x)$ . Область  $G_{34}$  обладает теми же свойствами и конфигурацией, что и  $G_2$ .  $G_{35}$  получается из  $G_8$  поворотом на  $180^\circ$  вокруг точки  $(0; 0)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И. Г., Иванова М. А. К устойчивости в целом нулевого решения одной автономной системы второго порядка. I // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 1. С. 24–32.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.



КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ  
ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ  
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ  
С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. И. Кожанов

Пусть  $Q$  — прямоугольник

$$\{(x, t) : x \in \Omega = (0, 1), t \in (0, T), 0 < T < +\infty\},$$

$a(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $u_0(x)$  — заданные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$  функции. В прямоугольнике  $Q$  рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_t + u_{xxx} + a(x, t)u = f(x, t). \quad (1)$$

Это уравнение представляет собой линеаризованное уравнение Кортевега — де Фриза; Т. Д. Джураев в своей монографии [1] называет подобные уравнения *уравнениями с кратными характеристиками*. Разрешимость тех или иных начально-краевых задач для подобных уравнений как в пространствах гладких функций, так и в пространствах суммируемых функций хорошо изучена [1, 2], разрешимость же нелокальных задач (т. е. таких задач, в которых задается связь значений решений в различных точках некоторых внутренних или граничных многообразий, см. [3]) изучалась лишь в одном специальном случае условия

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(x)u(x, t_k) + u_0(x), \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq T,$$

автором в работе [4]. В настоящей работе будет изучаться разрешимость нелокальной задачи с существенно более общим условием, нежели указанное выше — условием, предложенным J. Chabrowski (см.

[5, 6]) в нелокальных задачах для параболических уравнений второго порядка. Отметим, что исследование разрешимости тех или иных нелокальных задач представляется важным и с точки зрения построения общей теории разрешимости краевых задач для уравнений с частными производными, и с точки зрения приложений — как в математической теории (например, при исследовании разрешимости обратных задач), так и в математическом моделировании.

Перейдем непосредственно к сути работы.

Пусть  $B$  — линейный оператор, переводящий пространство  $L_\infty(0, T; W_2^3(\Omega))$  в пространство  $L_2(\Omega)$ .

**Краевая задача.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = Bu + u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (3)$$

Краевая задача (1)–(3) включает в себя обычную начально-краевую задачу для уравнения (1). Конкретные же примеры собственно нелокальных задач мы приведем ниже.

Пусть  $W_{2,0}^3(\Omega)$ ,  $\overset{\circ}{V}$  и  $\overset{\circ}{V}_1$  суть следующие пространства:

$$W_{2,0}^3(\Omega) = \{v(x) \in W_2^3(\Omega), v(0) = v(1) = v'(1) = 0\},$$

$$\overset{\circ}{V} = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^{3,1}(\Omega) \cap L_\infty(0, T; W_2^3(\Omega)),$$

$$v(0, t) = v(1, t) = v_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T\},$$

$$\overset{\circ}{V}_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^{6,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^3(\Omega)),$$

$$v(0, t) = v(1, t) = v_x(1, t) = v_{xxx}(0, t)$$

$$= v_{xxx}(1, t) = v_{xxxx}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T\}.$$

Прежде чем приступить к исследованию разрешимости краевой задачи (1)–(3), приведем неравенства для функций из пространства  $\overset{\circ}{V}_1$ , которые нам понадобятся ниже.

Во многих работах, посвященных тем или иным аспектам теории уравнений с частными производными, используются неравенства, позволяющие оценить  $L_2$ -нормы промежуточных производных через сумму  $L_2$ -норм старшей производной и самой функции с множителями  $\alpha(\delta)$  и  $\beta(\delta)$  соответственно. При этом множители  $\alpha(\delta)$  и  $\beta(\delta)$  суть величины, определяющиеся произвольным положительным числом  $\delta$ , и для этих множителей выполняются соотношения

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \alpha(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \beta(\delta) = +\infty.$$

Нам также понадобятся подобные неравенства, а именно неравенства

$$\int_0^1 v_x^2(x, t) dx \leq \alpha_1(\delta) \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx + \beta_1(\delta) \int_0^1 v^2(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$\int_0^1 v_{xx}^2(x, t) dx \leq \alpha_2(\delta) \int_0^1 v_{xxx}^2(x, t) dx + \beta_2(\delta) \int_0^1 v^2(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Доказательство справедливости неравенств (4) и (5) для функций из пространства  $\overset{\circ}{V}_1$  можно провести разными способами, один из которых приведен в работе автора [7].

Вернемся к нашей нелокальной задаче.

**Теорема 1.** Пусть выполняется условие

$$a(x, t) \in C^3(\overline{Q}), \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}. \quad (6)$$

Далее, пусть оператор  $B$  имеет вид

$$Bv = B_1v + B_2v,$$

$B_1$  и  $B_2$  — линейные операторы, действующие из  $L_\infty(0, T; W_2^3(\Omega))$  в  $W_{2,0}^3(\Omega)$ , причем для этих операторов выполняются условия

$$\begin{aligned} \exists \{t_k\}_{k=1}^0 : 0 < t_1 < \dots < t_p \leq T, \quad \|B_1v(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ \leq b_1 \max_{1 \leq k \leq p} \|v(x, t_k)\|_{L_2(\Omega)}, \quad v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_{2,0}^3(\Omega)); \quad (7) \end{aligned}$$

$$\|B_2 v(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq b_2 \|v(x, t)\|_{L_2(Q)}, \quad v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_{2,0}^3(\Omega)); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [B_1 v(x, t)] &= B_1 v_{xxx}(x, t) + B_{10} v(x, t), \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} [B_2 v(x, t)] &= B_2 v_{xxx}(x, t) + B_{20} v(x, t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\|B_{10} v(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|B_{20} v(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq b_0 \|v(x, t)\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))};$$

$$\exists \delta_0 > 0: (1 + \delta_0^2) b_1^2 < 1, \quad \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2}\right) b_2^2 < 2a_0. \quad (10)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_\infty(0, T; W_2^3(0, 1))$  такой, что  $f(0, t) = f(1, t) = f_x(x, t) = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , и для любой функции  $u_0(x)$  из пространства  $W_{2,0}^3(\Omega)$  краевая задача (1)–(3) имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $\overset{\circ}{V}_1$ , и это решение единственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Для положительного числа  $\varepsilon$  рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$L_\varepsilon u \equiv Lu - \varepsilon u_{xxxxxx} = f(x, t) \quad (1_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условия

$$u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) = u_{xxx}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (3_\varepsilon)$$

Прежде всего установим, что при фиксированном значении числа  $\varepsilon$  и при выполнении условий (6)–(10) краевая задача (1<sub>ε</sub>), (2), (3), (3<sub>ε</sub>) разрешима в пространстве  $\overset{\circ}{V}_1$  для функций  $u_0(x)$  из пространства  $W_{2,0}^3(\Omega)$  и для функций  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(Q)$ .

Воспользуемся теперь методом продолжения по параметру. Для чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$  рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1<sub>ε</sub>) и такую, что для нее выполняются условия (3) и (3<sub>ε</sub>), а также условие

$$u(x, 0) = \lambda B u + u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2_\lambda).$$

Как обычно делается при осуществлении схемы метода продолжения по параметру, обозначим через  $\Lambda$  множество тех чисел  $\lambda$  из отрезка  $[0,1]$ , для которых краевая задача  $(1_\varepsilon)$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(3_\varepsilon)$  разрешима в пространстве  $\overset{\circ}{V}_1$  для всех функций  $u_0(x)$  из пространства  $W_{2,0}^3(\Omega)$  и для всех функций  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(Q)$ . Если это множество окажется непустым, одновременно открытым и замкнутым, то оно, как известно, будет совпадать со всем отрезком  $[0,1]$ . Но тогда краевая задача  $(1_\varepsilon)$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(3_\varepsilon)$  и будет иметь решение, принадлежащее тому же пространству  $\overset{\circ}{V}_1$ .

Непустота множества  $\Lambda$  следует из того, что число 0 принадлежит ему (см. [8]).

Открытость и замкнутость множества  $\Lambda$ , как правило, следуют из «хороших» априорных оценок решений краевой задачи  $(1_\varepsilon)$ ,  $(2_\lambda)$ ,  $(3)$ ,  $(3_\varepsilon)$ . Установим их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 L_\varepsilon u \cdot u \, dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 f u \, dx d\tau,$$

где  $t$  — произвольное число из отрезка  $[0, T]$ . Интегрируя по частям и используя условия  $(2_\lambda)$ ,  $(3)$  и  $(3_\varepsilon)$ , приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, t) \, dx + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 u_{xxx}^2 \, dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 a u^2 \, dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t u^2(0, \tau) \, d\tau \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \{ \lambda^2 [B_1 u(x, t)]^2 + \lambda^2 [B_2 u(x, t)]^2 + 2\lambda^2 B_1 u(x, t) \cdot B_2 u(x, t) \\ & + 2\lambda B_1 u(x, t) \cdot u_0(x) + 2\lambda B_2 u(x, t) \cdot u_0(x) + u_0^2(x) \} \, dx + \int_0^t \int_0^1 f u \, dx d\tau. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга и используя условия (6)–(9), мы можем

от данного равенства перейти к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t u^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_0^1 u_{xxx}^2 dx d\tau + a_0 \int_0^t \int_0^1 u^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(0, \tau) d\tau \\ & \leq \frac{(1 + \delta_0^2 + \delta^2) b_1^2}{2} \|u(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2} + \delta^2\right) b_2^2 \|u(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\delta^2}\right) \|u_0(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\delta^2} \|f(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \end{aligned}$$

и затем к неравенству

$$\begin{aligned} & \|u(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 + 2\varepsilon \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 + 2a_0 \|u(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \\ & \leq (1 + \delta_0^2 + \delta^2) b_1^2 \|u(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2} + b^2\right) b_2^2 \|u(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \\ & \quad + \left(1 + \frac{2}{\delta^2}\right) \|u_0(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta^2} \|f(x, t)\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Из условия (10) вытекает существование числа  $\delta^*$  такого, что при  $\delta \in (0, \delta^*)$  будут выполняться неравенства

$$(1 + \delta_0^2 + \delta^2) b_1^2 < 1, \quad \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2} + \delta^2\right) b_2^2 < 2a_0.$$

Фиксируя число  $\delta$  из указанного интервала, мы получаем первую априорную оценку для решений краевой задачи (1 $_\varepsilon$ ), (2 $_\lambda$ ), (3), (3 $_\varepsilon$ ):

$$\begin{aligned} & \|u(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} + \varepsilon \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|u(x, t)\|_{L_2(Q)} \\ & \leq M_1 [\|u_0(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f(x, t)\|_{L_2(Q)}], \quad (11) \end{aligned}$$

в которой постоянная  $M_1$  определяется лишь числами  $a_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$ .

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$-\int_0^t \int_0^1 L_\varepsilon u \cdot u_{xxxxxx} dx d\tau = -\int_0^t \int_0^1 f \cdot u_{xxxxxx} dx d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12)$$

Интегрируя слева по частям и используя условия (2 $_\lambda$ ), (3) и (3 $_\varepsilon$ ), получаем

$$\varepsilon \int_0^t \int_0^1 u_{xxxxxx}^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 a u_{xxx}^2 dx d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^1 u_{xxx}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^t u_{xxx}^2(1, \tau) d\tau \\
& = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 [B_1 u_{xxx}(x, t)]^2 dx + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 [B_2 u_{xxx}(x, t)]^2 dx \\
& + \lambda^2 \int_0^1 B_1 u_{xxx}(x, t) \cdot B_2 u_{xxx}(x, t) dx + \lambda \int_0^1 B_1 u_{xxx}(x, t) \cdot [\lambda B_{10} u(x, t) \\
& + \lambda B_{20} u(x, t) + u_{0xxx}(x)] dx + \lambda \int_0^1 B_2 u_{xxx}(x, t) [\lambda B_{10} u(x, t) \\
& + \lambda B_{20} u(x, t) + u_{0xxx}(x)] dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u_{0xxx}^2(x) dx - 3 \int_0^t \int_0^1 a_x u_{xx} u_{xxx} dx d\tau \\
& - 3 \int_0^t \int_0^1 a_{xx} u_x u_{xxx} dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 a_{xxx} u u_{xxx} dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 f u_{xxxxxx} dx d\tau. \tag{13}
\end{aligned}$$

Оценим правую часть неравенства (13) сверху. Именно, первое и второе слагаемые оценим сверху с помощью условий (7) и (8). Далее, третье слагаемое оценим вначале с помощью неравенства Юнга с множителями  $\frac{\delta_0^2}{2}$  и  $\frac{1}{2\delta_0^2}$ , потом получившиеся слагаемые оценим с помощью условий (7) и (8). Для оценки четвертого и пятого слагаемых воспользуемся неравенством Юнга и условиями (7)–(9). Седьмое, восьмое и девятое слагаемые оценим с помощью неравенства Юнга с множителями  $\frac{\varepsilon}{2}$  и  $\frac{1}{2\varepsilon}$ . Появившиеся после оценки четвертого, пятого, седьмого, восьмого и девятого слагаемых интегралы с младшими производными оценим, используя условие (9), неравенства (4) и (5), а также оценку (11). Учитывая еще условие (6), в результате получим неравенство

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \|u_{xxxxxx}(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 + 2a_0 \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 \\
& \leq [1 + \delta_0^2 + \gamma_1(\delta)] b_1^2 \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))}^2 \\
& + \left[1 + \frac{1}{\delta_0^2} + \gamma_2(\delta)\right] b_2^2 \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q)}^2
\end{aligned}$$

$$+ C(\delta) \left[ \|u_{0xxx}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_0(x)\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|f(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \right],$$

в котором  $\delta$  — произвольное положительное число, функции  $\gamma_1(\delta)$  и  $\gamma_2(\delta)$  обладают свойством

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \gamma_1(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \gamma_2(\delta) = 0,$$

число  $C(\delta)$  определяется числом  $\delta$ , а также функцией  $a(x, t)$  и числами  $M_1$  и  $b_0$ .

Условие (10) и возможность выбора числа  $\delta$  достаточно малым (с последующей фиксацией его) дают нам вторую априорную оценку для решений краевой задачи (1 $_{\varepsilon}$ ), (2 $_{\lambda}$ ), (3), (3 $_{\varepsilon}$ ):

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon} \|u_{xxxxxx}(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))} \\ & \leq M_2 \left[ \|u_{0xxx}(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0(x)\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|f(x, t)\|_{L_2(Q)} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

с постоянной  $M_2$ , определяющейся лишь числами  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_0$  и функцией  $a(x, t)$ .

Суммируя оценки (11) и (14), а также используя неравенства (4) и (5) для функций  $u(x, t)$  и  $u_{xxx}(x, t)$ , получаем, что для решений краевой задачи (1 $_{\varepsilon}$ ), (2 $_{\lambda}$ ), (3), (3 $_{\varepsilon}$ ) будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \|u_{xxxxxx}(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|u_{xxx}(x, t)\|_{L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))} \\ & + \|u(x, t)\|_{L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))} \leq M_3 [\|u_0(x)\|_{W_2^3(\Omega)} + \|f(x, t)\|_{L_2(Q)}] \end{aligned} \quad (15)$$

с постоянной  $M_3$ , зависящей лишь от чисел  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_0$ , функции  $a(x, t)$ , а также от числа  $\varepsilon$ .

Наконец, из равенства

$$\int_0^t \int_0^1 L_{\varepsilon} u \cdot u_{\tau} dx d\tau = \int_0^t \int_0^1 u_{\tau} dx d\tau \quad (16)$$

и оценок (11) и (15) очевидным образом вытекает оценка (мы считаем, что имеет место неравенство  $\varepsilon \leq 1$ )

$$\|u_t(x, t)\|_{L_2(Q)} \leq M_4 [\|u_0(x)\|_{W_2^3(\Omega)} + \|f(x, t)\|_{L_2(Q)}] \quad (17)$$



с постоянной  $M_4$ , зависящей от чисел  $b_1, b_2, b_0$ , функции  $a(x, t)$  и числа  $\varepsilon$ .

Из оценок (11), (15) и (17) получаем результирующую априорную оценку

$$\|u(x, t)\|_{\overset{\circ}{V}_1} \leq M_0[\|u_0(x)\|_{W_2^3(\Omega)} + \|f(x, t)\|_{L_2(Q)}] \quad (18)$$

для решений краевой задачи  $(1_\varepsilon), (2_\lambda), (3), (3_\varepsilon)$ .

С помощью оценки (18) мы и докажем открытость и замкнутость множества  $\Lambda$ .

Пусть  $\lambda_0$  — число из множества  $\Lambda$ . Множество  $\Lambda$  будет открытым, если числа  $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$  при малой величине  $|\tilde{\lambda}|$  также будут ему принадлежать. Пусть  $v(x, t)$  есть произвольная функция из пространства  $\overset{\circ}{V}_1$ . Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (3),  $(3_\varepsilon)$ , а также условие

$$u(x, 0) = \lambda_0 Bv + \tilde{\lambda} Bv + u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2_{\lambda_0, v})$$

Из условий теоремы следует, что функция  $Bv$  будет принадлежать пространству  $W_{2,0}^3(\Omega)$ . Значит, краевая задача  $(1_\varepsilon), (2_{\lambda_0, v}), (3), (3_\varepsilon)$  будет иметь решение, принадлежащее пространству  $\overset{\circ}{V}_1$ . Другими словами, данная краевая задача порождает оператор  $G$ , переводящий пространство в  $\overset{\circ}{V}_1$  себя:  $G(v) = u$ . Оценка (15) и условия (7) и (8) означают, что имеет место неравенство

$$\|G(v_1) - G(v_2)\|_{\overset{\circ}{V}_1} \leq |\tilde{\lambda}| M'_0 \|v_1 - v_2\|_{\overset{\circ}{V}_1},$$

где  $v_1(x, t)$  и  $v_2(x, t)$  есть две произвольные функции из пространства  $\overset{\circ}{V}_1$ , число  $M'_0$  определяется лишь числами  $b_1, b_2, b_0$  и  $M_0$ . Если теперь число  $\tilde{\lambda}$  будет настолько малым, что будет выполняться неравенство  $|\tilde{\lambda}| M'_0 < 1$ , то оператор  $G$  будет сжимающим и, значит, будет иметь в пространстве  $\overset{\circ}{V}_1$  неподвижную точку. Неподвижная точка оператора  $G$  даст функцию  $u(x, t)$ , являющуюся решением из пространства  $\overset{\circ}{V}_1$  краевой задачи  $(1_\varepsilon), (2_\lambda), \lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}, (3), (3_\varepsilon)$ . А это и означает, что

число  $\lambda$  при указанном выше ограничении на число  $\tilde{\lambda}$  будет принадлежать множеству  $\Lambda$  и, далее, что множество  $\Lambda$  открыто.

Докажем теперь, что множество  $\Lambda$  замкнуто.

Пусть  $\{\lambda_m\}$  — последовательность чисел из множества  $\Lambda$ , сходящаяся к числу  $\lambda_0$ ,  $\{u_m(x, t)\}$  — последовательность решений задач  $(1_\varepsilon)$ ,  $(2_{\lambda_m})$ ,  $(3)$ ,  $(3_\varepsilon)$ . Положим  $w_{mk}(x, t) = u_m(x, t) - u_k(x, t)$ . Для функции  $u_{mk}(x, t)$  имеют место равенства

$$L_\varepsilon w_{mk} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad w_{mk}(x, 0) = \lambda_m B w_{mk} + (\lambda_m - \lambda_k) B u_k, \quad x \in \Omega,$$

$$\begin{aligned} w_{mk}(0, t) = w_{mk}(1, t) = w_{mkx}(1, t) = w_{mkxxx}(0, t) = w_{mkxxx}(1, t) \\ = w_{mkxxxx}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

Оценка (18) дает для функций  $w_{mk}(x, t)$  неравенство

$$\|w_{mk}\|_{\mathring{V}_1} \leq M_0 |\lambda_m - \lambda_k| \|B u_k\|_{W_2^3(\Omega)}. \quad (19)$$

Условия (7)–(9) и вновь оценка (18) влекут равномерную ограниченность последовательности  $\{\|B u_k\|_{W_2^3(\Omega)}\}$ . Сходимость последовательности  $\{\lambda_m\}$  и неравенство (16) означают тогда, что последовательность  $\{u_m(x, t)\}$  фундаментальна в пространстве  $\mathring{V}_1$ . Следовательно, существует функция  $u(x, t)$ , принадлежащая пространству  $\mathring{V}_1$  и такая, что  $u_m(x, t) \rightarrow u(x, t)$  при  $m \rightarrow \infty$  в пространстве  $\mathring{V}_1$ . Очевидно, что для предельной функции  $u(x, t)$  будут выполняться уравнение  $(1_\varepsilon)$  и условия (3) и  $(3_\varepsilon)$ . Далее, равенство  $\lambda_m B u_m - \lambda_0 B u = (\lambda_m - \lambda_0) B u_m + \lambda_0 B (u_m - u)$ , условия (7)–(9), сходимость последовательностей  $\{\lambda_m\}$  и  $\{u_m(x, t)\}$  и оценка (18), но для функции  $w_m = u_m - u$ , дают сходимость  $\lambda_m B u_m \rightarrow \lambda_0 B u$  при  $m \rightarrow \infty$  в пространстве  $W_2^3(\Omega)$ . Но тогда для предельной функции  $u(x, t)$  будет выполняться условие  $(2_{\lambda_0})$ . Принадлежность функции  $u(x, t)$  пространству  $\mathring{V}_1$ , выполнение для нее уравнения  $(1_\varepsilon)$  и условий  $(2_{\lambda_0})$ , (3),  $(3_\varepsilon)$  означают, что число  $\lambda_0$  будет принадлежать множеству  $\Lambda$ . Принадлежность предельной точки множества ему же и означает его замкнутость.

Итак, множество  $\Lambda$  непусто, открыто и замкнуто. Следовательно, оно совпадает со всем отрезком  $[0,1]$ . Но тогда краевая задача (1), (2), (3),  $\mathfrak{Z}_\varepsilon$  будет иметь решение, принадлежащее пространству  $\mathring{V}_1$ .

Перейдем теперь собственно к доказательству разрешимости краевой задачи (1)–(3).

Семейство краевых задач  $(1_\varepsilon)$ , (2), (3),  $(\mathfrak{Z}_\varepsilon)$  порождает семейство их решений  $\{u^\varepsilon(x, t)\}$ , принадлежащих пространству  $\mathring{V}_1$ . Покажем, что для этого семейства при выполнении всех условий теоремы будет иметь место априорная оценка

$$\sqrt{\varepsilon} \|u_{xxxxx}^\varepsilon(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|u^\varepsilon(x, t)\|_{\mathring{V}} \leq K_0 \quad (20)$$

с постоянной  $K_0$ , зависящей лишь от функций  $a(x, t)$ ,  $f(x, t)$  и  $u_0(x)$  и от чисел  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_0$ . Прежде всего, для семейства  $\{u^\varepsilon(x, t)\}$  будет иметь место равномерная по  $\varepsilon$  оценка (11). Далее, повторяя выкладки, которые от равенства (13) привели нас к оценке (14), но при этом в последнем слагаемом правой части равенства (13) выполняя тоекратное интегрирование по частям и лишь затем применяя неравенство Юнга с множителями  $\frac{\delta^2}{2}$  и  $\frac{1}{2\delta^2}$ , нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} \|u_{xxxxx}^\varepsilon(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|u_{xxx}^\varepsilon(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|u_{xxx}^\varepsilon(x, t)\|_{L_\infty(0, T; W_2^3(\Omega))} \\ \leq K_1 [\|u_0(x)\|_{W_2^3(\Omega)} + \|f(x, t)\|_{L_2(0, T; W_2^3(\Omega))}] \quad (21) \end{aligned}$$

с постоянной  $K_1$ , зависящей лишь от чисел  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_0$  и от функции  $a(x, t)$ .

Вновь на последнем шаге анализируя равенство (16), но при этом используя оценки (11) и (21), мы получим равномерную по  $\varepsilon$  оценку производной  $u_t^\varepsilon(x, t)$ . Суммируя оценки (11), (21) и оценку производной  $u_t^\varepsilon(x, t)$ , а также используя неравенства (4) и (5), мы и придем к требуемой оценке (20).

Покажем теперь, что из семейства функций  $\{u_t^\varepsilon(x, t)\}$  можно извлечь последовательность, сходящуюся к решению краевой задачи (1)–(3).

Используя свойство слабой компактности ограниченного в пространстве  $L_2$  множества и последовательно переходя к подпоследовательности, получаем, что существуют последовательность  $\{\varepsilon_m\}$ , функции  $u(x, t)$ ,  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  такие, что при  $m \rightarrow \infty$  имеют место сходимости

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &\rightarrow +0, \\ u^{\varepsilon_m} &\rightarrow u \text{ слабо в } W_2^{3,1}(Q) \text{ и сильно в } L_2(Q), \\ u^{\varepsilon_m}(x, 0) &\rightarrow u(x, 0) \text{ слабо в } W_2^3(\Omega) \text{ и сильно в } L_2(\Omega), \\ u^{\varepsilon_m}(x, t_k) &\rightarrow u(x, t_k) \text{ слабо в } W_2^3(\Omega) \text{ и сильно в } L_2(\Omega), \\ B_1 u^{\varepsilon_m} &\rightarrow \varphi_1(x) \text{ слабо в } W_2^1(\Omega), \\ B_2 u^{\varepsilon_m} &\rightarrow \varphi_2(x) \text{ слабо в } W_2^3(\Omega), \\ \varepsilon_m u^{\varepsilon_m}_{xxxxx} &\rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q). \end{aligned}$$

Из сходимости в пространстве  $W_2^{3,1}(Q)$  и из последней сходимости следует, что предельная функция  $u(x, t)$  является решением уравнения (1) и что для нее будет выполняться условие (3). Далее, условия (7)–(9) и неравенства (4) и (5) означают, что функции  $B_1 u$  и  $B_2 u$  корректно определены как элементы пространства  $W_2^3(\Omega)$ . Пусть  $\eta(x)$  — бесконечно дифференцируемая финитная на отрезке  $[0, 1]$  функция. Вследствие сильной сходимости последовательностей  $\{u^{\varepsilon_m}(x, t_k)\}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , и  $\{u^{\varepsilon_m}(x, t)\}$  в пространствах  $L_2(\Omega)$  и  $L_2(Q)$  соответственно имеют место цепочки соотношений

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\partial^l}{\partial x^l} [B_1 u^{\varepsilon_m} - B_1 u] \eta(x) dx \right| &= \left| (-1)^l \int_0^1 B_1 (u^{\varepsilon_m} - u) \eta^{(l)}(x) dx \right| \\ &\leq C \max_{1 \leq k \leq p} \|u^{\varepsilon_m}(x, t_k) - u(x, t_k)\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\partial^l}{\partial x^l} [B_2 u^{\varepsilon_m} - B_2 u] \eta(x) dx \right| &= \left| (-1)^l \int_0^1 B_2 (u^{\varepsilon_m} - u) \eta^{(l)}(x) dx \right| \\ &\leq C \|u^{\varepsilon_m} - u\|_{L_2(Q)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad l = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

С другой стороны, для левых частей данных цепочек имеют место сходимости

$$\int_0^1 \frac{\partial^l}{\partial x^l} [B_1 u^{\varepsilon_m} - B_1 u] \eta(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\partial^l}{\partial x^l} [\varphi_1(x) - B_1 u] \eta(x) dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^l}{\partial x^l} [B_2 u^{\varepsilon_m} - B_2 u] \eta(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\partial^l}{\partial x^l} [\varphi_2(x) - B_2 u] \eta(x) dx.$$

В силу единственности предела из всего сказанного выше следуют равенства  $\varphi_1(x) = B_1 u$ ,  $\varphi_2(x) = B_2 u$ . В свою очередь, из данных равенств вытекает, что для функции  $u(x, t)$  будет выполняться условие (2).

Выполнение для функции  $u(x, t)$  уравнения (1) и условий (2), (3), а также ее принадлежность пространству  $W_2^{3,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^3(\Omega))$  и означают, что эта функция является решением задачи (1)–(3) из требуемого класса.

Единственность решений очевидна. Теорема полностью доказана.

Сделаем несколько замечаний.

1. Очевидно, что уравнение (1) можно заменить более общим уравнением

$$u_t + a_0(x, t)u_{xxx} + a_1(x, t)u_{xx} + a_2(x, t)u_x + a(x, t)u = f(x, t). \quad (1')$$

Условия на коэффициенты  $a_0(x, t)$ ,  $a_1(x, t)$ ,  $a_2(x, t)$  и  $a(x, t)$ , необходимые для существования регулярного решения краевой задачи (1'), (2), (3), легко указать; метод же доказательства в целом останется прежним.

2. По ходу доказательства теоремы 1 фактически получен результат, являющийся новым и имеющий самостоятельное значение: результат о существовании регулярного решения нелокальной краевой задачи для параболического уравнения высокого порядка (уравнения (1 $_\varepsilon$ )). Как уже говорилось в начале статьи, нелокальные задачи с условием типа условия (2) для параболических уравнений второго порядка изучались в работах [5, 6] (см. также [9]), именно, в указанных работах

исследовалась разрешимость нелокальной краевой задачи в классах гладких функций. В работах [10, 11] изучалась разрешимость нелокальной по времени задачи для параболических уравнений в классах суммируемых функций, но в несколько иной постановке, нежели в работах [6, 9] и в настоящей работе. Автором отдельно рассматривался случай нелокальной по времени краевой задачи для параболических уравнений второго порядка, при этом нелокальное условие представляло собой условие вида (2) и имело несколько иной характер, нежели условия работ [6–9]; разрешимость же доказывалась в классах суммируемых функций. В настоящей работе мы не будем подробно останавливаться на исследовании нелокальных краевых задач для параболических уравнений, ограничившись лишь изложением теоремы существования решения нелокальной краевой задачи для модельного уравнения порядка  $2n$ .

Введем обозначение  $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$  ( $k$  — натуральное число).

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$u_t + (-1)^n D_x^{2n} u + a(x, t)u = f(x, t) \quad (22)$$

и такую, что для нее выполняются условие (2) и условия

$$D_x^k u|_{x=0} = D_x^k u|_{x=1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (23)$$

**Теорема 2.** Пусть выполняется условие

$$a(x, t) \in C(\overline{Q}), \quad a(x, t) \geq a_0 > 0.$$

Далее, пусть оператор  $B$  имеет вид

$$Bv = B_1 v + B_2 v,$$

$B_1$  и  $B_2$  — линейные операторы, действующие из пространства  $W_2^{2n,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; \dot{W}_2^n(\Omega))$  в пространство  $\dot{W}_2^n(\Omega)$ , причем для этих операторов выполняются условия

$$\|B_1 v(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq b_1 \|v(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))},$$

$$\|B_2 v(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq b_2 \|v(x, t)\|_{L_2(Q)}, v(x, t) \in L_\infty(0, T; \overset{\circ}{W}_2^n(\Omega));$$

$$D_x^n [B_1 v(x, t)] = B_1 D_x^n v(x, t) + B_{10} v(x, t),$$

$$D_x^n [B_2 v(x, t)] = B_2 D_x^n v(x, t) + B_{20} v(x, t),$$

$$\|B_{10} v(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|B_{20} v(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq b_0 \|v(x, t)\|_{L_2(0, T; W_2^{n-1}(\Omega))};$$

$$\exists \delta_0 > 0 : (1 + \delta_0^2) b_1^2 < 1, \quad \left(1 + \frac{1}{\delta_0^2}\right) b_2^2 < 2a_0.$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(Q)$  и для любой функции  $u_0(x)$  из пространства  $\overset{\circ}{W}_2^n(\Omega)$  краевая задача (22), (2), (23) имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $W_2^{2n,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ , и это решение единственно.

Доказательство теоремы 2 проводится тем же методом, каким проводилось доказательство существования регулярного решения краевой задачи (1 $_\varepsilon$ ), (2), (3).

Как и уравнение (1), уравнение (22) можно заменить более общим уравнением как одномерным, так и многомерным; краевые условия (23) при этом можно заменить иными (естественно, порождающими корректную начально-краевую задачу) условиями.

Отметим, что первое условие на оператор в теореме 2 имеет более общий вид, нежели соответствующее условие в теореме 1.

3. Примерами нелокальных краевых задач, к которым применимы теоремы 1 и 2, являются задачи с операторами  $B_1, B_2$  вида

$$B_1 v = \sum_{k=1}^p b_k(x) v(x, t_k), \quad B_1 v = \sum_{k=1}^p \int_{\Omega} b_k(x, y) v(y, t_k) dy;$$

$$B_2 v = \int_0^T \bar{b}_2(x, t) v(x, t) dt, \quad B_2 v = \int_0^T \left( \int_{\Omega} \bar{b}_2(x, y, t) v(y, t) dy \right) dt$$

и т. д. Здесь

$$0 < t_1 < \dots < t_p \leq T,$$

в краевой задаче для параболического уравнения число  $p$  может быть и бесконечным. Необходимые для выполнения условий теорем 1 или 2 условия на функции

$$b_k(x), \quad b_k(x, y), \quad \bar{b}_2(x, t), \quad \bar{b}_2(x, y, t)$$

легко указываются.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Джурев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.
2. Хаблов В. В. О краевой задаче для уравнения Кортевега — де Фриза в ограниченной области. Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Институт математики СО РАН СССР, 1979. С. 137–141.
3. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1995.
4. Кожанов А. И. О разрешимости нелокальной по времени задачи для одного уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки ЯГУ. 2001. Т. 8, № 5. С. 27–40.
5. Chabrowski J. On nonlocal problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. 1984. V. 93. P. 109–131.
6. Chabrowski J. On the nonlocal problem with a functional for parabolic equation // Funkc. Ekvacioj. Ser. Int. 1984. V. 27. P. 101–123.
7. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых нелинейных обратных задач для одномерного уравнения с кратными характеристиками // Вестн. НГУ. Математика, механика, информатика. 2003. Т. 3. С. 34–51.
8. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1986.
9. Либерман Г. М. Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений. Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. (В честь академика О. А. Ладыженской. Междунар. математическая серия). Новосибирск: Тамара Рожковская, 2002. Т. 1. С. 233–254.
10. Шелухин В. В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн., 1991. Т. 32, № 2. С. 154–165.
11. Шелухин В. В. Нелокальные по времени задачи для уравнений гидродинамики и вариационные принципы: Дисс. . . д.ф.-м.н. Новосибирск, 1992.



## К ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЯ СЕГРЕ

$$S(m, n)$$

Е. С. Никитина, И. В. Бубякин

*Многообразием Сегре*  $S(m, n)$  [1–3] называется  $(m + n)$ -мерное алгебраическое многообразие в проективном пространстве  $P^N$  ( $N = (m + 1)(n + 1) - 1$ ), параметрические уравнения которого можно записать в виде

$$z_i^p = x_i y^p, \quad (1)$$

где  $z_i^p$  — однородные координаты точки проективного пространства  $P^N$  и  $i = 0, 1, \dots, m$ , а  $p = 0, 1, \dots, n$ . Из этого определения вытекает, что многообразие Сегре является образом прямого произведения  $P^m \times P^n$  двух проективных пространств  $P^m$  и  $P^n$  размерностей соответственно  $m$  и  $n$ . Отметим одно важное свойство этих многообразий, а именно эти многообразия Сегре остаются инвариантными при проективных преобразованиях пространства  $P^N$ , определяемых уравнениями

$$z_i'^p = a_q^p b_i^j z_j^q.$$

Многообразию Сегре  $S(m, n)$  несет  $m$ -параметрическое семейство  $n$ -мерных плоских образующих:  $\alpha$ -образующих, для получения параметрических уравнений которых необходимо зафиксировать в (1) однородные координаты  $\{y^p\}$  точки проективного пространства  $P^n$ , а также  $n$ -параметрическое семейство  $m$ -мерных плоских образующих:  $\beta$ -образующих, для получения параметрических уравнений которых следует зафиксировать в (1) однородные координаты  $\{x_i\}$  точки проективного пространства  $P^m$ . Через каждую точку многообразия Сегре

$S(m, n)$  проходят одна плоская образующая одного семейства и одна плоская образующая другого семейства. Любые две плоские образующие различных семейств пересекаются в одной точке, а плоские образующие одного семейства не имеют общих точек. В общем случае многообразие Сегре  $S(m, n)$  представляет собой пересечение квадрик:

$$z_i^p z_j^q - z_i^q z_j^p = 0. \quad (2)$$

Если  $m = n = 1$ , то многообразие Сегре  $S(1, 1)$  является невырожденной линейчатой квадрикой трехмерного проективного пространства. Многообразие Сегре  $S(m, n)$  является алгебраическим многообразием порядка [4]

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}.$$

Запишем однородные координаты точки проективного пространства  $P^N$  в виде прямоугольной матрицы размера  $(m+1) \times (n+1)$

$$z = (z_i^p).$$

Тогда уравнения (2) равносильны одному условию

$$\text{rang}(z_i^p) = 1.$$

Рассмотрим многообразие Сегре  $S(m, n)$ , и пусть  $\lambda$  — гиперплоскость в проективном пространстве  $P^n$ . Многообразие всех  $\alpha$ -образующих, когда соответствующие точки  $y = \{y^p\}$  принадлежат гиперплоскости  $\lambda$ , лежат в одной  $k$ -мерной плоскости  $\gamma(\lambda)$ , где  $k = (m+1)n - 1$ . Тем самым образуется семейство  $k$ -плоскостей  $\gamma(\lambda)$ . Через каждую  $\alpha$ -образующую многообразия Сегре  $S(m, n)$  проходит  $(m-1)$ -параметрическое семейство  $k$ -мерных плоскостей  $\gamma(\lambda)$ , где  $y \in \lambda$ . В сечении алгебраического многообразия Сегре  $S(m, n)$  плоскостью  $\gamma(\lambda)$  получается  $(m+n-1)$ -мерное многообразие Сегре  $S_\lambda(m, n-1)$ .

Итак, многообразие Сегре  $S(m, n)$  можно представить как семейство алгебраических многообразий Сегре  $S_\lambda(m, n-1)$  для всех гиперплоскостей  $\lambda$  проективного пространства  $P^m$ .

Рассмотрим теперь двойственные построения. Пусть  $\mu$  — гиперплоскость в проективном пространстве  $P^n$ . Многообразие всех  $\beta$ -образующих, когда соответствующие им точки  $x = \{x_i\}$  принадлежат гиперплоскости  $\mu$ , лежат в одной  $l$ -мерной плоскости  $\delta(\mu)$ , где  $l = m(n+1) - 1$ . Тем самым образуется семейство  $l$ -плоскостей  $\delta(\mu)$ . Через каждую  $\beta$ -образующую многообразия Сегре  $S(m, n)$  проходит  $(n-1)$ -параметрическое семейство  $l$ -мерных плоскостей  $\delta(\mu)$ , где  $x \in \mu$ . В сечении алгебраического многообразия Сегре  $S(m, n)$  плоскостью  $\delta(\mu)$  получается  $(n+m-1)$ -мерное многообразие Сегре  $S_\mu(m-1, n)$ .

Таким образом, многообразие Сегре  $S(m, n)$  можно представить как семейство алгебраических многообразий Сегре  $S_\mu(m-1, n)$  для всех гиперплоскостей  $\mu$  проективного пространства  $P^n$ .

Заметим, что пересечение двух алгебраических многообразий Сегре  $S_\lambda(m, n-1)$  и  $S_\mu(m-1, n)$  для двух фиксированных гиперплоскостей  $\lambda$  и  $\mu$  проективных пространств  $P^n$  и  $P^m$  представляет собой многообразие Сегре  $S(m-1, n-1)$ .

Используя предыдущие рассуждения, можно произвести следующие построения. Многообразия Сегре  $S(m, n)$  представляют собой семейство алгебраических многообразий Сегре  $S_\lambda(m, n-1)$  для всех гиперплоскостей проективного пространства  $P^n$ , а каждое из многообразий  $S_\lambda(m, n-1)$ , в свою очередь, представляет собой семейство алгебраических многообразий Сегре  $S_{\lambda\mu}(m-1, n-1)$  для всех гиперплоскостей  $\mu$  проективного пространства  $P^m$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** *Многообразие Сегре  $S(m, n)$  представляет собой семейство алгебраических многообразий  $S_{\lambda\mu}(m-1, n-1)$  для всех гиперплоскостей  $\lambda$  и  $\mu$  проективных пространств  $P^n$  и  $P^m$ .*

Два алгебраических многообразия Сегре  $S_\lambda(m, n-1)$  и  $S_{\lambda'}(m, n-1)$  называются *сцепленными по  $\alpha$ -образующей*. Этой  $\alpha$ -образующей соответствует точка  $y = \{y^p\}$ , принадлежащая плоскости  $\lambda \cap \lambda'$  коразмерности два. Семейство многообразий Сегре  $S(m, n-1)$  называется *сцепленным*, если любая пара из них имеет общую  $\alpha$ -образующую. Сцепле-

ние многообразий Сегре  $S(m, n-1)$  называется *невыврожденным*, если  $\alpha$ -образующие сщепления различных пар многообразий различны.

Пусть имеется  $n+2$  линейно независимых многообразий Сегре  $S_p(m, n-1)$  ( $p = 1, 2, \dots, n+2$ ). На эти  $n+2$  многообразия можно натянуть единственное многообразие Сегре  $S(m, n)$ . При этом, очевидно, что из условия сщепления будет следовать, что любое другое многообразие  $S(m, n-1)$  также будет лежать на многообразии Сегре  $S(m, n)$ .

Отсюда делаем вывод, что справедлива

**Теорема 2.** *Если в проективном пространстве  $P^N$  имеется  $n+2$  линейно независимых и невырожденно сщепленных многообразий Сегре  $S_p(m, n-1)$ , то всякое многообразие Сегре  $S(m, n-1)$ , сщепленное с  $n+1$  из них, будет сщеплено и с  $(n+2)$ -м многообразием Сегре.*

Теперь рассмотрим двойственные построения. Два алгебраических многообразия Сегре  $S_\mu(m-1, n)$  и  $S_{\mu'}(m-1, n)$  называются *сщепленными по  $\beta$ -образующей*. Этой  $\beta$ -образующей соответствует точка  $x = \{x_i\}$ , принадлежащая плоскости  $\mu \cap \mu'$  коразмерности два. Семейство многообразий Сегре  $S(m-1, n)$  называется *сщепленным*, если любая пара из них имеет общую  $\beta$ -образующую. Сщепление многообразий Сегре  $S(m-1, n)$  называется *невыврожденным*, если  $\beta$ -образующие сщепления различных пар многообразий различны.

Пусть имеется  $m+2$  линейно независимых многообразий Сегре  $S_\sigma(m-1, n)$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, m+2$ ). На эти  $m+2$  многообразия можно натянуть единственное многообразие Сегре  $S(m, n)$ . При этом, очевидно, из условия сщепления будет следовать, что любое другое многообразие  $S(m-1, n)$  также будет лежать на многообразии Сегре  $S(m, n)$ . Отсюда можно сделать вывод, что имеет место

**Теорема 3.** *Если в проективном пространстве  $P^N$  имеется  $m+2$  линейно независимых и невырожденно сщепленных многообразий Сегре  $S_\sigma(m-1, n)$ , то всякое многообразие Сегре  $S(m-1, n)$ , сщепленное с  $m+1$  из них, будет сщеплено и с  $(m+2)$ -м многообразием.*

Рассмотрим в качестве примера многообразие Сегре  $S(1, 1)$  в трехмерном проективном пространстве. Многообразие Сегре  $S(1, 1)$  представляет собой двумерную квадрику, несущую однопараметрическое семейство прямолинейных  $\alpha$ -образующих и однопараметрическое семейство прямолинейных  $\beta$ -образующих. Через каждую точку этой квадрики проходят одна  $\alpha$ -образующая и одна  $\beta$ -образующая. При этом две прямолинейные образующие, принадлежащие различным семействам, пересекаются, а две прямолинейные образующие, принадлежащие одному семейству, не имеют общих точек. Квадрика Сегре  $S(1, 1)$  определяется уравнением

$$z_0^0 z_1^1 - z_0^1 z_1^0 = 0.$$

Квадрику  $S(1, 1)$  можно представить как одномерное многообразие прямолинейных  $\alpha$ -образующих и как одномерное многообразие прямолинейных  $\beta$ -образующих. С другой стороны, эту линейчатую квадрику  $S(1, 1)$  образуют [5] прямые, пересекающие три фиксированные прямые общего положения трехмерного проективного пространства. Здесь следует заметить, что в трехмерном евклидовом пространстве двумерной квадрике Сегре  $S(1, 1)$  соответствуют однополостные гиперboloиды и гиперболические параболоиды.

В заключение отметим, что многообразия Сегре  $S(m, n)$  имеют важное значение для дифференциальной геометрии [1] грассмановых многообразий. Геометрический факт, что многообразии Сегре  $S(1, 1)$ , т. е. что невырожденная линейчатая квадрика трехмерного пространства несет два семейства прямолинейных образующих, находит применение в архитектуре. Если необходимо построить искривленную поверхность, то возможность задать ее форму, используя образующие прямые этой квадрики, является очевидным преимуществом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М. А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.

2. Акивис М. А. Ткани и почти грассманы структуры // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, N 6. С. 6–15.
3. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. Т. 1.
4. *Root T. G.* The geometry of determinantal loci. Cambridge: Cambridge univ. press., 1938.
5. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.

г. Якутск

13 января 2004 г.

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

М. Нурублов

1. Исследование разрешимости граничных задач для дифференциальных уравнений высокого порядка вида

$$M^n u = M(M \dots (Mu) \dots) = 0, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

является актуальным, так как здесь наблюдаются новые эффекты разрешимости краевых задач, отличных от случая  $Mu = 0$ . Например, известная система А. В. Бицадзе [1], для которой задача Дирихле является некорректной, определяется итерацией оператора Коши — Римана. Ф. Бракс и Р. Делонге [2, 3], исследуя уравнение (1) в случае  $M = D$ , где  $D$  — оператор гиперкомплексного дифференцирования, ввели новый класс функций, который назвали *классом моногенных функций*.

В отличие от указанных выше работ в данной работе мы исследуем однозначную разрешимость задачи типа Шварца для несильно эллиптической системы (1), в которой матричным дифференциальным оператором Моисила — Теодореску является оператор

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ \partial_{x_1} & 0 & -\partial_{x_3} & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_2} & \partial_{x_3} & 0 & -\partial_{x_1} \\ \partial_{x_3} & -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1')$$

обобщающий оператор Коши — Римана на трехмерный случай,  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  — искомый вектор, а  $n$  — любое натуральное число.

Следует отметить, что многомерным несильно эллиптическим системам второго порядка посвящено довольно много работ (см. [1, 4] и

имеющиеся там списки литературы). Однако многомерные несильно эллиптические системы высших порядков очень мало изучены. Система (1), (1') в таком общем виде ранее исследовалась применением преобразования Фурье в работах [5, 6] только в случае полупространства. В этих работах решение системы (1), (1') представлено через линейные комбинации решений системы Моисила — Теодореску (т. е.  $Mu = 0$ ). В отличие от этих работ мы записываем систему (1) через основные операторы векторного анализа и, применяя совершенно другой метод, который хорошо применяется также и в случае ограниченной области, получаем представления решений системы (1), (1') через линейную комбинацию произвольных гармонических функций.

Характеры разрешимости краевых задач для системы (1), (1') в случаях четности и нечетности показателя итерации (т. е.  $n$ ) сильно отличаются. Поэтому каждый случай будет рассматриваться отдельно. Аналогично тому, что задача Шварца восстанавливает голоморфную функцию в области по заданным на границе значениям ее вещественной части, здесь для системы (1), (1') сформулируем и исследуем задачи типа Шварца в полупространстве (п. 2) и в шаре (п. 3).

Нетрудно проверить, что когда  $n$  — любое четное число, тогда систему (1), (1') можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{2m-1}u_0 &= 0 \\ \Delta^{2m-2}(-\Delta u_j + 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u_j), \quad j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \text{ при } n = 2(2m - 1), \quad (2)$$

$$\Delta^{2m}u_j = 0, \quad j = \overline{0, 3}, \quad \text{при } n = 4m,$$

где  $m = 1, 2, \dots$

Случай, когда  $n = 2m - 1$  — любое нечетное число, система (1), (1') записывается в виде

$$\Delta^{m-1}(Mu) = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа по всем переменным.

**2.** Для системы (1), (1') рассмотрим задачу типа Шварца в полупространстве  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 > 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$  в следующей постановке.



**Задача 1.** Найти в полупространстве  $\mathbb{R}_+^3$  функции  $u_j \in C^{2m}(\mathbb{R}_+^3) \cap C^{2m-1}(\overline{\mathbb{R}_+^3})$  ( $j = \overline{0, 3}$ ), удовлетворяющие системе (2) и на границе полупространства  $\Gamma : \{x_1 = 0\}$  условиям

$$\left. \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^k} \right|_{\Gamma} = f_k^{(j)}, \quad k = \begin{cases} \overline{0, 2m-3}, & j = 1, 2, 3; \\ 2m-2, & j = 2, 3; \\ 2m-1, & j = 1; \\ \overline{0, 2m-2} & j = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $f_k^{(j)}(x_2, x_3)$  — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

**Теорема 1.** Задача (2), (4) корректно поставлена, т. е. она имеет, и притом единственное, регулярное решение, непрерывно зависящее от начальных данных.

Укажем схему доказательства теоремы 1. Прежде всего из системы (2) следует равенство

$$\Delta^{2m-1} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = 0,$$

из которого вытекает, что все функции, удовлетворяющие системе (2), являются полигармоническими функциями порядка  $2m$ . Этот факт позволяет выписать представление решений системы (2) через гармонические функции. Рассмотрим регулярные в полупространстве  $\mathbb{R}_+^3$  решения системы (2). Для этих решений имеем следующие представления:

$$u_0 = \sum_{k=0}^{2m-2} x_1^k \psi_k^{(0)}, \quad u_j = \sum_{k=0}^{2m-2} x_1^k \varphi_k^{(j)} + x_1^{2m-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где  $\psi_k^{(0)}$ ,  $\varphi_k^{(j)}$  и  $\psi$  — регулярные в  $\mathbb{R}_+^3$  гармонические функции, причем

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi_{2m-2}^{(k)}}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi_{2m-1}^{(k)}}{\partial x_k} = 0, \quad \varphi_{2m-1}^{(1)} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (6)$$

При помощи (5) из первых условий (4) получаем

$$\varphi_0^{(j)}|_{x_1=0} = f_0^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Произвольные гармонические функции  $\varphi_0^{(j)}$  определяются единственным образом как решения задачи Дирихле с условиями (7) для уравнения Лапласа. При известных  $\varphi_0^{(j)}$  для предельных значений  $\varphi_1^{(j)}$  из первого условия (4) ( $k = 1$ ) получаем

$$\varphi_1^{(j)}|_{x_1=0} = f_1^{(j)} - \left( \frac{\partial \varphi_0^{(j)}}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0}.$$

В продолжение этого процесса все гармонические функции  $\varphi_k^{(j)}$  ( $j = 2, 3; k = 0, 2m - 2$ ) и  $\varphi_k^{(1)}$  ( $k = 0, 2m - 3$ ) определяются единственным образом как решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Для гармонических функций  $\varphi_{2m-2}^{(1)}$  и  $\psi$  из соотношения (6) и условия (4) ( $k = 2m - 1$ ) получаем

$$\frac{\partial \varphi_{2m-2}^{(1)}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = - \left( \sum_{j=2}^3 \frac{\partial \varphi_{2m-2}^{(j)}}{\partial x_j} \right) \Big|_{x_1=0}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \tilde{g},$$

где  $\tilde{g}$  — известная функция, выраженная через  $f_{2m+1}^{(1)}$  и предельные значения  $\varphi_k^{(j)}$  при  $x_1 = 0$ .

Таким образом, для того чтобы найти две оставшиеся произвольные гармонические функции  $\varphi_{2m-2}^{(1)}$  и  $\psi$ , достаточно решить задачу Неймана в полупространстве  $\mathbb{R}_+^3$ , а решение такой задачи выражается явно [4]. Произвольные гармонические функции  $\psi_k^{(0)}$  совершенно аналогично определяются из представления (5) и условия (4) (при  $k = 0, 2m - 2; j = 0$ ). В случае, когда  $n = 4m$ , решение уравнения  $\Delta^{2m} u_j = 0$ ,  $j = \overline{0, 3}$ , с условиями

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^k} \Big|_{x_1=0} = \tilde{f}_k, \quad k = \overline{0, 2m - 1},$$

определяется единственным образом подобно тому, как это было в случае (4) ( $j = 0; k = \overline{0, 2m - 2}$ ) для первого уравнения системы (2).

**Задача 2.** Найти в  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 > 0, (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$  функции  $u_j \in C^{2m-1}(\mathbb{R}_+^3) \cap C^{2m-2}(\overline{\mathbb{R}_+^3})$  — решения системы (3), исчезающие

на бесконечности и удовлетворяющие на границе полупространства  $\Gamma$  условиям

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^k} \Big|_{\Gamma} = g_k^{(j)}, \quad k = \begin{cases} \overline{0, m-2}; & j = 0, 1, \\ \overline{0, m-1}; & j = 2, 3, \end{cases} \quad (8)$$

где  $g_k^{(j)}$  — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

**Теорема.** Задача (3), (8) в классе исчезающих на бесконечности функций имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных.

**Доказательство.** Нетрудно проверяется, что все компоненты любого решения системы (3) являются полигармоническими функциями порядка  $m$ . Например, полигармоничность функции  $u_0$  можно получить, продифференцировав второе уравнение системы (3) по  $x_1$ , третье по  $x_2$ , четвертое по  $x_3$ . После сложения результатов устанавливается полигармоничность. Возьмем две произвольные полигармонические функции  $\sigma$  и  $\omega$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = u_0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = u_1, \quad (9)$$

где  $\Delta^m \sigma = 0$ ,  $\Delta^m \omega = 0$ . Подставляя значения  $u_0$ , и  $u_1$  из (9) в третье и четвертое уравнения системы (3), находим

$$\Delta^{m-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u_2 - \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} \right) \right] = 0, \quad \Delta^{m-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u_3 - \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega}{\partial x_3} \right) \right] = 0.$$

Следовательно, в полупространстве  $\mathbb{R}_+^3$  имеем

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + \int_0^{x_1} \sum_{k=0}^{m-2} \tau^k \varphi_k(\tau, x_2, x_3) d\tau + \varphi_1(x_2, x_3), \\ u_3 &= \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + \int_0^{x_1} \sum_{k=0}^{m-2} \tau^k \psi_k(\tau, x_2, x_3) d\tau + \varphi_2(x_2, x_3), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2$ ) — произвольные непрерывно дифференцируемые функции двух переменных. Подставляя выражения  $u_j$  ( $j = \overline{0, 3}$ ) из (9) и (10)

в первые два уравнения системы (3), с учетом полигармоничности  $\sigma$  и  $\omega$  получим

$$\Delta^{m-1} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad \Delta^{m-1} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\varphi_1 = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \chi}{\partial x_3}, \quad \Delta^m \chi = 0.$$

Теперь, заменив  $\omega$  на  $\omega + \chi$ , без ограничения общности можем написать, что общее представление решений системы (3) в полупространстве  $\mathbb{R}_+^3$  имеет вид

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}, \quad u_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \\ u_2 &= \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + \int_0^{x_1} \sum_{k=0}^{m-2} \tau^k \varphi_k(\tau, x_2, x_3) d\tau, \\ u_3 &= \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \int_0^{x_1} \sum_{k=0}^{m-2} \tau^k \psi_k(\tau, x_2, x_3) d\tau, \\ \sigma &= \sum_{k=0}^{m-1} x_1^k \alpha_k(x_1, x_2, x_3), \quad \omega = \sum_{k=0}^{m-1} x_1^k \beta_k(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\varphi_k, \psi_k, \alpha_k, \beta_k$  — произвольные регулярные в  $\mathbb{R}_+^3$  гармонические функции. Из представления (11) и первых двух условий (8) для предельных значений  $\sigma$  и  $\omega$  на плоскости  $x_1 = 0$  получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} &= F(\zeta), \quad \Omega = \sigma - i\omega, \quad \zeta = x_2 + ix_3, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad F = \frac{1}{2} \left( g_0^{(2)} + ig_0^{(3)} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

В классе исчезающих на бесконечности функций предельные значения  $\sigma$  и  $\omega$  из (12) определяются единственным образом [7]. Тогда из (11) и оставшегося условия (8) все гармонические функции  $\varphi_k, \psi_k, \alpha_k, \beta_k$  последовательно определяются единственным образом как решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

**3.** Пусть  $G$  — шар  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2$  с границей  $\Gamma : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ . Через  $\sigma^+$  обозначим полуокружность  $x_3 = \sqrt{R^2 - x_2^2}$  в плоскости  $x_1 = 0$ .

**Задача 3.** Найти в шаре  $G$  функции  $u_j \in C^{2m}(G) \cap C^{2m-1}(\overline{G})$ , удовлетворяющие системе (2) и на границе шара  $\Gamma$  условиям

$$\Delta^{2m-2} u_j|_{\Gamma} = f_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^k} \Big|_{\Gamma} = h_k^{(j)}, \quad k = \begin{cases} \overline{0, 2m-3}, & j = 1, 2, 3, \text{ при } n = 2(2m-1), \\ \overline{0, 2m-2} & j = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^k} \Big|_{\Gamma} = g_k^{(j)}, \quad j = \overline{0, 3}; \quad k = \overline{0, 2m-1}, \text{ при } n = 4m, \quad (14)$$

где  $f_j, h_k^{(j)}, g_k^{(j)}$  — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

**Теорема 3.** Задача (2), (13), (14) корректно поставлена, т. е. она имеет, и притом единственное, регулярное решение, непрерывно зависящее от начальных данных.

**Доказательство.** Записывая второе уравнение системы (2) в виде

$$\Delta^{2m-2} u_j = v_j, \quad \Delta v_j + 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} v_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

из первого условия (13) для  $v_j$  получаем условие Дирихле  $v_j|_{\Gamma} = f_j$ . Для регулярных в шаре  $G$  решений второго уравнения системы (15) находим следующие представления:

$$v_j = \chi_j + (|x|^2 - R^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \chi_i}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, 3, \\ |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \Delta \chi_j = 0.$$

Отсюда функции  $v_j$  с условиями Дирихле определяются единственным образом. При известных  $v_j$  общее решение первого уравнения (15) можно представить в виде

$$u_j = \sum_{k=0}^{2m-3} (|x| - R^2)^k \varphi_k + K(f_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (16)$$

где  $\Delta\varphi_k = 0$ , а  $K(f_j)$  — частное решение уравнения  $\Delta^{2m-2}u_j = v_j$ . Произвольные гармонические функции  $\varphi_k$  из второго условия (13) ( $k = \overline{0, 2m-3}$ ;  $j = 1, 2, 3$ ) определяются единственным образом. Функция  $u_0$  определяется из первого уравнения системы (2) и условия (13) ( $k = \overline{0, 2m-2}$ ;  $j = 0$ ) как решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения.

Совершенно аналогично при  $n = 4m$  искомые функции  $u_j$  ( $j = \overline{0, 3}$ ) определяются единственным образом из уравнения  $\Delta^{2m}u_j$  и условия (14).

**Задача 4.** Найти в шаре  $G$  регулярные решения системы (3)  $u_j \in C^{2m-1}(G) \cap C^{2m-2}(\overline{G})$ , удовлетворяющие на границе шара  $\Gamma$  условиям

$$\Delta^{m-1}u_j|_{\Gamma} = f_j \quad (j = 0, 1), \quad \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}|_{\Gamma} = g_k, \quad k = \overline{0, m-2}, \quad (17)$$

где  $f_j, g_k$  — заданные соответственно непрерывно дифференцируемые функции и вектор-функции.

**Теорема 4.** Задача 4 всегда разрешима, и решение задачи определяется с точностью до градиента гармонической в круге  $x_2^2 + x_3^2 < R^2$  функции двух переменных  $x_2, x_3$ .

Доказательство. Система (3) записывается в виде

$$\Delta^{m-1}u = v, \quad Mv = 0. \quad (18)$$

Из системы Моисила — Теодореску  $Mv = 0$  с учетом первых двух условий (17) вектор-функция  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$  определяется с точностью до градиента гармонической в круге  $x_2^2 + x_3^2 < R^2$  функции  $\chi(x_2, x_3)$  [4]:

$$v_0 = \frac{\partial\sigma}{\partial x_1}, \quad v_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial\omega}{\partial x_2} - \frac{\partial\sigma}{\partial x_3} + \frac{\partial\chi}{\partial x_2}, \quad v_3 = \frac{\partial\omega}{\partial x_3} + \frac{\partial\sigma}{\partial x_2} + \frac{\partial\chi}{\partial x_3},$$

где  $\sigma, \omega$  — вполне определенные гармонические в  $G$  функции, однозначно определяемые функциями  $f_1, f_2$ . При известных  $v_j$  ( $j = \overline{0, 3}$ ) (т. е.  $v$ ) вектор-функция  $u$  из первого уравнения (18) с учетом второго условия (17) определяется единственным образом подобно тому,

как это было в случае первого уравнения (15) и условия (13) ( $k = \overline{0, 2m-3}$ ;  $j = 1, 2, 3$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если дополнительно к условиям задачи (17) зададим еще условие

$$\Delta^{m-1}u_j|_{\sigma^+} = \beta_j \quad (j = 0, 1),$$

где  $\beta_j$  ( $j = 0, 1$ ) предполагаются непрерывными функциями, то задача 4 в шаре  $G$  будет всегда разрешимой и ее решение будет единственным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждения работы [4] вытекают из теорем 1–4 как частный случай соответственно при  $n = 1$  и при  $n = 2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. Brackx F. The behaviour at infinity of ( $k$ )-monogenic functions of a quaternion variable // Quart. J. Pure Appl. Math. 1978. V. 52, N 2. P. 49–60.
3. Delanghe R., Brackx F. Hypercomplex functions theory Hilbert modules with reproducing kernel // Proc. London Math. Soc. 1978. V 37, N 3. P. 545–576.
4. Янушаускас А. И. Задача о наклонной производной теории потенциала. Новосибирск: Наука, 1985.
5. Муллоева М. С., Муртазаев Д. Краевая задача для  $n$ -й итерации системы Мойсила — Теодореску // Докл. АН РТ. 1999. Т. XLII, N 3. С. 17–23.
6. Муллоева М. С. Краевая задача линейного сопряжения для неоднородной итерированной системы Мойсила — Теодореску // Материалы юбилейной научно-теоретической конф., посвящ. 50-летию Университета. Душанбе, 1998. С. 26.
7. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

г. Душанбе

9 мая 2003 г.

О ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ  
С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ  
ВРЕМЕНИ С УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ,  
СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНЫЕ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА<sup>\*)</sup>

Н. Р. Пинигина, С. В. Попов

В работе, продолжающей статьи авторов [1,2], устанавливается разрешимость краевых задач для уравнений, имеющих вид

$$g(x)u_t + Lu = f, \quad (1)$$

где  $L$  — эллиптический оператор 2-го порядка,  $g(x) = A$  при  $x > 0$  и  $g(x) = -B$  при  $x < 0$ ,  $A, B$  — положительные постоянные. Результатом данной работы является явное представление условий разрешимости для уравнений (1), когда условия склеивания (сопряжения) содержат разные производные до второго порядка.

1. В области  $Q^+ = \mathbb{R}^+ \times (0, T)$  рассмотрим систему уравнений

$$Au_t^1 = u_{xx}^1, \quad -Bu_t^2 = u_{xx}^2. \quad (2)$$

В пространстве Гёльдера  $H_{xt}^{p,p/2}(Q^+)$ ,  $p = 2l + \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , ищется решение уравнений (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$u^1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x, T) = \varphi_2(x), \quad x > 0, \quad (3)$$

и условиям склеивания

$$u^1(0, t) + u_x^2(0, t) = 0, \quad u_x^1(0, t) = u_{xx}^2(0, t) \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ, программа «Университеты России» (код проекта 04.01.047).



где  $l \geq 1$  — целое число.

Единственность решения поставленной задачи устанавливается интегрированием тождеств

$$\begin{aligned} 0 &= u^1 \cdot (Au_t^1 - u_{xx}^1) = \frac{A}{2}[(u^1)^2]_t + (u_x^1)^2 - (u^1 u_x^1)_x, \\ 0 &= u_t^2 \cdot (Bu_t^2 + u_{xx}^2) = B(u_t^2)^2 - \frac{1}{2}[(u_x^2)^2]_t + (u_t^2 u_x^2)_x \end{aligned}$$

по области  $Q^+$  с применением соответствующих начальных условий и условий склеивания.

Будем предполагать, что  $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда функции

$$\begin{aligned} \omega_1(x, t) &= \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{A(x-\xi)^2}{4t}\right) \varphi_1(\xi) d\xi, \\ \omega_2(x, t) &= \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{\pi(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{B(x-\xi)^2}{4(T-t)}\right) \varphi_2(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

являются решениями соответственно уравнений (2), удовлетворяющими условиям (3) в  $\mathbb{R}$ . В силу метода исследования будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (2):

$$\begin{aligned} u^1(x, t) &= \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t x \exp\left(-\frac{Ax^2}{4(t-\tau)}\right) (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \alpha(\tau) d\tau + \omega_1(x, t), \\ u^2(x, t) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi B}} \int_t^T \exp\left(-\frac{Bx^2}{4(\tau-t)}\right) (\tau-t)^{-\frac{1}{2}} \beta(\tau) d\tau + \omega_2(x, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Функции, представленные формулами (6), удовлетворяют начальным условиям (3) и уравнениям (2) соответственно. Отметим, что  $u^k$  принадлежат пространству  $H_x^{p,p/2}$ , если  $\alpha(t)$  принадлежит пространству  $H^{p/2}(0, T)$ , а  $\beta(t)$  принадлежит пространству  $H^{(p-1)/2}(0, T)$ , причем

$$\alpha^{(s)}(0) = 0 \quad (s = 0, \dots, l), \quad \beta^{(s)}(T) = 0 \quad (s = 0, \dots, l-1). \quad (7)$$

Из условий склеивания (4) получим систему уравнений относительно  $\alpha, \beta$ :

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \beta(t) &= \Phi_0(t), \\ \sqrt{A} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\alpha(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \sqrt{B} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{\beta(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau &= \Phi_1(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Phi_0(t) = -\omega_1(0, t) - \omega_{2x}(0, t), \quad \Phi_1(t) = \sqrt{\pi}(\omega_{1x}(0, t) - \omega_{2xx}(0, t)).$$

Пусть  $l \geq 2$ . При выполнении условий

$$\beta(0) = \Phi_0(0), \quad \beta(T) = 0 \quad (9)$$

систему уравнений (8) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \beta(t) &= \Phi_0(t), \\ \sqrt{A} \int_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \sqrt{B} \int_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau &= \Phi_1(t), \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что первое условие в (9) необходимо и достаточно для того, чтобы было выполнено условие  $\alpha(0) = 0$ .

Если второе уравнение в (10) обратить при помощи известных формул обращения оператора Абеля, то

$$\begin{aligned} \alpha(t) + \beta(t) &= \Phi_0(t), \\ \sqrt{A}\alpha'(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/2} \frac{\beta'(\tau)}{\tau-t} d\tau &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем обозначения  $F_0^s(t) = \Phi_0^{(s)}(t) - \Phi_0^{(s)}(0)$ ,

$$F_1^s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\Phi_1^{(s)}(\tau) - \Phi_1^{(s)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \quad (s = 1, \dots, l-1).$$

Легко видеть, что  $F_0^{l-1}(t), F_1^{l-1}(t)$  принадлежат пространству Гёльдера с показателем  $(1 + \gamma)/2$ , причем  $F_0^{l-1}(t) = F_1^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/2})$  для малых  $t$ .

Предположим, что функции  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  принадлежат искомым пространствам Гёльдера. Тогда из системы (11) следует, что

$$\sqrt{B} \int_0^T \frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}} d\tau = \Phi_1(0). \quad (12)$$

При выполнении (12) систему (11) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) + \beta'(t) &= \Phi_0'(0) + F_0^1(t), \\ \sqrt{A}\alpha'(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta'(\tau)}{\tau-t} d\tau &= \frac{2}{\pi}\Phi_1'(0)t^{\frac{1}{2}} + F_1^1(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть выполнены условия

$$\beta'(0) = \Phi_0'(0), \quad \beta'(T) = 0, \quad (14)$$

и введем в системе (13) новые искомые функции

$$\bar{\beta}'(t) = \beta'(t) - \beta'(0)\frac{T-t}{T}.$$

Тогда систему (13), воспользовавшись формулой [3, с. 177]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\tau^{\rho-1}(T-\tau)^{\sigma-1}}{\tau-t} d\tau &= t^{\rho-1}(T-t)^{\sigma-1} \operatorname{ctg}(\sigma\pi) \\ &- \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma-1)}{\pi\Gamma(\rho+\sigma-1)} T^{\rho+\sigma-2} F\left(2-\rho-\sigma, 1, 2-\sigma; \frac{T-t}{T}\right), \end{aligned}$$

представим в виде

$$\alpha'(t) + \bar{\beta}'(t) = \beta'(0)\frac{t}{T} + F_0^1(t),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{A}\alpha'(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ = \frac{4}{\pi}\beta'(0)\sqrt{B}F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right) \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi}\Phi_1'(0)t^{\frac{1}{2}} + F_1^1(t), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T-\tau}{T(\tau-t)} d\tau = -\frac{4}{\pi} F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right) \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, если  $l > 2$ , то продифференцируем один раз полученную систему уравнений (15). Имея в виду формулу [4, с. 12]

$$\frac{d}{dt}[F(a, b, c; t)t^{c-1}] = (c-1)t^{c-2}F(a, b, c-1; t),$$

получим

$$\begin{aligned} \alpha''(t) + \bar{\beta}''(t) &= \Phi_0''(t), \\ \sqrt{A}\alpha''(t) + \frac{\sqrt{B}}{2\pi} \left( t^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)} d\tau + t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \int_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)} d\tau \right) & \quad (16) \\ &= \frac{2}{T\pi} \beta'(0) \sqrt{BF} \left( -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; \frac{t}{T} \right) \left( \frac{t}{T} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi} \Phi_1'(0) t^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi} \Phi_1''(0) t^{\frac{1}{2}} + F_1^2(t). \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что

$$\frac{\sqrt{B}}{2} \int_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{3/2}} d\tau = 2\sqrt{\frac{B}{T}} \beta'(0) + \Phi_1'(0). \quad (17)$$

В силу формулы [5, с. 254]

$$\frac{d}{dt} \int_0^T \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\frac{\varphi(0)}{T} - \frac{\varphi(T)}{T-t} + \int_0^T \frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t} d\tau$$

систему (16) при выполнении условия (17), учитывая, что  $\beta'(T) = 0$ , можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \alpha''(t) + \beta''(t) &= \Phi_0''(0) + F_0^2(t), \\ \sqrt{A}\alpha''(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta''(\tau)}{\tau-t} d\tau &= \frac{2}{\pi} \Phi_1''(0) t^{\frac{1}{2}} + F_1^2(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, мы получили уравнения (18), имеющие точно такой же вид, как и уравнения (13). Легко видеть, что при выполнении условий

$$\beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0), \quad \beta^{(s)}(T) = 0,$$

$$\frac{\sqrt{B}}{2} \int_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau) - \beta^{(s)}(0) \frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}} d\tau = 2\sqrt{\frac{B}{T}} \beta^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \quad s = 2, \dots, l-2, \quad (19)$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha^{(l-1)}(t) + \beta^{(l-1)}(t) &= \Phi_0^{(l-1)}(0) + F_0^{l-1}(t), \\ \sqrt{A} \alpha^{(l-1)}(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau &= \frac{2}{\pi} \Phi_1^{(l-1)}(0) t^{\frac{1}{2}} + F_1^{l-1}(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Потребуем выполнения условий

$$\beta^{(l-1)}(0) = \Phi_0^{(l-1)}(0), \quad \beta^{(l-1)}(T) = 0,$$

и введем новую искомую функцию

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \beta^{(l-1)}(t) - \beta^{(l-1)}(0) \frac{T-t}{T}.$$

Тогда систему (20) можно переписать в виде

$$\alpha^{(l-1)}(t) + \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \beta^{(l-1)}(0) \frac{t}{T} + F_0^{l-1}(t),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{A} \alpha^{(l-1)}(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ = \frac{4}{\pi} \beta^{(l-1)}(0) \sqrt{B} F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right) \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi} \Phi_1^{(l-1)}(0) t^{\frac{1}{2}} + F_1^{l-1}(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Так как  $\alpha^{(l-1)}, \beta^{(l-1)}$  принадлежат пространству  $H^{(1+\gamma)/2}$ , должно выполняться условие

$$\frac{\sqrt{B}}{2} \int_0^T \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau^{3/2}} d\tau = 2\sqrt{\frac{B}{T}} \beta^{(l-1)}(0) + \Phi_1^{(l-1)}(0). \quad (23)$$

Тогда при выполнении (23) в конечном итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}\alpha^{(l-1)}(t) + \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) &= \overline{F}_0^{l-1}(t), \\ \sqrt{A}\alpha^{(l-1)}(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau &= \overline{F}_1^{l-1}(t),\end{aligned}$$

где

$$\overline{F}_0^{l-1}(t) = \beta^{(l-1)}(0) \frac{t}{T} + F_0^{l-1}(t),$$

$$\overline{F}_1^{l-1}(t) = \frac{4}{\pi} \beta^{(l-1)}(0) \sqrt{B} \left[ F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right) - 1 \right] \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} + F_1^{l-1}(t),$$

принадлежат пространству  $H^{(1+\gamma)/2}(0, T)$ , причем

$$\overline{F}_0^{l-1}(t) = \overline{F}_1^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/2})$$

для малых  $t$ .

Исключая  $\alpha^{(l-1)}(t)$  в системе (24), получим сингулярное уравнение относительно  $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$ :

$$\sqrt{A}\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) - \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = Q(t), \quad (25)$$

где

$$Q(t) = \sqrt{A}\overline{F}_0^{l-1}(t) - \overline{F}_1^{l-1}(t).$$

Сингулярное интегральное уравнение (25) будем рассматривать как уравнение относительно  $\beta_0(t) = \tilde{\beta}^{(l)} t^{-\frac{3}{2}}$ . Найдем решения  $\beta_0(t)$ , неограниченные при  $t = 0$  (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при  $t = T$ . В этом случае каноническая функция  $\chi(z)$  равна  $(z - T)^\theta z^{-\theta}$ ,  $\theta = \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{B}{A}}$ , индекс  $\varkappa$  равен 0.

Сингулярное уравнение (25) в этом классе решений  $\beta_0(t)$  однозначно и безусловно разрешимо, и решение дается формулой [6, 7]

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(t) = \frac{\sqrt{A}}{B+A} Q(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi(B+A)} (T-t)^\theta t^{\frac{3}{2}-\theta} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^\theta \tau^{\frac{3}{2}-\theta} (\tau-t)} d\tau. \quad (26)$$

Так как  $\tilde{\beta}^{(l-1)}$  принадлежит пространству  $H^{(1+\gamma)/2}$ , то из формулы (26) следует выполнение условия

$$\int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1+\theta} \tau^{\frac{3}{2}-\theta}} d\tau = 0. \quad (27)$$

При выполнении (27) формула (26) примет вид

$$\begin{aligned} & \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) \\ &= \frac{\sqrt{A}}{B+A} Q(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi(B+A)} (T-t)^{1+\theta} t^{\frac{3}{2}-\theta} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1+\theta} \tau^{\frac{3}{2}-\theta} (\tau-t)} d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как  $Q(t)$  принадлежит пространству  $H^{(1+\gamma)/2}(0, T)$ , функция  $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$ , представленная формулой (28), удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\frac{(1+\gamma)}{2}$  во всех точках контура  $(0, T)$ , отличных от концов. Рассмотрим его поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [7, с. 76], легко видеть, что

$$\tilde{\beta}^{(l-1)}(0) = \tilde{\beta}^{(l-1)}(T) = 0.$$

Далее, в силу леммы о принадлежности классу Гёльдера интеграла типа Коши на концах контура интегрирования (см. [1]) и ввиду неравенств  $(1+\gamma)/2 < 1+\theta$  и  $(1+\gamma)/2 < \frac{3}{2}-\theta$  при  $0 < \gamma < 1$ , получим, что в формуле (28) функция  $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $(1+\gamma)/2$ .

Таким образом, при выполнении условий (9), (12), (14), (17), (19), (21), (23), (27), которые имеют вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{B} \int_0^T \frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}} d\tau = \Phi_1(0), \\ & \frac{\sqrt{B}}{2} \int_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau) - \Phi_0^{(s)}(0) \frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}} d\tau = 2\sqrt{\frac{B}{T}} \Phi_0^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \end{aligned} \quad (29)$$

$$s = 1, \dots, l-1, \quad \beta^{(k)}(T) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-1,$$

мы получили функцию  $\beta(t)$  из искомого пространства  $H^{(p-1)/2}(0, T)$ , удовлетворяющую условиям

$$\beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0), \quad s = 0, 1, \dots, l-1, \quad \beta^{(l-1)}(T) = 0.$$

Значения  $\beta^{(s)}(t)$  определяются по формуле Тейлора

$$\beta^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!} t^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^t (t-\tau)^{l-2-s} \beta^{(l-1)}(\tau) d\tau, \\ s = 0, 1, \dots, l-2.$$

Тогда для выполнения условий  $\beta^{(k)}(T) = 0$  при  $k = 0, 1, \dots, l-2$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!} T^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^T (T-\tau)^{l-2-s} \beta^{(l-1)}(\tau) d\tau, \quad (30) \\ s = 0, 1, \dots, l-2.$$

Подставив найденные значения функций  $\beta^{(s)}(t)$  в первые  $l$  условий (29), получим

$$\frac{\sqrt{B}}{2(l-1-s)!} \int_0^T \tau^{l-s-3/2} d\tau \int_0^1 (1-\sigma)^{l-1-s} \beta^{(l-1)}(\sigma\tau) d\sigma \\ = -\frac{\sqrt{B}}{2} \sum_{k=s+1}^{l-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0) T^{k-s-1/2}}{(k-s)!(k-s-1/2)} + \sqrt{\frac{B}{T}} \Phi_0^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \quad (31) \\ s = 0, \dots, l-2,$$

$$\frac{\sqrt{B}}{2} \int_0^T \frac{\beta^{(l-1)}(\tau) - \Phi_0^{(l-1)}(0) \frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}} d\tau = 2\sqrt{\frac{B}{T}} \Phi_0^{(l-1)}(0) + \Phi_1^{(l-1)}(0). \quad (32)$$

Отметим, что функция  $\beta^{(l-1)}(t)$  дана формулой (28), при этом  $\alpha(t)$ , как и  $\beta(t)$ , принадлежит пространству  $H^{(p-1)/2}(0, T)$ , причем

$$\alpha^{(s)}(0) = 0 \quad (s = 0, \dots, l-1).$$

Итак, доказана следующая



**Теорема 1.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ ,  $p = 2l + \gamma$ . Тогда при выполнении  $2l$  условий (27), (30)–(32) существует единственное решение уравнений (2) из пространства  $H_x^{p-1, (p-1)/2}$ , удовлетворяющее условиям (3), (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При выполнении  $2l - 2$  условий (30), (31) решение, найденное в теореме 1, будет принадлежать пространству  $H_x^{q, q/2}$ ,  $q = 2l - 2 + \min\{2\theta, 1 - 2\theta\}$ , где  $\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{B}{A}}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если предположим, что  $\varphi_1(x) \in H^p$ ,  $\varphi_2(x) \in H^{p+1}$ , то при выполнении  $2l$  условий решение задачи (2)–(4) будет принадлежать пространству (см. [1]):

- 1)  $H_x^{p, p/2}$ , если  $0 < \gamma < \min\{2\theta, 1 - 2\theta\}$ ;
- 2)  $H_x^{q, q/2}$ ,  $q = 2l + \min\{2\theta, 1 - 2\theta\}$ , если  $\min\{2\theta, 1 - 2\theta\} < \gamma < 1$ ;
- 3)  $H_x^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/2}$ , если  $\gamma = \min\{2\theta, 1 - 2\theta\}$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно малая положительная постоянная.

2. Для системы уравнений (2) с начальными условиями (3) рассмотрим следующие условия склеивания:

$$u^1(0, t) = u_x^2(0, t), \quad u_x^1(0, t) = u_{xx}^2(0, t), \quad 0 < t < T. \quad (33)$$

В этом случае сингулярное уравнение относительно  $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$  будет иметь вид

$$\sqrt{A} \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = Q(t). \quad (34)$$

Сингулярное интегральное уравнение (34) будем рассматривать как уравнение относительно  $\beta_1(t) = \tilde{\beta}^{(l)} t^{-\frac{3}{2}}$  и найдем решения  $\beta_1(t)$ , неограниченные при  $t = 0$  (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при  $t = T$ . В этом случае каноническая функция равна  $\chi(z) = (z - T)^{1-\theta} z^{-1+\theta}$ , индекс  $\varkappa$  равен 0.

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^{(l-1)}(t) &= \frac{\sqrt{A}}{B + A} Q(t) \\ &- \frac{\sqrt{B}}{\pi(B + A)} (T - t)^{1-\theta} t^{\frac{1}{2}+\theta} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T - \tau)^{1-\theta} \tau^{\frac{1}{2}+\theta} (\tau - t)} d\tau. \end{aligned} \quad (35)$$

Так как  $Q(t)$  принадлежит пространству  $H^{(1+\gamma)/2}(0, T)$ , то функция  $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$ , представленная формулой (35), удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\frac{(1+\gamma)}{2}$  во всех точках контура  $(0, T)$ , отличных от концов. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [7, с. 76], как и выше, легко видеть, что  $\tilde{\beta}^{(l-1)}(0) = \tilde{\beta}^{(l-1)}(T) = 0$ .

Далее, в силу леммы (см. [1]) и в силу неравенств  $\gamma/2 < 1 - \theta$  и  $\gamma/2 < \frac{1}{2} + \theta$  при  $0 < \gamma < 1$ , получим, что в формуле (35) функция  $\tilde{\beta}^{(l-1)}(t)$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\gamma/2$ .

Таким образом, при выполнении условий, аналогичных (9), (12), (14), (17), (19), (21) и (23), получим функцию  $\beta(t)$  из пространства  $H^{(p-2)/2}(0, T)$ , удовлетворяющую условиям

$$\beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0) \quad (s = 0, 1, \dots, l-1), \quad \beta^{(l-1)}(T) = 0.$$

Итак, справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ ,  $p = 2l + \gamma$ . Тогда при выполнении  $2l - 1$  условий вида (30), (31)–(32) существует хотя бы одно решение уравнения  $H_x^{p-1, (p-1)/2}$ , удовлетворяющее условиям (3), (4).

Замечание 3. Если предположим, что  $\varphi_1(x) \in H^p$ ,  $\varphi_2(x) \in H^{p+1}$ , то, как и в работе [1] (см. теорему 2), при выполнении  $2l$  условий решение задачи (2)–(4) будет принадлежать пространству  $H_{xt}^{p, p/2}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пинигина Н. Р., Попов С. В. Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, N 1. С. 71–82.
2. Пинигина Н. Р., Попов С. В. Гладкость решений параболических уравнений с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими производные первого и второго порядков // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, N 1. С. 86–97.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразование Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970.
4. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа: Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1985.
5. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Наука, 1979.

6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

7. Мухелишвили Н. И. СINGУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. М.: Наука, 1968.

г. Якутск

19 января 2004 г.

ГЁЛЬДЕРОВСКИЕ КЛАССЫ РЕШЕНИЙ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ  
НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ\*)

С. В. Попов

В работе, продолжающей статью автора [1], изучаются параболические уравнения четвертого порядка с меняющимся направлением эволюции, связанные с применением теории сингулярных интегральных уравнений [2–5], а также систем этих уравнений [6].

Цель настоящей работы — показать, что гёльдеровские классы решений параболических уравнений переменного типа существенно зависят от нецелого показателя Гёльдера, а также формы условий склеивания.

В области  $Q^+ = \mathbb{R} \times (0, T)$  будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad -u_t^2 = Lu^2 \quad \left( L \equiv -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \right). \quad (1)$$

Решение системы уравнений ищется из пространства Гёльдера  $H_{x,t}^{p,p/4}$ ,  $p = 4l + \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , и удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$u^1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x, T) = \varphi_2(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

и условиям склеивания

---

\*) Работа поддержана Министерством образования РФ, программа «Университеты России» (код проекта 04.01.047).

$$\frac{\partial^k u^1}{\partial x^k}(0, t) = \sigma_k (-1)^k \frac{\partial^k u^2}{\partial x^k}(0, t) \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (3)$$

Будем предполагать, что  $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда функции

$$\omega_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} U_0(x, t; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi,$$

$$\omega_2(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} U_0(\xi, T; x, t) \varphi_2(\xi) d\xi,$$

являются решениями уравнений (1), удовлетворяющими условиям (2) в  $\mathbb{R}$ . Будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (1):

$$u^1(x, t) = \int_0^t U_0(x, t; 0, \tau) \alpha_0(\tau) d\tau + \int_0^t U_1(x, t; 0, \tau) \alpha_1(\tau) d\tau + \omega_1(x, t), \quad (4)$$

$$u^2(x, t) = \int_t^T U_0(0, \tau; x, t) \beta_0(\tau) d\tau + \int_t^T U_2(0, \tau; x, t) \beta_1(\tau) d\tau + \omega_2(x, t),$$

где  $U_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) — фундаментальное и элементарные решения Б. Пини [7, 8, 1].

В силу общих результатов [9, 10] плотности  $\alpha_k, \beta_k$  ( $k = 0, 1$ ) должны принадлежать пространству  $H^q$  ( $q = \frac{p-3}{4}$ ), причем

$$\alpha_k^{(s)}(0) = \beta_k^{(s)}(T) = 0 \quad (s = 0, \dots, l-1). \quad (5)$$

Из условий склеивания (3) получим систему интегральных урав-

нений с операторами Абеля относительно  $\alpha_k, \beta_k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \int_0^t \frac{\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}}} d\tau + \omega_1(0, t) \\ \quad = \frac{\sigma_0}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \int_t^T \frac{\beta_0(\tau)+\beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{3}{4}}} d\tau + \sigma_0\omega_2(0, t), \\ -\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau - \frac{\sigma_1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_t^T \frac{\beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} d\tau \\ \quad + \omega_{1x}(0, t) + \sigma_1\omega_{2x}(0, t) = 0, \\ -\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \int_0^t \frac{\alpha_0(\tau)-\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}}} d\tau + \omega_{1xx}(0, t) \\ \quad = -\frac{\sigma_2}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \int_t^T \frac{\beta_0(\tau)-\beta_1(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{3}{4}}} d\tau + \sigma_2\omega_{2xx}(0, t), \\ \frac{\pi}{2}(\alpha_0(t) + \sigma_3\beta_0(t)) + \omega_{1xxx} + \sigma_3\omega_{2xxx} = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Для удобства записи будем считать  $T = 1$ . Из уравнений (6) при помощи формул обращения оператора Абеля [4] получим эквивалентную систему сингулярных интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)) + \sigma_0(\beta_0(t) + \beta_1(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{3/4} \frac{\beta_0(\tau)+\beta_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/4}} d\tau, \\ \alpha_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/2} \frac{\beta_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau, \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t) - \alpha_1(t)) - \sigma_2(\beta_0(t) - \beta_1(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/4} \frac{\alpha_0(\tau)-\alpha_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_2(\tau)}{(t-\tau)^{1/4}} d\tau, \\ \alpha_0(t) + \sigma_3\beta_0(t) = \frac{1}{2}\Phi_3(t), \end{array} \right. \quad (7)$$

где

$$\Phi_j(t) = \frac{4}{\pi\Gamma\left(\frac{1+j}{4}\right)} \left( (-1)^j \sigma_j \frac{\partial^j \omega_2}{\partial x^j}(0, t) - \frac{\partial^j \omega_1}{\partial x^j}(0, t) \right) \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Введем обозначения

$$F_0^i(t) = \int_0^t \frac{\Phi_0^{(i+1)}(\tau) - \Phi_0^{(i+1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}}} d\tau, \quad F_j^i(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_j^{(i)}(\tau) - \Phi_j^{(i)}(0)}{(t-\tau)^{1-\frac{1+j}{4}}} d\tau,$$

$$F_3^i(t) = \Phi_3^{(i)}(t) - \Phi_3^{(i)}(0), \quad G_1^i(t) = \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{\Phi_1^{(i)}(1) - \Phi_1^{(i)}(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau$$

$$(i = 0, \dots, l-1, \quad j = 1, 2).$$

Так как [4]  $\Phi_k^{l-1} \in H^{q_k}$ ,  $q_k = 1 + \frac{\gamma-k}{4}$ , то функции  $F_k^{l-1}(t)$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) принадлежат пространству  $H^{(1+\gamma)/4}(0, 1)$ , причем  $F_k^{l-1}(t) = O(t^{(1+\gamma)/4})$  для малых  $t$ .

Мы доказываем существование решений  $\alpha_i, \beta_i$  системы уравнений (7) из пространства  $H^q$  ( $q = (p-3)/4$ ,  $p = 4l + \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ ), удовлетворяющих условиям (5).

Предположим, что функции  $\alpha_i, \beta_i$  принадлежат искомому пространству. Тогда из второго и четвертого уравнений системы (7) следует, что для того чтобы  $\alpha_i(0) = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$-\frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}} d\tau = \frac{1}{2} \Phi_1(0), \quad \sigma_3 \beta_0(0) = \frac{1}{2} \Phi_3(0). \quad (8)$$

Из первого и третьего уравнений системы (7) вытекает выполнение условий

$$\frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_0(\tau) + \beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{1}{4}}} d\tau = -\Phi_0(0), \quad \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)}{\tau^{\frac{3}{4}}} d\tau = -\Phi_2(0). \quad (9)$$

При выполнении условий (8), (9) систему уравнений (7) можно пере-

писать так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)) + \sigma_0(\beta_0(t) + \beta_1(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\beta_0(\tau) + \beta_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = 4\Phi'_0(0)t^{1/4} + F_0^0(t), \\ \alpha_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = F_1^0(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t) - \alpha_1(t)) - \sigma_2(\beta_0(t) - \beta_1(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = F_2^0(t), \\ \alpha_0(t) + \sigma_3\beta_0(t) - \sigma_3\beta_0(0) = F_3^0(t), \end{array} \right. \quad (10)$$

Положим

$$\beta_1(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{F_1^0(\tau)}{(1-\tau)^{1/2}\tau} d\tau - \frac{1}{\sigma_1} G_1^0(0)$$

и покажем, что это условие эквивалентно условию  $\beta_1(1) = 0$ . В самом деле, второе уравнение системы (7) также эквивалентно уравнению

$$-\sigma_1\beta_1(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1-t}\right)^{1/2} \frac{\alpha_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{\Phi_1(\tau)}{(\tau-t)^{1/2}} d\tau. \quad (11)$$

Подставляя в (11)  $t = 0$ , а также  $\alpha_1(t)$  из второго уравнения (10), при этом имея в виду формулу [11, с. 177]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^q \frac{\tau^{a-1}(1-\tau)^{b-1}}{\tau-t} d\tau \\ &= t^{a-1}(1-t)^{b-1} \operatorname{ctg}(b\pi) - \frac{\Gamma(a)}{\pi\Gamma(b-1)} \Gamma(a+b-1) F(2-a-b, 1, 2-b; 1-t), \end{aligned} \quad (12)$$

получим



$$-\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\alpha_1(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \frac{1}{2} \Phi_1(1), \quad (13)$$

которое, очевидно, эквивалентно  $\beta_1(1) = 0$ .

Введем в системе (10) новые искомые функции

$$\bar{\beta}_i(t) = \beta_i(t) - \beta_i(0)(1-t) \quad (i = 0, 1).$$

Тогда, воспользовавшись формулой (12), представим (10) в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)) + \sigma_0(\bar{\beta}_0(t) + \bar{\beta}_1(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\bar{\beta}_0(\tau) + \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = 4\Phi_0'(0)t^{1/4} + F_0^0(t) \\ \quad - \frac{16\sigma_0}{3\pi}(\beta_0(0) + \beta_1(0))F\left(-\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}; t\right)t^{1/4}, \\ \alpha_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\bar{\beta}_1(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ \quad = F_1^0(t) + \frac{4\sigma_1}{\pi}\beta_1(0)F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; t\right)t^{1/2}, \\ \sqrt{2}(\alpha_0(t) - \alpha_1(t)) - \sigma_2(\bar{\beta}_0(t) - \bar{\beta}_1(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\bar{\beta}_0(\tau) - \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ \quad = F_2^0(t) - \frac{16\sigma_2}{3\pi}(\beta_0(0) - \beta_1(0))F\left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{7}{4}; t\right)t^{3/4}, \\ \alpha_0(t) + \sigma_3\bar{\beta}_0(t) = \sigma_3\beta_0(0)t + F_3^0(t). \end{array} \right. \quad (14)$$

Далее, если  $l > 1$ , то возьмем производные в полученных системах уравнений (14). Имея в виду формулу [12]

$$\frac{d}{dt}[F(a, b, c; t)t^{c-1}] = (c-1)t^{c-2}F(a, b, c-1; t), \quad (15)$$

получим

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{2}(\alpha'_0(t) + \alpha'_1(t)) + \sigma_0(\bar{\beta}'_0(t) + \bar{\beta}'_1(t)) - \frac{t^{-3/4}\sigma_0}{4\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) + \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{1/4}(\tau-t)} d\tau \\ & - \frac{t^{1/4}\sigma_0}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) + \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{1/4}(\tau-t)} d\tau = \Phi'_0(0)t^{-3/4} + 4\Phi''_0(0)t^{1/4} \\ & + F_0^1(t) - \frac{4\sigma_0}{3\pi}(\beta_0(0) + \beta_1(0))F\left(-\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{4}; t\right)t^{-3/4}, \\ \alpha'_1(t) + \frac{t^{-1/2}\sigma_1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)} d\tau + \frac{t^{1/2}\sigma_1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)} d\tau \\ & = \frac{1}{2}\Phi_1(0)t^{-1/2} + F_1^1(t) + \frac{2\sigma_1}{\pi}\beta_1(0)F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; t\right)t^{-1/2}, \\ \sqrt{2}(\alpha'_0(t) - \alpha'_1(t)) - \sigma_2(\bar{\beta}'_0(t) - \bar{\beta}'_1(t)) - \frac{t^{-1/4}\sigma_2}{4\pi} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) - \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{3/4}(\tau-t)} d\tau \\ & - \frac{t^{3/4}\sigma_2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) - \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{3/4}(\tau-t)} d\tau = -\Phi'_2(0)t^{-1/4} + F_2^1(t) \\ & - \frac{4\sigma_2}{\pi}(\beta_0(0) - \beta_1(0))F\left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{4}; t\right)t^{-1/4}, \\ \alpha'_0(t) + \sigma_3\bar{\beta}'_0(t) = \sigma_3\beta_0(0) - \frac{1}{2}\Phi'_3(0) + F_3^1(t). \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Для дальнейшего нам понадобится одно важное свойство сингулярного интеграла. Если  $\varphi(t) \in H^{1+\gamma}(0,1)$ , то (см. [13, 2])

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\frac{\varphi(0)}{t} - \frac{\varphi(1)}{1-t} + \int_0^1 \frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t} d\tau. \quad (17)$$

В силу (17) из второго и четвертого уравнений системы (16) следует, что для того чтобы  $\beta'_i(1) = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_1 \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{3/2}} d\tau = 4\beta_1(0) + \pi\Phi'_1(0), \quad \sigma_3\bar{\beta}'_0(0) = \sigma_3\beta_0(0) - \frac{1}{2}\Phi'_3(0). \quad (18)$$

Из остальных уравнений системы (16) имеем выполнение условий

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_0 \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) + \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{5/4}} d\tau &= \frac{16\sigma_0}{3}(\beta_0(0) + \beta_1(0)) - 4\pi\Phi'_0(0), \\ \sigma_2 \int_0^1 \frac{\bar{\beta}_0(\tau) - \bar{\beta}_1(\tau)}{\tau^{7/4}} d\tau &= \frac{16\sigma_2}{3}(\beta_0(0) - \beta_1(0)) + \frac{4}{3}\pi\Phi'_2(0). \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Так как справедливы равенства

$$\begin{aligned} F(-3/4, 1, 1/4; t) - 1 &= -3F(1/4, 1, 5/4; t)t, \\ F(-1/2, 1, 1/2; t) - 1 &= -F(1/2, 1, 3/2; t)t, \\ F(-1/4, 1, 3/4; t) - 1 &= -\frac{1}{3}F(3/4, 1, 7/4; t)t, \end{aligned}$$

в силу формулы (17) систему уравнений (16) при выполнении условий (18), (19) можно представить так:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sqrt{2}(\alpha'_0(t) + \alpha'_1(t)) + \sigma_0(\bar{\beta}'_0(t) + \bar{\beta}'_1(t)) \\ &\quad - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\bar{\beta}'_0(\tau) + \bar{\beta}'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = 4\Phi''_0(0)t^{1/4} + F_0^1(t) \\ &\quad + \frac{4\sigma_0}{\pi}(\beta_0(0) + \beta_1(0))F\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}; t\right)t^{1/4}, \\ \alpha'_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\bar{\beta}'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ &\quad = F_1^1(t) - \frac{2\sigma_1}{\pi}\beta_1(0)F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; t\right)t^{-1/2}, \\ &\sqrt{2}(\alpha'_0(t) - \alpha'_1(t)) - \sigma_2(\bar{\beta}'_0(t) - \bar{\beta}'_1(t)) \\ &\quad - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\bar{\beta}'_0(\tau) - \bar{\beta}'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ &\quad = F_2^1(t) + \frac{4\sigma_2}{3\pi}(\beta_0(0) - \beta_1(0))F\left(\frac{3}{4}, 1, \frac{7}{4}; t\right)t^{3/4}, \\ \alpha'_0(t) + \sigma_3(\bar{\beta}'_0(t) - \bar{\beta}'_0(0)) &= F_3^1(t). \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Подставляя значения  $\bar{\beta}'_i(t) = \beta'_i(t) + \beta_i(0)$  в систему (20) и имея в виду формулу (12), получим

$$\left\{ \begin{aligned} &\sqrt{2}(\alpha'_0(t) + \alpha'_1(t)) + \sigma_0(\beta'_0(t) + \beta'_1(t)) \\ &\quad - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\beta'_0(\tau) + \beta'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = 4\Phi''_0(0)t^{1/4} + F_0^1(t), \\ \alpha'_1(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau &= F_1^1(t), \\ &\sqrt{2}(\alpha'_0(t) - \alpha'_1(t)) - \sigma_2(\beta'_0(t) - \beta'_1(t)) \\ &\quad - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\beta'_0(\tau) - \beta'_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = F_2^1(t), \\ \alpha'_0(t) + \sigma_3(\beta'_0(t) - \beta'_0(0)) &= F_3^1(t). \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Таким образом, мы получили уравнения (21), имеющие точно такой же вид, как и первоначальные уравнения (10). Легко видеть, что при выполнении условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \int_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau) - \beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{3/2}} d\tau = 2\sigma_1 \beta_1^{(s)}(0) + \pi \Phi_1^{(s+1)}(0), \\ \sigma_3 \beta_0^{(s+1)}(0) = \frac{1}{2} \Phi_3^{(s+1)}(0), \\ \sigma_0 \int_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau) + \beta_1^{(s)}(\tau) - \beta_0^{(s)}(0) - \beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{5/4}} d\tau \\ \quad = 4\sigma_0(\beta_0^{(s)}(0) + \beta_1^{(s)}(0)) - 4\pi \Phi_0^{(s+1)}(0), \\ \sigma_2 \int_0^1 \frac{\beta_0^{(s)}(\tau) - \beta_1^{(s)}(\tau) - \beta_0^{(s)}(0) + \beta_1^{(s)}(0)}{\tau^{7/4}} d\tau \\ \quad = \frac{4}{3} \sigma_2(\beta_0^{(s)}(0) - \beta_1^{(s)}(0)) + \frac{4}{3} \pi \Phi_2^{(s+1)}(0), \\ s = 1, \dots, l-2, \end{array} \right. \quad (22)$$

мы приходим к системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t) + \alpha_1^{(l-1)}(t)) + \sigma_0(\beta_0^{(l-1)}(t) + \beta_1^{(l-1)}(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/4} \frac{\beta_0^{(l-1)}(\tau) + \beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau \\ \quad = 4\Phi_0^{(l)}(0)t^{1/4} + F_0^{l-1}(t), \\ \alpha_1^{(l-1)}(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = F_1^{l-1}(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t) - \alpha_1^{(l-1)}(t)) - \sigma_2(\beta_0^{(l-1)}(t) - \beta_1^{(l-1)}(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\beta_0^{(l-1)}(\tau) - \beta_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = F_2^{l-1}(t), \\ \alpha_0^{(l-1)}(t) + \sigma_3(\beta_0^{(l-1)}(t) - \beta_0^{(l-1)}(0)) = F_3^{l-1}(t), \end{array} \right. \quad (23)$$

где

$$\beta_1^{(s)}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{F_1^s(\tau)}{(1-\tau)^{1/2}\tau} d\tau - \frac{1}{\sigma_1} G_1^s(0), \quad s = 1, \dots, l-1. \quad (24)$$

Заметим, как и выше, что условия (24) эквивалентны  $\beta_1^{(s)}(1) = 0$  при  $s = 1, \dots, l-1$ .

Далее, вводя новые искомые функции

$$\tilde{\beta}_i^{(l-1)}(t) = \beta_i^{(l-1)}(t) - \beta_i^{(l-1)}(0)(1-t), \quad \sigma_3 \beta_0^{(l-1)}(0) = \frac{1}{2} \Phi_3^{(l-1)}(0)$$

в системе (23), получим уравнения вида (14). Так как функции  $\alpha_i^{(l-1)}$ ,  $\beta_i^{(l-1)}$  мы ищем из пространства  $H^{(1+\gamma)/4}$ , из первого уравнения полученной системы уравнений следует, что должно выполняться условие

$$\sigma_0 \int_0^1 \frac{\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(\tau) + \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau^{5/4}} d\tau = \frac{16\sigma_0}{3} (\beta_0^{(l-1)}(0) + \beta_1^{(l-1)}(0)) - 4\pi \Phi_0^{(l)}(0). \quad (25)$$

Тогда при выполнении (25) в конечном итоге придем к системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t) + \alpha_1^{(l-1)}(t)) + \sigma_0(\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t) + \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{5/4} \frac{\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(\tau) + \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \bar{F}_0^{l-1}(t), \\ \alpha_1^{(l-1)}(t) + \frac{\sigma_1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \bar{F}_1^{l-1}(t), \\ \sqrt{2}(\alpha_0^{(l-1)}(t) - \alpha_1^{(l-1)}(t)) - \sigma_2(\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t) - \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(t)) \\ \quad - \frac{\sigma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/4} \frac{\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(\tau) - \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = \bar{F}_2^{l-1}(t), \\ \alpha_0^{(l-1)}(t) + \sigma_3 \tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t) = \bar{F}_3^{l-1}(t), \end{array} \right. \quad (26)$$

где функции

$$\bar{F}_0^{l-1}(t) = F_0^{l-1}(t) - \frac{16\sigma_0}{3\pi} (\beta_0^{(l-1)}(0) + \beta_1^{(l-1)}(0)) [F(-3/4, 1, 5/4; t) - 1] t^{1/4},$$

$$\bar{F}_1^{l-1}(t) = F_1^{l-1}(t) + \frac{4\sigma_1}{\pi} \beta_1^{(l-1)}(0) F(-1/2, 1, 3/2; t) t^{1/2},$$

$$\bar{F}_2^{l-1}(t) = F_2^{l-1}(t) - \frac{16\sigma_2}{3\pi} (\beta_0^{(l-1)}(0) - \beta_1^{(l-1)}(0)) F(-1/4, 1, 7/4; t) t^{3/4},$$

$$\bar{F}_3^{l-1}(t) = F_3^{l-1}(t) + \sigma_3 \beta_0^{(l-1)}(0) t$$

принадлежат пространству  $H^{(1+\gamma)/4}$ , причем

$$\bar{F}_j^{l-1}(t) = O(t^{\frac{1+\gamma}{4}}) \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

для малых  $t$ .

Докажем существование функций  $\alpha_i^{(l-1)}(t), \beta_i^{(l-1)}(t)$  из пространства  $H^{q-(l-1)}$  в полученной системе уравнений (26).

Исключим  $\alpha_i^{(l-1)}(t)$  из системы (26). Имеем

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{B(t, \tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \vec{Q}(t), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(t) &= (\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t), \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(t)), \\ A &= \begin{pmatrix} \sigma_0 - \sigma_2 - 2\sqrt{2}\sigma_3 & \sigma_0 + \sigma_2 \\ \sigma_0 + \sigma_2 & \sigma_0 - \sigma_2 \end{pmatrix}, \\ B(t, \tau) &= \begin{pmatrix} \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} + \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} & \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} - \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} \\ \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} - \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} & \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} + \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} + 2\sqrt{2}\sigma_1(\frac{t}{\tau})^{1/2} \end{pmatrix}, \\ \vec{Q}(t) &= (\bar{F}_0^{l-1} + \bar{F}_2^{l-1} - 2\sqrt{2}\bar{F}_3^{l-1}, \bar{F}_0^{l-1} - \bar{F}_2^{l-1} - 2\sqrt{2}\bar{F}_1^{l-1}). \end{aligned}$$

Систему сингулярных уравнений (27) можно переписать так:

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{B}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(t, \tau)\vec{\beta}(\tau) d\tau = \vec{Q}(t), \quad (28)$$

где

$$B \equiv B(t, t) = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_2 & \sigma_0 - \sigma_2 \\ \sigma_0 - \sigma_2 & \sigma_0 + \sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad M(t, \tau) = \frac{B - B(t, \tau)}{\tau - t}.$$

Для того чтобы выделить характеристическую часть оператора  $K$ , перепишем систему сингулярных уравнений (28) в виде

$$CK\vec{\beta} = C\vec{Q}(t), \quad (29)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1 & \sigma_2 - \sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_0 & \sigma_0 + \sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} CA &= 2\sqrt{2} \\ &\times \begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 - \sigma_0\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 - 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \\ \sigma_0\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$CB = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой перестановки Пуанкаре — Бертрана [2, 3, 6], выделим характеристическую часть  $K^0$  оператора  $CK$  системы уравнений (29):

$$K^0 \vec{\beta} \equiv aE\vec{\beta}(t) - \frac{bE}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (30)$$

где  $E$  — единичная матрица,

$$a = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3,$$

$$b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1.$$

Полученную систему сингулярных интегральных уравнений

$$K^0 \vec{\beta} = \vec{G}, \quad \vec{G} = aA^{-1} \left( \vec{Q} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(t, \tau) \vec{\beta}(\tau) d\tau \right) \quad (31)$$

будем решать в классе функций, ограниченных на концах отрезка  $(0,1)$ .

Для этого введем кусочно-голоморфную функцию

$$\vec{\Psi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \vec{\Psi}^+(t) = \frac{a+bi}{a-bi} \vec{\Psi}^-(t) + \frac{\vec{G}(t)}{a-bi}, & 0 < t < 1, \\ \vec{\Psi}^+(t) = \vec{\Psi}^-(t), & t < 0, t > 1. \end{cases}$$

Решения уравнений (31) эквивалентны решению задачи Римана (32) при дополнительном условии  $\vec{\Psi}(\infty) = 0$ . Рассмотрим  $k = 1$ . Так как

$$g = \frac{a+ib}{a-ib} = e^{i2\pi\theta}, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \frac{a}{b} \right|$$

и

$$\exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\ln g}{\tau - z} \right) = z^{-\theta} (z-1)^\theta,$$

в указанном классе, в случае, когда  $a$  и  $b$  одного знака, каноническая функция  $X(z)$  равна  $z^{1-\theta}(z-1)^\theta$ , индекс задачи (32)  $\neq$  равен  $-1$ . В случае же, когда  $a$  и  $b$  разных знаков, каноническая функция  $X(z) = z^\theta(z-1)^{1-\theta}$ . Согласно общей теории [2, 3]

$$\vec{\Psi}(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\vec{G}(\tau) d\tau}{(a-bi)X^+(\tau)(\tau-z)}$$

при условии

$$\int_0^1 \frac{\vec{G}(\tau)}{X(\tau)} d\tau = 0. \quad (32)$$

Тогда

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\Psi}^+(t) - \vec{\Psi}^-(t) = \frac{1}{2}\vec{G}(t) + \frac{X(t)}{2\pi} \int_0^1 \frac{\vec{G}(\tau) d\tau}{X(\tau)(\tau-t)}. \quad (33)$$

Формулы (32) можно рассматривать как необходимое и достаточное условие ограниченности  $\vec{\beta}(t)$  при  $t = 1$ .

Подставляя в (33) значения  $\vec{G}_k(t)$ , приходим к системе уравнений Фредгольма

$$\vec{\beta} + K^*k\vec{\beta} = \vec{Q}^*, \quad (34)$$

где

$$K^*k\vec{\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 N(t, \tau) \vec{\beta}(\tau) d\tau.$$

Всякие ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (34) будут, очевидно, принадлежать пространству Гёльдера во всех точках контура  $(0, 1)$ , отличных от концов. В самом деле, функции  $\vec{Q}^*$  будут, очевидно, удовлетворять условию Гёльдера во всех точках контура  $(0, 1)$ , отличных от концов. Функция  $M(t, \tau)$  имеет интегрируемые особенности при  $t = \tau$  во всех точках контура  $(0, 1)$ , отличных от концов. В силу соответствующих теорем поведения интегралов типа Коши на концах контура интегрирования [2–4] легко вывести,



что  $M(t, \tau)$ ,  $\vec{Q}^*$  на концах 0,1 будут вести себя как  $t^{\frac{1}{2}+\theta}(1-t)^{\frac{1}{2}-\theta}$  или  $t^{\frac{1}{2}-\theta}(1-t)^{\frac{1}{2}+\theta}$ , причем соответственно [3, § 51]  $\vec{\beta}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{4}}(0, 1-\delta)$ , или  $\vec{\alpha}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{4}}(\delta, 1)$ , где  $\delta$  — положительное фиксированное малое число.

Таким образом, ядро  $M(t, \tau)$ , имея подвижные и неподвижные бесконечности порядка меньше единицы, удовлетворяет всем условиям, которые накладываются на эти функции в теории интегральных уравнений Фредгольма. Более того [3, § 101], путем замены аргумента интегрирования  $\tau$  можно избавиться от неподвижных бесконечностей. Из указанных свойств ядра  $M(t, \tau)$  и свободного члена  $\vec{Q}^*$  следует, что всякие ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (34) на концах 0,1 ведут себя как  $t^{\frac{1}{2}+\theta}(1-t)^{\frac{1}{2}-\theta}$ , если  $a$  и  $b$  одинакового знака, или как  $t^{\frac{1}{2}-\theta}(1-t)^{\frac{1}{2}+\theta}$ , если  $a$  и  $b$  разного знака.

В силу леммы о принадлежности классу Гёльдера интеграла типа Коши на концах контура интегрирования (см. [14, 15]) при выполнении неравенства  $\frac{1+\gamma}{4} < \frac{1}{2} - \theta$  ( $\theta < \frac{1}{4}$ ) получим, что решения уравнений Фредгольма (34) принадлежат пространству  $H^{\frac{1+\gamma}{4}}(0, 1)$  и обращаются в нуль на концах 0,1 порядка  $\frac{1+\gamma}{4}$ . Кроме того, решения уравнений Фредгольма (34) удовлетворяют условию Гёльдера с показателем  $\frac{1}{2} - \theta$  при  $1 - 4\theta < \gamma < 1$  и условию Гёльдера с показателем  $\frac{1}{2} - \theta - \varepsilon$  при  $\gamma = 1 - 4\theta$ .

Таким образом, при выполнении условий (8), (9), (18), (19), (22), (25) система уравнений (34) эквивалентна исходной системе уравнений (6). При этом отметим выполнение условий

$$\sigma_3 \beta_0^{(s)}(0) = \frac{1}{2} \Phi_3^{(s)}(0), \quad \beta_1^{(s)}(1) = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, l-1), \quad \vec{\beta}^{(l-1)}(1) = 0.$$

Разрешимость системы уравнений Фредгольма (34) следует из единственности решения основной задачи (1)–(3) и однозначности представления их через потенциалы. Значения функций  $\vec{\beta}^{(s)}(t)$  определяются по формуле Тейлора

$$\vec{\beta}^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\vec{\beta}^{(k)}(0)}{(k-s)!} t^{k-s} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^t (t-\tau)^{l-2-s} \vec{\beta}^{(l-1)}(\tau) d\tau, \quad (35)$$

$$(s = 0, \dots, l-2).$$

Тогда для выполнения условий  $\beta_0^{(s)}(1) = 0$  при  $s = 0, \dots, l-2$  необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = \sum_{k=s}^{l-2} \frac{\beta_0^{(k)}(0)}{(k-s)!} + \frac{1}{(l-2-s)!} \int_0^1 (1-\tau)^{l-2-s} \beta_0^{(l-1)}(\tau) d\tau \quad (36)$$

$$(s = 0, \dots, l-2).$$

Подставляя значения функций  $\vec{\beta}^{(s)}(t)$  в условия (8), (9), (18), (19), (22), (25), получим  $4l$  условий разрешимости задачи (1)–(3) в пространстве  $H_{x,t}^{p,p/4}$ . Эти условия обозначим так:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 4l. \quad (37)$$

Итак, доказана

**Теорема.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$  ( $p = 4l + \gamma$ ). Тогда при выполнении  $4l$  условий (37) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства ( $\theta = \frac{1}{\pi} \arctg|\frac{a}{b}| < \frac{1}{4}$ )

1)  $H_{x,t}^{p,p/4}$ , если  $0 < \gamma < 1 - 4\theta$ ;

2)  $H_{x,t}^{q,q/4}$ ,  $q = 4l + 1 - 4\theta$ , если  $1 - 4\theta < \gamma < 1$ ;

3)  $H_{x,t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/4}$ , если  $\gamma = 1 - 4\theta$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно малая положительная постоянная.

**Замечание.** Если выполнены условия теоремы при  $\theta \geq \frac{1}{4}$ , то, как показано в [16, 1], единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства  $H_{x,t}^{p,p/4}$  при выполнении  $6l+2$  условий вида (37).

**Пример 1.** Для системы уравнений (1) с начальными условиями (2) рассмотрим условия склеивания (3) при  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = -1$ ,  $\sigma_3 = -1$ . В этом случае система сингулярных уравнений (31) будет иметь вид

$$(\sqrt{2} + 1)E\vec{\beta}(t) - \frac{(\sqrt{2} + 1)E}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \vec{G} \quad (38)$$

и единственное решение исходной задачи существует при выполнении  $6l + 2$  условий вида (37).

ПРИМЕР 2. Для системы уравнений (1) с начальными условиями (2) рассмотрим условия склеивания (3) при  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_1 = -1$ ,  $\sigma_2 = 1$ ,  $\sigma_3 = -1$ . В этом случае система сингулярных уравнений (31) будет иметь вид

$$(\sqrt{2} - 1)E\vec{\beta}(t) - \frac{(\sqrt{2} + 1)E}{\pi} \int_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \vec{G}, \quad (39)$$

$$\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \approx 0,054 < 0,25,$$

и мы находимся в условиях доказанной теоремы. Единственное решение исходной задачи существует при выполнении  $4l$  условий (37).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Popov S. V. Parabolic equations of the fourth order with varying evolution direction // *Мат. заметки ЯГУ*. 2001. Т. 8, вып. 2. С. 112–133.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
4. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
5. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
6. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968.
7. Pini V. Sul problema fondamentale di valori contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari // *Ann. Mat. Pura Appl.* 1957. V. 43. P. 261–297.
8. Pini V. Su una equazione paraboliche non lineare del quarto ordine // *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*. 1957. V. 27. N 3–4. P. 136–168.
9. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных уравнений общего вида // *Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова*. 1965. Т. 83. С. 3–163.
10. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970.
12. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа: Учеб. пособ. для вузов. М.: Высш. шк., 1985.
13. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Наука, 1979.

14. Попов С. В. О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1991. Вып. 102. С. 100–113.
15. Пинигина Н. Р., Попов С. В. Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, N 1. С. 71–82.
16. Попов С. В. Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка / Ред. журн. «Сиб. мат. журнал». Новосибирск, 1988. 56 с. Деп. в ВИНТИ 07.12.88, N 8646–Б88.

г. Якутск

26 января 2003 г.

# УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Е. Т. Софронов

Рассматривается система уравнений автоматического регулирования:

$$\dot{x}_1 = x_2 - f(x_1), \quad \dot{x}_2 = x_3 - b_1 x_1 - c_1 f(x_1), \quad (1)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 - b_2 x_1 - c_2 f(x_1), \quad \dot{x}_4 = -b_3 x_1 - c_3 f(x_1),$$

где  $b_i, c_i$  — постоянные,  $f(x_1)$  — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица,  $f(0) = 0$ . Кроме того, предположим, что для системы уравнений (1) выполняются обобщенные условия Рауса — Гурвица. В статьях [1, 2] рассматривалась система уравнений (1) при различных предположениях относительно корней характеристического уравнения. В данной статье предполагается, что

$$f(x_1) = p x_1 + \alpha(x_1), \quad \frac{\alpha(x_1)}{x_1} \rightarrow 0 \quad \text{при } x_1 \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$b_3 + p c_3 = b_2 + p c_2 = 0, \quad c_3 > 0, \quad p^2 - 4(b_1 + p c_1) = 0.$$

Тогда уравнение

$$\lambda^4 + p \lambda^3 + (b_1 + p c_1) \lambda^2 + (b_2 + p c_2) \lambda + b_3 + p c_3 = 0$$

имеет два нулевых корня и  $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma < 0$ . При таких условиях будем исследовать систему уравнений (1) на асимптотическую устойчивость в целом [3].

С помощью преобразования

$$\begin{aligned} y_1 &= (\gamma^3 + 3\gamma^2)x_1 + (\gamma^2 + 2\gamma)x_2 + (\gamma + 1)x_3 + x_4, \\ y_2 &= \gamma^3 x_1 + \gamma^2 x_2 + \gamma x_3 + x_4, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4 \end{aligned} \quad (3)$$

приводим систему уравнений (1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \gamma y_1 + y_2 - A\alpha(x_1), & \dot{y}_2 &= \gamma y_2 - B\alpha(x_1), \\ \dot{y}_3 &= y_4 - c_2\alpha(x_1), & \dot{y}_4 &= -c_3\alpha(x_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $B = \gamma^3 + \gamma^2 c_1 + \gamma c_2 + c_3$ ,  $A = B + 3\gamma^2 + 2\gamma c_1 + c_2$ .

Введем обозначения:  $\omega_1 = -\gamma c_3$ ,  $\omega_2 = (\gamma + 1)c_3$ ,  $r = \gamma^2 c_3$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены обобщенные условия Рауса — Гурвица, условия (2) и одна из серий условий:

- 1)  $A < 0$ ,  $\omega_2 B < 0$ ,  $l = \gamma^2 \frac{\omega_1 \omega_2}{AB} - \frac{\omega_1^2}{4A^2} > 0$ ;
- 2)  $A > 0$ ,  $\omega_2 B > 0$ ,  $l > 0$ ,  $lr + \gamma \omega_1 \omega_2 \left[ \frac{\omega_1}{B} + \frac{\gamma \omega_2 - \omega_1}{A\gamma} \right] > 0$ ;
- 3)  $A < 0$ ,  $\omega_2 B > 0$ ,  $\left[ \gamma^2 \frac{\omega_2}{B} + \frac{\omega_1}{4A} \right] r + \gamma \omega_2^2 > 0$ ;
- 4)  $A > 0$ ,  $\omega_2 B < 0$ ,  $\left[ \gamma^2 \frac{\omega_2}{B} + \frac{\omega_1}{4A} \right] r + \gamma \frac{A}{B} \omega_1 \omega_2 < 0$ .

Тогда для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы уравнений (1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \left[ |\alpha(x_1)| + \int_0^{x_1} \alpha(s) ds \right] = \infty. \quad (5)$$

Доказательство. Возьмем функцию

$$V = \frac{1}{2} (l_1 y_1^2 + l_2 y_2^2 + y_4^2) + r \int_0^{x_1} \alpha(s) ds \quad (6)$$

и найдем производную по  $t$ , вычисленную в силу систем уравнений (1), (4). Ее можно представить в виде

$$\dot{V} = \gamma l_1 y_1^2 + l_1 y_1 y_2 + \gamma l_2 y_2^2 - (Al_1 + \omega_1) y_1 \alpha(x_1) - (Bl_2 + \omega_2) y_2 \alpha(x_1) - r \alpha^2(x_1) \quad (7)$$

с учетом тождества

$$-c_3 y_4 + r(x_2 - p x_1) + \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 = 0. \quad (8)$$

Функция (7) отрицательна, если

$$l = \gamma^2 l_1 l_2 - \frac{1}{4} l_1^2 > 0, \quad l_1 > 0,$$

$$lr + \frac{1}{4} \gamma l_2 (Al_1 + \omega_1)^2 + \frac{1}{4} \gamma l_1 (Bl_2 + \omega_2)^2 - \frac{1}{4} l_1 (Al_1 + \omega_1)(Bl_2 + \omega_2) > 0. \quad (9)$$

Во всех четырех случаях в качестве  $l_1, l_2$  возьмем выражения

$$l_1 = \frac{\omega_1}{|A|}, \quad l_2 = \frac{|\omega_2|}{|B|}.$$

Тогда в силу условий теоремы функция  $\dot{V}$  отрицательна, а функция  $V$  определена положительно. Если

$$\int_0^{\pm\infty} \alpha(s) ds = \infty,$$

то функция  $V$  бесконечно большая и, применяя теорему Барбашина — Красовского [3], докажем асимптотическую устойчивость в целом нулевого решения системы (1).

Если

$$\int_0^{\pm\infty} \alpha(s) ds < M < \infty, \quad \overline{\lim}_{|x_1| \rightarrow \infty} |\alpha(x_1)| = \infty,$$

то из тождества (8) следует ограниченность

$$|x_2 - px_1|,$$

значит, для любой положительной полутраектории  $|x_1(t)|$  ограничена. Таким образом, любая положительная полутраектория ограничена, следовательно, нулевое решение системы уравнений (1) устойчиво в целом. Доказана достаточность условий (5).

Теперь докажем необходимость условий (5) от противного, т. е. пусть

$$|\alpha(x_1)| \leq M, \quad \int_0^{\pm\infty} \alpha(s) ds \leq M < \infty. \quad (10)$$

Возьмем положительную полутраекторию с начальными данными

$$x_1^0 = 0, \quad x_4^0 = c_3 + (2M + 1)\gamma^2 + \frac{1}{|\gamma|}M(|B| + |\gamma A|) + M \left| \frac{1 + \gamma}{\gamma} \right| |B|; \quad (11)$$

$x_2^0, x_3^0$  находятся из уравнений  $y_1^0 = 0, y_2^0 = 0$ . Из первых двух уравнений системы (4) найдем оценки для  $|y_1(t)|, |y_2(t)|$ , а  $y_4$  из уравнения

$$\frac{dy_4}{dx_1} = \frac{-c_3\alpha(x_1)}{x_2 - px_1 - \alpha(x_1)}$$

при  $x_2 - px_1 \geq 2M$ . Тогда имеем

$$|y_2(t)| \leq \frac{1}{|\gamma|}M|B|, \quad |y_1(t)| \leq \frac{1}{\gamma^2}M(|B| + |\gamma A|),$$

$$y_4(x_1(t)) \geq x_4^0 - c_3.$$

Отсюда, учитывая (8), (11), будем иметь

$$x_2(t) - px_1(t) \geq 2M + 1$$

при всех  $t \geq t_0$ . Тем самым

$$\dot{x}_1 \geq M + 1, \quad x_1(t) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, существование такой полутраектории противоречит устойчивости в целом и показывает неверность нашего предположения (10). Теорема доказана полностью.

**Теорема 2.** Пусть выполнены обобщенные условия Рауса — Гурвица, условия (2) и одна из серий условий:

$$1) A = 0, \quad \omega_2 B < 0,$$

$$l = l_1 \left[ -\gamma^2 \frac{\omega_2}{B} - \frac{l_1}{4} \right] > 0, \quad l_1 > 0, \quad lr - \frac{1}{4} \gamma \omega_1^2 \frac{\omega_2}{B} > 0;$$

$$2) A = 0, \quad \omega_2 B > 0, \quad l = l_1 \left[ \gamma^2 \frac{\omega_2}{B} - \frac{l_1}{4} \right] > 0, \quad l_1 > 0,$$

$$lr + \frac{1}{4} \gamma \omega_1^2 \frac{\omega_2}{B} + \gamma l_1 \omega_2^2 - \frac{1}{2} l_1 \omega_1 \omega_2 > 0;$$



$$3) A = 0, \quad \gamma = -1, \quad B \neq 0, \quad l = l_1 \left[ \frac{c_3}{|B|} - \frac{l_1}{4} \right] > 0, \quad l_1 > 0,$$

$$l - \frac{1}{4} \frac{c_3^2}{|B|} - \frac{1}{4} l_1 c_3 (1 + \operatorname{sgn} B) > 0.$$

Тогда для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы уравнений (1) необходимо и достаточно выполнения условия (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условий (5) докажем с помощью функции (6). При выполнении условий 1, 2 теоремы в качестве  $l_2$  возьмем число  $|\omega_2|/|B|$ . В случае 3 пусть

$$l_2 = \frac{\omega_1}{|B|} = \frac{c_3}{|B|}.$$

Тогда в силу

$$r > 0, \quad \frac{\alpha(x_1)}{x_1} > 0$$

функция  $\dot{V}$  отрицательна, а сама функция  $V$  либо бесконечно большая, либо можем доказать ограниченность любой положительной полутраектории. Этим доказывается достаточность условий (5) теоремы. Необходимость условий (5) доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

**Теорема 3.** Пусть выполнены обобщенные условия Рауса — Гурвица, условия (2) и одна из серий условий:

- 1)  $B = 0, \quad A < 0;$
- 2)  $B = 0, \quad \gamma^2 > A > 0;$
- 3)  $A = 0, \quad B = 0.$

Тогда для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы уравнений (1) необходимо и достаточно выполнения условия (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем достаточность условий (5). Пусть рассматривается первая серия условий. Возьмем функцию  $V$ , определенную равенством (6), где  $l_1, l_2$  определяются так:

$$l_1 = -\frac{\omega_1}{A}, \quad \left( \gamma^2 l_2 + \frac{1}{4} \frac{\omega_1}{A} \right) r + \frac{1}{4} \gamma \omega_2^2 > 0.$$

Тогда выполняются неравенства (9) и функция  $\dot{V}$  отрицательна и обращается в нуль там, где нет целых полутраекторий.

Пусть выполняется вторая серия условий и  $l_1 = \frac{\omega_1}{A}$ , а  $l_2$  — достаточно большая постоянная. При таких условиях можно показать, что выполняется неравенство

$$lr + \gamma l_2 \omega_1^2 + \frac{1}{4} \omega_2 \frac{\omega_1}{A} (\gamma \omega_2 - 2\omega_1) > 0.$$

В силу выполнения последнего неравенства функция  $\dot{V}$  отрицательна.

Если  $A = 0$ ,  $B = 0$ , то в функции  $V$ , определенной равенством (6), возьмем

$$l_1 = -\frac{\omega_1^2}{\gamma r}, \quad \gamma^2 l_2 > \max \left\{ \frac{\omega_1 \omega_2}{r}, -\frac{\gamma \omega_2^2}{r}, -\frac{\omega_1^2}{\gamma r} \right\}.$$

Тогда функция  $\dot{V}$  будет отрицательной и обращается в нуль там, где нет целых положительных полутраекторий.

Во всех трех случаях либо функция  $V$  бесконечно большая, либо любая положительная полутраектория ограничена. Этим и доказывается достаточность условий теоремы.

Доказательство необходимости условий (5) теоремы проводится от противного. При выборе начальных данных полутраекторий в равенстве (11)  $A$  и  $B$  заменяются их соответствующими значениями, указанными в теореме. Например, в случае  $A = 0$ ,  $B = 0$  в силу условий  $y_1^0 = 0$ ,  $y_2^0 = 0$ ,  $y_1(t) = 0$ ,  $y_2(t) = 0$ . Таким образом, теорема 3 доказана полностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Софронов Е. Т. Об устойчивости в целом одной системы четырех уравнений в случае комплексных корней // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 1. С. 93–97.
2. Софронов Е. Т. Асимптотическая устойчивость в целом в одном критическом случае // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 2. С. 102–110.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ  
ВРЕМЕНИ С ВЕСОВЫМИ УСЛОВИЯМИ  
СКЛЕИВАНИЯ\*)

М. С. Туласынов

В области  $Q = (|y| < \infty) \times (0 < t < T)$  рассмотрим сингулярное параболическое уравнение с меняющимся направлением времени:

$$\operatorname{sgn} y u_t = u_{yy} + \frac{k}{y} u_y, \quad (1)$$

где  $k = 2\alpha - 1$  и  $0 < \alpha < 1$  являются постоянными.

Отметим, что в случае функции  $v(x, t) = u(\operatorname{sgn} x 2\sqrt{|x|}, t)$  уравнение (1) эквивалентно вырождающемуся уравнению с меняющимся направлением времени

$$v_t = xv_{xx} + \alpha v_x, \quad x \neq 0,$$

а в случае функции  $v(x, t) = u(\operatorname{sgn} x (2/3)|x|^{2/3}, t)$  с  $\alpha = 2/3$  оно эквивалентно уравнению

$$xv_t = v_{xx}, \quad x \neq 0.$$

Для решений уравнения (1) определим пространство Гёльдера  $H_k^{p,p/2}$  (см. [1, с. 25]).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Пространством  $H_k^{p,p/2}$ ,  $0 < \gamma < 1 - \max(k, 0)$ , называется банахово пространство функций  $u(y, t)$ , непрерывных в  $\overline{Q}$*

---

\*) Работа поддержана Министерством образования РФ, программа «Университеты России» (код проекта 04.01.047) и грантом ректора ЯГИТИ (г. Якутск).

вместе со всеми производными вида  $D_t^r D_y^q$  при  $2r + q < p$ , имеющими конечную норму

$$|u|_{k,Q}^{(p)} = \langle u \rangle_{k,Q}^{(p)} + \sum_{j=0}^{[p]} \sum_{2r+q=j} |D_t^r D_y^q u|_{k,Q}^{(0)},$$

где

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{k,Q}^{(p)} &= \langle u \rangle_{y,Q}^{(p)} + \langle u \rangle_{t,Q}^{(p/2)}, \quad \langle u \rangle_{y,Q}^{(p)} = \sum_{2r+q=[p]} \langle D_t^r D_y^q u \rangle_{y,Q}^{(\gamma)}, \\ \langle u \rangle_{t,Q}^{(p/2)} &= \sum_{0 < p-2r-q < 2} \langle D_t^r D_y^q u \rangle_{t,Q}^{\left(\frac{p-2r-q+\chi k}{2}\right)}, \\ D_y^q &= \begin{cases} B_k^{(s)}, & \text{если } q = 2s, \\ y^k \frac{\partial}{\partial y} B_k^{(s)}, & \text{если } q = 2s + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$B_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial}{\partial y}$  является оператором Бесселя и  $\chi = [q/2 - [q/2] + 1/2]$ .

Решение уравнения (1) ищется из пространства Гёльдера  $H_k^{p,p/2}$ ,  $p = 2l + \gamma$ , удовлетворяющего следующим начально-краевым условиям:

$$u(y, 0) = \varphi_1(y), \quad y > 0, \quad u(y, T) = \varphi_2(y), \quad y < 0, \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$\begin{pmatrix} u(-0, t) \\ ((-y)^k \cdot u_y)(-0, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(+0, t) \\ (y^k \cdot u_y)(+0, t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $a, b, c$  — действительные постоянные,  $l \geq 1$  — целое число.

При  $c = 0$  аналогичные краевые задачи для уравнения (1) рассматривались в работах [1, 2]. Будем предполагать, что  $c \neq 0$ . При  $k = 0$  отметим работу [3], где рассматривались условия склеивания, имитирующие наличие непроницаемой перегородки.

Для удобства вместо уравнения (1) будем рассматривать систему в  $Q^+$ :

$$u_{1t} = u_{1yy} + (k/y)u_{1y}, \quad -u_{2t} = u_{2yy} + (k/y)u_{2y}. \quad (4)$$

Тогда поставленная задача переформулируется следующим образом: найти функции  $u_1(y, t)$  и  $u_2(y, t)$  из пространства  $H_k^{p,p/2}(Q^+)$ , которые удовлетворяют системе уравнений (4) и начально-краевым условиям

$$u_1(y, 0) = \varphi_1(y), \quad u_2(y, T) = \varphi_2(y), \quad y > 0, \quad (5)$$

и условиям склеивания

$$(u_2 - au_1 - cD_y u_1)|_{y=0} = 0, \quad D_y(u_2 + bu_1)|_{y=0} = 0, \quad 0 < t < T. \quad (6)$$

Единственность поставленной задачи устанавливается интегрированием тождеств

$$0 = u_1 \cdot (y^k u_{1t} - (y^k u_{1y})_y) = \frac{y^k}{2} [(u_1)^2]_t + y^k (u_{1y})^2 - (u_1 \cdot y^k u_{1y})_y,$$

$$0 = u_2 \cdot (-y^k u_{2t} - (y^k u_{2y})_y) = -\frac{y^k}{2} [(u_2)^2]_t + y^k (u_{2y})^2 - (u_2 \cdot y^k u_{2y})_y$$

по области  $Q^+$  и применением соответствующих начальных условий и условий склеивания при  $ab > 0$  и  $bc \leq 0$ .

Пусть функции  $\varphi_i(y)$  ( $i = 1, 2$ ) принадлежат пространству  $H_k^p(0, \infty)$ ,  $p = 2l + \gamma$  (будем считать, что  $\varphi_i(y)$  ( $i = 1, 2$ ) продолжены на значения  $x < 0$  с сохранением принадлежности пространству  $H_k^p$ , см. [4, с. 343]), и пусть

$$D_y^{2s+1} \varphi_i(y)|_{y=0} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, l. \quad (7)$$

В силу метода исследования будем пользоваться интегральным представлением решений  $u_1$  и  $u_2$  уравнений (4) в  $Q^+$ , удовлетворяющим начальным условиям (5) [1]:

$$u_1(y, t) = \frac{-1}{2^k \Gamma((k+1)/2)} \int_0^t e^{-y^2/4(t-\tau)} (t-\tau)^{-(k+1)/2} \nu(\tau) d\tau + \omega_1(y, t), \quad (8)$$

$$u_2(y, t) = \frac{-1}{2^k \Gamma((k+1)/2)} \int_t^T e^{-y^2/4(\tau-t)} (\tau-t)^{-(k+1)/2} \mu(\tau) d\tau + \omega_2(y, t), \quad (9)$$

где

$$\omega_1(y, t) = \int_0^\infty \Gamma(y, \eta, t; k) \varphi_1(\eta) d\eta, \quad \omega_2(y, t) = \int_0^\infty \Gamma(y, \eta, T - t; k) \varphi_2(\eta) d\eta,$$

$$\begin{aligned} \Gamma(y, \eta, t; k) &= (2t)^{-1} y^{(1-k)/2} \eta^{(1+k)/2} e^{-(y^2+\eta^2)/4t} I_{(k-1)/2}(y\eta/2t) \\ &= \frac{\eta^k}{2^k \Gamma((k+1)/2) t^{(k+1)/2}} e^{-(y^2+\eta^2)/4t} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1/2)_n (y\eta/2t)^{2n}}{(\alpha)_n (2n)!}, \end{aligned}$$

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha),$$

и  $I_\nu(x)$  является модифицированной функцией Бесселя.

**Лемма 1.** Если функции  $\nu(t)$  и  $\mu(t)$  принадлежат пространству  $H^q(0, T)$ ,  $q = l - 1 + \frac{\gamma+2\alpha}{2}$ , и удовлетворяют условиям

$$\nu^{(s)}(0) = \mu^{(s)}(T) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, l-1, \quad (10)$$

то функции  $u_1$  и  $u_2$  в формулах (8), (9) принадлежат пространству  $H_k^{p,p/2}(Q^+)$ .

Для доказательства этого утверждения, например для функции  $\nu(t)$ , достаточно воспользоваться известным результатом, который мы приводим в виде следующей леммы.

**Лемма 2** [1, гл. 2, § 2]. Если  $\varphi(y) \in H_k^p(0, L)$ ,  $\psi(t) \in H^{p/2}(0, T)$ ,  $i = 1, 2$ , и выполняются условия согласования

$$\psi^{(j)}(0) = B_k^{(j)} \varphi(y)|_{y=0}, \quad j = 0, 1, \dots, l, \quad (11)$$

то уравнение  $u_t = B_k u$  ( $|k| < 1$ ) имеет единственное решение  $u(y, t) \in H_k^{p,p/2}(Q^+)$ , которое удовлетворяет условиям

$$u(y, 0) = \varphi(y), \quad u(0, t) = \psi(t),$$

и справедлива оценка

$$|u|_{k,Q}^{(p)} \leq C(\langle \varphi \rangle_{x,Q}^{(p)} + \langle \psi \rangle_{t,Q}^{(p/2)}).$$

Действительно  $((k+1)/2 = \alpha)$ ,

$$\psi(t) = u_1(0, t) = -\frac{1}{2^{1-2\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau + \omega_1(0, t).$$

Используя формулу (7) для функции  $\psi(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} \psi^{(s)}(t) = & -\frac{1}{2^{1-2\alpha}\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\nu^{(s-1)}(\tau) - \nu^{(s-1)}(0)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^s \nu^{(s-i)}(0) t^{-\alpha(i-1)} \right] + \int_0^\infty \Gamma(0, \eta, t; k) B_k^{(s)} \varphi(\eta) d\eta, \quad s = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

следовательно,  $\psi(t) \in H^{p/2}(0, T)$  при  $\nu(t) \in H^q(0, T)$ ,  $q = l - 1 + \frac{\gamma+2\alpha}{2}$  (см. [1, гл. 2, § 3], а также теорему 1.5) и условия согласования (11) выполнены при выполнении условий  $\nu^{(s)}(0) = 0$  ( $s = 0, 1, \dots, l-1$ ), что и требовалось.

Удовлетворив условиям склеивания (6) при  $y = 0$ , получим следующую систему уравнений (для  $\alpha \neq 1/2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{1-2\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_t^T \frac{\mu(\tau)}{(\tau-t)^\alpha} d\tau + \Phi_0(t) = & \frac{a}{2^{1-2\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\nu(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau + c\nu(t), \\ \mu(t) + b\nu(t) + \Phi_1(t) = & 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\Phi_0(t) = a\omega_2(0, t) - \omega_1(0, t) - c(D_y\omega_1)(0, t), \quad \Phi_1(t) = D_y(\omega_2 + b\omega_1)(0, t).$$

Исключая  $\mu(t)$  в системе (12), получим уравнение

$$\nu(t) + \int_0^T K(t, \tau) |t-\tau|^{-\alpha} \nu(\tau) d\tau = F_0(t), \quad (13)$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \frac{a}{c \cdot 2^{1-2\alpha} \Gamma(\alpha)} & \text{при } \tau < t, \\ \frac{b}{c \cdot 2^{1-2\alpha} \Gamma(\alpha)} & \text{при } \tau > t, \end{cases}$$

$$F_0(t) = \frac{\Phi_0(t)}{c} - \frac{1}{c \cdot 2^{1-2\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_t^T \frac{\Phi_1(\tau)}{(\tau-t)^\alpha} d\tau$$

принадлежит пространству  $H^q(0, T)$ ,  $q = l - 1 + \frac{\gamma+2\alpha}{2}$ .

Из уравнения (13) следует, что  $\nu(0) = 0$  тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T \frac{K(0, \tau)\nu(\tau)}{\tau^\alpha} d\tau = F_0(0), \quad (14)$$

а из второго уравнения системы (12) — что

$$\mu(T) = 0 \Leftrightarrow b\nu(T) + \Phi_1(T) = 0. \quad (15)$$

Уравнение (13) относительно функции

$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) + \Phi_1(T) \frac{t}{bT}$$

можно переписать так:

$$\tilde{\nu}(t) + \int_0^T K(t, \tau) |t - \tau|^{-\alpha} \tilde{\nu}(\tau) d\tau = \tilde{F}_0(t), \quad (16)$$

где

$$\tilde{F}_0(t) = F_0(t) + \Phi_1(T) \frac{t}{bT} + \frac{\Phi_1(T)}{bT} \int_0^T K(t, \tau) \tau |t - \tau|^{-\alpha} d\tau.$$

Если  $l > 1$ , то возьмем первые производные в уравнении (16). Имеем

$$\nu'(t) + \int_0^T K(t, \tau) |t - \tau|^{-\alpha} \nu'(\tau) d\tau = F_1(t), \quad (17)$$

где  $F_1(t) \in H^{q-1}(0, T)$ .



Таким образом, при выполнении условий

$$\int_0^T \frac{K(0, \tau) \nu^{(s)}(\tau)}{\tau^\alpha} d\tau = F_s(0), \quad b\nu^{(s)}(T) + \Phi_1^{(s)}(T) = 0, \quad s = 1, \dots, l-2, \quad (18)$$

придем к уравнению

$$\nu^{(l-1)}(t) + \int_0^T K(t, \tau) |t - \tau|^{-\alpha} \nu^{(l-1)}(\tau) d\tau = F_{l-1}(t). \quad (19)$$

Из уравнения (19) и из второго уравнения системы (12) следует, что должны выполняться условия

$$\int_0^T \frac{K(0, \tau) \nu^{(l-1)}(\tau)}{\tau^\alpha} d\tau = F_{l-1}(0), \quad b\nu^{(l-1)}(T) + \Phi_1^{(l-1)}(T) = 0, \quad (20)$$

$$s = 1, \dots, l-2.$$

Отметим, что  $F_s(t) \in H^{q-s}(0, T)$ ,  $s = 1, \dots, l-1$ , — известные функции относительно  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Вводя новую искомую функцию

$$\tilde{\nu}^{(l-1)}(t) = \nu^{(l-1)}(t) + \Phi_1^{(l-1)}(T) \frac{t}{bT},$$

получим в конечном итоге интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tilde{\nu}^{(l-1)}(t) + \int_0^T K(t, \tau) |t - \tau|^{-\alpha} \tilde{\nu}^{(l-1)}(\tau) d\tau = \tilde{F}_{l-1}(t), \quad (21)$$

где  $\tilde{F}_{l-1}(t) \in H^{(\gamma+2\alpha)/2}(0, T)$ .

Функция  $\tilde{\nu}^{(l-1)}(t)$  при заданной функции  $\tilde{F}_{l-1}(t)$  из пространства Гёльдера  $H^{(\gamma+2\alpha)/2}(0, T)$  будет (см. [5, с. 176]) удовлетворять условию Гёльдера с показателем  $(\gamma+2\alpha)/2$  во всех точках контура  $[0, T]$ , причем в силу условий (20)

$$\tilde{\nu}^{(l-1)}(0) = \tilde{\nu}^{(l-1)}(T) = 0.$$

Итак, ограниченные и интегрируемые решения уравнения Фредгольма на концах  $0, T$  ведут себя как  $t^{(\gamma+2\alpha)/2}(T-t)^{(\gamma+2\alpha)/2}$  и  $\tilde{\nu}^{(l-1)}(t) \in H^{(\gamma+2\alpha)/2}(0, T)$ .

Уравнение Фредгольма (21) имеет единственное решение. В самом деле, если однородное уравнение (21) имеет нетривиальные решения  $\mu$ , то они будут нетривиальными решениями однородного уравнения (13), т. е. системы (12). Тогда в силу единственности решения исходной задачи (4)–(6) имеем  $\nu \equiv 0$ , что и требовалось.

Согласно общей теории (см. [6–9]), отсюда будет следовать существование решения уравнения Фредгольма (21).

Подставляя найденные по формуле Тейлора значения функций

$$\begin{aligned} \nu^{(s)}(t) = & \sum_{k=s}^{l-2} \frac{(-1)^{k-s+1} \Phi_1^{(k)}(T)}{b(k-s)!} (T-t)^{k-s} \\ & - \frac{(-1)^{l-2-s}}{(l-2-s)!} \int_t^T (\tau-t)^{l-2-s} \nu^{(l-1)}(\tau) d\tau, \\ & s = 0, 1, \dots, l-2, \end{aligned}$$

в условия (14), (15), (18), (20), получим  $2l$  условий разрешимости задачи (4)–(6) в пространстве  $H_k^{p,p/2}$ .

Если эти условия обозначить так:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 2l, \quad (22)$$

то доказана

**Теорема.** Пусть  $\varphi_k(y) \in H_k^p$ ,  $p = 2l + \gamma$  ( $k = 1, 2$ ) и  $ab > 0$ ,  $bc < 0$ . Тогда при выполнении  $2l$  условий (22) существует единственное решение уравнения (1) в  $Q$  из пространства  $H_k^{p,p/2}(Q^\pm)$ , удовлетворяющее условиям (2), (3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

2. *Ророн С. В.* On a boundary value problem for a singular parabolic equation with changing time direction // Мат. заметки ЯГУ. Т. 1, вып. 1. С. 113–128.
3. *Попов С. В., Шахурдин К. А.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 1997. Т. 4, вып. 2. С. 49–56.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
7. *Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М.* О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических систем уравнений // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, N 6. С. 1271–1274.
8. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
9. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.; Л.: ОНТИ, 1934. Т. 3, Ч. 2.

г. Якутск

26 января 2004 г.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ  
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОДГРУПП  
ПРИМАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Ф. М. Федоров

Пусть  $G$  — произвольная  $p$ -примарная абелева группа. Приведем некоторые обозначения, принятые в данной статье:  $H_G(x)$  — высота элемента  $x$  в группе  $G$ ;  $0(x)$  — порядок элемента  $x$ ;  $n(x)$  — экспонента элемента  $x$ ;  $G[p^i] = \{x \mid x \in G, 0(x) \leq p^i, i = 1, 2, \dots\}$ ;  $G[p]$  — нижний слой группы  $G$ ;  $p^i G = \{g \mid g \in G, g = p^i x, x \in G, i \geq 1\}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Элемент  $g \in G$  называется *регулярным элементом*, если  $H_G(p^i g) + 1 = H_G(p^{i+1} g)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n(g) - 2$ , где  $H_G(g) \neq \infty$ . Очевидно, все элементы нижнего слоя группы  $G$  регулярны. Если  $g \in G$  — регулярный элемент, то  $p^i g$  тоже регулярные элементы, где  $i = 1, \dots, n(g) - 1$ , а также если  $H_G(g) = k$ , т. е.  $g = p^k x_1$ , то  $x_1$  также регулярный элемент.

**Лемма 1** [1]. Если элемент  $g$  примарной абелевой группы  $G$  имеет порядок  $p$  и конечную высоту  $n$ , то он содержится в циклическом прямом слагаемом порядка  $p^{n+1}$  группы  $G$ .

**Лемма 2** [2]. Если  $G = F \oplus G' = F' \oplus H$ , где  $F \cong F'$  и  $F$  — конечно-порожденная группа, то  $G' \cong H$ .

**Лемма 3.** Подгруппа  $\{a\} \subset G$ , где  $H_G(a) = 0$ , является прямым слагаемым группы  $G$  тогда и только тогда, когда  $a$  есть регулярный элемент.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $G = \{a\} \oplus G'$ . Ясно, что  $a$  — регулярный элемент группы  $G$ . Пусть теперь  $a$  такой, что  $H_G(p^i a) + 1 =$

$H_G(p^{i+1}a)$ , где  $i = 0, 1, \dots, n(a) - 2$ . Рассмотрим элемент  $c = p^{n(a)-1}a$ ,  $c \in G[p]$ . В силу регулярности и  $H_G(a) = 0$ , следует, что  $H_G(p^{n(a)-1}a) = n(a) - 1$ , т. е.  $H_G(c) = n(a) - 1$ , и, значит, по лемме 1  $G = \{a\} \oplus G'$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 4.** *Для произвольных регулярных элементов  $a, c \in G$  таких, что  $H_G(a) = H_G(c) = l$  и  $0(a) = 0(c)$ , существует автоморфизм  $\varphi$  группы  $G$ , отображающий  $a$  на  $c$ .*

**Доказательство.** Пусть  $a = p^l x_1$  и  $c = p^l x_2$ . Ясно, что если  $a$  и  $c$  — регулярные элементы, то и  $x_1, x_2$  регулярны. Очевидно также, что подгруппы  $\{x_1\}$  и  $\{x_2\}$  изоморфны. Так как  $x_1$  и  $x_2$  имеют высоту нуль в группе, то по лемме 3 подгруппы  $\{x_1\}$  и  $\{x_2\}$  являются прямыми слагаемыми, т. е.  $G = \{x_1\} \oplus G' = \{x_2\} \oplus G''$ . По лемме 2 имеем  $G' = G''$ . Следовательно, существует такой автоморфизм  $\varphi$  группы  $G$ , что  $x_1\varphi = x_2$ . Отсюда

$$\alpha\varphi = (p^l x_1)\varphi = p^l(x_1\varphi) = p^l x_2 = c,$$

что и требовалось доказать.

Хорошо известно [1, 3], что характеристические и сервантные подгруппы обладают многими хорошими свойствами. Например, характеристическая подгруппа играет важную роль в теории групп, хотя бы потому, что она инвариантна относительно всех автоморфизмов группы. Значение сервантных подгрупп заключается в той методологической роли, которую они играют при доказательстве существования прямых слагаемых. Именно, легко устанавливается существование сервантных подгрупп того или иного типа и имеются различные критерии, при выполнении которых некоторые сервантные подгруппы выделяются прямыми слагаемыми [3]. Очевидно, сама группа, а также нулевая подгруппа являются одновременно и характеристической, и сервантной подгруппами. В связи с этим интересен вопрос: при каких условиях собственные подгруппы являются одновременно и характеристическими, и сервантными? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает следующая

**Теорема 1.** Пусть  $S$  — собственная характеристическая подгруппа группы  $G$ . Подгруппа  $S$  сервантна в  $G$  тогда и только тогда, когда она является максимальной полной подгруппой группы  $G$ .

**Доказательство.** **Необходимость.** Пусть  $G$  имеет характеристическую сервантную подгруппу  $0 \neq S \subset G$ . Предположим, что  $S$  — неполная подгруппа. В силу неполноты  $S$  в  $S[p]$  найдется такой элемент  $x$ , что  $H_S(x) = k < \infty$ , т. е. с ограниченной высотой в  $S$ . Тогда в силу сервантности  $S$  имеем  $H_G(x) = k < \infty$ . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что  $k \neq 0$ . Если  $k = 0$ , то  $S[p] = S \cap G[p] = G[p] \subset S$ . Действительно, так как  $S[p]$  характеристична в  $G$ , то по лемме 4  $S[p]$  содержит все элементы нижнего слоя группы  $G$  с нулевой высотой. В частности, элемент  $x + g$ , где  $g$  — произвольный элемент из  $G[p]$  с ненулевой высотой, принадлежит  $S[p]$ , тогда  $g \in S[p]$  и, следовательно,  $G[p] \subset S$ , что невозможно в силу сервантности  $S$ .

Ясно, что существует элемент  $x_1 \in S$  такой, что  $x = p^k x_1$ ,  $H_G(x_1) = 0$  и  $x_1$  — регулярный элемент. Теперь возьмем произвольный элемент  $g \in G[p]$  и рассмотрим элемент

$$y = x_1 + g, \quad H_G(px_1) = 1.$$

Пусть  $H_G(y) = k_1 \neq 0$ . Тогда

$$H_G(py) \leq k_1 + 1 > 1 = H_G(px_1) = H_G[p(x_1 + g)] = H_G(py),$$

т. е.  $H_G(py) > H_G(py)$ . Отсюда следует, что  $H_G(y) = 0$ , т. е.  $H_G(x_1) = H_G(x_1 + g)$ . Но  $0(x_1) = 0(x_1 + g)$  и  $y$  регулярен, а значит, по лемме 4 существует такой автоморфизм группы  $G$ , что  $x_1 \varphi = x_1 + g$ , а так как  $S$  характеристична, то  $x_1 + g \in S$ , откуда  $g \in S$ , или  $G[p] \subset S$ , что невозможно. Следовательно,  $S$  — полная подгруппа. Тогда  $G$  имеет вид  $G = A \oplus S$ . Если  $A$  — не редуцированная группа, то  $G = A' \oplus A'' \oplus S$ , где  $A'$  — редуцированная,  $A''$  — полная группы. Но тогда нетрудно видеть, что существуют такой автоморфизм  $\varphi$  группы  $G$  и элементы  $s \in S$ ,  $a'' \in A''$ , что  $s\varphi = a'' \notin S$ , а это противоречит характеристичности

$S$ , следовательно,  $G = A \oplus S$ , где  $A$  — редуцированная группа. Итак,  $S$  — максимальная полная подгруппа.

**Достаточность.** Пусть  $S$  — максимальная полная собственная подгруппа группы  $G$ . Так как при любом эндоморфизме  $\eta$  группы  $G$  полная подгруппа отображается на полную подгруппу и  $S$  — максимальная полная подгруппа, то  $S\eta \subset S$ . Следовательно,  $S$  вполне характеристична, поэтому  $S$  характеристична в  $G$ , а сервантность  $S$  очевидна, что и требовалось доказать.

**Следствие 1.** *Группа  $G$  имеет собственную характеристическую сервантную подгруппу  $S$  тогда и только тогда, когда она имеет вид  $G = A \oplus S$ , где  $A$  — редуцированная,  $S$  — максимальная полная подгруппы.*

**Следствие 2.** *Редуцированная группа или полная  $G$  не имеет характеристической сервантной собственной подгруппы.*

**Следствие 3.** *Никакое прямое слагаемое редуцированной или полной группы не является ее характеристической подгруппой.*

Из теоремы 1 можно легко вывести следующий полезный результат.

**Теорема 2.** *Всякая примарная абелева группа имеет не более одной собственной характеристической сервантной подгруппы.*

**Доказательство.** Согласно следствию 2 достаточно предположить, что заданная группа  $G$  не является редуцированной или полной группой. В этом случае известно [1], что она разлагается в прямую сумму  $G = A \oplus S$ , где  $A$  — редуцированная подгруппа,  $S$  — максимальная полная подгруппы. Известно также [1], что абелева группа  $G$  может обладать многими прямыми разложениями такого рода, однако всегда их полные слагаемые совпадают, а редуцированные слагаемые между собою изоморфны, т. е.  $S$  — единственная подгруппа группы  $G$ . По теореме 1  $S$  является характеристической сервантной подгруппой группы  $G$ , что и требовалось доказать.

*ЛИТЕРАТУРА*

1. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
2. Walker E. Cancellation in direct sums of groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7. P. 898–902.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.

г. Якутск

12 января 2004 г.



ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ  
ВОССТАНОВЛЕНИЯ  
ФУНКЦИИ ТЕПЛОЫДЕЛЕНИЯ  
В ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ  
ПО ТЕМПЕРАТУРНЫМ ДАННЫМ  
А. С. Кондаков, Н. П. Старостин

Особенностью граничных обратных задач, к которым относится задача определения функции интенсивности тепловыделения и соответственно момента силы трения по температурной информации, является неустойчивость их решения к малым погрешностям в исходных данных. Малым погрешностям в экспериментальных температурных данных могут соответствовать сколь угодно большие отклонения искомого решения от точных значений, даже в то время, когда функционал невязки будет стремиться к нулю. Поэтому для решения подобных задач используются методы регуляризации. В работе [1] разработан и экспериментально проверен метод тепловой диагностики трения в подшипнике скольжения в линейной постановке, в которой теплофизические характеристики элементов подшипника не зависят от температуры. В данной работе предлагается развитие метода тепловой диагностики трения на нелинейный случай.

Схема подшипника представлена на рис. 1. Скольжение происходит по поверхности контакта элементов 1 и 2, втулка жестко соединена с обоймой подшипника. Вал 1 и обойма 3 выполнены из металла, а втулка — из полимерного композиционного материала.

При известной функции интенсивности тепловыделения  $Q(t)$  прямая задача состоит в определении температурного поля в подшипнике

Рис. 1. Схема узла трения: 1 — вал; 2 — втулка; 3 — обойма.

скольжения из двумерного квазилинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах [2, 3]:

$$C_i(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_i(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda_i(T) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right), \quad i = 2, 3; \quad (1)$$

$$r_2 < r < r_3, \quad r_3 < r < r_4, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < t \leq t_m,$$

с начальным условием  $T(r, \varphi, 0) = T_0$  и условием теплового баланса в зоне трения с сосредоточенным источником тепла, сосредоточенной теплоемкостью с высокой теплопроводностью и теплообменом с окру-

жающей средой по закону Ньютона:

$$S_1 C_1(U) \frac{dU(t)}{dt} + 2(\pi - \varphi_0) r_1 \alpha_1 (U(t) - T_{\text{ср}}) = Q(t) + 2r_2 \int_0^{\varphi_0} \lambda_2(T) \frac{\partial T(r, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=r_2} d\varphi, \quad (2)$$

$$T(r_2, \varphi, t) = U(t), \quad (3)$$

где  $C_2(T)$ ,  $C_3(T)$  — объемные теплоемкости;  $\lambda_2(T)$ ,  $\lambda_3(T)$  — коэффициенты теплопроводности втулки и обоймы соответственно;  $r_1$ ,  $S_1$ ,  $U$ ,  $C_1(U)$ ,  $\alpha_1$  — радиус, площадь поперечного сечения, температура, объемная теплоемкость, коэффициент конвективного теплообмена вала соответственно;  $\varphi_0$  — полуугол контакта;  $T_{\text{ср}}$  — температура среды.

На границе полимерной втулки и металлической обоймы контакт считается идеальным, на свободных поверхностях элементов подшипника выполняются обычные условия теплообмена с окружающей средой, по оси приложения нагрузки выполняется условие симметрии.

Предположим, что функция  $Q(t)$  неизвестна. Граничная обратная задача восстановления момента силы трения формулируется следующим образом: требуется определить функцию интенсивности тепловыделения  $Q(t)$  и момент силы трения  $M(t)$ , связанные формулой  $M(t) = Q(t)r_1/V$ , и соответствующее распределение температуры  $T(r, \varphi, t)$  из системы уравнений (1)–(3) с начальным и граничными условиями при известной дополнительной информации об измеренных значениях температуры в точках, расположенных по окружности с радиусом  $R$ :

$$f(\varphi_j, t), \quad r_2 < R < r_3, \quad 0 < \varphi_j \leq \varphi_0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Задача решается в экстремальной постановке методом итерационной регуляризации, предложенной в работе [4]. В качестве меры отклонения рассчитанных и измеренных температур выберем среднеквадратичную невязку

$$J[Q] = \sum_{j=1}^N \int_0^{t_m} [T(R, \varphi_j, t) - f(\varphi_j, t)]^2 dt. \quad (4)$$

Согласно методу итерационной регуляризации на каждой итерации необходимо решить три краевые задачи: температурную, сопряженную и для приращения температуры. В работах [2, 3] нами выполнены соответствующие выкладки и получены краевые задачи и формула для определения градиента функционала (4).

Минимизацию функционала (4) с использованием метода сопряженных градиентов можно представить следующей цепочкой:

$$Q^n(t) \rightarrow T(r, \varphi, t) \rightarrow \Psi(r, \varphi, t) \rightarrow J'(Q^n) \rightarrow \gamma_n \\ \rightarrow S^n(t) \rightarrow \bar{v}(r, \varphi, t) \rightarrow \beta_n \rightarrow Q^{n+1}(t),$$

где  $\Psi(r, \varphi, t)$  — решение сопряженной задачи;  $J'(Q^n)$  — градиент функционала (4);  $\bar{v}(r, \varphi, t)$  — решение задачи в приращениях температуры.

Последовательные приближения на каждой итерации имеют вид

$$Q^{n+1}(t) = Q^n(t) - \beta_n S^n(t), \quad n = 0, 1, \dots, \\ S^n(t) = J'(Q^n) + \gamma_n S^{n-1}(t), \quad \gamma_0 = 0, \\ \beta_n = \frac{\sum_{j=1}^N \int_0^{t_m} [T(R, \varphi_j, t) - f(\varphi_j t)] \bar{v}(R, \varphi_j, t) dt}{\sum_{j=1}^N \int_0^{t_m} \bar{v}^2(R, \varphi_j, t) dt}, \quad \gamma_n = \frac{\int_0^{t_m} [\Psi^n(t)]^2 dt}{\int_0^{t_m} [\Psi^{n-1}(t)]^2 dt}.$$

Начальное приближение  $Q^0(t)$  задается, а на каждом шаге при решении задачи в приращениях вместо  $\Delta Q(t)$  ставится  $S^n(t)$ .

При реализации алгоритма решения граничной обратной задачи краевые задачи решались численно методом конечных разностей. Поскольку уравнения в краевых задачах (прямой, сопряженной и в приращениях) не имеют принципиальных отличий, приведем основные соотношения алгоритма определения температуры в подшипнике скольжения при предположении, что приближение функции интенсивности тепловыделения  $Q^n(t)$  известно.

Примем общепринятые обозначения сеточных функций теории раз-

ностных схем [5]. Выберем неравномерную сетку  $\omega_h \times \omega_\theta \times \omega_\tau$ :

$$\omega_h = \{x_{i+1} = x_i + h_{i+1}, i = \overline{0, N_2 - 1}, \\ x_0 = r_2, x_{N_1} = r_3, x_{N_2} = r_4, N_1 < N_2\},$$

$$\omega_\theta = \{y_{j+1} = y_j + \theta_{j+1}, i = \overline{0, M_2 - 1}, \\ \gamma_0 = 0, y_{M_1} = \varphi_0, y_{M_2} = \pi, M_1 < M_2\},$$

$$\omega_\tau = \{t_{k+1} = t_k + \tau_{k+1}, k = \overline{0, m}, \dots, t_0 = 0\}$$

с переменными шагами  $h_i, i = \overline{1, N_2}; \theta_j, j = \overline{1, M_2}; \tau_k, k = \overline{1, m}$ , соответственно. Поскольку температурная краевая задача нелинейна, применяем метод итераций [5]. Во внутренних точках запишем неявные относительно верхних итераций локально-одномерные разностные схемы сквозного счета по радиусу и по углу:

$$C(x_i, \tilde{T}_{i,j}^s) \frac{\tilde{T}_{i,j}^{s+1} - T_{i,j}^k}{\tau_k} = \frac{1}{x_i \bar{h}_i} \left[ x_{i+1/2} \frac{\lambda(x_{i+1}, \tilde{T}_{i+1,j}^s) + \lambda(x_i, \tilde{T}_{i,j}^s)}{2} \right. \\ \left. \times \frac{\tilde{T}_{i+1,j}^{s+1} - \tilde{T}_{i,j}^{s+1}}{h_{i+1}} - x_{i-1/2} \frac{\lambda(x_i, \tilde{T}_{i,j}^s) + \lambda(x_{i-1}, \tilde{T}_{i-1,j}^s)}{2} \cdot \frac{\tilde{T}_{i,j}^{s+1} - \tilde{T}_{i-1,j}^{s+1}}{h_i} \right], \quad (5)$$

$$C(x_i, T_{i,j}^{k+1,s}) \frac{T_{i,j}^{k+1,s+1} - \tilde{T}_{i,j}^{s+1}}{\tau_k} = \frac{1}{x_i^2 \bar{\theta}_j} \left[ \frac{\lambda(x_i, T_{i,j+1}^{k+1,s}) + \lambda(x_i, T_{i,j}^{k+1,s})}{2} \right. \\ \left. \times \frac{T_{i,j+1}^{k+1,s+1} - T_{i,j}^{k+1,s+1}}{\theta_{j+1}} \right. \\ \left. - \frac{\lambda(x_i, T_{i,j}^{k+1,s}) + \lambda(x_i, T_{i,j-1}^{k+1,s})}{2} \cdot \frac{T_{i,j}^{k+1,s+1} - T_{i,j-1}^{k+1,s+1}}{\theta_j} \right], \quad (6)$$

где

$$x_{i-1/2} = x_i - h_i/2, \quad x_{i+1/2} = x_i + h_i/2, \\ \bar{h}_i = (h_i + h_{i+1})/2, \quad \bar{\theta}_j = (\theta_j + \theta_{j+1})/2,$$

$T_{i,j}^k$  — температура в точке  $(x_i, y_j)$  на нижнем временном слое,  $T_{i,j}^{k+1,s+1}$  — последовательные приближения температуры на верхнем временном

слое,  $\tilde{T}_{i,j}^{s+1}$  — вспомогательная функция, связывающая счет по переменным направлениям. Теплофизические характеристики  $C(T)$ ,  $\lambda(T)$  записаны зависящими от радиуса, так как принята сквозная по радиусу схема счета, для которой условия идеального теплового контакта втулки с облойкой на радиусе  $r_3$  выполняются автоматически. Относительно  $\tilde{T}_{i,j}^{s+1}$ ,  $T_{i,j}^{k+1,s+1}$  эти уравнения оказываются линейными. В качестве начальной итерации берется функция температуры предыдущего шага по времени:  $\tilde{T}_{i,j}^0 = T_{i,j}^{k+1,0} = T_{i,j}^k$ . Итерации прекращаются по условию сходимости:

$$\max_{i,j} |T_{i,j}^{k+1,s+1} - T_{i,j}^{k+1,s}| \leq \varepsilon.$$

Разностный аналог условия теплового контакта втулки с валом в зоне  $|\varphi| \leq \varphi_0$  записывается для вспомогательной функции  $\tilde{T}_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} S_1 C_1(\tilde{U}) \frac{\tilde{U} - U_k}{\tau_k} + 2(\pi - \varphi_0) r_1 \alpha_1 (\tilde{U} - T_{\text{ср}}) \\ = Q^k + 2r_2 \int_0^{\varphi_0} \lambda(x_0, \tilde{T}_{0,j}) \frac{\tilde{T}_{1,j} - \tilde{T}_{0,j}}{h_1} d\varphi, \quad j = \overline{0, M_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\tilde{T}_{0,j} = \tilde{U}, \quad j = \overline{0, M_1}, \quad (8)$$

где  $U^k$  — температура вала на нижнем временном слое,  $\tilde{U}$  — вспомогательная функция для температуры вала,  $Q^k$  — функция интенсивности тепловыделения в момент времени  $t_k$ .

На каждой итерации граничные условия на свободных поверхностях втулки и облойки позволяют эффективно использовать метод прогонки. Зная распределение температуры  $T_{i,j}^k$  на нижнем временном слое, из уравнения (5) получаем рекуррентное соотношение для вспомогательной функции  $\tilde{T}_{i,j}$ :

$$\tilde{T}_{i+1,j} = \xi_{i+1,j} \tilde{T}_{i,j} + \eta_{i+1,j}, \quad (9)$$

в котором прогоночные коэффициенты  $\xi_{i+1,j}$ ,  $\eta_{i+1,j}$  определяются из граничных условий для всех  $i, j$ .

Из рекуррентного соотношения (9) с учетом (8) определяем

$$\tilde{T}_{1,j} = \xi_{1,j} \tilde{T}_{0,j} + \eta_{1,j} = \xi_{1,j} \tilde{U} + \eta_{1,j}, \quad j = \overline{0, M_1}, \quad (10)$$

и, подставив ее в (7), получаем уравнение для определения функции  $\tilde{U}$ :

$$\begin{aligned} & S_1 C_1 (\tilde{U}) \frac{\tilde{U} - U^k}{\tau_k} + 2(\pi - \varphi_0) r_1 \alpha_1 (\tilde{U} - T_{cp}) \\ & = Q^k + 2 \frac{r_2}{h_1} \int_0^{\varphi_0} \left\{ \frac{\lambda(x_{1/2}, \xi_{1,j} \tilde{U} + \eta_{1,j}) + \lambda(x_{1/2}, \tilde{U})}{2} [(\xi_{1,j} - 1) \tilde{U} + \eta_{1,j}] \right\} d\varphi, \\ & \qquad \qquad \qquad j = \overline{0, M_1}. \quad (11) \end{aligned}$$

В соотношениях (7) и (11) интегральные выражения присутствуют для простоты записей. На самом деле они замещают квадратурные формулы, использующие соответствующие узловые точки сетки.

Определив из (11)  $\tilde{U}$ , из (10) получаем значения  $\tilde{T}_{0,j}$  при  $j = \overline{0, M_1}$ . Остальные значения  $\tilde{T}_{0,j}$  при  $j = \overline{M_1 + 1, M_2}$  определяем из граничного условия на внутренней поверхности втулки, свободной от контакта с валом.

Эффективность алгоритма решения обратной задачи проверялась вычислительными экспериментами. Модельная задача строилась следующим образом. Задавалась функция  $Q(t)$  и определялось решение  $f(\varphi, t)$  прямой задачи при фиксированном радиусе  $R$  ( $r_2 < R < r_3$ ) в окрестности зоны трения. В дальнейшем эта функция будет использована в качестве точных исходных данных при решении обратной задачи. Полагая интенсивность тепловыделения в зоне фрикционного контакта неизвестной, функция  $Q(t)$  восстанавливалась при использовании температурных данных  $f(\varphi_j, t)$ ,  $0 \leq \varphi_j \leq \varphi_0$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Все расчеты проводились при следующих геометрических размерах:  $r_1 = 0,012$ ;  $r_2 = 0,013$ ;  $r_3 = 0,016$ ;  $r_4 = 0,032$  м;  $\varphi_0 = 12^\circ$ . Втулка в подшипнике выполнена из наполненного фторопласта, для которого зависимости теплофизических свойств от температуры имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 0,07(T - 100)/150 + 0,35 \text{ (Вт/м} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}, \\ C_2 &= (6 \cdot 10^{-3}(T - 30) + 3) \cdot 10^6 \text{ (Дж/м}^3 \cdot \text{ }^\circ\text{C)}. \end{aligned}$$

Материалом для вала и обоймы служит сталь:

$$\lambda_1 = 30,5(T - 100)/150 + 55,5 \text{ (Вт/м} \cdot \text{°C)},$$

$$C_1 = [1,2 \cdot 10^{-3}(T - 30) + 3,7] \cdot 10^6 \text{ (Дж/м}^3 \cdot \text{°C)}.$$

Температурные данные задавались при  $R = 0,0136$  м,  $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ , в узлах сетки. Результаты расчетов с использованием различного количества точек задания температуры показали, что для качественного восстановления функции интенсивности тепловыделения достаточно задания одной функции температуры в точке, расположенной по оси приложения нагрузки ( $\varphi = 0$ ). Далее все расчеты проводились с использованием температурных данных в одной точке.

Результаты расчетов при точных исходных данных показали, что алгоритм устойчив к ошибкам, связанным с реализацией вычислительных алгоритмов на ПЭВМ, что позволяет в этом случае прекращать итерационный процесс по обычному условию, например

$$\max_t |Q^{k+1}(t) - Q^k(t)| < \varepsilon. \quad (12)$$

В практических приложениях интерес представляет, как влияет часто применяемое усреднение теплофизических свойств на качество восстановления функции тепловыделения. На рис. 2 представлено сравнение функций интенсивности тепловыделения, восстановленных с использованием усредненных (постоянных) теплофизических свойств и восстановленных с учетом их зависимости от температуры. При этом использовались одинаковые температурные данные, соответствующие нелинейной задаче.

Расчеты показали, что в случае изменения теплофизических свойств фторопласта до 12 процентов в исследуемом диапазоне температур (от 20 до 150°С), усреднение приводит к заметному отклонению результатов расчета от точного решения. Усреднение теплофизических свойств стали, из которой изготовлены вал и обойма, незначительно влияет на точность восстановления функции  $Q(t)$ , что объясняется



Рис. 2. Влияние усреднения теплофизических свойств на восстановление функции интенсивности тепловыделения  $Q(t)$ . 1 — искомая функция  $Q(t)$ , 2–5 — восстановленные  $Q(t)$ : 2 — с учетом зависимости теплофизических свойств от температуры; 3 — при усредненных теплофизических свойствах; 4 — при усреднении только свойств материала втулки; 5 — при усреднении только свойств вала и обоймы; 6 — температура в точке замера.

меньшим относительным изменением (до 2 процентов) теплофизических свойств стали в указанном диапазоне температур. Так как значение градиента при  $t = t_m$  равно нулю, на конце временного интервала искомая функция  $Q(t)$  не уточняется (стягивается к начальному при-

ближению), что искажает качество восстановления в окрестности этой точки. Поэтому значения искомой функции на конце временного промежутка, соответствующие нескольким шагам по времени, могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения.

В реальном эксперименте температурные данные имеют погрешности, т. е. функция  $f(0, t)$  включает в себя кроме точной части  $\bar{f}(0, t)$  еще и составляющую ошибки  $\delta_T = \delta f(0, t)$ :

$$f(0, t) = \bar{f}(0, t) + \delta_T. \quad (13)$$

Для исследования влияния различных ошибок в исходных данных на решение граничной обратной задачи погрешности имитировались с помощью датчика случайных чисел с различными законами распределения и накладывались на точные температурные зависимости. Решение модельных задач показали, что начиная с некоторого номера приближения функции интенсивности тепловыделения  $Q(t)$  отклоняются от искомого решения путем подгонки под возмущенные значения температуры. При больших номерах итерации приближенное решение имеет сильно осциллирующий характер, что является естественным для итерационных решений некорректных задач, к которым относятся граничные обратные задачи. В связи с этим процесс уточнения приближенного решения завершался по условию итерационной регуляризации при согласовании значений невязки с количественной характеристикой погрешности температурных данных, т. е. при выполнении условия [4]

$$J[Q(t)] \leq \delta_T^2, \quad \delta_T^2 = \int_0^{t_m} \sigma^2(t) dt, \quad (14)$$

где  $\sigma^2(t)$  — дисперсия функции  $f(0, t)$ . Предполагается, что ошибка аппроксимации краевой задачи  $\delta_a \ll \delta_T$ . На рис. 3 решение граничной обратной задачи получено при погрешности, распределенной по нормальному закону с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием и составляющей 5 процентов от максимальной температуры

Рис. 3. Восстановление функции интенсивности тепловыделения  $Q(t)$  по возмущенным температурным данным: 1 — искомая функция  $Q(t)$ ; 2 — точные температурные данные; 3 — восстановленная функция  $Q(t)$  по точным температурным данным; 4 — возмущенные температурные данные; 5 — восстановленная функция  $Q(t)$  по возмущенным температурным данным.

с учетом условия останова (14). Восстанавливалась функция интенсивности тепловыделения, характерная для зависимости от времени момента силы трения в подшипнике скольжения при постоянных значениях нагрузки и скорости скольжения. Шаг по времени — 1 минута. Точность восстановления интенсивности тепловыделения пригодна для

практического определения момента силы трения в подшипнике скольжения.

Затраты машинного времени на решение нелинейной многомерной задачи для реализации предлагаемого метода тепловой диагностики трения составляют несколько минут. В связи с этим метод может быть использован периодически наряду с непрерывными оперативными методами диагностики и контроля технического состояния для уточнения правильности принятия решения о работоспособности узла трения. Для включения метода тепловой диагностики в процесс непрерывной работы узла трения требуется также определить распределения температуры в некоторый момент времени, начиная с которого проводятся замеры температур. В настоящее время недостаточно разработаны методы решения гранично-ретроспективных обратных задач одновременного восстановления граничного и начального условий. Имеются лишь отдельные работы по решению подобных задач в одномерном случае, например [6]. В связи с этим необходимо приближенно задать распределение температуры в момент времени, который считается начальным, и исследовать возможность восстановления функции интенсивности тепловыделения в случае приближенного задания начального условия.

Самый естественный способ заключается в приближенном задании начального распределения температуры в узле трения, исходя из значений измеренных температур в одной или нескольких точках. Для проверки возможности такого восстановления функции интенсивности тепловыделения были проведены вычислительные эксперименты. Модельная задача строилась в два этапа следующим образом. На первом этапе при известном начальном условии  $T(r, \varphi, 0) = 20^\circ\text{C}$  задавалась функция интенсивности  $Q(t)$  и решалась прямая задача на некотором временном интервале (например, от 0 до 10 минут). Распределение температуры в подшипнике скольжения в момент времени 10 минут запоминалось и использовалось в качестве неоднородного начального условия на втором этапе.

На втором этапе задавались значения функции  $Q(t)$  на интервале времени  $[10, t_m]$  и решалась прямая задача с неоднородным начальным условием, полученным на первом этапе. Значения температуры в точке  $(R, 0)$ , полученные в результате решения прямой задачи, и имитировали точные «экспериментальные» данные. Затем полагали функцию  $Q(t)$  неизвестной и восстанавливали на интервале времени  $[10, t_m]$  по «экспериментальной» температурной информации. Таким образом имитировалось включение термодвигателя для замера температур в непрерывно работающем узле трения в некоторый начальный момент времени. Для удобства интерпретации и расчета время было смещено на 10 минут и за начальное время снова бралось  $t = 0$ .

Начальное условие задавали различными способами. Результаты расчетов, представленные на рис. 4, показывают существенную зависимость качества восстановления от способа задания начального условия. В случае задания температуры во всех точках узла трения в начальный момент времени равным значению температуры в точке замера температуры  $(R, 0)$  при  $t = 0$ , когда началась регистрация температуры, значения восстановленной функции интенсивности тепловыделения (кривая 2) получаются ниже искомого практически на всем временном интервале испытаний. Это вполне правомерно и объяснимо. В данном случае значения температуры в начальный момент времени  $T(r, \varphi, 0) = 71^\circ\text{C}$  задавались выше действительного для большей части объекта исследования, и в дальнейшем для получения заданной температуры в точке замера необходимо затратить меньшее количество тепла. Это подтверждается заданием начального условия равным  $20^\circ\text{C}$  во всех точках. Заданные значения температуры в начальный момент времени ниже действительных значений, чем в первом случае. Значения восстановленной функции (кривая 3) находятся выше соответствующих значений функции тепловыделения для предыдущего случая (кривая 2), что подтверждает необходимость затратить больше тепловой энергии для получения заданной температуры.

Если имеются дополнительные замеры температур еще в двух раз-

Рис. 4. Восстановление функции интенсивности тепловыделения  $Q(t)$  при приближенном задании начального условия  $T(r, \varphi, 0)$ : 1 — задаваемая функция  $Q(t)$ ; 2 — восстановленная  $Q(t)$  при  $T(r, \varphi, 0) = 71^\circ\text{C}$ ; 3 — восстановленная  $Q(t)$  при  $T(r, \varphi, 0) = 20^\circ\text{C}$ ; 4 — восстановленная  $Q(t)$  при линейной аппроксимации  $T(r, \varphi, 0)$ .

личных достаточно удаленных точках, то начальное распределение может быть задано с помощью линейной аппроксимации. В этом случае восстановленное значение интенсивности тепловыделения наиболее близко к искомому (кривая 4).

Для рассмотренных трех случаев задания начального условия характерно значительное отклонение восстановленных функций от ис-

комых на первых 10 минутах, однако после 30 минут эти отклонения уменьшаются до допустимых для практического использования.

Предлагаемый алгоритм восстановления момента силы трения по температурным данным с учетом зависимости теплофизических свойств от температуры может быть использован для тепловой диагностики трения в реальных узлах трения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Старостин Н. П., Тихонов А. Г., Мороз В. А., Кондаков А. С. Расчет триботехнических параметров в опорах скольжения. Якутск: Изд-во ЯНЦ СО РАН, 1999.
2. Кондаков А. С. Идентификация мощности трения в подшипниках скольжения по температурным данным с учетом нелинейности теплофизических характеристик // Мат. заметки ЯГУ. 1999. Т. 6, N 2. С. 113–120
3. Старостин Н. П., Кондаков А. С. Тепловая диагностика трения в цилиндрических сопряжениях. I. Алгоритм итерационного решения граничной обратной задачи // ИФЖ. 2001. Т. 74, N 2. С. 13–17.
4. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
6. Алифанов О. М., Геджадзе И. Ю. Об одном методе оперативной идентификации тепловых нагрузок // ИФЖ. 1998. Т. 7, N 1. С. 30–40

г. Якутск

20 октября 2003 г.

## МЕТОД ПРЫЖКОВОГО ПЕРЕНОСА ДЛЯ ЗАДАЧИ БАКЛЕЯ — ЛЕВЕРЕТТА

М. Н. Павлов

В первом приближении в качестве математической модели процесса вытеснения нефти водой используется так называемая задача Баклея — Леверетта [1]. Она основана на уравнениях неразрывности для каждой из движущихся несжимаемых фаз в недеформируемой пористой среде и построена без учета действия капиллярных сил. Здесь в качестве уравнения движения используется обобщенный закон Дарси, основанный на введении понятия относительной фазовой проницаемости. Уравнение Баклея — Леверетта относится к классу квазилинейных гиперболических уравнений первого порядка. Рассмотрим классическую задачу Баклея — Леверетта о заводнении:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial s}{\partial t} + Q \frac{\partial \varphi(s)}{\partial x} &= 0, \quad 0 < t \leq \bar{t}, \quad 0 < x \leq l, \\ s(x, 0) &= s_0 \leq \underline{s}, \quad 0 < x \leq l, \\ s(l, t) &= \bar{s}, \quad 0 < t \leq \bar{t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m$  — пористость среды;  $s$  — насыщенность порового пространства вытесняющей жидкости (водой);  $\varphi(s)$  — функция Баклея — Леверетта, выражающая долю вытесняющей жидкости в общем потоке. Для решения данной задачи используется метод прыжкового переноса. Трудность заключается в том, что функция  $\varphi(s)$  является невыпуклой. На расчетной сетке определим два типа дискретных переменных: так называемые «консервативные» переменные  $S_{i-1/2}^n$ , относящиеся к серединам горизонтальных граней пространственно-временных ячеек, и



так называемые «потокосые» («виртуальные») переменные  $s_i^n$ , относящиеся к узлам этой сетки. Начальные значения потокосых переменных определим как

$$s_i^n = s_0; \quad x_i = x_{i-1} + h_{i-1/2}; \quad x_1 = 0.$$

Соотношения между консервативными и потокосыми переменными на начальном временном слое должны удовлетворять соотношению

$$S_{i-1/2}^1 = \frac{s_i^1 + s_{i-1}^1}{2}.$$

Вычисление предварительных значений консервативных переменных на новом временном слое всегда осуществляется по формулам

$$\tilde{S}_{i-1/2}^{n+1} = S_{i-1/2}^n - \frac{\tau}{h_{i-1/2}} (\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n).$$

Из принципа максимума следует, что для новых значений консервативных величин всегда должно выполняться неравенство

$$s_{i-1/2}^- \leq S_{i-1/2}^{n+1} \leq s_{i-1/2}^+;$$

$$s_{i-1/2}^- = \min(s_i^n, s_{i-1}^n); \quad s_{i-1/2}^+ = \max(s_i^n, s_{i-1}^n).$$

Если величины  $\tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}$  выходят за указанные пределы, то они должны подвергнуться корректировке:

$$S_{i-1/2}^{n+1} = \begin{cases} s_{i-1/2}^-, & \text{если } \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1} < s_{i-1/2}^-, \\ s_{i-1/2}^+, & \text{если } \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1} > s_{i-1/2}^+. \end{cases}$$

При  $s_i^n \neq s_{i-1}^n$  внутри каждой ячейки находится сильный разрыв, значения искомой функции по разные стороны определяются значениями соответствующих виртуальных величин в левом и правом граничных узлах. Скорость перемещения такого разрыва определяется соотношением Гюгонно и равна

$$D_{i-1/2} = \frac{\varphi(s_i^n) - \varphi(s_{i-1}^n)}{s_i^n - s_{i-1}^n}.$$

Разрыв будет устойчивым, если скорость звука за разрывом будет больше, а перед разрывом меньше скорости его распространения:

$$\varphi'(s_{i-1}^n) \geq D_{i-1/2} \geq \varphi'(s_i^n). \quad (2)$$

Устойчивый разрыв соответствует «ударной волне». При обратном соотношении скоростей разрыва и звука по обе стороны разрыва, т. е. при условии

$$\varphi'(s_{i-1}^n) < D_{i-1/2} < \varphi'(s_i^n), \quad (3)$$

разрыв будет расползаться в волну разрежения. Для выпуклых (вогнутых) функций конвективных потоков всегда будет реализовываться одна из этих ситуаций. Для невыпуклой функции возможны и другие комбинации соответствующих неравенств:

$$\varphi'(s_{i-1}^n) < D_{i-1/2} \geq \varphi'(s_i^n), \quad (4)$$

$$\varphi'(s_{i-1}^n) \geq D_{i-1/2} < \varphi'(s_i^n). \quad (5)$$

Для каждого из этих случаев используется свой алгоритм вычисления новых значений виртуальных переменных.

Вначале виртуальным (потокowym) величинам на новом временном слое присваиваются их значения с текущего временного слоя. Если в процессе последующих действий новое значение виртуальной переменной не будет определено, то оно окажется равным соответствующей величине с текущего временного слоя. Затем для каждой ячейки вычисляются так называемые «барьерные значения» виртуальных переменных:

$$s_{i-1/2}^+ = \max(s_i^n, s_{i-1}^n), \quad s_{i-1/2}^- = \min(s_i^n, s_{i-1}^n), \quad (6)$$

а также «экстраполянты»:

$$\tilde{s}_{iend}^{n+1} = 2 * s_{i-1/2}^{n+1} - s_{ibegin}^n, \quad (7)$$

где «опорные индексы»  $ibegin$  и  $iend$  принимают значения  $i$  и  $i - 1$  в зависимости от направленности потоков и временной динамики консервативной переменной  $\Delta S_{i-1/2}^n = \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1} - S_{i-1/2}^{n+1}$  в соответствии с

алгоритмом

если  $(\Delta S_{i-1/2}^n = 0) \ \& \ (c_i^n > 0)$ , то  $ibegin = i - 1$ ;  $iend = i$ ;  
 если  $(\Delta S_{i-1/2}^n = 0) \ \& \ (c_i^n < 0)$ , то  $ibegin = i$ ;  $iend = i - 1$ ;  
 если  $(\Delta S_{i-1/2}^n > 0) \ \& \ (s_{i-1}^n = s_{i-1/2}^+)$ , то  $ibegin = i - 1$ ;  $iend = i$ ;  
 если  $(\Delta S_{i-1/2}^n > 0) \ \& \ (s_i^n = s_{i-1/2}^+)$ , то  $ibegin = i$ ;  $iend = i - 1$ ;  
 если  $(\Delta S_{i-1/2}^n < 0) \ \& \ (s_{i-1}^n = s_{i-1/2}^-)$ , то  $ibegin = i - 1$ ;  $iend = i$ ;  
 если  $(\Delta S_{i-1/2}^n < 0) \ \& \ (s_i^n = s_{i-1/2}^-)$ , то  $ibegin = i$ ;  $iend = i - 1$ .

После установления опорных индексов вычисляются значения виртуальных (поточковых) переменных на новом временном слое с учетом анализа устойчивости разрывов. Рассмотрим каждый из ранее описанных случаев отдельно.

(А) Для ячейки выполняются неравенство (2), что отвечает условиям существования устойчивого разрыва. В этом случае реализуется алгоритм прыжкового переноса:

$$s_{iend}^{n+1} = \begin{cases} s_{i-1/2}^+, & \text{если } \tilde{s}_{iend}^{n+1} \geq s_{i-1/2}^+, \\ s_{i-1/2}^-, & \text{если } \tilde{s}_{iend}^{n+1} \leq s_{i-1/2}^-, \\ s_{iend}^n, & \text{если } s_{i-1/2}^- < \tilde{s}_{iend}^{n+1} < s_{i-1/2}^+. \end{cases} \quad (8)$$

(В) Для ячейки выполняются неравенства (3), что соответствует волне разрежения. Новое значение виртуальной переменной, если оно не приводит к нарушению принципа максимума, находится по схеме «Кабаре» [2], т. е.

$$s_{iend}^{n+1} = \begin{cases} s_{i-1/2}^+, & \text{если } \tilde{s}_{iend}^{n+1} \geq s_{i-1/2}^+, \\ s_{i-1/2}^-, & \text{если } \tilde{s}_{iend}^{n+1} \leq s_{i-1/2}^-, \\ s_{iend}^{n+1}, & \text{если } s_{i-1/2}^- < \tilde{s}_{iend}^{n+1} < s_{i-1/2}^+. \end{cases} \quad (9)$$

Выражение (9) обеспечивает второй порядок аппроксимации на волнах разрежения. Иногда бывает полезно использовать аппроксимацию «вниз по потоку», имеющую первый порядок. В этом случае нужно

положить

$$s_{\text{iend}}^{n+1} = \begin{cases} s_{i-1/2}^+, & \text{если } \tilde{s}_{\text{iend}}^{n+1} \geq s_{i-1/2}^+, \\ s_{i-1/2}^-, & \text{если } \tilde{s}_{\text{iend}}^{n+1} \leq s_{i-1/2}^-, \\ \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}, & \text{если } s_{i-1/2}^- < \tilde{s}_{\text{iend}}^{n+1} < s_{i-1/2}^+. \end{cases}$$

Оба этих случая можно объединить в один, введя параметр  $\omega \in [0, 1]$ :

$$s_{\text{iend}}^{n+1} = \begin{cases} s_{i-1/2}^+, & \text{если } \tilde{s}_{\text{iend}}^{n+1} \geq s_{i-1/2}^+, \\ s_{i-1/2}^-, & \text{если } \tilde{s}_{\text{iend}}^{n+1} \leq s_{i-1/2}^-, \\ \omega * s_{\text{iend}}^n + (1 - \omega)\tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}, & \text{если } s_{i-1/2}^- < \tilde{s}_{\text{iend}}^{n+1} < s_{i-1/2}^+. \end{cases}$$

(С) Для ячейки выполняется одно из соотношений (4) или (5).

Как отмечалось ранее, это возможно только для невыпуклых функций. В этом случае при принятой дискретизации переменных можно предположить, что в ячейке одновременно присутствуют два разрыва: правый и левый, скорости распространения которых определяются соответственно выражениями

$$D_r = \frac{\varphi(s_i^n) - \varphi(\tilde{S}_{i-1/2}^{n+1})}{s_i^n - \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}}, \quad (10)$$

$$D_l = \frac{\varphi(s_{i-1}^n) - \varphi(\tilde{S}_{i-1/2}^{n+1})}{s_{i-1}^n - \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}}. \quad (11)$$

Нас будет интересовать только тот из этих разрывов, который примыкает к узлу расчетной сетки с номером  $\text{iend}$ , поскольку именно в этом узле нам необходимо вычислить новое значение виртуальной переменной. Можно провести описанную ранее процедуру анализа устойчивости этого разрыва и выяснить, будет ли он представлять собой ударную волну, волну разрежения или снова какой-то их конгломерат. В зависимости от результатов этого анализа следует снова применить тот или иной из описанных выше алгоритмов.

1. Предположим, что соответствующий разрыв является ударной волной. Используем для половины ячейки, примыкающий к узлу с

номером  $i_{\text{end}}$ , описанную ранее процедуру, в которой следует положить  $s_{i_{\text{begin}}}^n = \tilde{S}_{i-3/2}^{n+1}$ . В этом случае выражение (6) примет вид

$$s_{i-1/2}^+ = \max(s_{i_{\text{end}}}^n, \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}), \quad s_{i-1/2}^- = \min(s_{i_{\text{end}}}^n, \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}),$$

а (7) даст

$$z_{i_{\text{end}}}^{n+1} = 2 * S_{i-1/2}^{n+1} - s_{i_{\text{begin}}}^n. \quad (12)$$

2. Нетрудно показать, что и в случае волны разрежения соотношения (6), (7) и (10) также приводят к равенству (12).

3. Ситуация, когда примыкающий к узлу  $i_{\text{end}}$  разрыв не является ни ударной волной, ни волной разрежения, заслуживает отдельного рассмотрения. В этом случае используется один из следующих алгоритмов (неустойчивый разрыв).

(а) Рассмотрим разрыв, получаемый на правой половине ячейки:

$$D_r = \frac{\varphi(s_i^n) - \varphi(\tilde{S}_{i-1/2}^{n+1})}{s_i^n - \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}}.$$

Предположим, что соответствующий разрыв является ударной волной или волной разрежения. Используем для половины ячейки, примыкающей к узлу с номером  $i$ , описанную ранее процедуру, в которой следует положить, что  $s_{i-1}^n = \tilde{S}_{i-3/2}^{n+1}$ . В этом случае

$$s_{i-1/2}^+ = \max(s_i^n, \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}), \quad s_{i-1/2}^- = \min(s_i^n, \tilde{S}_{i-1/2}^{n+1}),$$

$$\tilde{s}_i^{n+1} = 2 * S_{i-1/2}^{n+1} - s_{i-1}^n.$$

(б) Ситуация, когда примыкающий к узлу  $i$  разрыв не является ни ударной волной, ни волной разрежения, заслуживает отдельного рассмотрения. Найдем на отрезке  $[x_{i-1/2}, x_i]$  значение виртуальной переменной  $s(x^*)$ , при котором на отрезке  $[x^*, x_i]$  неустойчивый разрыв превратится либо в ударную волну, либо в волну разрежения. Это можно найти методом деления отрезка пополам. На рис. 1, 2, 3 представлены соответственно результаты счета по явной схеме «уголок», TVD-коррекции [3] и методу прыжкового переноса. На рисунках линиями

Рис. 1. Явная схема.

Рис. 2. TVD-коррекция.

Рис. 3. Метод прыжкового переноса.

1–2 графически представлены распределения насыщенности, полученные соответственно в моменты времени  $t = 0.08293, 0.22587$ . Кружками и квадратиками обозначены значения точного решения. Как видно из рисунков, расчеты показали, что алгоритм прыжкового переноса является более точным, чем другие известные схемы (явная схема, TVD-коррекция).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В. И., Попов В. В., Тимофеева Т. С. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
2. Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре» // Мат. моделирование. 1998. Т. 10, N 1. С. 101–116.
3. Головизнин В. М., Карабасов С. А. Метод прыжкового переноса для численного решения гиперболических уравнений. Точный алгоритм для моделирования конвекции на эйлеровых сетках. 2000. 25 с. (Препринт ИБРАЭ № IBRAE-2000-04).

г. Якутск

26 ноября 2003 г.

## ГРАНИЧНЫЙ МЕТОД И ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛООБМЕНА

Ф. М. Федоров, Н. Н. Павлов

Для приближенного решения интегральным методом [1, 2], а также приближенного и точного решений граничным методом [3] тепловых и диффузионных задач для полубесконечных сред широко применяется понятие радиуса теплового влияния или возмущения (проникания, проникновения)  $R(t)$ , введенного как аналог толщины пограничного слоя в гидродинамике [4]. Также в работе [3] было показано, что для решения задач для полубесконечных сред можно успешно применить дробное дифференцирование [5] в сочетании с идеями, предложенными Ю. И. Бабенко [6].

Традиционно считается, что вне радиуса теплового влияния  $R(t)$  сохраняется начальная температура, а тепло не распространяется за пределы  $R(t)$ , если рассматривается тепловая задача, т. е. на этой границе априори задаются граничные условия, заменяющие начальное условие и условие на бесконечности  $T(x, 0) = T_n$  и  $(\partial T(x, t)/\partial x)_{x=\infty} < \infty$ , имеющие вид

$$T(R(t), t) = T_n = \text{const}, \quad \left( \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)_{x=R(t)} = 0. \quad (1)$$

Вместе с тем задание априори условий (1) для общего случая не обосновано. Один из авторов данной статьи в работе [3] показал несостоятельность первого условия из (1) при решении задачи с источником тепла, точнее, при решении уравнения

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \sigma \alpha$$



необходимо условие  $T(R(t), t) = T_n$  заменить условием

$$T(R(t), t) = T_n + \sigma \alpha t.$$

В данной статье мы покажем, что и задание второго условия в (1), т. е. условия

$$\left( \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)_{x=R(t)} = 0, \quad (2)$$

не всегда оправдано.

Необходимо отметить, что если искомое решение ищется в виде полиномов, то как в интегральном, так и в граничном методах недостающие неизвестные коэффициенты полинома находятся из дополнительных условий типа (2), тоже заданных априори:

$$\left( \frac{\partial^i T(x, t)}{\partial x^i} \right)_{x=R(t)} = 0, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Уместно заметить, что на самом деле условия (3) можно получить дифференцированием предыдущих условий. Например, дифференцируя первое условие в (1), имеем

$$\frac{\partial T(R(t), t)}{\partial R(t)} R'(t) + \frac{\partial T(R(t), t)}{\partial t} = \frac{\partial T(R(t), t)}{\partial R(t)} R'(t) + \alpha \frac{\partial^2 T(R(t), t)}{\partial R(t)^2} = 0. \quad (4)$$

Отсюда с учетом (2), предполагая, что  $R'(t)$  — ограниченная функция, получим

$$\left( \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right)_{x=R(t)} = 0,$$

и т. д. Следовательно, если условие (2) несостоятельно, то, очевидно, несостоятельны все условия (3).

Далее, если первое условие в (1) будет адекватным, то этим мы и зададим закон движения любой изотермы искомого теплового поля, который имеет вид (4), поэтому задание еще одного условия типа (2) требует дополнительного обоснования, во всяком случае не следует задавать его, т. е. условие (2), априори. Следовательно, для общего

случая разумно использовать вместе условия (2) условие (4). В связи с этим необходимо сделать следующие общие замечания.

Во-первых, применение интегрального метода для тех задач, для которых не выполняются условия (1), немедленно должно дать совершенно неверные результаты. Вероятно, условия (1) выполнимы только для тех задач, когда радиус теплового влияния  $R(t)$  является монотонной возрастающей (убывающей) функцией, в противном случае условия (1) могут и не выполняться. В частности, когда решается задача с импульсным тепловым потоком, давно было замечено [1, 2], что интегральный метод дает совершенно неверные результаты. В связи с этим Т. Гудмен [2] попытался дать анализ причин, в силу которых интегральный метод оказывается бессильным при решении данного класса задач и совершенно верно подметил, что «причина неудачи выбранного метода совершенно ясна: форма профиля температур  $T(x, t) = F(t)(R(t) - x)^2/2\lambda R(t)$  не соответствует истинному профилю температур при импульсном тепловом потоке на поверхности», хотя так и до конца не раскрыл истинную причину ошибки. Дело в том, что указанная форма профиля температур как раз и получена с использованием неадекватных условий для данного класса задач, а именно условий (1). Сам Гудмен вместе с Уллахом [2] разработал так называемый расширенный интегральный метод, правда, несколько искусственный, в котором используются два параметра: один из них — глубина проникания для некоторой вспомогательной задачи, в то время как другой параметр определяется из интеграла теплового баланса.

Во-вторых, даже для решения задач, для которых условие (2) справедливо, одностороннее применение дополнительных условий (3) тоже не улучшает точность интегрального метода, этот факт был подмечен давно многими авторами [1, 2]. В связи с этим были предложены многочисленные уточняющие методы, в частности, в конце 70-х–в начале 80-х годов прошлого века появилась серия статей нескольких авторов, в том числе В. Нобля и Г. Велля, в которых область с размером  $R(t)$  предлагается разбить на  $n$  подынтервалов, в каждом из

которых выписывается соответствующий интеграл теплового баланса. Хотя точность улучшается при таком подходе, в конечном итоге сам подход мало чем отличается от метода конечных разностей. Основная ошибка в случае одностороннего применения условий (3) заключается в нарушении принципа: должно быть одинаковое количество дополнительных условий на обеих границах. При соблюдении этого принципа с использованием условий (3) граничным методом получены точные решения соответствующих тепловых задач [3].

Для иллюстрации неадекватности условий (1) рассмотрим простейшую модель тепловой задачи:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad T(\infty, t) = 0, \quad (6)$$

и даны соответствующие граничные условия: либо

$$T(0, t) = f(t), \quad (7)$$

либо

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -F(t), \quad x = 0, \quad (8)$$

причем функции  $f(t)$  и  $F(t)$  могут быть и немонотонными.

В данной работе рассмотрим задачу (5)–(7) для монотонных  $f(t) = f_0 t$  и немонотонных функций  $f(t)$ :

$$f(t) = \begin{cases} f_0 t(t_0 - t) & \text{при } t < t_0, \\ 0 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (9)$$

Сначала рассмотрим задачу с граничным условием (7) для монотонной функции  $f(t) = f_0 t$  и решим задачу двумя способами: с введением радиуса теплового влияния и использованием условий (1)–(3) и с применением дробного дифференцирования. В последнем случае, естественно, нет необходимости введения условий типа (1)–(3).

Для обоих способов решение ищем в виде формального ряда:

$$T(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) x^i. \quad (10)$$

При введении радиуса теплового влияния ряд (10) заменяется соответствующим полиномом и приближенное решение, удовлетворяющее условиям (1) и (3), полученное граничным методом в сочетании с интегральным, получено в работе [3] и имеет вид

$$T_n(x, t) = f_0 t \left\{ \left[ 1 + (2n+3) \frac{x^2}{R_n^2} \right] \left[ 1 - A_n \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i C_n^i}{(2i+1)} \left( \frac{x}{R_n} \right)^{2i+1} \right] - \frac{A_n x(n+2)}{R_n(n+1)} \left[ 1 - \frac{x^2}{R_n^2} \right]^{n+1} \right\}, \quad (11)$$

где  $A_n = (2n+1)!!/(2n)!!$ ,  $R(t) = R_n(t) = 2\sqrt{(n+2)\alpha t}$ . Там же показано, что при  $n \rightarrow \infty$  решение (11) сходится к точному решению [7]:

$$T(x, t) = f_0 t \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{2\alpha t} \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \frac{x}{\sqrt{\pi\alpha t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4\alpha t} \right) \right]. \quad (12)$$

Теперь задачу решим граничным методом с использованием дробного дифференцирования. При решении уравнения (5) граничным методом ряд (10) имеет вид

$$T(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0^{(k)}(t)}{\alpha^k (2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{(k)}(t)}{\alpha^k (2k+1)!} x^{2k+1}, \quad (13)$$

где

$$a_0^{(k)}(t) = \frac{d^k a_0(t)}{dt^k}, \quad a_1^{(k)}(t) = \frac{d^k a_1(t)}{dt^k},$$

$$a_0(t) = T(0, t), \quad a_1(t) = \left( \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

В данном случае  $a_0(t) = T(0, t) = f_0 t$ , тогда для определения решения (13) достаточно знать  $a_1(t) = \left( \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0}$ , которое найдем с помощью дробного дифференцирования [3]. Из определения дробного дифференцирования [5] имеем

$$a_1(t) = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{f_0}{\sqrt{\alpha}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} t = -\frac{f_0}{\sqrt{\pi\alpha}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = -\frac{2f_0\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\alpha}}. \quad (14)$$

Очевидно,

$$a_1^{(1)} = -\frac{f_0}{\sqrt{\pi\alpha t}}, \quad a_1^{(k)} = \frac{(-1)^k f_0 (2k-3)!!}{\sqrt{\pi\alpha} 2^{k-1}} t^{-(2k-1)/2}, \quad k > 1,$$

и

$$a_0 = f_0 t, \quad a_0^{(1)} = f_0, \quad a_0^{(2)} = a_0^{(3)} = \dots = 0.$$

С учетом этих соотношений после несложных преобразований ряд (13) будет иметь вид

$$T(x, t) = f_0 t \left[ 1 + \frac{x^2}{2\alpha t} - \frac{2x}{\sqrt{\pi\alpha t}} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k-1)(2k+1)!} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)^{2k+1} \right]. \quad (15)$$

С учетом разложений [8]

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)^{2k+1} = \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left( \frac{x^2}{4\alpha t} \right)^k = \exp \left( \frac{-x^2}{4\alpha t} \right)$$

выражение (15) можно привести к точному решению (12).

В табл. 1 приведены расчеты по точному решению (12), численные расчеты по разностной схеме и по приближенным формулам (11) и (15). Табл. 1 показывает хорошую точность всех методов расчета.

**Таблица 1.** Температура для линейного граничного условия I-го рода

$\xi$	точн.	разн.	с дробным дифф. (15)			с радиусом вл. (11)		
	решен.	схема	$n = 3$	$n = 7$	$n = 11$	$n = 3$	$n = 7$	$n = 11$
0,2	19,93	19,93	19,92	19,93	19,93	20,15	20,07	20,03
0,4	11,84	11,84	11,81	11,84	11,84	11,84	11,85	11,85
0,6	6,69	6,70	6,51	6,69	6,69	6,35	6,50	6,56
0,8	3,59	3,59	2,86	3,58	3,59	2,99	3,25	3,36
1,0	1,82	1,83	-0,29	1,78	1,82	1,17	1,45	1,56

ПРИМЕЧАНИЕ. Здесь  $\xi = x/2\sqrt{\alpha t}$ ,  $n$  — число членов рядов (11) и (15).

Таким образом, для решения тепловых задач с монотонными граничными условиями введение радиуса теплового влияния вполне оправдано. Кроме того, удержание нескольких членов ряда (15) (в нашем случае до 11), полученного граничным методом в сочетании с дробным дифференцированием, дает вполне приемлемую точность для практических расчетов в области  $0 < x/2\sqrt{\alpha t} \leq 1$ .

Теперь этими же методами и обычным интегральным методом теплового баланса решим задачу при задании немонотонной функции  $f(t)$  по закону (9).

В данном случае при  $t < t_0$  имеем

$$a_0(t) = T(0, t) = f_0(t_0 t - t^2), \quad a_2(t) = f_0 \frac{(t_0 - 2t)}{2\alpha},$$

$$a_4(t) = -f_0 \frac{2}{4!\alpha^2}, \quad a_6(t) = a_8(t) = \dots = 0.$$

Следовательно, для определения решения (13) достаточно знать

$$a_1(t) = \left( \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0},$$

которое найдем, как и выше, с помощью дробного дифференцирования:

$$a_1(t) = -\frac{f_0}{\sqrt{\pi\alpha}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{t_0 \tau - \tau^2}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = \frac{2f_0 \sqrt{t}}{\sqrt{\pi\alpha}} (4t - 3t_0). \quad (16)$$

Далее, проделав те же процедуры, что и при выводе формулы (15), получим

$$T(x, t) = f_0 \left[ t_0 t - t^2 + \frac{(t_0 - 2t)x^2}{2\alpha} - \frac{2x^4}{4!\alpha^2} + \frac{16t^2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)(2k-1)(2k-3)} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)^{2k+1} + \frac{4t_0 t}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)(2k-1)} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right)^{2k+1} \right]. \quad (17)$$

В случае  $t_0 < t$  по условию (9) имеем  $a_0(t) = 0$  и, следовательно, все  $a_{2i}(t) = 0$ , поэтому ряд (13) примет вид

$$T(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^{(k)}(t)}{\alpha^k (2k+1)!} x^{2k+1}. \quad (18)$$

С учетом условий  $t_0 < t$  и (9) выражение (16) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -\frac{f_0}{\sqrt{\pi\alpha}} \frac{d}{dt} \int_0^{t_0} \frac{t_0\tau - \tau^2}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \\ &= -\frac{f_0}{\sqrt{\pi\alpha}} \left[ 2t(t-t_0)^{1/2} + \frac{2}{3}(t-t_0)^{3/2} - \frac{8}{3}t^{3/2} + 2t_0t^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда легко получить, что

$$\begin{aligned} a_1^{(k)}(t) &= -\frac{f_0}{\sqrt{\pi\alpha}} \left[ 2t((t-t_0)^{1/2})^{(k)} + 2k((t-t_0)^{1/2})^{(k-1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}((t-t_0)^{3/2})^{(k)} - \frac{8}{3}(t^{3/2})^{(k)} + 2t_0(t^{1/2})^{(k)} \right], \quad k > 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Соответствующие производные для  $k = 1$  и  $k = 2$  получим непосредственным дифференцированием выражения (19). Подставляя полученные соотношения и выражения (20) в ряд (18), получим искомое решение.

В случае  $t > t_0$  задачу можно решить с введением радиуса теплового влияния, поскольку исходя из условия (9) в данном случае можно ожидать, что радиус теплового влияния будет возрастать монотонно. При этом за начальное распределение температуры берем решение (17) при  $t = t_0$ , ограничиваясь полиномом второй степени:

$$T_n(x, t_0) = \frac{2f_0\sqrt{t_0}t_0}{3\sqrt{\pi\alpha}}x - \frac{f_0t_0}{2\alpha}x^2. \quad (21)$$

Приближенное решение ищем в виде квадратичного профиля, т. е. в виде квадратного полинома:

$$T(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2. \quad (22)$$

Задачу решаем обычным интегральным методом с традиционным заданием на радиусе теплового влияния граничных условий, т. е. обоих условий (1), при этом в силу вышесказанного первое условие в (1) будет иметь вид

$$T(R(t), t) = T_{\text{н}}(R(t), t_0) = \frac{2f_0\sqrt{t_0}t_0}{3\sqrt{\pi\alpha}}R - \frac{f_0t_0}{2\alpha}R^2. \quad (23)$$

В силу условия (9), очевидно,  $a_0(t) = 0$ , а два неизвестных коэффициента  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  находим, используя два условия (23) и (2):

$$a_1(t) = \frac{4\sqrt{t_0}t_0}{3\sqrt{\pi\alpha}} - \frac{t_0R(t)}{\alpha}, \quad a_2(t) = \frac{t_0}{2\alpha} - \frac{2\sqrt{t_0}t_0}{3\sqrt{\pi\alpha}R(t)}. \quad (24)$$

Радиус теплового влияния  $R(t)$  находим из интеграла теплового баланса:

$$\int_0^{R(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=R(t)} - \alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (25)$$

при условии  $R(t_0) = 0$ . Для определения  $R(t)$  соотношение (25) дает следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left( \frac{2\sqrt{t_0}t_0R(t)}{9\sqrt{\pi\alpha}} - \frac{t_0R^2(t)}{2\alpha} \right) R'(t) + \frac{4\sqrt{\alpha}t_0t_0}{3\sqrt{\pi}} - t_0R(t) = 0. \quad (26)$$

Таким образом, выражения (22), (24) и (26) дают решение задачи для времени  $t > t_0$ , полученного обычным интегральным методом теплового баланса. К сожалению, такой подход оказался не пригодным к применению, на что указывает табл. 3. Необходимо отметить, что попытка применения граничного метода в сочетании с интегральным методом подобно вышесказанному (т. е. для случая задания монотонных граничных функций) также не увенчалась успехом. Для времени  $t < t_0$  тоже получим обычным интегральным методом температурное поле в виде полинома второй степени:

$$T(x, t) = f_0(t_0t - t^2) \left( 1 - \frac{x}{R(t)} \right)^2. \quad (27)$$



При этом радиус теплового влияния, определяемая интегралом теплового баланса (25) для профиля температуры (27), имеет вид

$$R(t) = \frac{2\sqrt{\alpha t(10t_0^2 - 15t_0t + 6t^2)}}{(t_0 - t)\sqrt{10}}. \quad (28)$$

**Таблица 2.** Температура для нелинейного граничного условия

I-го рода при  $0 < t < t_0$

$\xi$	$t = 0,32$			$t = 1,28$			$t = 2$		
	т/р	(17)	(27)	т/р	(17)	(27)	т/р	(17)	(27)
0,25	0,31	0,31	0,31	0,66	0,66	0,66	0,37	0,37	—
0,50	0,16	0,16	0,14	0,40	0,40	0,40	0,34	0,35	—
0,75	0,76	0,78	0,04	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23	—

ПРИМЕЧАНИЕ. Здесь  $\xi = x/2\sqrt{\alpha t}$ ,  $t_0 = 2$ , наличие знака минус означает непригодность формулы.

**Таблица 3.** Температура для нелинейного граничного условия

I-го рода при  $t_0 < t$

$\xi$	$t = 2,42$			$t = 4,5$			$t = 8$		
	т/р	(18)	(22)	т/р	(18)	(22)	т/р	(18)	(22)
0,25	0,19	0,19	—	0,06	0,06	—	0,03	0,03	—
0,50	0,25	0,25	—	0,09	0,09	—	0,04	0,04	—
0,75	0,19	0,26	—	0,09	0,09	—	0,05	0,05	—

ПРИМЕЧАНИЕ. Здесь  $\xi = x/2\sqrt{\alpha t}$ ,  $t_0 = 2$ , наличие знака минус означает непригодность формулы.

В табл. 2 и 3 приведены расчеты по точному решению и по приближенным формулам (17), (18) и по формулам (22), (27), полученными

обычным интегральным методом, при этом для расчетов по формулам (17) и (18) взяты 8 и 12 членов соответствующих рядов. Таблицы показывают хорошую точность методов расчета, кроме формулы (22) и частично формулы (27), полученных интегральным методом при традиционном введении радиуса теплового влияния. Как показывает табл. 2, формула (27) не отражает адекватно рассматриваемый процесс, когда температурное поле изменяется немонотонно (см. столбец  $t = 0, 32$ ), вместе с тем данная таблица также показывает, что, когда температурное поле изменяется монотонно (см. столбец  $t = 1, 28$ ), получаем вполне приемлемые результаты.

Таким образом, проведенное исследование показало, что для решения тепловых задач можно ввести радиус теплового влияния только для решения задач с монотонными граничными условиями, т. е. для задач с граничными функциями, изменяющимися во времени монотонно.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975.
2. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. М.: Атомиздат, 1967. С. 41–96.
3. Федоров Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев Ю. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
6. Бабенко Ю. И. Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1986.
7. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998.
8. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

## АННОТАЦИИ

УДК 519.633

### ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

Ю. С. Антонов. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Изучается задача сопряжения: в одной части области задания рассматривается уравнение теплопроводности, в другой части — также уравнение теплопроводности, однако роль времени здесь играет пространственная переменная. На границе перехода склеиваются решение и его нормальная производная. Предложен численный алгоритм решения. Дано обоснование алгоритма, проведены численные эксперименты. Библиогр. 6.

УДК 518.9

### О МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ УЧАСТНИКОВ. Р. И. Егоров, С. П. Кайгородов. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматривается общая постановка многокритериальной задачи распределения, с отношениями предпочтения участников и некоторым предпорядком на множестве распределений, который служит неким вспомогательным критерием оптимальности. Приведено необходимое условие, которому должен удовлетворять данный предпорядок. Библиогр. 2.

УДК 517.925.31

### ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. М. А. Иванова. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Построена область притяжения состояния равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = h_1(y)x + h_2(x)y, \quad \frac{dy}{dt} = f_3(x) + h_4(x)y.$$

Вид этих областей зависит от свойств функций, входящих в правую часть данной системы. Граница этих областей может быть ограничена сверху или снизу, слева или справа или может иметь другую конфигурацию. Ил. 9, библиогр. 2.

УДК 517.946

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ  
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ.  
А. И. Кожанов. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Для модельного одномерного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

$$u_t + u_{xxx} + a(x, t)u = f(x, t)$$

рассматривается краевая задача с общим нелокальным по времени условием

$$u_t(x, 0) = Bu + u_0(x)$$

с линейным оператором  $B$ . Доказывается теорема существования и единственности регулярного решения. Библиогр. 11.

УДК 514.755

К ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЯ СЕГРЕ  $S(m, n)$ . Е. С. Никитина,  
И. В. Бубякин. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

В работе рассматривается геометрия  $(m + n)$ -мерного алгебраического многообразия Сегре  $S(m, n)$  в проективном пространстве  $P^N$  ( $N = (m + 1)(n + 1) - 1$ ), являющегося образом прямого произведения  $P^m P^n$  двух проективных пространств  $P^m$  и  $P^n$  размерности соответственно  $m$  и  $n$ . Доказывается, что многообразие Сегре  $S(m, n)$  можно представить как семейство  $(m + n - 2)$ -мерных алгебраических многообразий  $S_{\lambda\mu}(m - 1, n - 1)$ . Библиогр. 5.

УДК 517.9

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ  
СИСТЕМЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА. М. Нурублов. — Мат. заметки ЯГУ, 2008,  
т. 15, вып. 2.

Исследуется разрешимость граничных задач в полупространстве

$$R_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 > 0, (x_1, x_2) \in R^2\}$$

и в шаре

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < r^2\}$$

для трехмерной нелинейно эллиптической системы высокого порядка вида

$$M^n u = M(M \dots (Mu) \dots) = 0,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ \partial_{x_1} & 0 & -\partial_{x_3} & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_2} & \partial_{x_3} & 0 & -\partial_{x_1} \\ \partial_{x_3} & -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1')$$

— матричный дифференциальный оператор Моисила — Теодореску, обобщающий оператор Коши — Римана на трехмерный случай,  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  — искомый вектор, а  $n$  — любое натуральное число. Библиогр. 6.

УДК 517.956.4

О ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ, СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. *Н. Р. Пинигина, С. В. Попов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Устанавливается разрешимость краевых задач для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими разные производные до второго порядка.

Результатом данной работы является явное представление условий разрешимости в гёльдеровских классах функций  $H_{x,t}^{p,p/2}$  для уравнений

$$g(x)u_t = u_{xx},$$

где  $g(x) = A$  при  $x > 0$  и  $g(x) = -B$  при  $x < 0$ . Показано, что гладкость решения существенно зависит от формы условий склеивания при  $x = 0$ , а также и от значения нецелого показателя Гёльдера. В частности, в одном из случаев при  $p - [p] \geq \frac{1}{2}$  гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных данных. Библиогр. 12

УДК 517.956.4

ГЁЛЬДЕРОВСКИЕ КЛАССЫ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ. *С. В. Попов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Устанавливается разрешимость краевых задач для параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением эволюции в пространствах Гёльдера. Для таких задач показано, что гёльдеровские классы их решений существенно зависят как от форм условий склеивания, так и от нецелого показателя. Библиогр. 16.

УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ. *Е. Т. Софронов.* — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Решается проблема Айзермана, когда характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет два нулевых корня и двукратный действительный корень. Сформулированы три теоремы, обеспечивающие необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом. Библиогр. 3.

УДК 517.956.4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С ВЕСОВЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ. *М. С. Туласынов*. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

В области  $Q = (|y| < \infty) \times (0 < t < T)$  исследована краевая задача для сингулярного параболического уравнения с меняющимся направлением времени:

$$\operatorname{sgn} y u_t = u_{yy} + \frac{k}{y} u_y, \quad |k| < 1,$$

с весовыми условиями склеивания. С использованием теории интегральных уравнений Фредгольма даны условия однозначной разрешимости этой задачи в пространствах Гёльдера. Библиогр. 9

УДК 519.4

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОДГРУПП ПРИМАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП. *Ф. М. Федоров*. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Найдены необходимые и достаточные условия сервантности собственных характеристических подгрупп примарных абелевых групп. Библиогр. 3.

УДК 621.89:536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЯ В ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ПО ТЕМПЕРАТУРНЫМ ДАННЫМ. *А. С. Кондаков, Н. П. Старостин*. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Приводятся алгоритм и результаты вычислительных экспериментов восстановления функции теплотыделения и соответственно момента силы трения в подшипнике скольжения по температурным данным в нелинейной постановке, когда теплофизические характеристики элементов узла трения зависят от температуры. Ил. 4, библиогр. 6.

УДК 517.925

МЕТОД ПРЫЖКОВОГО ПЕРЕНОСА ДЛЯ ЗАДАЧИ БАКЛЕЯ — ЛЕВЕРЕТТА. *М. Н. Павлов*. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Рассматривается задача Баклея — Леверетта. Для численного решения данной задачи используется алгоритм прыжкового переноса, предложенный В. М. Головинским и А. А. Самарским. Результаты численных расчетов показали, что данный алгоритм превосходит по точности явную схему «уголок» и TVD-коррекцию. Ил. 3, библиогр. 3.

УДК 517.9:536.24

ГРАНИЧНЫЙ МЕТОД И ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛООБМЕНА. Ф. М. Федоров, Н. Н. Павлов. — Мат. заметки ЯГУ, 2008, т. 15, вып. 2.

Показано, что введение радиуса теплового влияния при решении тепловых задач для полубесконечных сред не всегда оправдано. Указано, что для решения задач в полубесконечной области с немонотонными граничными условиями можно использовать граничный метод в сочетании с дробным дифференцированием. Табл. 3, библиогр. 8.

## ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

К публикации в «Математических заметках ЯГУ» принимаются оригинальные статьи, содержащие новые результаты в области математики и ее приложений. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются.

В редакцию представляется рукопись в двух экземплярах объемом не более 1 авторского листа, оформленная согласно стандартным требованиям к авторским оригиналам. К рукописи должны быть приложены два экземпляра аннотации, шифр УДК. Депонирование рукописи редакцией не осуществляется. В случае возвращения статьи для переработки указываются две даты поступления — первоначальная дата и дата получения редакцией окончательного текста.

Основные требования к оформлению рукописи:

1. Текст статьи должен быть напечатан через 2 интервала на одной стороне листа белой писчей бумаги форматом  $210 \times 300$  мм.

2. Рисунки и сложные диаграммы выполняются на отдельных листах с указанием на обороте фамилии автора, названия статьи и номера рисунка; их место в тексте указывается на полях статьи.

3. Формулы и математические обозначения должны быть вписаны черной пастой или чернилами черного цвета отчетливо, единообразно.

4. Пронумерованные формулы располагаются в отдельной строке. Номер формулы ставится у правого края листа.

5. Проводится дополнительная разметка формул.

6. В рукописях, подготовленных с помощью текстовых редакторов типа ChiWriter, должны быть размечены греческие, готические, латинские рукописные буквы, указано использование букв прямого начертания, а также проведена разметка индексов.

7. В авторских оригиналах, подготовленных с использованием наборных систем типа  $\text{\TeX}$  и выданных на лазерном принтере, разметка формул не проводится, однако на полях поясняются буквы готического алфавита.

Список литературы печатается в конце текста на отдельном листе. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их появления и даются в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Оформление литературы должно соответствовать требованиям стандартов (примеры библиографических описаний см. в последних номерах журнала).

Рукописи, оформленные не по стандартам или превышающие указанный выше объем, возвращаются.



## ВНИМАНИЮ ПОДПИСЧИКОВ!

Зарубежная подписка на «Математические заметки ЯГУ» оформляется через фирмы — партнеры ЗАО «Международная книга — Периодика» или непосредственно в ЗАО «МК — Периодика» по адресу:

117049 Москва, ул. Б. Якимянка, 39, ЗАО «МК — Периодика».  
Тел. 238-14-85, 238-49-67, факс 238-46-34;  
e-mail [info@mkniga.msk.su](mailto:info@mkniga.msk.su). Internet: <http://WWW.mkniga.ru>

To effect subscription it is necessary to address to one of the partners of JSC Mazhdunarodnaya kniga – Periodica” in your country or to the JSC “МК – Periodica” directly.

Address: “МК – Periodica”, ul. B. Yakimianka, 39, Moscow, 117049, Russia.

Tel.: (095) 238-14-85, 238-49-67, Fax: 238-46-34.

e-mail [info@mkniga.msk.su](mailto:info@mkniga.msk.su).

Internet: <http://www.mkniga.ru>

## РЕКЛАМА ВАШЕГО ИЗДАНИЯ В ИНТЕРНЕТЕ

на сайте «Международной книги — Периодики»

### УВАЖАЕМЫЙ ИЗДАТЕЛЬ!

В целях активизации предложения российских периодических изданий потенциальным зарубежным подписчикам, а также в связи с обновлением информации в электронном каталоге и подписном агентстве на нашем сайте <http://www/mkniga.ru> в сети Интернет просим Вас оказать содействие в подготовке рекламных материалов по Вашему изданию. Для этого нам необходимы: подготовленная Вами статья об издании (Word95/97) и, по возможности, 1–2 рисунка (графические файлы формата gif, jpg) с логотипом или обложкой (рекламой). В статье, кроме тематических разделов, названий кафедр, участвующих в подготовке материалов, просим описать назначение издания и специфику предполагаемой читательской аудитории, дать краткий экскурс в историю издания и другую информацию по Вашему усмотрению, которая может оказаться полезной для потенциальных зарубежных подписчиков и наших коммерческих партнеров. Также просим Вас составить аннотацию на Ваше издание из 1–2 предложений для включения ее в электронный и печатный каталоги на 2000 год. Мы приветствуем, если текст будет на русском и английском языках. Всю информацию, которую Вы можете нам предоставить согласно вышеописанным условиям, просим направить в виде файлов по E-mail:

[info@mkniga.msk.su](mailto:info@mkniga.msk.su)

или почтой на дискете по адресу:

для Ильюшина А. В., ул. Б. Якиманка, 39, Москва 117049

При этом все расходы для представления Вашего издания на нашем сайте «МК-Периодика» берет на себя.

Также просим сообщить Ваш E-mail (по факсу: (095) 238–46–34, напечатанный крупными буквами, или по электронному адресу: [kuzenkov@hp9000.mkniga.msk.su](mailto:kuzenkov@hp9000.mkniga.msk.su)) — для деловой переписки и сообщения Вам наших подписных заказов.

Благодарим за понимание и помощь.