Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.К.АММОСОВА
(ФГАОУ ВО СВФУ им. М.К. Аммосова)

УДК 517.956,519.833,519.217
Рег N НИОКТР АААА-А20-120050790005-9
Рег N ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ:
Ректор
СВФУ им. М.К. Аммосова
д-р биол. наук,
_____________ А.Н. Николаев
«01» февраля 2021 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
№ FSRG-2020-0006
НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ
(промежуточный)

Руководитель НИР,
гл. научн. сотр., д-р физ.-мат. наук 01.02.2021 Н.П. Лазарев
подпись, дата

Якутск 2021

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,
д-р физ.-мат. наук 01.02.21 Н.П. Лазарев (введение, разделы 1, 2, заключение)
подпись, дата

Исполнители темы
д-р. физ.-мат. наук 31.01.21 И.Е. Егоров (раздел 4)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 31.01.21 А.О. Иванова (введение, раздел 9, заключение)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 31.01.21 М.С. Троева (введение, раздел 8, заключение)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 31.01.21 В.Е. Федоров (разделы 5, 7)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 31.01.21 С.В. Потапова (введение, раздел 10, заключение)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 31.01.21 Е.С. Ефимова (разделы 5, 6)
подпись, дата

31.01.21 Н.А. Николаева (раздел 3)
подпись, дата

31.01.21 А.И. Григорьева (раздел 4)
подпись, дата

Нормоконтролер 31.01.21 Т.В. Сотникова
подпись, дата

Ректор СВФУ,
д-р. биол. наук 01.02.21 А.Н. Николаев
подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 73 с., 0 рис., 0 табл., 83 источника, 0 прил.

УСЛОВИЕ НЕПРОНИКАНИЯ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО, ПЛОСКИЙ ГРАФ, СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА, ДРОБНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОСОБЫЕ БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ, НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Объектом исследования являются неклассические краевые задачи для уравнений математической физики, нелинейные задачи для моделей композитных тел с трещинами; дробные дифференциальные уравнения; плоские графы; бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

Целью работы: получение новых результатов в области краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений; развитие общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений; анализ нелинейных задач для моделей композитных тел с трещинами; исследование корректности дробных дифференциальных уравнений типа Маккина-Власова и Гамильтона-Якоби-Беллмана; получение новых структурных свойств плоских разреженных графов.

Методы, используемые в работе: современные методы теории дифференциальных уравнений, теории полугрупп линейных операторов, функционального анализа, вариационного исчисления, перераспределения эйлеровых вкладов, алгебры.

Результаты НИР: доказаны теоремы, обоснованы новые математические модели.

Область применения результатов НИР: Полученные результаты будут использованы для дальнейших исследований неклассических уравнений с частными производными, дискретных систем и их приложений.

Итоги внедрения результатов НИР: Результаты НИР включены в диссертационные работы исполнителей проекта, используются в преподавании специальных курсов для студентов и аспирантов математических направлений вузов. По результатам НИР опубликованы и приняты к опубликованию 8 научных статей, в т.ч. индексированы в Web of Science - 4, в SCOPUS - 4. Сделаны 12 научных докладов на международных конференциях.

ВВЕДЕНИЕ

Проект направлен на исследование новых актуальных задач теории неклассических дифференциальных уравнений, дискретных систем и их приложений.

Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений имеют приложения в трансзвуковой газовой динамике, в моделях вязкоупругости, электродинамики, и других прикладных задачах физики и, в частности, механики. Для таких уравнений будут исследованы новые краевые задачи. Одним из активно развивающихся направлений современной теории неклассических дифференциальных уравнений является теория уравнений составного типа. Наиболее важные научные результаты в этом направлении можно найти в монографиях (Альшин А.Б., Корпусов М.О. и др. «Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа», 2008; Hayashi N. и др. «Asymptotics for dissipative nonlinear equations», 2006; Егоров И.Е. и др, «Неклассические дифференциально-операторные уравнения», 2000) и др.

Краевые задачи с свободными границами в рамках контактных задач, представляют собой интерес как с точки зрения развития методов вариационного исчисления, так и в связи прикладными инженерными задачами. В изучении подобных задач, необходимо преодолевать трудности в исследовании связанные с нелинейностью, негладкостью областей, а также с соотношениями, отражающими неоднородные свойства рассматриваемых тел. В настоящее время с помощью вариационного подхода исследованы различные задачи теории трещин с краевыми условиями в виде неравенств см., например, [1, 2, 3]. Надежный прогноз механического поведения армированных композитных конструкций может быть проведен на основе анализа численных экспериментов, которые, в свою очередь, должны быть тщательно обоснованы. В частности, анализ соответствующих математических моделей позволяет выявить оптимальные геометрические и механические характеристики, обеспечивающие запас структурной целостности композитов. Одним из важных вопросов, связанных с созданием армированных композитов, является исследование наилучшего расположения жестких компонентов, а также выбора их геометрических форм.

Применение бесконечных систем (БС) для решения различных практических задач имеет широкий спектр: задачи статической теории упругости, теория дифракции, теория электрических цепей, теория кибернетических систем, квантовой химии и т.д. Теория решения БС развита, в основном, для двух узких классов БС: регулярных и систем с разностными индексами, поэтому их практическое приложение в естествознании и технике сильно ограничивается недостаточной разработанностью теории БС. Данный проект направлен на разработку нового подхода исследования общих бесконечных систем. Теория графов (бинарных отношений) имеет приложения во многих областях дискретной математики, в структурной химии, генных и транспортных сетях и т.д.

В рамках проекта рассматриваются плоские графы с достаточно большим обхватом g, минимальной степенью δ не менее 2 и без $(k+1)$-цепей, состоящих из вершин степени 2, где $k \geq 1$. В 2016 г., Худак, Мачекова, Мадараш и Сироцки изучили случай $k = 1$, т.е. когда отсутствуют смежные 2-вершины, и доказали, в частности, что найдется 3-вершина, все три соседа которой имеют степень 2 (так называемая мягкая 3-звезда), при условии, что $g \geq 10$, где оценка на g точна. Для первого открытого случая $k = 2$ известно, что мягкая 3-звезда существует при $g \geq 14$, но может не существовать при $g \leq 12$. Мы решаем случай $k = 2$, дав конструкцию с $g = 13$ без мягких 3-звезд. Для всех $k \geq 3$ доказываем, что мягкие 3-звезды существуют при всех $g \geq 4k+6$, но, как следует из нашей конструкции, возможно не существуют если $g \leq 3k+7$. Мы предполагаем, что на самом деле мягкие 3-звезды существуют при всех $g \geq 3k + 8$.

Лебег [4] доказал, что каждый плоский граф с минимальной степенью δ не менее 3 и обхватом g не менее 5 содержит цепь на трех вершинах (3-цепь) степени 3 каждая. Описание 3-цепей является точным, если ни один из его параметров не может быть улучшен, и ни один триплет не может быть отброшен. Бородин и др. (2013) дали точное описание 3-цепей в плоских графах с $\delta \geq 3$ и $g \geq 3$, а другое точное описание была дано Бородиным, Ивановой и Косточкой в 2017. В 2015, Бородин и Иванова дали семь точных описаний 3-цепей при $\delta \geq 3$ и $g \geq 4$. Более того, они доказали, что этот набор точных описаний является полным, что стало результатом нового типа в теории плоских графов. Также Бородин и Иванова (2018) охарактеризовали все одночленные точные описания при $\delta \geq 3$ и $g \geq 3$. Проблема нахождения всех точных описаний для $g \geq 3$ остается открытой даже для $\delta \geq 3$. Одиннадцать точных описаний 3-цепей были получены для плоских графов с $\delta = 2$ и $g \geq 4$ Йендролем, Мачековой, Монтасьером и Сотаком, четыре из них — для $g \geq 9$. В 2018, Аксенов, Бородин и Иванова доказали девять новых точных описаний 3-цепей для $\delta = 2$ и $g \geq 9$, и доказали, что других точных описаний не существует. Недавно, Бородин и Иванова решили случай $g \geq 8$. Мы доказываем полный список из 15 точных описаний 3-цепей в плоских графах с $\delta = 2$ и $g \geq 7$.

Теория дробных дифференциальных уравнений находит применение в разных задачах физики и механики, а также экономики и социальных наук. В частности, вводимый класс абстрактных нелинейных дробных псевдодифференциальных уравнений в банаховых пространствах, который включает в себя как уравнения типа Мак-Кина-Власова, описывающие нелинейные марковские процессы, так и уравнение стохастического управления Гамильтона-Якоби-Беллмана, позволяет проводить единый анализ этих уравнений. Рассматривая эти уравнения как эволюционирующие в двойных банаховых тройках, мы можем непосредственно преобразовать свойства одного типа уравнения в свойства другого типа, что приведет к эффективной теории связанных вперед-назад систем (прямая эволюция Маккина-Власова и обратная эволюция Гамильтона-Якоби-Беллмана), которые занимают центральное место в современной теории игр среднего поля. Игры среднего поля используются в моделировании проблем ценообразования на финансовых рынках, в теории распределения энергетических ресурсов и др.

Цель работы: получение новых результатов в области краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений с частными производными; развитие методологии исследования краевых задач для уравнений математической физики на основе развития общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений; анализ нелинейных задач для моделей однородных и композитных тел с условиями типа неравенств; исследование корректности дробных дифференциальных уравнений типа Маккина-Власова и Гамильтона-Якоби-Беллмана; получение новых структурных свойств плоских разреженных графов.

На данном этапе для реализации цели проекта выполнена следующая работа.

1. Исследованы качественные свойства решений для нелинейных моделей однородных и композитных тел с трещинами. Доказаны теоремы о разрешимости задач оптимального управления расположением жестких включений в нелинейных математических моделях, описывающих равновесие композитных тел.

2. Исследована корректность новой задачи Коши для системы дробных дифференциальных уравнений высокого порядка в частных производных с производной Капуто по времени.

3. Исследованы краевые задачи для неклассических уравнений с частными производными такие, как локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа третьего и высокого порядков, и нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка составного типа с меняющимся направлением времени. Получены оценки сходимости и погрешности.

4. Введен класс абстрактных нелинейных дробных псевдодифференциальных уравнений

в банаховых пространствах, который включает в себя как уравнения типа Маккина-Власова, описывающие нелинейные марковские процессы, так и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса стохастического управления и игр. Исследована корректность рассматриваемых уравнений.

5. Доказана теорема о существовании мягких 3-звезд в плоских разреженных графах обхвата не менее 14, не содержащих 3-цепей. Дана конструкция, доказывающая точность оценки 14. Найден полный список из 15 точных описаний 3-цепей в плоских графах с минимальной степенью 2 и обхватом 7.

6. Показано существование особого класса бесконечных систем, которые не в полной мере обладают свойствами общих бесконечных систем, но содержат некоторые особенности конечных систем. Для таких систем характерно то, что начиная с некоторого номера, все уравнения системы удовлетворяют специфическим условиям специальных систем, а конечное число уравнений не удовлетворяют этим условиям.

Полученные фундаментальные результаты могут служить теоретической основой развития методов математического моделирования реальных процессов в экономике, экологии, строительстве и других областях, необходимых для решения проблем рационального природопользования, прогнозирования экологических, биологических систем и др.

Достижение требуемого качества работ обеспечивается имеющимся научным заделом коллектива по теме проекта. При проведении исследований новых задач, поставленных в рамках проекта, использованы современные математические методы и результаты мировой науки в данной области, а также подходы, методы и результаты, полученные ранее исполнителями проекта.

1 Задача о равновесии пластины Тимошенко с геометрически нелинейным условием непроникания для вертикальной трещины

В данном разделе доказано существование решения задачи минимизации функционала энергии пластины на множестве функций (перемещений), удовлетворяющих указанному условию непроникания в виде неравенства. Доказано, что решение вариационной задачи удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия. Получены некоторые соотношения на кривой, описывающей трещину. Указанные результаты опубликованы в виде статьи, см. [5].

Постановка задачи для трансверсально-изотропной пластины

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, γ — гладкая кривая, без самопересечений, такая, что $\overline{\gamma} \subset \Omega$, $\partial\gamma \notin \gamma$. Предположим, что пластина имеет постоянную толщину $h = 2$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ определим таким образом, чтобы множество $\Omega_\gamma \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины, причем $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \overline{\gamma}$. При этом кривая γ задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что поверхность сквозной трещины можно задать соотношениями $x = (x_1, x_2) \in \gamma, -1 \le z \le 1$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости.

Обозначим через $\eta = \eta(x) = (W, w, \psi)$ обобщенный вектор перемещений точек срединной поверхности, $x \in \Omega_\gamma$, где $W = (w_1, w_2)$ и w — горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно, $\psi = \psi(x) = (\psi_1, \psi_2)$ — углы поворота нормальных сечений. Как известно, в модели Тимошенко перемещения $\chi(x, z) = (W(x, z), w(x, z))$ для точек пластины, отстоящих от срединной поверхности на расстояние $|z| \le 1$, выражаются с помощью перемещений в срединной поверхности $\chi(x, 0) = \chi(x) = (W, w)$ и углов поворота нормальных сечений $\psi = \psi(x)$. При этом справедливы следующие формулы [6]:

$$W(x, z) = W(x) + z\psi(x), \quad w(x, z) = w(x), \quad |z| \le 1, \quad x \in \Omega_\gamma.$$

Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ нормаль к γ. В соответствии с направлением нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ выберем положительный γ^+ и отрицательный γ^- берега кривой. В случае, когда след функции v выбирается на положительном берегу γ^+, используется обозначение $v^+ = v|_{\gamma^+}$, на отрицательном берегу — обозначение $v^- = v|_{\gamma^-}$. Скачок функции на γ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$.

Для того, чтобы мотивировать новый подход в моделировании условия непроникания приведем следующий пример, выявляющий недостатки известного условия непроникания противоположных берегов вертикальной трещины (разреза) в пластине Тимошенко

$$[W\nu] \geq |[\psi\nu]| \quad \text{на} \quad \gamma, \quad (W\nu = w_i\nu_i, \quad \psi\nu = \psi_i\nu_i) \tag{1.1}$$

использованному ранее во многих работах см., например, [7, 8, 9]. Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование. Рассмотрим следующий частный случай обобщенных перемещений для которых условие (1.1) выполнено, однако имеет место проникновение противоположных берегов трещины. В рассматриваемом примере трещина задается прямолинейным отрезком $\gamma = \{(x_1, x_2)|\, x_2 = 0, 0 < x_1 < l\}$, $\nu = (0, 1)$ — нормаль к γ, единичный вектор оси Ox_2. При этом, горизонтальные перемещения $W = (w_1, w_2)$ на обоих берегах равны нулю, т.е. $W^+ = 0$, $W^- = 0$. Вертикальные перемещения вблизи трещины на положительном берегу ($x_2 > 0$) определены соотношением $w^+ = kx_2$, а на отрицательном ($x_2 < 0$) формулой $w^- = kx_2 + b$, где $b > 0$, $k > 0$ — постоянные числа. Свяжем вблизи трещины углы поворота и вертикальные перемещения соотношением $\psi_i = -\frac{\partial w}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$. Подчеркнем, что перемещения равны $w^- = kx_2 + b$, $w^+ = kx_2$, только вблизи трещины (т.е. только для $|x_2| \leq d$, d — некоторое положительное число). Тогда условие непроникания (1.1) выполнено. Действительно,

$$[W]\nu = (W^+ - W^-)\nu = [\psi\nu] = [\frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2}] = k - k = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Хотя условие выполнено, из построения перемещений следует, что имеет место проникновение точек берегов трещины друг в друга.

Возможность подобного проникания следует из того, что поворот вертикального волокна обуславливает, в свою очередь, изменение нормали к берегу трещины в равновесном состоянии. Поэтому выпишем условие для величины проекции скачков перемещений на вектор, выражающий нормаль к берегу трещины для равновесного состояния. Чтобы исключить возможность проникания подобного вида, необходимо умножить скачок вектора перемещений $[\big((W + z\psi), w\big)]$ скалярно на трехмерный вектор $(\nu, -\psi^+\nu)$ — перпендикулярный к поверхности положительного берега трещины

$$[\big((W + z\psi), w\big)](\nu, -\psi^+\nu) = [W\nu] + z[\psi\nu] - [w]\psi^+\nu \geq 0 \quad \forall z \in [-1; 1]$$

Далее подставляя в последнем неравенстве $z = 1$, а затем $z = -1$, выведем следующее неравенство

$$[W\nu]-[w]\psi^{+}\nu \geq \Big|[\psi\nu]\Big| \quad \text{на } \gamma. \tag{1.2}$$

Заметим, что если добавленным квадратичным слагаемым пренебречь $[w]\psi^{+}\nu$, то получится предыдущее неравенство (1.1). Добавим также комментарий о том, что условие (1.1) было выведено умножением на вектор $(\nu,0)$ (вместо вектора $(\nu,-\psi^{+}\nu)$) в рамках предположения, что деформации бесконечно малы [7].

Условие непроникания на кривой γ будем задавать с помощью неравенства (1.2). На внешней границе зададим краевые условия, описывающие жесткое защемление.

$$W=\psi=(0,0), \quad w=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Введем обозначение

$$H(\Omega_\gamma)=H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5, \quad H^{1,0}(\Omega_\gamma)=\{v\in H^1(\Omega_\gamma)\,|\,v=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\}.$$

Рассмотрим следующее множество допустимых перемещений

$$K_1=\{\eta=(W,w,\psi)\in H(\Omega_\gamma)|\ \eta \ \text{ удовлетворяет (1.2)}\}.$$

Заметим, что множество K_1 не является выпуклым, тем не менее оно является слабо замкнутым множеством в $H(\Omega_\gamma)$.

Приведем известные тензорные соотношения теории упругости, справедливые для упругих трансверсально-изотропных пластин. Тензоры, описывающие деформацию пластины, определяются по формулам

$$\varepsilon_{ij}(\psi)=\frac{1}{2}(\psi_{i,j}+\psi_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij}(W)=\frac{1}{2}(w_{i,j}+w_{j,i}),\ i,j=1,2.$$

Здесь нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате. Тензоры моментов и усилий вычисляются по формулам

$$m_{ij}(\psi)=b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W)=a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i,j,k,l=1,2. \tag{1.4}$$

Здесь $A=\{a_{ijkl}\}$, $B=\{b_{ijkl}\}$ — тензоры модулей упругости, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i,j,k,l = 1,2,$$

$$a_{ijkl}\zeta_{kl}\zeta_{ij} \geq c_0\zeta_{ij}\zeta_{ij} \quad \forall \zeta_{ij} = \zeta_{ji}, \quad c_0 > 0,$$

аналогичные соотношения справедливы для тензора $B = \{b_{ijkl}\}$. В силу предположений о трансверсальной изотропности материала матрицы пластины в области Ω_γ ненулевые коэффициенты тензоров A и B определяются соотношениями

$$b_{iiii} = D,\ b_{iijj} = D\kappa,\ b_{ijij} = b_{ijji} = D(1-\kappa)/2,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,$$

$$a_{ijkl} = 3b_{ijkl}, \quad i,j,k,l = 1,2,$$

где D — цилиндрическая жесткость; $0 < \kappa < 1/2$ — коэффициент Пуассона. Поперечные силы, действующие в области пластины, описываемой моделью Тимошенко, задаются выражениями

$$q_i(w,\psi) = \Lambda(w_{,i} + \psi_i) \quad \text{в} \quad \Omega\backslash\overline{\omega}, \quad i = 1,2,$$

где $\Lambda = 2k'G$; k' — коэффициент сдвига; G — модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины. Пусть $\eta = (W,w,\psi) \in H(\Omega_\gamma)$, $\bar\eta = (\bar W, \bar w, \bar\psi) \in H(\Omega_\gamma)$. Для произвольной подобласти $\mathcal{O} \subset \Omega$ определим билинейную форму:

$$B(\mathcal{O},\eta,\bar\eta) = \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\sigma_{ij}(W)\,\varepsilon_{ij}(\bar W) + m_{ij}(\psi)\,\varepsilon_{ij}(\bar\psi) + \Lambda(w_{,i} + \psi_i)(\bar w_{,i} + \bar\psi_i)\Big).$$

Функционал потенциальной энергии деформированной пластины имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2}B(\Omega_\gamma,\eta,\eta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F\eta, \quad \forall \eta = (W,w,\psi) \in H(\Omega_\gamma), \tag{1.5}$$

где $F = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega_\gamma)^5$ – вектор заданных внешних нагрузок [6].

Задачу о равновесии пластины, решение которой удовлетворяет условиям непроникания (1.2) и защемления (1.3), можно сформулировать как задачу минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений

$$\min_{\eta \in K_1} \Pi(\eta). \tag{1.6}$$

Известно, что функционал энергии $\Pi(\eta)$ является коэрцитивным и слабо полунепрерывным снизу функционалом (см. [7]). Дополнительно к указанному свойству $\Pi(\eta)$ вспомним слабую замкнутость множества K_1. Указанные два условия гарантируют существование решения задачи (1.6) [1].

Заметим, что единственность решения в данном случае не установлена, данный вопрос является открытым. Отметим, что исследование единственности решения представляет собой довольно трудную задачу, вследствие того, что множество K_1 на является выпуклым. Зафиксируем одно из решений задачи и обозначим его через $\xi = (U, u, \phi)$. Предположим, что данное решение ξ является достаточно гладким. Для того, чтобы установить выполнение для функции $\xi = (U, u, \phi)$ уравнений равновесия, рассмотрим наряду с задачей (1.6), следующую

$$\min_{\eta \in K_2} \Pi(\eta)$$

где множество K_2, состоит из функций $\eta = (W, w, \psi)$, которые принадлежат пространству $H(\Omega_\gamma)$ и удовлетворяют двум следующим соотношениям

$$\psi^+\nu = \phi^+\nu, \quad [W\nu] - [w]\phi^+\nu \geq \Big|[\psi\nu]\Big| \text{ на } \gamma.$$

Данная задача сформулирована для выпуклого множества K_2, которое, однако, не является выпуклым конусом. Выпуклость множества K_2 гарантирует единственность решения, которое будет совпадать с $\xi = (U, u, \phi)$ поскольку $\xi = (U, u, \phi) \in K_2 \subset K_1$. Кроме того, оно будет доставлять решение для следующего вариационного неравенства

$$\xi \in K_2, \quad B(\Omega_\gamma, \xi, \eta - \xi) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi) \quad \forall \eta \in K_2. \tag{1.7}$$

Подстановкой в (1.7) пробных функций вида $\eta = \xi \pm \tilde{\eta}$, $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^5$, находим, что

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \Big(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + q_i(\tilde{w}_{,i} + \tilde{\psi}_i) \Big) = \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i\tilde{w}_i + f_3\tilde{w} + \mu_i\tilde{\psi}_i) \quad \forall \tilde{\eta} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^5.$$

Здесь и далее $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U)$, $q_i = q_i(u, \phi)$, $i, j = 1, 2$. Отсюда, учитывая независимость $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, выводим уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \quad q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma. \tag{1.8}$$

Далее предположим, что кривая γ может быть продолжена до замкнутой достаточно гладкой кривой Σ, делящей область Ω на две области Ω_1 и Ω_2, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, с гладкими границами $\partial\Omega_1 = \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \partial\Omega$. Примем следующие обозначения: $\sigma_\nu \nu$ и $\sigma_\tau = (\sigma_{\tau 1}, \sigma_{\tau 2})$ — нормальная и касательная составляющие вектора $(\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$; $\sigma_{ij}\nu_j = \sigma_\nu \nu_i + \sigma_{\tau i}$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$, $w_{\tau i} = w_i - W_\nu \nu_i$, $i = 1, 2$, $W_\nu = w_i \nu_i$, $\psi_{\tau i} = \psi_i - \psi_\nu \nu_i$, $i = 1, 2$, $\psi_\nu = \psi_i \nu_i$, $\phi_\nu = \phi_i \nu_i$ на кривой γ. Величины m_ν, $m_{\tau i}$, $i = 1, 2$ на кривой γ определяются аналогично предыдущим формулам, записанным для σ_ν, $\sigma_{\tau i}$, $i = 1, 2$.

Предполагая, что решение достаточно гладкое, подстановкой в (1.7) тестовых функций вида $\eta = \xi \pm \bar{\eta}$, где $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$ — произвольные функции со свойствами $\bar{W} \in H_0^1(\Omega)^2$, $\bar{w} \in H_0^1(\Omega)$, $\bar{\psi} \in H_0^1(\Omega)^2$, $\bar{\psi}_\nu = 0$ на γ, применяя формулы Грина [2, 10], уравнения равновесия (1.8), можно установить, что

$$[\sigma_\nu] = [\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu] = 0, \quad [\sigma_{\tau i}] = [m_{\tau i}] = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{1.9}$$

Выбирая далее $\eta = \xi \pm \bar{\eta}$, $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$, $\bar{w} = 0$, $\bar{W}_\nu = 0$, $\bar{\psi}_\nu = 0$ на γ можно вывести

$$\sigma_{\tau i} = m_{\tau i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{1.10}$$

Подробный вывод подобных соотношений с использованием подходящих формул Грина, можно найти в [11]. Поскольку множество K_1 не обладает свойством выпуклости, позволяющим применить эквивалентность задачи минимизации соответствующему вариационному неравенству, в данном случае не удается использовать стандартные методы вывода дифференциальной постановки. Поэтому, с точки зрения авторов задача о выводе эквивалентной дифференциальной постановки, представляет собой трудную задачу, и авторы оставляют открытым вопрос о существовании эквивалентной дифференциальной постановки.

Модель неоднородной пластины с упругим включением

В следующем пункте рассмотрим модель композитной пластины, в которой деформирование внутренней части пластины описывается моделью Кирхгофа-Лява. Итак, пусть подобласть ω находится строго внутри Ω, т. е. $\overline{\omega} \cap \partial\Omega = \emptyset$, а ее граница Σ является достаточно гладкой. Будем считать, что Σ состоит из двух участков γ и $\Sigma\backslash\gamma$, причем $\mathrm{meas}(\Sigma\backslash\gamma) > 0$, γ — кривая, $\partial\gamma \notin \gamma$. Как и прежде, пластина имеет постоянную толщину $h = 2$, кривая γ задает трещину (разрез) в пластине. Предположим, что подобласть ω соответствует области пластины, описываемой моделью Кирхгофа — Лява, а подобласть $\Omega\backslash\overline{\omega}$ — области пластины, описываемой моделью Тимошенко для трансверсально-изотропного материала.

Выполнение гипотезы прямых нормалей Кирхгофа — Лява в области ω, означает, что выполнены равенства

$$w_{,i} + \psi_i = 0 \quad \text{в} \quad \omega, \quad i = 1, 2. \tag{1.11}$$

Подставляя равенства (1.11) в формулы (1.4) для m_{ij}, $i, j = 1, 2$, можно получить известные соотношения для моментов в модели Кирхгофа — Лява

$$m_{ij} = -b_{ijkl} w_{,kl} \quad \text{в} \quad \omega, \quad i = 1, 2.$$

Для усилий $\sigma_{ij}(W)$ и деформаций $\varepsilon_{ij}(W)$, $i, j = 1, 2$ в модели Кирхгофа — Лява справедливы соотношения (1.4).

Полная энергия деформации пластины $\Pi(\eta)$ представляет собой сумму функционалов энергии, соответствующих упругому включению и матрице:

$$\Pi(\eta) = \Pi_1(\eta) + \Pi_2(\eta).$$

Как известно, в соответствии с моделями Кирхгофа — Лява (см. [12]) и Тимошенко (см. [6]) функционалы энергии деформации упругого включения $\Pi_1(\eta)$ и матрицы $\Pi_2(\eta)$ определяются по формулам

$$\Pi_1(\eta) = \frac{1}{2} b(\omega, \eta, \eta) - \int\limits_{\omega} (f_i w_i + f_3 w), \;\; \Pi_2(\eta) = \frac{1}{2} B(\Omega\backslash\overline{\omega}, \eta, \eta) - \int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} (f_i w_i + f_3 w + \mu_i \psi_i),$$

где $f = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega_\gamma)^3$, $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega\backslash\overline{\omega})^2$ — векторы, задающие внешние нагрузки; билинейная форма $b(\omega, \cdot\,, \cdot)$ определяется равенством

$$b(\omega, \eta, \bar{\eta}) = \int\limits_{\omega} \big(b_{ijkl} w_{,kl} \; \bar{w}_{,ij} + \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) \big),$$

$\eta = (W, w, \psi)$, $\bar{\eta} = (\bar{W}, \bar{w}, \bar{\psi})$.

С помощью формул (1.11) функционал (1.5) можно представить в виде

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2} B(\Omega_\gamma, \eta, \eta) - \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i w_i + f_3 w) - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i \psi_i\,, \quad \eta = (W, w, \psi).$$

Для того чтобы сформулировать задачу о равновесии композитной пластины в вариационном виде, выберем соответствующие функциональные пространства и введем множество допустимых функций K_3.

При определении множества K_3 допустимых функций потребуем выполнение условия непроникания (1.2) и гипотезы прямых нормалей в области ω. Класс искомой функции и условие жесткого защемления на внешней границе пластины $\partial\Omega$ зададим с помощью включения $K_3 \subset H(\Omega_\gamma)$. Таким образом, множество допустимых функций K_3 определяется соотношением

$$K_3 = \{\, \eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_\gamma) \mid w_{,i} + \psi_i = 0 \text{ в } \ \omega,\ i = 1, 2;\ \eta \text{ удовлетворяет (1.2)} \,\}.$$

Задачу о равновесии композитной пластины сформулируем в виде минимизации функционала энергии

$$\min_{\xi \in K_3} \Pi(\xi). \tag{1.12}$$

Поскольку требуется найти решение ξ в пространстве $H(\Omega_\gamma)$, предполагается, что на границе сред вне трещины $\Sigma\setminus\overline{\gamma}$ выполнены условия склейки

$$[W] = (0, 0), \quad [\psi] = (0, 0), \quad [w] = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma\setminus\overline{\gamma}.$$

Выпуклость, слабая полунепрерывность и коэрцитивность функционала $\Pi(\eta)$ отмечена выше, множество K_3 является слабо замкнутым, поэтому, задача имеет решение. Обозначим его снова через $\xi = (U, u, \phi)$. Найдем некоторые свойства данного решения. Для этого приведем вспомогательную задачу, для которой функция $\xi = (U, u, \phi)$ также будет решением. Рассмотрим выпуклое множество $K_4 \subset K_3$, состоящее из функций, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\psi^+ \nu = \phi^+ \nu \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Следующая задача

$$\min_{\xi \in K_4} \Pi(\xi) \tag{1.13}$$

имеет единственное решение $\xi = (U, u, \phi)$, поскольку K_3 — выпукло, и $\xi \in K_3 \subset K_4$. Кроме того (1.13) эквивалентна вариационному неравенству

$$B(\Omega_\gamma, \xi, \eta - \xi) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i(w_i - u_i) + f_3(w - u)) \tag{1.14}$$

$$+ \int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}} \mu_i(\psi_i - \phi_i) \quad \forall \eta = (W, w, \psi) \in K_4.$$

Сравним два неравенства, полученные подстановкой в (1.14) пробных функций $\eta = \xi + \tilde{\eta}$ и $\eta = \xi - \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in C_0^\infty(\Omega \backslash \overline{\omega})^5$. В результате получим равенство, которое запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}} \big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\psi}) + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{W}) + q_i(\tilde{w}_{,i} + \tilde{\psi}_i)\big) = \int\limits_{\Omega \backslash \overline{\omega}} (f_i\tilde{w}_i + f_3\tilde{w} + \mu_i\tilde{\psi}_i).$$

Отсюда, учитывая независимость $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, имеем

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1, 2, \quad q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega \backslash \overline{\omega}, \tag{1.15}$$

Аналогично, подставляя в (1.14) произвольную функцию $\eta = \xi + \tilde{\eta}$, такую что $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(\omega)$, $\tilde{\psi}_i = -\tilde{w}_{,i}$ в ω, $i = 1, 2$, можно получить следующие равенства в смысле обобщенных функций:

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad -m_{ij,ij} = f_3 \quad \text{в} \quad \omega. \tag{1.16}$$

Аппроксимационные задачи

В этом пункте статье построим последовательность задач с удобными для анализа свойствами, решения которых бы сходились к решению задачи (1.6). А именно, покажем, что существует последовательность задач, допускающих формулировку в виде вариационных неравенств, решения которых сходятся слабо в $H(\Omega)$ к решению задачи (1.6). Нам понадобится априорная оценка для решения ξ. Поскольку ξ — решение задачи минимизации над множеством K_1, а функция $\eta_0 = (0,0,0)$, $\eta_0 \in K_1$, имеем

$$\Pi(\xi) = \frac{1}{2} B(\Omega_\gamma, \xi, \xi) - \int\limits_{\Omega_\gamma} F\xi \le \Pi(\eta_0) = 0. \tag{1.17}$$

Отсюда в силу неравенства (см. [13])

$$B(\Omega_\gamma, \eta, \eta) \ge C\|\eta\|^2, \quad \forall \eta \in H(\Omega_\gamma).$$

с некоторой постоянной $C > 0$ не зависящей от η, нетрудно извлечь априорную оценку для решения $\xi = (U, u, \phi)$

$$\|\phi\|_{H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2} \le \|\xi\| \le C_A, \tag{1.18}$$

с некоторой постоянной $C_A > 0$. Сформулируем следующую задачу для произвольного фиксированного $\psi \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$. Пусть

$$K_\psi = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega_\gamma) \,|\, [W\nu] - [w]\psi^+\nu \ge \Big|[\psi\nu]\Big| \text{ на } \gamma\}.$$

Тогда множество K_ψ выпукло, и задача

$$\inf_{\eta \in K_\psi} \Pi(\eta) \tag{1.19}$$

имеет единственное решение $\xi_\psi = (U_\psi, u_\psi, \phi_\psi)$, $\phi_\psi = \psi$ и допускает эквивалентную вариационную постановку

$$\xi_\psi \in K_\psi, \quad B(\Omega_\gamma, \xi_\psi, \eta - \xi_\psi) \ge \int\limits_{\Omega_\gamma} F(\eta - \xi_\psi) \quad \forall \eta \in K_\psi.$$

Сформулируем для множества

$$\mathcal{U} = \{\psi \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2 \,|\, \|\psi\|_{H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2} \le C_A\}$$

задачу оптимального управления

$$\inf_{\psi \in \mathcal{U}} \Pi(\xi_\psi). \tag{1.20}$$

Заметим, что множество $\mathcal{U}$ слабо замкнуто в силу слабой полунепрерывности снизу нормы и ограничено. Кроме того, исходя из вида K_ψ, легко видеть, что ξ будет одним из решений задачи (1.20). Пусть ψ_n — минимизирующая последовательность, в силу ограниченности $\mathcal{U}$ из нее можно выделить слабо сходящуюся в $H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ подпоследовательность к некоторой функции $\hat{\psi} \in \mathcal{U}$. Известно, что задача (1.20) имеет хотя бы одно решение ξ, отличное от тривиального для $F \neq 0$, при этом выполняется $\Pi(\xi) < \Pi(\eta_0) = 0$, $\eta_0 = (0,0,0)$. Поэтому начиная с некоторых номеров n будет выполнено $\Pi(\xi_{\psi_n}) \leq 0$. Следовательно, см. соотношения (1.17), (1.18), можно считать, что $\{\xi_{\psi_n}\}$ тоже ограничена по норме в $H(\Omega_\gamma)$. Значит, из нее можно выделить сходящуюся слабо в $H(\Omega_\gamma)$ подпоследовательность, обозначенную прежним образом, такую что $\{\xi_{\psi_n}\}$ сходится к ξ_l. В силу единственности слабого предела получим, что $\xi_l = (U_l, u_l, \phi_l)$, $\phi_l = \hat{\psi}$. Можно показать, что ξ_l удовлетворяет неравенству (1.3) или же $\xi_l \in K_{\hat{\psi}}$. Кроме того, имеем цепочку неравенств

$$\inf_{\psi \in \mathcal{U}} \Pi(\xi_\psi) = \lim_{n \to \infty} \Pi(\xi_{\psi_n}) \geq \Pi(\xi_l) \geq \inf_{\psi \in \mathcal{U}} \Pi(\xi_\psi).$$

Значит, ξ_l — доставляет одно из решений задачи (1.6).

Таким же способом можно построить аппроксимационные задачи и для задачи (1.12). Авторами на настоящий момент не удалось получить результаты о существовании более "лучших" аппроксимационных задач для (1.6), решения которых сходились бы в более сильном смысле. Вполне возможно, что существуют другие вспомогательные задачи, приближающие (1.6) в смысле более сильной топологии.

2 Оптимальное расположение конечного множества жестких включений в контактных задачах для неоднородных двумерных тел

Задачи оптимального управления в рамках вариационных неравенств с односторонними ограничениями типа Синьорини для случаев, когда управление, задаваемое объемом или условиями Неймана, исследовались, например, в [13, 14]. В [15] авторы впервые излагают теорию, которая сочетает классический анализ чувствительности в оптимизации формы с асимптотическим анализом с помощью асимптотических разложений для эллиптических краевых задач. Активно развиваются исследования по анализу формы и топологической чувствительности вариационных неравенств [16, 15, 17, 18, 19, 20].

В частности, для нелинейной задачи о неоднородном теле с трещиной в работе [17] было доказано существование решения задачи оптимального управления относительно минимизации функционала Гриффитса по форме и расположению мелких упругих включений. Явные формулы производных функционалов энергии по параметрам изменения форм жестких включений получены в работе [21, 22]. В последние годы в рамках моделей трещин с условиями типа неравенства был опубликован ряд работ, касающихся задач оптимального управления для композитных тел, см., например, [23, 24, 25, 26, 27, 28, 3, 29, 30].

В данном разделение рассматривается задача оптимального управления для нелинейной математической модели, описывающей контакт упругого тела с конечным количеством объемных жестких включений. Для этой задачи функционал стоимости определяется произвольным непрерывным функционалом, заданным на подходящем пространстве Соболева, а параметры расположения жестких включений выступают параметрами контроля.

Мы предполагаем, что включения могут менять свое положение внутри области тела так, чтобы расстояние между границей включения и границей тела или другого включения было большим или равным некоторому положительному числу. Доказана непрерывная зависимость решений от параметра расположения включения. В отличие от предыдущих исследований, связанных с оптимальным расположением жестких включений [31, 32], мы рассматриваем более общий случай для конечного набора включений и, что более важно, без использования заданных гладких кривых, описывающих возможные положения включений.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_s$, $\mathrm{meas}(\Gamma_0) > 0$. Рассмотрим некоторое фиксированное натуральное число $m \in \mathbb{N}$, и конечное число односвязных подобластей $\omega_p \subset \Omega$, $p = 1, 2..., m$, имеющих следующие свойства.

1) Области ω_p имеют липшицевые границы $\partial\omega_p$, $p = 1, 2..., m$;

2) $dist(\overline{\omega}_p(x_p, y_p), \partial\Omega) \geq \delta_0$, $dist(\overline{\omega}_q, \overline{\omega}_p) \geq \delta_0$ для любых $1 \leq q, p \leq m$, $p \neq q$, где δ_0 — достаточно малое положительное число.

Рассмотрим следующее индуцированное множество $\mathcal{S}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ подобластей, полученных сдвигов исходных подобластей

$$\mathcal{S}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{\omega_1(x_1, y_1), \omega_2(x_2, y_2)..., \omega_m(x_m, y_m)\},$$

где $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$,

$$\omega_p(x_p, y_p) = \{(x, y) |\, (x, y) = (x_p, y_p) + (\hat{x}, \hat{y}), \quad (\hat{x}, \hat{y}) \in \omega_p\}, \quad \forall\, p = 1, 2, ..., m.$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ таких, что соответствующее множество $\mathcal{S}(\tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет

$$\omega_p(x_p, y_p) \subset \Omega, \quad dist(\overline{\omega}_p(x_p, y_p), \partial\Omega) \geq \delta_0, \quad \forall\, p = 1, 2..., m,$$

$$dist(\overline{\omega}_p(x_p, y_p), \overline{\omega}_q(x_q, y_q)) \geq \delta_0 \quad \forall\, p, q :\ 1 \leq q, p \leq m, \quad p \neq q.$$

В соответствии с заданными свойствами областей $\omega_p(x_p, y_p)$, $p = 1, 2, ..., m$, они являются измеримыми по Жордану. Кроме того, можно отметить, что выполнено следующее утверждение для областей $\omega_p(x_p, y_p)$, $p = 1, 2, ..., m$.

Утверждение 2.1 *Для произвольной строго внутренней подобласти $D \subset \omega_p(x_p, y_p)$ существует достаточно малое положительное число $\delta > 0$ такое, что $D \subset \omega_p(x_p, y_p) \cap \omega_p(\hat{x}_p, \hat{y}_p)$ для всех $(\hat{x}_p, \hat{y}_p) \in \mathbb{R}^2$ и $\|(x_p, y_p) - (\hat{x}_p, \hat{y}_p)\|_{\mathbb{R}^2} < \delta$.*

Обозначим через $W = (w_1, w_2)$ вектор перемещений. Введем пространства Соболева

$$H^{1,0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0\}, \quad H(\Omega) = H^{1,0}(\Omega)^2.$$

Введем тензоры, описывающие деформацию упругой части неоднородного тела

$$\varepsilon_{11}(W) = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{12}(W) = \varepsilon_{21}(W) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right), \quad \varepsilon_{22}(W) = \frac{\partial w_2}{\partial y}.$$

$$\sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{ij}(W),\ i,j = 1,2,$$

где c_{ijkl} — заданный тензор упругости, удовлетворяющий свойствам симметричности и положительной определенности:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad i,j,k,l = 1,2, \quad c_{ijkl} = const.,$$

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i,j = 1,2, \quad c_0 = const., \quad c_0 > 0.$$

По предположению об области Ω и неравенству Корна [33, 34], следующее неравенство имеет место

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)d\Omega \geq c\|W\|^2_{H(\Omega)}, \ \ \forall W \in H(\Omega), \tag{2.1}$$

с константой $c > 0$ независящей от W.

Замечание 2.1 *Неравенство (2.1) влечет эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega)$ и полунормы, определенной левой частью соотношения (2.1).*

Для того, чтобы сформулировать математической модели композитного тела с системой жестких включений воспользуемся понятием жесткого включения, которое в общем случае может занимать произвольную подобласть $\mathcal{O} \subset \Omega$. В этом случае перемещения в области $\mathcal{O}$ должны иметь специальную структуру $W|_{\mathcal{O}} = \rho$, где $R(\mathcal{O})$ есть пространство бесконечно малых жестких перемещений на $\mathcal{O}$:

$$R(\mathcal{O}) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \,|\, \rho(x,y) = b(y,-x) + (c_1, c_2);\, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ (x,y) \in \mathcal{O}\},$$

см., [27].

Далее, зафиксируем вектор $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{A}$ и предположим, что области $\omega_p(x_p, y_p)$, $p = 1, 2, ...m$ относится к жестким включениям, в то время как область

$$\Omega \backslash \overline{\omega}_{\overline{1,m}}, \quad \omega_{\overline{1,m}} = \bigcup_{p=1}^{m} \omega_p(x_p, y_p)$$

соответствует упругой части тела. Условие Синьорини контактного взаимодействия записывается как

$$W\nu \leq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_s,$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор нормали к Γ. На внешней границе Γ_0 ставится однородное граничное условие Дирихле. Введем функционал энергии

$$\Pi(W, \Omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) d\Omega - \int\limits_{\Omega} FW d\Omega, \tag{2.2}$$

где $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ — заданный вектор внешних сил. Задачу о равновесии тела с трещиной можно сформулировать в виде следующей задачи минимизации

$$\text{Найти } U(\tilde{x}, \tilde{y}) \in K(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

$$\text{такое, что} \quad \Pi(U(\tilde{x}, \tilde{y}), \Omega) = \inf_{W \in K(\tilde{x}, \tilde{y})} \Pi(W, \Omega), \tag{2.3}$$

где множество допустимых перемещений определяется соотношением

$$K(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{W \in H(\Omega) \mid W\nu \le 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_s,$$

$$W|_{\omega_p(x_p, y_p)} = \rho, \text{ где } \rho \in R(\omega_p(x_p, y_p)), \quad p = 1, 2, ...m\}.$$

Известно, что задача (2.3) имеет единственное решение $U(\tilde{x}, \tilde{y}) \in K(\tilde{x}, \tilde{y})$, которое удовлетворяет вариационному неравенству [27]

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(U(\tilde{x}, \tilde{y})) \varepsilon_{ij}(W - U(\tilde{x}, \tilde{y})) d\Omega \ge \int\limits_{\Omega} F(W - U(\tilde{x}, \tilde{y})) d\Omega, \tag{2.4}$$

для всех $W \in K(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Задача оптимального управления

Определим функционал качества $J : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ задачи оптимального управления с помощью равенства $J(\tilde{x}, \tilde{y}) = G(U(\tilde{x}, \tilde{y}))$, где $U(\tilde{x}, \tilde{y})$ — решение задачи (2.3) и $G : H(\Omega) \to \mathbb{R}$ — произвольный непрерывный функционал.

В качестве примеров функционалов, имеющих физический смысл, можно привести функционал $G_1(W) = \|W - W_0\|_{H(\Omega)}$, характеризующий отклонение вектора смещения от заданной функции W_0. Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\text{Найти} \quad (\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \in \mathcal{A} \quad \text{такое, что} \quad J(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) = \sup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{A}} J(\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{2.5}$$

Это означает, что мы хотим найти наилучшие расположения включений, обеспечивающие максимальное значение функционала стоимости. Основным результатом данного пункта является:

Теорема 2.1 *Существует решение задачи оптимального управления (2.5).*

Лемма 2.1 *Пусть* $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \in \mathcal{A}$ *— фиксированный вектор и* $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\} \subset \mathcal{A}$ *— последовательность наборов вещественных чисел сходящаяся к* $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ *в* $\mathbb{R}^{2m}$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для произвольной функции* $W \in K(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ *найдется подпоследовательность* $\{(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)\} = \{(\tilde{x}_{n_k}, \tilde{y}_{n_k})\} \subset \{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}$ *и последовательность функций* $\{W_k\}$ *такие, что* $W_k \in K(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $W_k \to W$ *сильно в* $H(\Omega)$ *при* $k \to \infty$.

Лемма 2.2 *Пусть* $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) \in \mathcal{A}$, $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \subset \mathcal{A}$, *для всех* $n \in \mathbb{N}$; *последовательность* $\{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)\}$ *наборов действительных чисел сходится к* $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ *в* $\mathbb{R}^{2m}$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $U(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to U(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ *сильно в* $H(\Omega)$ *при* $n \to \infty$, *где* $U(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$, $U(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ *являются решениями (2.3) соответствующими* $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$, $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$.

В данной работе проанализировано семейство вариационных задач, описывающих равновесие неоднородного тела с включениями, имеющими различные параметры расположения. Доказано существование решения задачи оптимального управления (2.5). Для этой задачи функционал качества $J(t)$ определяется произвольным непрерывным функционалом, а параметр местоположения $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{A}$ жесткого включения служит контролем. Леммы 1 и 2 устанавливают непрерывную связь между задачами о равновесии тел с различным расположением жестких включений. Отметим, что этот подход может быть применен к задачам равновесия, сформулированных для двумерных твердых тел с классическими линейными условиями.

3 Задача о сопряжении тонких включений в упругих телах при наличии трещины

В данном разделе исследуется задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое жесткое включение в некоторой точке. На трещине и в точке пересечения трещины с жестким включением заданы условия непроникания, которые имеют вид неравенств. Имеется широкий круг работ с условием непроникания, см. например [35, 36, 26, 25]. Рассмотрен также случай, когда кривая задающая включение соответствует тонкому упругому включению. Доказана однозначная разрешимость задач, получены полные системы краевых условий. Исследована эквивалентность двух постановок: вариационной и дифференциальной.

Задачи равновесия

Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ. Пусть $\overline{\gamma} \subset \Omega$, $\overline{\Gamma}_c \subset \Omega$ – гладкие кривые без самопересечений, которые пересекаются в точке P : $\gamma \cap \Gamma_c = \{P\} = \{(0,0)\}$. Предположим, что существуют продолжения кривых Γ_c и γ, пересекающие границу Γ и разбивающие область Ω на четыре подобласти D_1, D_2, D_3, D_4 с липшицевыми границами ∂D_i, причем $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$, $i = 1,2,3,4$. Для упрощения записи нормали к Γ_c и к γ обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$; ν_0 – нормаль в точке P, которая совпадает с направлением нормали ν к Γ_c. Направлением нормалей ν определяются положительные и отрицательные берега данных кривых. Обозначим $\Omega_\gamma^c = \Omega \setminus (\overline{\gamma} \cup \overline{\Gamma}_c)$. В наших рассуждениях Ω_γ^c будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии, γ – тонкому включению, Γ_c – трещине. Следовательно трещина разбивает тонкое включение на две части; $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{P\}$, где γ_1 и γ_2 гладкие кривые. В данной работе исследованы три задачи равновесия для упругих тел, содержащих следующие виды тонкого включения: 1) жесткого, 2) упругого, 3) жесткого и упругого одновременно.

Отслоившееся жесткое включение

Рассмотрим случай, когда γ соответствует тонкому жесткому включению с отслоением. Предположим, что отслоение жесткого включения происходит со стороны γ^+, следовательно, между упругим телом и тонким включением имеется трещина. В нашей модели будут применяться граничные условия типа неравенств для того, чтобы предотвратить взаимное проникновение берегов трещины. В рамках предположений перемещения включения должны совпадать с перемещениями упругого тела в точке γ^-. Введем пространство бесконечно малых жестких перемещений

$$R(\gamma_i) = \{\rho_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2})|\ \rho_i(x_1,x_2) = b_i(-x_2,x_1) + (c_{i1}, c_{i2});\quad b_i,\ c_{i1},\ c_{i2} = const,\ (x_1,x_2) \in \gamma_i\},$$

$i = 1,2$. Ниже для упрощения записей мы используем следующие обозначения: $\rho|_{\gamma_1} = \rho_1$ и $\rho|_{\gamma_2} = \rho_2$, $\rho_i \in R(\gamma_i)$, $i = 1,2$. Постановка задачи о равновесии двумерного упругого тела с трещиной Γ_c и тонкими жесткими включениями γ_1 и γ_2 с отслоением имеет вид. Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}, i,j = 1,2$, $\rho_i^0 \in R(\gamma_i)$ такие, что

$$-\text{div}\, \sigma = f, \qquad \sigma = A\varepsilon(u) \qquad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \tag{3.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3.2}$$

$$\langle \rho^0(P) \rangle \nu_0 \geq 0, \qquad u^- = \rho_i^0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \ \ i = 1,2, \tag{3.3}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \qquad \sigma_\nu \leq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{3.4}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \qquad \sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \ \ i = 1,2, \tag{3.5}$$

$$\int\limits_{\gamma_1} [\sigma\nu]\rho_1 + \int\limits_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho_2 \leq 0 \qquad \forall \ \ \rho_i \in R(\gamma_i), \ \ i = 1,2, \quad \langle \rho(P) \rangle \nu_0 \geq 0, \tag{3.6}$$

$$\int\limits_{\gamma_1} [\sigma\nu]\rho_1^0 + \int\limits_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho_2^0 = 0. \tag{3.7}$$

Здесь $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на Γ_c, где $v^\pm = v|_{\Gamma_c^\pm}$ соответствуют значениям функции v на кривой Γ_c по отношению к нормали ν. То же справедливо и для функций v на γ. Угловые скобки $\langle \rho \rangle = \rho^+ - \rho^-$ означают скачок ρ в точке P, где $\rho^\pm$ — значения функции ρ на кривых γ_1 и γ_2 в точках P по отношению к нормали ν_0; $\langle \rho^0(P) \rangle \nu_0 = (\rho_1^0(P) - \rho_2^0(P))\nu_0 \geq 0$ и $\langle \rho(P) \rangle \nu_0 = (\rho_1(P) - \rho_2(P))\nu_0 \geq 0$; $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$ — тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$, $i,j,= 1,2$. Через $A = \{a_{ijkl}\}$, $i,j,k,l = 1,2$, обозначим тензор упругости со свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \ a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2, \ \ \forall \ \xi_{ij} = \xi_{ji}, \ \ c_0 = const > 0.$$

Кроме того, примем во внимание соотношения

$$\text{div}\sigma = (\sigma_{1j,j}, \sigma_{2j,j}), \qquad \sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j), \ \ i,j = 1,2,$$

$$(\tau_1, \tau_2) = (\nu_2, -\nu_1), \quad \sigma_\tau = \sigma\nu \cdot \tau, \quad u_\nu = u \cdot \nu.$$

Здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам; все функции с двумя нижними индексами считаются симметричными по этим индексам. Для удобства изложения по всему тексту мы будем опускать значок дифференциала для переменной интегрирования в интегралах.

Соотношения (3.1) представляют собой уравнение равновесия упругого тела и закона Гука. Граничное условие (3.2) отражают закрепление тела на границе Г. Выражение (3.3) описывает перемещения на γ_1 и γ_2. Условие (3.4) моделирует непроникание берегов трещины Γ_c. Отметим, что условие непроникания $[u_\nu] \geq 0$ выполнено почти всюду на Γ_c, и, в этом смысле, оно может и не выполняться в точке P. Таким образом, первое условие (3.3) обеспечивает взаимное непроникание тонких жестких включений γ_1 и γ_2 в точке P. Нелинейные условия (3.5) описывают отслоение тонкого жесткого включения. Условия сопряжения (3.6) и (3.7) являются выражением принципа виртуальных перемещений. Приведем вариационную постановку задачи (3.1) - (3.7). Для этого введем пространство Соболева

$$H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma) = \left\{ v \in H^1(\Omega^c_\gamma) \mid v = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma \right\},$$

где $H^1(\Omega^c_\gamma)$ — пространство Соболева. Определим множество допустимых перемещений K_1, которое является выпуклым и замкнутым в $H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2$:

$$K_1 = \{v = (v_1, v_2) \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2 \mid \ u|_{\gamma_i^-} \in R(\gamma_i);\ \langle \rho(P) \rangle \nu_0 \geq 0;\ [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_i, \quad i = 1, 2\}.$$

Рассмотрим задачу минимизации потенциальной энергии

$$\inf_{u \in K_1} \Pi(u), \text{ где } \Pi(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega^c_\gamma} fu. \tag{3.8}$$

Здесь $\sigma(u) = \sigma$ определяется соотношениями (3.1), т.е. $\sigma(u) = A\varepsilon(u)$. Для простоты примем обозначения $\sigma(u)\varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)$, $fu = f_i u_i$. Задача (3.8) имеет решение, поскольку функционал $\Pi(u)$ удовлетворяет свойствам коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу. Решение этой задачи удовлетворяет вариационному неравенству

$$u \in K_1, \quad \int\limits_{\Omega^c_\gamma} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) \geq \int\limits_{\Omega^c_\gamma} f(\bar{u} - u) \quad \forall\ \bar{u} \in K_1. \tag{3.9}$$

Теорема 3.1 *Формулировки задач, заданные соотношениями (3.1) - (3.7) и вариационным* *неравенством (3.9) эквивалентны в предположении, что решения этих задач достаточно гладкие.*

Отслоившееся упругое включение

Теперь рассмотрим случай, когда $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$ соответствует тонкому упругому включению с отслоением на γ^+; $\gamma_1 = (0,1)\times\{0\}$ и $\gamma_2 = (-1,0)\times\{0\}$. Как и выше Γ_c соответствует трещине. Сформулируем задачу равновесия в этом случае: найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\},\ i,j = 1,2,\ v^i, w^i$, определенные в $\Omega_\gamma^c, \Omega_\gamma^c, \gamma_i, \gamma_i,\ i = 1,2$, такие, что

$$-\mathrm{div}\,\sigma = f, \qquad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \tag{3.10}$$

$$v^i_{xxxx} = [\sigma_\nu], \qquad -w^i_{xx} = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_i, \ \ i = 1,2, \tag{3.11}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3.12}$$

$$[u_\nu] \ge 0, \qquad \sigma_\nu \le 0, \qquad [\sigma_\nu] = 0, \qquad \sigma_\tau = 0, \qquad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{3.13}$$

$$\langle (w(0), v(0)) \rangle \nu_0 \ge 0 \quad \text{для} \quad x = 0, \tag{3.14}$$

$$v^i = u_\nu^-, \qquad w^i = u_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma_i, \ \ i = 1,2, \tag{3.15}$$

$$[u_\nu] \ge 0, \qquad \sigma_\nu^+ \le 0, \qquad \sigma_\tau^+ = 0, \qquad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \ \ i = 1,2, \tag{3.16}$$

$$v^1_{xx} = v^1_{xxx} = w^1_x = 0 \text{ для } \ x = 1, \quad v^2_{xx} = v^2_{xxx} = w^2_x = 0 \text{ для } \ x = -1, \tag{3.17}$$

$$v^1_{xx} = 0, \quad v^2_{xx} = 0 \text{ для } \ x = 0, \tag{3.18}$$

$$(v^1_{xxx}\bar{v}^1)(0) - (w^1_x\bar{w}^1)(0) - (v^2_{xxx}\bar{v}^2)(0) + (w^2_x\bar{w}^2)(0) \ge 0 \tag{3.19}$$

$$\forall\ (\bar{v}^i, \bar{w}^i) \in H^2(\gamma_i) \times H^1(\gamma_i),\ i = 1,2, \quad \langle (\bar{w}(0), \bar{v}(0)) \rangle \nu_0 \ge 0,$$

$$(v^1_{xxx}v^1)(0) - (w^1_x w^1)(0) - (v^2_{xxx}v^2)(0) + (w^2_x w^2)(0) = 0. \tag{3.20}$$

Здесь функции, определенные на γ идентифицируются с функциями, зависящими от x_1; $u_\nu = u\nu,\ u_\tau = u\tau$; $v|_{\gamma_1} = v^1$ and $v|_{\gamma_2} = v^2$. То же верно и для функции w. Кроме того, $\langle (w(0), v(0)) \rangle \nu_0 = ((w^1(0), v^1(0)) - (w^2(0), v^2(0)))\nu_0 \ge 0,\ \langle (\bar{w}(0), \bar{v}(0)) \rangle \nu_0 = ((\bar{w}^1(0), \bar{v}^1(0)) - (\bar{w}^2(0), \bar{v}^2(0)))\nu_0 \ge 0$. Уравнения (3.11) соответствуют дифференциальным уравнениям четвертого и второго порядка для перемещений тонких упругих включений в рамках модели балки Бернулли - Эйлера. Кроме того, правые части этих соотношений описывают влияние упругой среды на $\gamma_i,\ i=1,2$. Уравнение (3.15) обеспечивает совпадение вертикальных (вдоль оси x_2) и горизонтальных (вдоль оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями на обеих включениях $\gamma_i,\ i=1,2$.

Граничные условия (3.17) обеспечивают нулевые моменты, нулевые поперечные силы и нулевые касательные силы для упругого включения при $x=-1$ и $x=1$. Соотношения (3.19) и (3.20) являются условиями согласования при $x=0$, смысл которых следующий: работа внутренних сил на допустимых перемещениях точек тела не меньше работы внешних сил, а на истинных перемещениях эта работа пропадает. Покажем, что задача (3.10)–(3.20) также допускает вариационную постановку. Для этого введем множество допустимых перемещений

$$K_2=\{(u,v,w)\in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2\times H^2(\gamma_1\cup\gamma_1)\times H^1(\gamma_1\cup\gamma_1)\mid v^i=u^-_\nu,\quad w^i=u^-_\tau \text{ на } \gamma_i,$$

$$i=1,2;\ [u_\nu]\geq 0 \text{ на } \Gamma_c;\quad [u_\nu]\geq 0 \text{ на } \gamma_i,\quad i=1,2;\quad \langle (w(0),v(0))\rangle\nu_0\geq 0\}$$

и рассмотрим задачу минимизации

$$\inf_{(u,v,w)\in K_2}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(u)-\int\limits_{\Omega^c_\gamma}fu+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_1}(v^1_{xx})^2+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_1}(w^1_x)^2+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_2}(v^2_{xx})^2+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_2}(w^2_x)^2\right\}. \qquad (3.21)$$

Задача (3.21) разрешима и может быть записана в виде вариационного неравенства

$$(u,v,w)\in K_2,\ \int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(\bar u-u)-\int\limits_{\Omega^c_\gamma}f(\bar u-u)+\int\limits_{\gamma_1}v^1_{xx}(\bar v^1_{xx}-v^1_{xx})+\int\limits_{\gamma_1}w^1_x(\bar w^1_x-w^1_x)+$$

$$+\int\limits_{\gamma_2}v^2_{xx}(\bar v^2_{xx}-v^2_{xx})+\int\limits_{\gamma_2}w^2_x(\bar w^2_x-w^2_x)\geq 0\quad\ \forall\ (\bar u,\bar v,\bar w)\in K_2. \qquad (3.22)$$

Теорема 3.2 *Формулировки задач, заданные соотношениями (3.10) - (3.20) и вариационным неравенством (3.22) эквивалентны в предположении, что решения этих задач достаточно гладкие.*

Взаимодействие жесткого включения с упругим включением

Рассмотрим случай, когда γ_1 и γ_2 описывают тонкое упругое и тонкое жесткое включения, соответственно. Предположим, что отслоение жесткого включения имеет место со стороны γ_2^+. Постановка задачи равновесия следующая. Нам нужно найти функции $\rho^0\in R(\gamma_2)$, u, σ, v, w

такие, что

$$-\mathrm{div}\,\sigma = f, \qquad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \tag{3.23}$$

$$v_{xxxx} = [\sigma_\nu], \qquad -w_{xx} = [\sigma_\tau] \quad \text{на} \quad \gamma_1, \tag{3.24}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{3.25}$$

$$u|_{\gamma_2^-} = \rho^0, \qquad [u_\nu] \geq 0, \qquad \sigma_\nu^+ \leq 0, \qquad \sigma_\tau^+ = 0, \qquad \sigma_\nu^+ \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_2, \tag{3.26}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \qquad \sigma_\nu \leq 0, \qquad [\sigma_\nu] = 0, \qquad \sigma_\tau = 0, \qquad \sigma_\nu \cdot [u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{3.27}$$

$$v = u_\nu, \qquad w = u_\tau \quad \text{на} \quad \gamma_1, \tag{3.28}$$

$$((w(0), v(0)) - \rho^0(0))\nu_0 \geq 0 \qquad \text{для} \quad x = 0, \tag{3.29}$$

$$v_{xx} = v_{xxx} = w_x = 0 \text{ для } \ x = 1, \qquad v_{xx} = 0 \text{ для } \ x = 0, \tag{3.30}$$

$$(v_{xxx}\tilde{v})(0) - (w_x\tilde{w})(0) - \int\limits_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho \geq 0 \quad \forall\ \rho \in R(\gamma_2), \tag{3.31}$$

$$(\tilde{v}, \tilde{w}) \in H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1), \quad ((\tilde{w}(0), \tilde{v}(0)) - \rho(0))\nu_0 \geq 0,$$

$$(v_{xxx}v)(0) - (w_x w)(0) - \int\limits_{\gamma_2} [\sigma\nu]\rho^0 = 0. \tag{3.32}$$

Неравенство (3.29) гарантирует, что тонкое упругое включение γ_1 и тонкое жесткое включение γ_2 не проникают в точке $x = 0$. Соотношения (3.31)–(3.32) представляют собой условия сопряжения для $x = 0$. Рассмотрим задачу минимизации:

$$\inf_{(u,v,w) \in K_3} \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_1} (v_{xx})^2 + \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_1} (w_x)^2 \right\}, \tag{3.33}$$

где

$$K_3 = \{(u, v, w) \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)^2 \times H^2(\gamma_1) \times H^1(\gamma_1) \mid v = u_\nu, \ \ w = u_\tau \text{ на } \gamma_1;$$

$$[u_\nu] \geq 0 \text{ на } \Gamma_c \text{ и } \gamma_2; \quad u|_{\gamma_2^-} \in R(\gamma_2); \quad ((w(0), v(0)) - \rho^0(0))\nu_0 \geq 0\}.$$

Решение задачи (3.33) единственно и удовлетворяет вариационному неравенству

$$(u, v, w) \in K_3,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u}-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u}-u) + \int\limits_{\gamma_1} v_{xx}(\bar{v}_{xx}-v_{xx}) + \int\limits_{\gamma_1} w_x(\bar{w}_x - w_x) \geq 0 \quad \forall\ (\bar{u},\bar{v},\bar{w}) \in K_3. \quad (3.34)$$

Теорема 3.3 *Формулировки задач, заданные соотношениями (3.23) - (3.32) и вариационным неравенством (3.34) являются эквивалентны в предположении, что решения этих задач достаточно гладкие.*

4 Задача Коши для уравнений высокого порядка с производной Капуто

Обыкновенные и дифференциальные уравнения в частных производных с дробными производными Римана-Лиувилля, Капуто вызвали в последние годы значительный интерес как в математике, так и в ее приложениях. В математических книгах по дробным дифференциальным уравнениям подход Римана-Лиувилля к понятию дробной производной обычно используется так:

$$\mathcal{D}_{0t}^{\alpha}\varphi(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]+1}\mathrm{I}_{0t}^{1-\{\alpha\}}\varphi(t),\quad \mathrm{I}_{0y}^{\alpha}\varphi(y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^y(y-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau,$$

$$\partial_{0t}^{\alpha}\varphi(t)=\mathrm{I}_{0y}^{1-\{\alpha\}}\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]+1}\varphi(t),\quad \alpha>0.$$

При моделировании реальных процессов входные условия, как правило, вводятся через заданное количество ограниченных начальных значений, принимаемых аргументом и его производными от всего порядка. Для удовлетворения этих требований Капуто ввел альтернативное определение дробной производной $\partial_{0t}^{\alpha}\varphi(t)$ [37, 38, 39].

Функция Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)},$$

где z - комплексная переменная. Также, она является решением задачи Коши

$$\partial_{0y}^{\alpha}u(y)=\lambda u(y),\quad u(0)=1,\quad u(y)=E_{\alpha,1}\left(\lambda y^{\alpha}\right)=E_{\alpha}\left(\lambda y^{\alpha}\right).$$

Рассмотрим гильбертово протранство H_s с нормой

$$||u(x)||_{H_s}^2=\int(1+|y|^2)^s|\hat{u}|^2dy,$$

где $\hat{u}$ – это преобразование Фурье функции u.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$L[u]=\sum_{k+|\beta|=m}a_{k\beta}\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^k\partial_x^{\beta}u=0,\quad \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^j u|_{t=0}=0\ for\ j=\overline{0,\,m-2},\quad \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{(m-1)}u|_{t=0}=f(x). \tag{4.1}$$

Считаем, что плоскость исходных данных не является характеристической, т.е. $a_{m0}=1$.

Применив формально преобразование Фурье по пространственным координатам к (4.1), мы получим

$$P(\partial_{0t}^{\alpha}, iy)\hat{u} = \sum_{k+|\beta|=m} a_{k\beta} \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} (iy)^{\beta}\hat{u} = 0, \quad \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{j} \hat{u}|_{t=0} = 0 \text{ для } j = \overline{0,\, m-2}, \quad \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{(m-1)} \hat{u}|_{t=0} = \hat{f}(x),$$

функцию $\hat{u}$ мы ищем в виде $Z(t,y)\hat{f}(y)$. Тогда мы получим уравнение относительно $Z(t,y)$

$$P(\partial_{0t}^{\alpha}, iy)Z(t,y) = 0, \quad \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} Z(t,y)|_{t=0} = 0 \text{ для } k = \overline{0,\, m-2}, \quad \left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{m-1} Z(t,y)|_{t=0} = 1, \qquad (4.2)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.2)

$$Z(t,y) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha})}{P(i\lambda, iy)} d\lambda, \qquad (4.3)$$

где интеграл берется по контуру к Γ, содержащему в себе все корни знаменателя элемента интегрирования

$$P(i\lambda, iy) = i^{m} P(\lambda, y) = 0. \qquad (4.4)$$

Мы получили формальное решение задачи (4.1) в виде

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n}} \int e^{-ix*y} Z(t,y)\hat{f}(y)dy. \qquad (4.5)$$

Для получения оценки на Z мы специальным образом выберем замкнутый цикл Γ [39]

Примем теперь за Γ множество всех γ_p. Тогда все корни λ_k будут лежать на контуре Γ. Точки Γ будут удалены от каждой λ_k хотя бы на 1, так что на Γ

$$|P(\lambda, y)| = \prod_{k=1}^{m} |\lambda - \lambda_k| \geqslant 1.$$

Причем длина Γ не превосходит $8m$.

Из (4.3) следует

$$|Z(t,y)| \leq \frac{4m}{\pi} E_{\alpha}(|t|^{\alpha}).$$

Аналогичные оценки для производной Z по t.

$$\left|\left(\partial_{0t}^{\alpha}\right)^{k} Z(t,y)\right| = \left|\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{(i\lambda)^{k} E_{\alpha}(i\lambda t^{\alpha})}{P(i\lambda, iy)} d\lambda\right| \leq \frac{4m}{\pi} \left(M|y| + \sqrt{2}\right)^{k} E_{\alpha}\left(|t|^{\alpha}\right). \qquad (4.6)$$

Отсюда следует

$$\hat{f}(y) = O(|y|^{-n-m-1}) \text{ для } |y| \to \infty,$$

что интеграл (4.5) сходится равномерно по x.

Поскольку все корни $\lambda = \lambda_k$ уравнения (4.4) отличны друг от друга, то мы можем вычислить интеграл (4.3) методом остатков и получим простое выражение

$$Z(t,y) = i^{1-m} \sum_{k=1}^{m} \frac{E_\alpha(i\lambda_k t^\alpha)}{P_\lambda(\lambda_k, y)} = i^{1-m} \sum_{k=1}^{m} \frac{E_\alpha(i\mu_k |y| t^\alpha)}{|y|^{m-1} P_\mu(\mu_k, \eta)},$$

где μ_k – это решения уравнения $P(\mu, \eta) = 0$.

Если u это решение уравнения (4.1), то по теореме Парсеваля при $k + |\beta| \leq m - 1$ справедливо неравенство

$$\int \left| \left(\partial_{0t}^\alpha\right)^k \partial_x^\beta u(t,x) \right|^2 dx \leq C^2 E_\alpha(t^\alpha)^2 \int |\hat{f}(y)|^2 dy = C^2 E_\alpha(t^\alpha)^2 \int f(x)^2 dx. \tag{4.7}$$

Итак, мы доказали теорему

Теорема 4.1 *Пусть (4.4) для всех действительных y имеет m различных действительных корней и $f(x) \in C_0^{n+m+1}$. Тогда задача (4.1)имеет единственное решение $u(t,x)$ такое, что $\left(\partial_{0t}^\alpha\right)^k \partial_x^\beta u \in C\left([0,+\infty) \times \mathbb{R}^n\right)$ для всех $k+|\beta| \leq m$ и при $k+|\beta| \leq m-1$ выполняется неравенство (4.7).*

Рассмотрим теперь задачу с нулевыми начальными данными и ненулевой правой частью.

$$L[u] = \sum_{k+|\beta|=m} a_{k\beta} \left(\partial_{0t}^\alpha\right)^k \partial_x^\beta u = g(t,x), \quad \left(\partial_{0t}^\alpha\right)^j u|_{t=b} = 0 \text{ для } j = \overline{0,\, m-1}. \tag{4.8}$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 4.2 *Предположим, что (4.4) для действительных y имеет m различных действительных чисел $g(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда задача (4.8) имеет единственное решение $u(t,x)$ из пространства H_s и имеет место неравенство*

$$||u||_{H_s}^2 \leq c \int_0^t \| \mathcal{D}_{0t}^{1-\alpha} L[u] \|_{H_s}^2 \, d\tau, \tag{4.9}$$

где c - положительная константа.

Теперь рассмотрим сопряженную задачу с (4.1)

$$M[v] = \sum\nolimits_{k+|\beta|=m} a_{k\beta} \left(\mathcal{D}_{tb}^{\alpha}\right)^{k} \partial_x^{\beta} v = g(t,x), \quad \mathcal{I}_{tb}^{1-\alpha} \left(\mathcal{D}_{tb}^{\alpha}\right)^{j} v|_{t=b} = 0 \;\; j = \overline{0,\, m-2}, \qquad (4.10)$$
$$\mathcal{I}_{tb}^{1-\alpha} \left(\mathcal{D}_{tb}^{\alpha}\right)^{(m-1)} v|_{t=b} = f(x).$$

Теорема 4.3 *Пусть(4.4) для действительных y имеет m различных действительных корней, $g(t,x) = 0$ и $f(x) \in C_0^{n+m+1}$. Тогда задача (4.10) имеет единственное решение $u(t,x)$ такое, что $\left(\mathcal{D}_{tb}^{\alpha}\right)^{k} \partial_x^{\beta} v \in C\left([0,+\infty) \times \mathbb{R}^n\right)$ для всех $k+|\beta| \le m$ и для всех $k+|\beta| \le m-1$ справедливо неравенство*

$$\int \left| \left(\mathcal{D}_{tb}^{\alpha}\right)^{k} \partial_x^{\beta} v(t,x) \right|^2 dx \le C^2 t^{2\alpha-2} E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha})^2 \int f(x)^2 dx. \qquad (4.11)$$

Также рассмотрим следующую задачу

$$M[v] = \sum_{k+|\beta|=m} a_{k\beta} \left(\mathcal{D}_{tb}^{\alpha}\right)^{k} \partial_x^{\beta} v = g(t,x), \quad \mathcal{I}_{tb}^{1-\alpha} \left(\mathcal{D}_{tb}^{\alpha}\right)^{j} v|_{t=b} = 0 \text{ для } j\overline{= 0,\, m-1}.$$

Справедлива теорема.

Теорема 4.4 *Пусть (4.4) для действительных y имеет m различных действительных корней, $f(x) = 0$ и $g(t,x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \times C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда задача (4.10) имеет единственное решение $v(t,x)$ из пространства H_s и выполнено неравенство*

$$||v||_{H_s}^2 \le c \int_t^b \| \, M[v] \, \|_{H_s}^2 \, d\tau. \qquad (4.12)$$

5 Краевые задачи для уравнения третьего порядка смешанно-составного типа

В данном разделе изучена краевая задача Врагова для уравнения третьего порядка смешанно-составного типа. С использованием нестационарного метода Галеркина и метода регуляризации доказана однозначная разрешимость задачи с локальными граничными условиями.

Получена оценка погрешности приближенных решений этой задачи, выраженная через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи Дирихле для оператора Лапласа. Кроме того, изучена краевая задача с интегральным краевым условием. Заменив искомую функцию, эта задача сведена к предыдущей краевой задаче, но для дифференциально-интегрального уравнения. Регулярная разрешимость этой вспомогательной задачи доказана методом последовательных приближений. Для вспомогательной задачи и нелокальной краевой задачи получена оценка сходимости приближенных решений.

Постановка краевой задачи

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей S. Введем обозначения $Q = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $T = const > 0$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \leq t \leq T$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t). \tag{5.1}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (5.1) являются достаточно гладкими. Введем множества

$$\Omega_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad \Omega_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

<u>Краевая задача I.</u> Найти решение уравнения (5.1) в Q, такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{5.2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{5.3}$$

$$u_t|_{\overline{\Omega}_0^+} = 0, \quad u_t|_{\overline{\Omega}_T^-} = 0. \tag{5.4}$$

<u>Краевая задача II.</u> Найти решение уравнения (5.1) в Q, такое, что условия (5.2), (5.4)

выполнены и
$$u(x,0)=\int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau, \tag{5.5}$$
где $N(t)\in L_2(0,T)$ — известные функции, $N_0=\int\limits_0^T N(\tau)d\tau,\ \ N_1=(1-N_0)^{-1}$.

В анизотропном соболевском пространстве $W_2^{m,s}(Q)$ введем норму
$$\|u\|^2_{m,s}=\int\limits_Q\left[\sum_{|\alpha|\le m}(D_x^\alpha u)^2+(D_t^s u)^2\right]dQ$$
с $\|u\|_{m,m}=\|u\|_m$ для $u\in W_2^{m,m}(Q)=W_2^m(Q)$.

Обозначим
$$(u,v)_0=\int\limits_\Omega u(x)v(x)dx,\ \forall\ u,v\in L_2(\Omega)$$
скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ и $(u,v)=\int\limits_0^T(u,v)_0dt$ для $u,v\in L_2(Q)$, $\|u\|^2=(u,u)$.

Разрешимость краевой задачи I

Введем класс функций
$$C_L=\left\{u(x,t):\ u\in W_2^2(Q),\ u_{x_ix_jt}\in L_2(Q),\ i,j=\overline{1,n} \text{ и условия (5.2)-(5.4) выполнены}\right\}.$$

Интегрирование частей доказывает следующее утверждение.

Лемма 5.1 *Предположим, что* $c(x)\ge 0,\ a-\frac{1}{2}k_t\ge\delta>0$.

Тогда имеет место следующее неравенство:
$$(Lu,u_t)\ge C_1\left[\|u\|_1^2+\int_Q\sum_{i=1}^n u^2_{tx_i}dQ\right],\ \ C_1>0$$
для всех $u\in C_L$.

Из леммы 5.1 следует единственность регулярного решения краевой задачи (5.1)-(5.4).

Пусть функции $\varphi_k(x)$ являются решениями спектральной задачи
$$-\Delta\varphi=\lambda\varphi,\ x\in\Omega,\ \varphi|_S=0.$$

Функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, и соответствующие им собственные значения удовлетворяют условиям: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ и $\lambda_k \to +\infty$ для $k \to \infty$. Для $0 < \varepsilon \leq 1$ определим $L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{ttt} + Lu$.

Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ краевой задачи (5.1)-(5.4) имеет вид

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv v(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \geq 1, \;\; 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решения следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \tag{5.6}$$

$$c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \; D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \; D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0, \; l = \overline{1,N}, \tag{5.7}$$

где $k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) \geq 0$;

$$c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \; D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \; D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0, \; l = \overline{1,N}, \tag{5.8}$$

при $k(x,0) \leq 0, \;\; k(x,T) \geq 0$.

Из леммы 5.1 немедленно следует следующее утверждение.

Лемма 5.2 *Предположим, что выполнены условия леммы 5.1 выполнены, $f \in L_2(Q)$ и функция $k(x,t)$ удовлетворяет каждому из условий: $k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) \geq 0$, или $k(x,0) \leq 0, \;\; k(x,T) \geq 0$. Тогда для приближенного решения $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ справедлива следующая оценка:*

$$\varepsilon\|u_{tt}^{N,\varepsilon}\| + \|u^{N,\varepsilon}\|_1^2 + \sum_{i=1}^{n} \|u_{tx_i}^{N,\varepsilon}\|^2 \leq C_2\|f\|^2, \; C_2 > 0.$$

Из леммы 5.2 следует однозначная разрешимость краевой задачи (5.6), (5.7), (5.8).

Априорные оценки для приближенных решений $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ доказаны. На основе эти оценок получаем.

Теорема 5.1 *Предположим, что $c(x) \geq 0$, $a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0$, $f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q)$ и любое из двух условий $k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) \geq 0$, или $k(x,0) \leq 0, \;\; k(x,T) \geq 0$ выполнено. Тогда краевая задача (5.1)-(5.4) имеет единственное решение $u(x,t)$ в C_L, и имеет место следующее неравенство:*

$$\|u\|_2^2 + \|\Delta u_t\|^2 \leq C_3\|f\|_{0,1}^2, \; C_3 > 0.$$

Оценка погрешности для нестационарного метода Галеркина получается аналогично [40].

Теорема 5.2 *Предположим, что все условия теоремы 5.1 выполнены. Тогда следующая оценка ошибки для $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ выполнена:*

$$\|u - u^{N,\varepsilon}\|_1 + \|u_t - u_t^{N,\varepsilon}\|_{1,0} \leq C_4 \|f\|_{0,1} (\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-1/2}), \quad C_4 > 0,$$

где $u(x,t)$ — точное решение краевой задачи (5.1)-(5.4).

Разрешимость вспомогательной задачи.

Введем пространство

$$W_L = \{u(x,t) : u \in W_2^2(Q), \quad u_{x_i x_j t} \in L_2(Q), \quad i,j = \overline{1,n}\}$$

с нормой

$$\|u\|_L = \|u\|_2 + \|\Delta u_t\|.$$

Если функция $u(x,t) \in W_L$ является решением нелокальной краевой задачи (5.1), (5.2), (5.4), (5.5) тогда функция

$$v(x,t) = u(x,t) - \int\limits_0^T N(\tau) u(x,\tau) d\tau$$

является решением следующей проблемы.

Вспомогательная задача. Найти решение уравнения

$$Lv = \Phi(x,v) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{5.10}$$

такие, что граничные условия (5.2)-(5.4) выполнены, где

$$\Phi(x,v) = N_1 \int\limits_0^T N(\tau) A_x v(x,\tau) d\tau, \quad A_x v = \Delta v - c(x) v.$$

По теореме 5.1 с $N(t) \equiv 0$ краевая задача (5.10), (5.2)-(5.4) имеет единственное решение $v_0(x,t) \in W_L$ и справедлива следующая оценка:

$$\|v_0\|_L \leq C_0 \|f\|_{0,1}, \quad C_0 > 0.$$

Для всех функций $v(x,t) \in W_L$ справедливо следующее неравенство:

$$\|\Phi(x,v)\| \leq C_5 |N_1| T^{1/2} \|N\|_{L_2(0,T)} \|v\|_L.$$

Докажем следующую теорему, используя метод последовательных приближений с функцией $v_0(x,t)$, задающей начальное приближение.

Теорема 5.3 *Предположим, что все условия теоремы 5.1 выполнены и*

$$q = C_0 C_5 |N_1| T^{1/2} \|N\|_{L_2(0,T)} < 1.$$

Тогда краевая задача (5.10), (5.2)-(5.4) имеет единственное решение $v(x,t) \in W_L$ и справедлива оценка сходимости:

$$\|v - v_m\|_L \leq C_0 \frac{2+q}{1-q} \|f\|_{0,1} q^m,$$

где $v_m(x,t)$ — это приближение с числом m для $v(x,t)$.

Разрешимость краевой задачи II.

Выше доказано, что краевая задача (5.10), (5.2)-(5.4) имеет единственное решение $v(x,t) \in W_L$.

Обозначим

$$u(x,t) = v(x,t) + N_1 \int_0^T N(\tau) v(x,\tau) d\tau,$$

$$u_m(x,t) = v_m(x,t) + N_1 \int_0^T N(\tau) v_m(x,\tau) d\tau.$$

Тогда легко доказать следующее утверждение.

Теорема 5.4 *Предположим, что все условия теоремы 5.3 выполнены и*

$$T^{1/2} \|N\|_{L_2(0,T)} < 1.$$

Тогда краевая задача (5.1), (5.2), (5.4), (5.5) имеет единственное решение $u(x,t) \in W_L$, и при этом справедлива оценка для сходимости:

$$\|u - u_m\|_L \leq C_0 \frac{2+q}{1-q} (1 + |N_1| T^{1/2} \|N\|_{L_2(0,T)}) \|f\|_{0,1} q^m.$$

6 Нелокальные краевые задачи для уравнения третьего порядка составного типа

Краевые задачи для неклассических уравнений с меняющимся направлением времени исследовались многими авторами (в частности, в [41, 42, 43]). Это связано с их важностью в прикладных задачах. С другой стороны, в математических моделях реальных процессов часто возникают уравнения составного типа. Краевые задачи для таких уравнений изучались во многих работах (например, в [44, 45]). В данной работе мы рассматриваем две нелокальные краевые задачи для уравнения третьего порядка составного типа с меняющимся направлением времени.

Пусть Ω есть ограниченная область в R^n с гладкой границей S. Обозначим $Q = \Omega \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$, $T = const > 0$; $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \leq t \leq T$.

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение

$$Lu \equiv k(x,t)u_t - \Delta u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{6.1}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (6.1) достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$. Функция $k(x,t)$ может произвольно менять свой знак внутри области Q, но на основаниях цилиндра она имеет постоянный знак.

Краевая задача I. Найти решение уравнения (6.1) в Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{6.2}$$

$$u(x,0) = \mu u(x,T), \quad x \in \Omega, \tag{6.3}$$

где μ действительное число.

Краевая задача II. Найти решение уравнения (6.1) в Q такое, что выполнены условие (6.2) и

$$u(x,0) = \int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau, \tag{6.4}$$

где $N(t) \in L_2(0,T)$ есть заданная функция.

В анизотропном пространстве Соболева $W_2^{m,s}(Q)$ введем норму

$$||u||^2_{m,s} = \int\limits_Q \left[\sum_{|\alpha|\le m} (D_x^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2 \right] dQ$$

с $||u||_{m,m} = ||u||_m$ для $u \in W_2^{m,m}(Q) = W_2^m(Q)$. Обозначим через

$$(u,v)_0 = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \ \ \forall u,v \in L_2(\Omega),$$

скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$, и $(u,v) = \int\limits_0^T (u,v)_0 dt$ для $u,v \in L_2(Q)$, $||u||^2 = (u,u)$.

Разрешимость краевой задачи I

Введем класс функций

$$C_L = \{u(x,t): \ \ u \in W_2^{2,1}(Q), \ \ v_{x_ix_jt} \in L_2(Q), \ \ i,j = \overline{1,n} \ \text{ и выполнены условия (2), (3)}\}.$$

Интегрированием по частям, доказывается утверждение.

Лемма 6.1 *Пусть выполнены условия*

$$c - \frac{1}{2}k_t \ge 0, \ \ k(x,0) > 0, \ \ k(x,T) > 0,$$

$$|\mu| \le \min_{x\in\overline{\Omega}} \sqrt{\frac{k(x,T)}{k(x,0)}}.$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$(Lu,u) \ge C_1||u||^2_{1,0}, \ \ C_1 = const > 0.$$

для всех функций $u \in C_L$.

Из Леммы 6.1 следует единственность регулярного решения краевой задачи (6.1)-(6.3).

Для $0 < \varepsilon \le 1$ положим $L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{tt} + Lu$. Пусть функции $\varphi_k(x)$ являются решениями спектральной задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \ \ x \in \Omega, \ \ \varphi|_S = 0.$$

Функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Omega)$, соответствующие им собственные значения $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ...,\quad \lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Приближенное решение имеет вид

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \ge 1, \;\; 0 < \varepsilon \le 1,$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \;\; l = \overline{1,N}, \tag{6.5}$$

$$c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = \mu c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T}, \;\; D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = \mu D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0}. \tag{6.6}$$

Из Леммы 6.1 непосредственно следует

Лемма 6.2 *Пусть выполнены все условия Леммы 6.1. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\varepsilon||u_t^{N,\varepsilon}||^2 + ||u^{N,\varepsilon}||^2_{1,0} \le C_2||f||^2, \;\; C_2 = const > 0.$$

Из этой оценки следует однозначная разрешимость краевой задачи (6.5), (6.6).

Мы доказываем априорные оценки для приближенного решения $u^{N,\varepsilon}(x,t)$. Из них получаем

Теорема 6.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

$$c - \frac{1}{2}k_t \ge 0, \;\; c + \frac{1}{2}k_t \ge \delta > 0, \;\; k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) > 0,$$

$$|\mu| \le \min\left\{1; \min_{x\in\overline{\Omega}}\sqrt{\frac{k(x,T)}{k(x,0)}}; \min_{x\in\overline{\Omega}}\sqrt{\frac{k(x,0)}{k(x,T)}}\right\}.$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q)$, такой, что $f(x,0) = \mu f(x,T)$ п.в. в Ω, краевая задача (6.1)-(6.3) *имеет единственное решение $u(x,t) \in C_L$, и справедлива априорная оценка:*

$$||u||^2_{2,1} + ||\Delta u_t||^2 \le C_3||f||^2_{0,1}, \;\; C_3 = const > 0.$$

Аналогично [46], получена оценка погрешности метода Галеркина.

Теорема 6.2 *Пусть выполнены все условия Теоремы 6.1. Тогда справедлива оценка погрешно-*

сти:

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_{1,0} \le C_4 \|f\|_{0,1}(\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-1/2}), \quad C_4 = const > 0,$$

где $u(x,t)$ *есть точное решение краевой задачи* (6.1)-(6.3), C_4 *не зависит от* ε, N, $f(x,t)$.

Разрешимость краевой задачи II

Введем пространство

$$W_L = \{u(x,t) : u \in W_2^{2,1}(Q); \quad u_{x_i x_j t} \in L_2(Q), i,j = \overline{1,n}\}$$

с нормой $||u||_L = ||u||_{2,1} + ||\Delta u_t||$.

Пусть функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи (6.1), (6.2), (6.4) in W_L. Тогда функция $v(x,t) = u(x,t) - \int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau$ будет решением следующей задачи.

Вспомогательная краевая задача. Найти решение уравнения

$$Lv = F(x,v) + f(x,t), \tag{6.7}$$

такое, что выполнены условия (6.2) и

$$v|_{t=0} = 0, \tag{6.8}$$

где $F(x,v) = N_1 \int\limits_0^T N(\tau)[\Delta v(x,\tau) - c(x,\tau)v(x,\tau)]d\tau, \quad N_1 = \int\limits_0^T N(\tau)d\tau,$

В работе [46] было доказано, что краевая задача (6.1), (6.2), (6.4) при $N(t) \equiv 0$ имеет единственное решение $v_0(x,t) \in W_L$ и имеет место следующая оценка:

$$||v_0||_L \le C_0||f||_{0,1}, \quad C_0 = const > 0, \tag{6.9}$$

где C_0 зависит от коэфициентов уравнения (6.1) и T.

Для любой функции $v(x,t) \in W_L$, справедливо следующее неравенство:

$$||F(x,v)|| \le C_5|N_1|T^{1/2}||N||_{L_2(0,T)}||v||_L,$$

где положительная постоянная C_5 зависит только от $c(x,t)$.

Аналогично [43] методом последовательных приближений доказывается следующее утверждение, где $v_0(x,t)$- нулевое приближение.

Теорема 6.3 *Предположим, что*

$$c - \frac{1}{2}k_t \geq 0, \;\; c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \;\; k(x,0) > 0, \;\; k(x,T) > 0,$$

$$q = C_0 C_5 |N_1| T^{1/2} ||N||_{L_2(0,T)} < 1, \;\; f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q), \;\; f(x,0) = 0$$

п.в. в Ω. *Тогда краевая задача* (6.7), (6.2), (6.8) *имеет единственное решение* $v(x,t) \in W_L$, *и справедлива оценка сходимости :*

$$||v - v_m||_L \leq C_0 \frac{2+q}{1-q} ||f||_{0,1} q^m,$$

где $v_m(x,t)$ *приближение с номером* m *для* $v(x,t)$.

Пусть $v(x,t)$ есть решение краевой задачи (6.7), (6.2), (6.8) в W_L, гарантированное теоремой 6.3. Положим

$$u(x,t) = v(x,t) + N_1 \int_0^T N(\tau) v(x,\tau) d\tau,$$

$$u_m(x,t) = v_m(x,t) + N_1 \int_0^T N(\tau) v_m(x,\tau) d\tau.$$

Тогда нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 6.4 *Пусть выполнены все условия Теоремы 6.3. Тогда краевая задача* (6.1), (6.2), (6.4) *имеет единственное решение* $u(x,t) \in W_L$, *и справедлива оценка сходимости:*

$$||u - u_m||_L \leq C_0 \frac{2+q}{1-q} (1 + |N_1| T^{1/2} ||N||_{L_2(0,T)}) \|f\|_{0,1} q^m.$$

7 Краевые задачи с интегральным граничным условием для уравнения смешанно-составного типа высокого порядка

Краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка исследовались в [47, 42, 48, 49]. С другой стороны, много работ посвящено изучению уравнений составного типа (например, [44, 50]). Поэтому краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа высокого порядка представляют определенный интерес [51, 52]. В данной работе рассматриваются две краевые задачи с интегральным граничным условием для уравнения смешанно-составного типа высокого порядка.

Пусть Ω есть ограниченная область в R^n с гладкой границей S. Обозначим $Q = \Omega \times (0,T)$, $S_T = S \times (0,T)$, $T = const > 0$, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$, $0 \leq t \leq T$.

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t) D_t^i u - \Delta u_t + c(x)u = f(x,t) \qquad (7.1)$$

и краевые условия

$$u|_{S_T} = 0, \qquad (7.2)$$

$$u(x,0) = \int_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau, \qquad (7.3)$$

где $N(t) \in L_2(0,T)$ заданная функция.

Предполагается, что коэффиценты уравнения (7.1) - достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$ и выполнено условие: $(-1)^{s-1}k_{2s}(x,0) > 0$. Функция $k_{2s}(x,t)$ может произвольно менять свой знак внутри области Q.

Введем множества

$$\Omega_T^+ = \{(x,t) : (-1)^{s-1}k_{2s}(x,T) > 0, \ \ x \in \Omega\}, \ \ \Omega_T^- = \{(x,T) : (-1)^{s-1}k_{2s}(x,T) < 0, \ \ x \in \Omega\}.$$

Краевая задача I. Найти решение уравнения (7.1) в Q, такое, что выполнены условия (7.2), (7.3) и

$$D_t^i u|_{t=0,t=T}=0,\ \ i=\overline{1,s-1};\ \ D_t^s u|_{t=0}=0,\ \ D_t^s u|_{\overline{\Omega}_T^-}=0. \tag{7.4}$$

Краевая задача II. Найти решение уравнения (7.1) в Q, такое, что выполнены условия (7.2), (7.3) и

$$D_t^i u|_{t=0}=0,\ \ i=\overline{1,s};\ \ D_t^j u|_{t=T}=0,\ \ j=\overline{s+1,2s-1};\ \ D_t^s u|_{\overline{\Omega}_T^-}=0. \tag{7.5}$$

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ анизотропное пространство Соболева с нормой

$$||u||_{m,s}^2=\int\limits_Q\left[\sum_{|\alpha|\le m}(D_x^\alpha u)^2+(D_t^s u)^2\right]dQ;$$

$$||u||_{m,m}=||u||_m\ \text{ for }\ u\in W_2^{m,m}(Q)=W_2^m(Q).$$

Обозначим

$$(u,v)_0=\int\limits_\Omega u(x)v(x)dx,\ \ \forall u,v\in L_2(\Omega),$$

скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$, $\ ||u||^2=(u,u)$.

Введем пространство

$$W_L=\{u(x,t):u\in W_2^{2,2s}(Q);\ \ u_{tx_ix_j}\in L_2(Q),i,j=\overline{1,n}\}$$

с нормой $||u||_L=||u||_{2,2s}+||\Delta u_t||$.

Обозначим $N_0=\int\limits_0^T N(\tau)d\tau$, $N_1=(1-N_0)^{-1}$.

Разрешимость вспомогательной краевой задачи

Пусть $u(x,t)\in W_L$ является решением краевой задачи (7.1)-(7.4). Тогда функция

$$v(x,t)=u(x,t)-\int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau$$

будет решением следующей краевой задачи.

Вспомогательная краевая задача. Найти решение уравнения

$$Lv=F(x,v)+f(x,t) \tag{7.6}$$

такое, что выполнены условие (7.2) и

$$D_t^i v|_{t=0} = 0, \;\; i = \overline{0, s}; \;\; D_t^j v|_{t=T} = 0, \;\; j = \overline{1, s-1}; \;\; D_t^s v|_{\overline{\Omega_T^-}} = 0, \tag{7.7}$$

где $F(x, v) = -c(x)N_1 \int\limits_0^T N(\tau)v(x, \tau)d\tau$.

В работе [51] доказано, что краевая задача (7.6), (7.2), (7.7) при $N(t) \equiv 0$ имеет единственное решение $v_0(x, t) \in W_L$, при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения, и справедлива следующая оценка:

$$||v_0|| \leq C_0||f||_{0,1}, \;\; C_0 = const > 0.$$

Для любой функции $v(x, t) \in W_L$ справедливо следующее неравенство:

$$||F(x, v)|| \leq C_1|N_1|T^{1/2}||N||_{L_2(0,T)}||v||_L,$$

где положительная постоянная C_1 зависит только от коэффициента $c(x)$.

Методом последовательных приближений доказывается следущая теорема, где $v_0(x, t)$- нулевое приближение.

Теорема 7.1 *Пусть $c(x) \geq d_0$, для достаточно большого числа $d_0 > 0$ и выполнены следующие условия:*

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(x, 0) > 0, \;\; (-1)^{s-1}k_{2s}(x, T) < 0,$$

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \geq \delta > 0, \;\; (-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + k_{2s,t}] \geq \delta > 0,$$

$$q = C_0C_1|N_1|T^{1/2}||N||_{L_2(0,T)} < 1.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in W_2^{0,1}(Q)$ такой, что $f(x, 0) = 0$ п.в. в Ω, краевая задача (7.6), (7.2), (7.7) *имеет единственное решение $v(x, t) \in W_L$ и справедлива оценка сходимости:*

$$||v - v_m|| \leq C_0\frac{2+q}{1-q}||f||_{0,1}q^m,$$

где $v_m(x, t)$- приближения с номером m.

Разрешимость нелокальных краевых задач

Выше доказано, что краевая задача (7.6), (7.2), (7.7) имеет единственное решение $v(x, t) \in$

W_L. Обозначим

$$u(x,t) = v(x,t) + N_1 \int\limits_0^T N(\tau) v(x,\tau) d\tau,$$

$$u_m(x,t) = v_m(x,t) + N_1 \int\limits_0^T N(\tau) v_m(x,\tau) d\tau.$$

Тогда нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 7.2 *Пусть выполнены все условия Теоремы 7.1 и* $T^{1/2}||N||_{L_2(0,T)} < 1$. *Тогда краевая задача* (7.1)-(7.4) *имеет единственное решение* $u(x,t) \in W_L$ *и справедлива оценка сходимости:*

$$||u - u_m|| \le C_0 \frac{2+q}{1-q} (1 + |N_1| T^{1/2} ||N||_{L_2(0,T)}) \|f\|_{0,1} q^m. \tag{7.8}$$

Пусть $v_0(x,t)$ является решением краевой задачи в работе [52]. Аналогично Теореме 7.2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 7.3 *Пусть выполнены условия Теоремы 7.2, но функция* $k_{2s}(x,t)$ *имеет другой знак на верхнем основании цилиндра:* $(-1)^{s-1} k_{2s}(x,T) > 0$. *Тогда краевая задача* (7.1)-(7.3), (7.5) *имеет единственное решение* $u(x,t) \in W_L$ *и справедлива оценка сходимости* (7.8).

8 Абстрактные уравнения Маккина-Власова и Гамильтона-Якоби-Беллмана и их дробные аналоги

В данном разделе мы вводим класс абстрактных нелинейных дробных псевдодифференциальных уравнений в банаховых пространствах, который включает в себя как уравнения типа Маккина-Власова, описывающие нелинейные марковские процессы, так и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса стохастического управления и игр. Такой подход позволяет развить единый анализ этих уравнений.

Рассматриваются нелинейные задачи Коши следующего вида

$$\dot{b}(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), \alpha), \quad b(a) = Y, \quad t \geq a, \tag{8.1}$$

где A, $D_1, \cdots, D_n$ – неограниченные линейные операторы в банаховом пространстве B, $D = (D_1, \cdots, D_n)$, α – параметр из другого банахова пространства B^{par} и H является непрерывным отображением $\mathbf{R} \times B \times B^n \times B^{par} \to B$, их дробные аналоги

$$D^{\beta}_{a+*} b(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), \alpha), \quad b(a) = Y \quad t \geq a, \tag{8.2}$$

где D^{β}_{a+*} – дробная производная Капуто-Джербашяна порядка $\beta \in (0, 1)$:

$$D^{\beta}_{a+*} b(t) = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_0^{x-a} \frac{b(t-z) - b(t)}{z^{1+\beta}} dz + \frac{b(t) - b(a)}{\Gamma(1-\beta)(t-a)^{\beta}}, \tag{8.3}$$

и их расширение на обобщенные дробные уравнения:

$$D^{(\nu)}_{a+*} b(t) = Ab(t) + H(t, b(t), Db(t), \alpha), \quad b(a) = Y \quad t \geq a, \tag{8.4}$$

где $D^{(\nu)}_{a+*}$ – обобщенная дробная производная, зависящая от меры ν на $(0, \infty)$:

$$D^{(\nu)}_{a+*} b(t) = \int_0^{x-a} (b(t-z) - f(t)) \nu(dz) + (b(t) - b(a)) \int_{x-a}^{\infty} \nu(dz). \tag{8.5}$$

Здесь ν – так называемая односторонняя мера Леви, означающая, что $\int_0^{\infty} \min(y, 1) \nu(dy) = 0$. Это общее выражение включает в себя различные частные случаи, включая дробные производные медленного роста и смешанные дробные производные.

Основные рассматриваемые примеры касаются случая, когда B является пространством функций на $\mathbf{R}^d$ и D – оператор градиента. В частности, дробное уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса управляемых марковских процессов (с внешним параметром) является уравнением вида

$$D^{\beta}_{a+*}f(t,x) = Af(t,x) + H(t,x,f(t,x),\frac{\partial f}{\partial x}(t,x),\alpha), \tag{8.6}$$

для которого наиболее естественным банаховым пространством является $B = C_\infty(\mathbf{R}^d)$ (пространство непрерывных функций на $\mathbf{R}^d$, стремящихся к нулю на бесконечности). Гамильтониан H, возникающий из оптимального управления, обычно даже не зависит явно от f, а только от его градиента, и он записывается в следующем виде

$$H(t,x,f,p,\alpha) = H(t,x,p,\alpha) = \sup_{u\in U}[J(t,x,u) + g(t,x,u)p], \tag{8.7}$$

с некоторыми функциями J, g, где U – компактное множество управлений (или с $\inf\sup$ вместо простого $\sup$ в случае уравнений Айзекса). Для таких H дробное уравнение (8.6) получено в [53] как уравнение Беллмана для оптимального управления масштабируемыми пределами случайных блужданий в непрерывном времени.

Дробной версией уравнений типа Маккина-Власова (описывающих нелинейные марковские процессы в смысле [54]) являются квазилинейные уравнения типа

$$D^{\beta}_{a+*}f(t,x) = A^*f(t,x) + \sum_{j=1}^{d} h_j(t,x,\{f(t,.)\},\alpha)\frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x), \tag{8.8}$$

для которых наиболее естественным банаховым пространством является $L_1(\mathbf{R}^d)$ (или пространство борелевских мер на $\mathbf{R}^d$). В этих уравнениях A – генератор феллеровского процесса в $\mathbf{R}^d$ и A^* – его двойственный оператор. В то время как H в (8.6) зависит от точечных значений f, функции h_j в (8.8) обычно зависят от некоторых интегралов от f. Абстрактная структура уравнений (8.2) позволяет рассматривать эти случаи единым образом.

Приведем некоторые вспомогательные сведения, используемые в работе.

Наиболее удобной для наших целей формулой для функции Миттаг-Леффлера является ее интегральное представление (Формула Золотарева, или Формула Золотарева-Полларда)

$$E_\beta(s) = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{sx}x^{-1-1/\beta}G_\beta(1,x^{-1/\beta})\,dx, \tag{8.9}$$

где

$$G_\beta(t,x) = \frac{1}{\pi} Re \int_0^\infty \exp\left\{ipx - tp^\beta e^{i\pi\beta/2}\right\} dp$$

– ядро теплопроводности (решение с начальным условием Дирака) уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} G(t,x),$$

или, в вероятностной терминологии, плотность вероятности перехода устойчивого субординатора Леви индекса β. Удобство этой формулы связано с тем, что она позволяет определить $E_\beta(A)$ для оператора A всякий раз, когда A порождает полугруппу, так что e^{At} корректно определена.

Из (8.9) следует, что

$$E'_\beta(s) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{sx} x^{-1/\beta} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx, \tag{8.10}$$

так что интеграл справа является конечным.

Нам также понадобится хорошо известная формула преобразования Меллина функции G_β:

$$\int_0^\infty x^{-\omega} G_\beta(1, x^{-1/\beta})\, dx = \frac{\Gamma(1-\omega+1/\beta)}{\beta\Gamma(\beta - \beta\omega + 1)}, \tag{8.11}$$

справедливая для $\omega < 1 + 1/\beta$, см. доказательство, например, Утверждение 8.1.1 в работе [55].

Далее, для банахова пространства B и $\tau < t$ мы обозначим $C([\tau,t],B)$ банахово пространство непрерывных функций $f : [\tau,t] \to B$ с нормой

$$\|f\|_{C([\tau,t],B)} = \sup_{s\in[\tau,t]} \|f(s)\|_B,$$

и $C_Y([\tau,t],B)$ его замкнутое подмножество, состоящее из функций f таких, что $f(\tau) = Y$, которое является полным метрическим пространством при индуцированной топологии.

Для замкнутого выпуклого подмножества M из B $C_Y([\tau,t],M)$ обозначает выпуклое подмножество $C_Y([\tau,t],B)$ функций со значениями в M.

Приведем следующую теорему, которая является версией принципа неподвижной точки, специально разработанная для использования в нелинейных диффузионных и дробных уравнениях (см. Теорема 2.1.3 из [55]).

Теорема 8.1 *Предположим, что для любого* $Y \in M$, $\alpha \in B_1$, *с* B_1 *другое банахово простран-*

ство, отображение $\Phi_{Y,\alpha} : C([\tau, T], M) \to C_Y([\tau, T], M)$ задано с некоторым $T > \tau$ такое, что для любого t ограничение $\Phi_{Y,\alpha}(\mu_.)$ на $[\tau, t]$ зависит только от ограничения функции μ_s на $[\tau, t]$. Более того,

$$\begin{aligned} &\|[\Phi_{Y,\alpha}(\mu^1_.)](t) - [\Phi_{Y,\alpha}(\mu^2_.)](t)\| \le L(Y) \int_\tau^t (t-s)^{-\omega} \|\mu^1_. - \mu^2_.\|_{C([\tau,s],B)}\, ds, \\ &\|[\Phi_{Y_1,\alpha_1}(\mu_.)](t) - [\Phi_{Y_2,\alpha_2}(\mu_.)](t)\| \le \varkappa \|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1 \|\alpha_1 - \alpha_2\|, \end{aligned} \tag{8.12}$$

для всех $t \in [\tau, T]$, $\mu^1, \mu^2 \in C([\tau, T], M)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in B_1$, некоторых констант $\varkappa, \varkappa_1 \ge 0$, $\omega \in [0, 1)$, и непрерывной функции L на M.

Тогда для любых $Y \in M$, $\alpha \in B_1$ отображение $\Phi_{Y,\alpha}$ имеет единственную неподвижную точку $\mu_{t,\tau}(Y, \alpha)$ в $C_Y([\tau, T], M)$. Более того, если $\omega > 0$, тогда для всех $t \in [\tau, T]$,

$$\|\mu_{t,\tau}(Y, \alpha) - Y\| \le E_{1-\omega}(L(Y)\Gamma(1-\omega)(t-\tau)^{1-\omega}) \|[\Phi_{Y,\alpha}(Y)](t) - Y\|, \tag{8.13}$$

и неподвижные точки $\mu_{t,\tau}(Y_1, \alpha_1)$ и $\mu_{t,\tau}(Y_2, \alpha_2)$ с различными начальными данными Y_1, Y_2 и параметрами α_1, α_2 удовлетворяют оценке (для любого $j = 1, 2$)

$$\|\mu_{t,\tau}(Y_1, \alpha_1) - \mu_{t,\tau}(Y_2, \alpha_2)\| \le (\varkappa \|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1 \|\alpha_1 - \alpha_2\|) E_{1-\omega}(L(Y_j)\Gamma(1-\omega)(t-\tau)^{1-\omega}). \tag{8.14}$$

Если $\omega = 0$, эти оценки упрощаются

$$\|\mu_{t,\tau}(Y, \alpha) - Y\| \le e^{(t-\tau)L(Y)} \|[\Phi_{Y,\alpha}(Y)](t) - Y\|, \tag{8.15}$$

$$\|\mu_{t,\tau}(Y_1, \alpha_1) - \mu_{t,\tau}(Y_2, \alpha_2)\| \le (\varkappa \|Y_1 - Y_2\| + \varkappa_1 \|\alpha_1 - \alpha_2\|) \exp\{(t-\tau) \min(L(Y_1), L(Y_2))\}. \tag{8.16}$$

Для двух банаховых пространств B, C обозначим $\mathcal{L}(B, C)$ банахово пространство ограниченных линейных операторов $B \to C$ с обычной операторной нормой, обозначенной $\|.\|_{B \to C}$.

Последовательности вложенных банаховых пространств $B_2 \subset B_1 \subset B$ с нормами, обозначенными $\|.\|_2, \|.\|_1, \|.\|$, соответственно, будем называть *банаховой тройкой* (вложенных пространств) или *банаховой башней порядка* 3, если нормы упорядочены $\|.\|_2 \ge \|.\|_1 \ge \|.\|$, и B_2 плотно в B_1 в топологии B_1, тогда как B_1 плотно в B в топологии B.

Следующие условия (A) играют ключевую роль в данной работе:

(i) Пусть $B_2 \subset B_1 \subset B$ – банахова тройка, с нормами, обозначенными $\|.\|_2, \|.\|_1, \|.\|$, соответственно, и пусть

$$D_i \in \mathcal{L}(B_1, B) \cap \mathcal{L}(B_2, B_1), \quad i = 1, \cdots, n.$$

Без ограничения общности, мы предполагаем, что нормы всех D_j ограничены 1 как в $\mathcal{L}(B_1, B)$, так и в $\mathcal{L}(B_2, B_1)$.

(ii) Пусть $A \in \mathcal{L}(B_2, B)$ и A порождает сильно непрерывную полугруппу e^{At} как в B, так и в B_1, так что

$$\|e^{At}\|_{B \to B} \leq M e^{mt}, \quad \|e^{At}\|_{B_1 \to B_1} \leq M_1 e^{tm_1}, \tag{8.17}$$

с некоторыми неотрицательными константами M, m, M_1, m_1 и B_2 является инвариантным ядром этой полугруппы в B.

(iii) Пусть B^{par} – другое банахово пространство (параметров) с нормой, обозначенной $\|.\|_{par}$ и $H : \mathbf{R} \times B \times B^n \times B^{par} \to B$ – непрерывное отображение, липшицево в том смысле, что

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \alpha) - H(t, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n, \alpha)\|$$

$$\leq L_H \sum_{j=0}^{n} \|b_j - \tilde{b}_j\|(1 + L'_H \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|), \tag{8.18}$$

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \alpha) - H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \tilde{\alpha})\| \leq L_H^{par} \|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{par}(1 + \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|), \tag{8.19}$$

и имеет линейный рост

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \alpha)\| \leq L_H \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|, \tag{8.20}$$

с некоторыми константами L_H, L'_H, L_H^{par}.

Предположим, что выполнено следующее свойство сглаживания полугруппы e^{At}: при $t > 0$ она переводит B в B_1 и

$$\|e^{At}\|_{B \to B_1} \leq \varkappa t^{-\omega}, \quad t \in (0, 1], \tag{8.21}$$

с некоторыми константами $\varkappa > 0$ и $\omega \in (0, 1)$. Иногда используется аналогичное условие для пары B_1, B_2:

$$\|e^{At}\|_{B_1 \to B_2} \leq \varkappa_1 t^{-\omega}, \quad t \in (0, 1]. \tag{8.22}$$

Так называемая мягкая форма задачи Коши (8.1) представляет собой интегральное уравнение

$$b(t) = e^{A(t-a)}Y + \int_a^t e^{A(t-s)} H(s, b(s), Db(s), \alpha)\, ds, \quad t \geq a. \tag{8.23}$$

Хорошо известно (см., например, [55]), что если $b(t)$ является решением уравнения (8.1), то она также решает уравнение (8.23), так что единственность решения уравнения (8.23) следует из единственности для уравнения (8.1).

Доказана следующая теорема о корректности уравнения (8.23).

Теорема 8.2 *Пусть выполнены условия (A) и свойство гладкости* (8.21)*. Тогда уравнение* (8.23) *корректно в B_1, то есть для любого $Y \in B_1$, $\alpha \in B^{par}$ существует его единственное глобальное решение $b(t) = b(t; Y, \alpha) \in B_1$, которая липшиц-непрерывно зависит от начальных данных Y и параметра α. В частности,*

$$\sup_{t \in [a,T]} \|b(t; Y, \alpha) - b(t; \tilde{Y}, \tilde{\alpha})\|_1 \leq K \left(\|\alpha - \tilde{\alpha}\|_{par}(1 + \|Y\|_1) + \|Y - \tilde{Y}\|_1 \right), \tag{8.24}$$

с постоянной K, зависящей от $t - a$ и всех констант, входящих в условия теоремы.

Для случая уравнения (8.2), напомним, что его мягкая форма представляет собой интегральное уравнение

$$b(t) = E_\beta(A(t-a)^\beta)Y + \beta \int_a^t (t-s)^{\beta-1} E'_\beta(A(t-s)^\beta) H(s, b(s), Db(s), \alpha)\, ds, \tag{8.25}$$

где $E_\beta(A)$ определяется формулой (8.9).

Доказана следующая теорема.

Теорема 8.3 *Пусть выполнены условия (A) и свойство гладкости* (8.21)*. Тогда уравнение* (8.25) *корректно в B_1, то есть для любого $Y \in B_1$, $\alpha \in B^{par}$ существует его единственное глобальное решение $b(t) = b(t; Y, \alpha) \in B_1$, которая липшиц-непрерывно зависит от начальных данных Y и параметра α, так что выполняется* (8.24)*.*

Для получения классических решений рассматриваемых уравнений, введем дополнительный набор предположений. Для краткости опускаем зависимость H от α.

Условия (B): Функция H непрерывна как отображение $H : \mathbf{R} \times B_1 \times (B_1)^n \to B_1$, и липшицева в том смысле, что

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n) - H(t, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n)\|_1 \le L_H \sum_{j=0}^{n} \|b_j - \tilde{b}_j\|_1 (1 + L'_H \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|_1), \tag{8.26}$$

и имеет линейный рост

$$\|H(t, b_0, b_1, \cdots, b_n, \alpha)\|_1 \le \tilde{L}_H \sum_{j=0}^{n} \|b_j\|_1, \tag{8.27}$$

и e^{At} ограничена в B_2, так что

$$\|e^{At}\|_{B_2 \to B_2} \le M_2 e^{tm_2}, \tag{8.28}$$

с некоторыми неотрицательными константами M_2, m_2.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.4 *Пусть условия (A), (B) и условия гладкости* (8.21), (8.22) *выполнены. Тогда уравнения* (8.1), (8.2) *корректны для начальных условий в B_2, т.е. для любого $Y \in B_2$ существуют единственные глобальные решения этих задач, которые липшиц-непрерывно зависят от начальных данных Y в норме B_2.*

Условие (8.26) выглядит совершенно естественно в нашем абстрактном контексте. Однако, хотя это часто выполняется для квазилинейных уравнений типа Маккина-Власова, обычно трудно проверить для уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана, поскольку функции Гамильтона оптимального управления часто липшицевы, но не гладкие. Для решения этой проблемы введем следующие условия (C): Функция H непрерывна как отображение $H : \mathbf{R} \times B_1 \times B_1^n \to B_1$, и имеет линейный рост в смысле (8.27), и выполняется (8.28).

Обозначим через B^R замкнутые шары радиуса R в банаховом пространстве B. Пусть $\bar{B}_1^R$ и $\bar{B}_2^R$ обозначают замыкание B_1^R в B и замыкание B_2^R в B_1, соответственно. Хотя условия следующего результата выглядят немного запутанными, они оказываются естественными для стандартных уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана, где $B_1 = C^1(\mathbf{R}^d)$ и $\bar{B}_1^R$ становится множеством всех липшицевых функций с константой Липшица, ограниченной R.

Теорема 8.5 *Пусть условия (A), (C) и и условия гладкости* (8.21), (8.22) *выполнены. Более того, пусть D_j продолжаются до непрерывных отображений $\bar{B}_2^R \to \bar{B}_1^R$ для любого R и e^{At} продолжается до отображений $\bar{B}_1^R \to B_2$. Тогда уравнения* (8.1) *и* (8.2) *корректны для начальных условий в B_2, то есть для любого $Y \in B_2$ существуют единственные глобальные решения этих задач.*

9 Мягкие 3-звезды и 3-цепи в плоских графах

(I) Еще в 1904 г. Вернике [56] доказал, что каждый граф G с минимальной степенью $\delta = 5$ имеет вес 2-звезды $w_2 \leq 11$, а Франклин [57] усилил этот результат в 1922 г., доказав существование $(6,5,6)$-цепи, что является точным описанием. В [58] Бородин и Иванова доказали, что существует другое точное описание, "$(5,6,6)$-цепь", и что других точных описаний не существует.

В 1940 г. Лебег [4] дал приближенное описание 5-звезд с центрами в 5-вершинах для случая $\delta = 5$ и обхвата $g \geq 3$. Недавно Бородин и др. получили несколько точных результатов о высоте, весе и структуре таких 5-звезд в предположении отсутствия 6^+-вершин в определенных наборах степеней вершин (см. [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65]).

Высота $h_k(G)$ и вес $w_k(G)$ графа G есть максимальная высота и вес его k-звезд. В 2016 г. Худак, Мачекова, Мадараш и Сироцки [66] рассмотрели класс плоских графов с $\delta = 2$, в которых нет смежных 2-вершин. Они доказали, что $h_3 = w_3 = \infty$, если $g \leq 6$; $h_3 = 5$, если $g = 7$; $h_3 = 3$, если $g \geq 8$; $w_3 = 10$, если $8 \leq g \leq 9$; и $w_3 = 9$, если $g \geq 10$. Для $g = 7$ Худак и др. [66] доказали $11 \leq w_3 \leq 20$, а Бородин и Иванова [67] недавно доказали этот же факт для $w_3 = 12$.

В представленной в отчет статье Бородина, Ивановой рассмотрен класс плоских графов с достаточно большим обхватом g, минимальной степенью δ не менее 2 и без $(k+1)$-цепей, состоящих из вершин степени 2, где $k \geq 1$.

Худак и др. [66] изучили случай $k = 1$ и доказали, в частности, что существует 3-вершина, все соседи которой имеют степень 2 (такая вершина называется *мягкой 3-звездой*), в предположении $g \geq 10$, причем оценка на g точна.

Для первого нерешенного случая $k = 2$ про мягкие 3-звезды известно, что они существуют, если $g \geq 14$, но могут не существовать, если $g \leq 12$.

Бородин и Иванова решили случай $k = 2$, доказав, что мягкие 3-звезды могут не существовать, даже если $g \leq 13$ (см. $k = 2$ в теореме 9.2 ниже). Так же они установили нижнюю и верхнюю границы на g, которые обеспечивают существование мягкой 3-звезды при всех $k \geq 2$.

Нетрудно доказать следующий факт.

Теорема 9.1 *Каждый плоский граф с $\delta = 2$, $g \geq 4k+6$ и без $(k+1)$-цепей содержит вершину степени 2, где $k \geq 2$, содержит мягкую 3-вершину, где $k \geq 2$.*

Основной результат:

Теорема 9.2 *Для всех $k \geq 2$ существует плоский граф с $\delta = 2$, $g \leq 3k + 7$, без $(k+1)$-цепей, состоящих из вершин степени 2, и без мягких 3-звезд.*

Следующие две теоремы решают случай $k = 2$.

Следствие 9.1 *Каждый плоский граф с $\delta = 2$, $g \geq 14$ и без 3-цепей, состоящих из вершин степени 2, содержит мягкую 3-вершину, где оценка 14 неулучшаема.*

Доказательство теоремы 9.2 проводится методом перераспределения эйлеровых вкладов.

(II) Лебег [4] доказал, что каждый плоский граф с минимальной степенью δ не менее 3 и обхватом g не менее 5 содержит цепь на трех вершинах (3-цепь) степени 3 каждая. Описание 3-цепей является точным, если ни один из его параметров не может быть улучшен, и ни один триплет не может быть отброшен.

Бородин и др. [68] дали точное описание 3-цепей в плоских графах с $\delta \geq 3$ и $g \geq 3$, а другое точное описание была дано Бородиным, Ивановой и Косточкой в [69].

В 2015, Бородин и Иванова [70] дали семь точных описаний 3-цепей при $\delta \geq 3$ и $g \geq 4$. Более того, они доказали, что этот набор точных описаний является полным, что стало результатом нового типа в теории плоских графов. Также Бородин и Иванова [71] охарактеризовали все одночленные точные описания при $\delta \geq 3$ и $g \geq 3$. Проблема нахождения всех точных описаний для $g \geq 3$ остается открытой даже для $\delta \geq 3$.

Одиннадцать точных описаний 3-цепей были получены для плоских графов с $\delta = 2$ и $g \geq 4$ Йендролем, Мачековой, Монтасьером и Сотаком [72, 73, 74, 75], четыре из них — для $g \geq 9$. В 2018, Аксенов, Бородин и Иванова [76] доказали девять новых точных описаний 3-цепей для $\delta = 2$ и $g \geq 9$, и доказали, что других точных описаний не существует. Недавно, Бородин и Иванова [77] решили случай $g \geq 8$.

Результат, представляемый в отчет: доказан полный список из 15 точных описаний 3-цепей в плоских графах с $\delta = 2$ и $g \geq 7$.

Существуют эти и только эти 15 точных описаний 3-цепей в плоских графах с минимальной степенью 2 и обхватом не менее 7

Теорема 9.3 *Существуют эти и только эти 15 точных описаний 3-цепей в плоских графах с минимальной степенью 2 и обхватом не менее 7:*

$(T1)$: $\{(2,5,2),(2,3,3)\}$, ([73]);

$(T2)$: $\{(2,5,3)\}$;

$(T3)$: $\{(2,5,2),(3,2,3)\}$;

$(T4)$: $\{(2,4,2),(2,3,3),(2,2,6)\}$, ([73]);

$(T5)$: $\{(2,4,3),(2,2,6)\}$;

$(T6)$: $\{(2,4,2),(2,3,6)\}$;

$(T7)$: $\{(2,4,6)\}$;

$(T8)$: $\{(2,4,2),(3,2,6)\}$;

$(T9)$: $\{2,4,2),(2,2,6),(3,2,5)\}$;

$(T10)$: $\{(2,3,7)\}$;

$(T11)$: $\{(2,3,3),(2,2,7)\}$;

$(T12)$: $\{(2,3,2),(3,2,7)\}$;

$(T13)$: $\{(2,3,2),(2,2,7),(3,2,5)\}$;

$(T14)$: $\{(3,2,10)\}$, ([56]);

$(T15)$: $\{(2,2,10),(3,2,5)\}$, ([56]).

Доказательство теоремы 9.3 проводится методом перераспределения эйлеровых вкладов.

10 Специальные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

Приведем общепринятое определение бесконечных систем. Пусть задана бесконечная система (БС) линейных алгебраических уравнений с бесконечным множеством неизвестных [78]

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n + ... = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n + ... = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n + ... = b_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{10.1}$$

Совокупность численных значений величин x_1, x_2, ... называется *решением системы* (10.1), если после подстановки этих значений в левую часть равенств (10.1), мы получим сходящиеся ряды, и все эти равенства будут удовлетворены.

В систему (10.1) входят и БС, у которых все коэффициенты $a_{i,j}$ отличны от нуля, и БС, у которых все коэффициенты $a_{i,j}$, начиная с некоторого номера j_i, равны нулю. Свойства этих систем могут сильно отличаться, и потому методы их решения могут быть существенно разными. Системы, у которых все коэффициенты $a_{i,j}$ отличны от нуля, назовем *общими бесконечными системами.*

Для таких систем с бесконечным определителем (БО) [78], отличным от нуля, разработана теория их решения [79, 80].

Пример 1. В [81] рассматривается бесконечная в обе стороны система $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jk}\xi_k = \eta_j, \quad j = 0, \pm 1, ...$ Оператор A, определяемый данной системой, должен быть двусторонне обратим и представим в виде суммы положительно определенного и вполне непрерывного операторов. При этих условиях оператор A допускает редукцию относительно любого ортонормированного базиса. Но, этот метод неприменим [81] даже к простой системе $\xi_{j+1} = \eta_j$, $j = 0, \pm 1, \dots,$, так как здесь матрица усеченной системы вырожденная. Вместе с тем, оператор A здесь унитарен.

Пример 2. Задана система в координатном пространстве m ограниченных последовательностей [82]:

$$x_i = x_{i+1} + h_i, \quad i = 1, 2, ... \tag{10.2}$$

Если гауссову систему (10.2) рассмотреть в виде $x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i$, $i = 1, 2, \dots$, то коэффициенты $c_{n,n} = 0 \neq 1$, т. е. критерий однозначной разрешимости выполняется. Общее решение (10.2) имеет вид [82] $X = (a, a - h_1, a - h_1 - h_2, a - h_1 - h_2 - h_3, ...)$. Оно зависит от произвольного параметра a и существует как элемент пространства m не для любого вектора $H \in m$.

Пример 3. Регулярная система может иметь и несколько ограниченных решений [78]. Так, непосредственной подстановкой можно убедиться, что система

$$x_i = \left[1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right] x_{i+1} + \frac{1}{(i+1)^2}, \quad i = 1, 2, ... \tag{10.3}$$

имеет два различных решения: a) $x_i = 1$, b) $x_i = \frac{1}{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. В [78] отмечено, что главным решением будет второе из этих решений.

Рассмотрим систему, подобную системе из Примера 1: $a_j x_j = b_j$, $j = 1, 2, ...$ Эта система имеет вид системы (10.1), если в ней соответствующие коэффициенты приравнены к нулю. Если $\forall j \ a_j \neq 0$, то выражение $x_j = \frac{b_j}{a_j}$ является решением данной системы. Кроме того, редукция формально сходится, поскольку урезанная конечная система полностью совпадает с первыми уравнениями исходной БС. Но, если эту систему рассматривать как БС, то она должна иметь БО, который равен $|A| = \lim\limits_{n\to\infty} |A_n| = \lim\limits_{n\to\infty} a^n$ при $a_j = a \neq 0$. Следовательно, БО $|A|$ равен нулю при $|a| < 1$, а при $|a| > 1$ вообще не существует. Приходим к абсурду. На самом деле, данная система представляет собой фактически одно уравнение с одним неизвестным. То же самое можно сказать и относительно системы из Примера 1. Теперь перейдем к случаю, когда гауссова матрица исходной БС состоит из двух диагоналей, как в Примере 2. Можно считать, что главные диагонали любой гауссовой матрицы БС состоят только из единиц. Система $\sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{j+p} = b^j, \quad j = 0, 1, ...$ для $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = a_3 = ... = 0$, $a - const$, $b - const$, $1 + ab \neq 0$ рассмотрена в [79]. Показано, что рассматриваемя система при условии $|ab| > 1$ ведет себя как конечная система, а при $|ab| < 1$ - как конечная, так и БС.

Рассмотрим БС более общего вида:

$$x_{j-1} + a_j x_j = b_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, \qquad a_j \neq 0. \tag{10.4}$$

1-й способ. Рассматривая (10.4) как одно рекуррентное уравнение [79], получим

$$x_j = \sum_{p=1}^{j-1} \frac{(-1)^{p-1} b_{j-p}}{\prod_{k=j-p+1}^{j} a_k} + \frac{(-1)^{j-1} x_1}{\prod_{k=2}^{j} a_k}, \quad j > 1, \tag{10.5}$$

где x_1 - это произвольная постоянная.

Подставляя выражение (10.5) в уравнение (10.4), убеждаемся, что оно является решением $\forall j$, а поведение решения в бесконечности необходимо исследовать в каждом случае отдельно. Соотношение $x_j = \frac{(-1)^{j-1}x_1}{\prod_{k=2}^{j} a_k}$ является решением уравнения (10.4) в однородном случае. Решение (10.5) соответствует решению одного уравнения с двумя неизвестными, т.е. решению конечной системы с вырожденной матрицей. Используя теорию разностных уравнений, также получим решение (10.5).

2-й способ. Систему (10.4) решаем как общую БС с использованием метода редукции [80].

Используя конечность каждого уравнения системы (10.4), достаточно рассмотреть систему [79]:

$$\begin{gathered} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-2} + a_{n-1}x_{n-1} = b_{n-2}, \\ x_{n-1} + a_n x_n = b_{n-1}, \\ x_n = b_n, \quad n > 2\,. \end{gathered} \tag{10.6}$$

Конечная система (10.6) является редуцированной от БС (10.4). Все уравнения системы (10.6), кроме последнего, полностью совпадают с $n-1$ уравнениями БС (10.4). Последнее уравнение (10.6) является укороченной от соответствующего уравнения (10.4) на одно неизвестное. Решение системы (10.6) имеет вид $x_n = b_n$, $x_{n-1} = b_{n-1} - a_n b_n$, $x_{n-2} = b_{n-2} - a_{n-1}b_{n-1} + a_{n-1}a_n b_n$. Применяя индукцию и заменяя индекс $n-j$ на j, получим редуцированное решение $\overset{n}{x}_j = \sum_{p=0}^{n-j}(-1)^p b_{j+p}\prod_{k=1}^{p} a_{j+k}$, $\prod_{k=1}^{0} a_k = 1$. Переходя в последнем выражении к пределу при $n \to \infty$, формально получим решение системы (10.4):

$$x_j = \lim_{n\to\infty} \overset{n}{x}_j = b_j + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p b_{j+p}\prod_{k=1}^{p} a_{j+k}. \tag{10.7}$$

При сходимости ряда в (10.7) данное выражение действительно является решением системы (10.4), в чем легко убеждаемся, подставляя ее в систему (10.4). Далее, систему (10.4) решаем как общую БС методом редукции в узком смысле, и также придем к решению (10.7). Пусть ряд в (10.7) сходится, тогда выражение (10.7) будет строго частным решением [79, 80]. Следовательно, это решение будет единственным частным решением, которое выражается формулой Крамера. Кроме того, оно не содержит как аддитивное слагаемое нетривиальное решение соответствующей однородной системы, в отличие от решения (10.5). Нетривиальное решение системы (10.4) в однородном случае имеет вид [83], где $\frac{1}{S(j)}$ - нуль характеристики для однородной системы. Из системы (10.4) заключаем, что $S(j) = a_{j+1}$. Таким образом, нетривиальное решение имеет вид второго члена правой части выражения (10.5). Следовательно, общее решение БС (10.4):

$$x_j = b_j + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p b_{j+p} \prod_{k=1}^{p} a_{j+k} + \frac{(-1)^{j-1}C}{\prod_{k=2}^{j} a_k}, \tag{10.8}$$

где C - это произвольная постоянная. Решение (10.8) также можно получить методом редукции в широком смысле. Таким образом, получили два совершенно различных решения (10.5) и (10.8) одной и той же системы (10.4). На самом деле, полным решением системы (10.4) является выражение (10.5) $\forall b_j$ и $\forall a_j \neq 0$. Система (10.4) полностью ведет себя как конечная система. Если на параметры a_j и b_j системы наложены определенные условия, а именно $\sum_{p=j}^{\infty}(-1)^p b_{j+p} \prod_{k=1}^{p} a_{j+k} < \infty \ \forall j$, то она ведет себя как БС.

Рассмотрим конкретную БС (10.2). Имеем $a_j = -1$, тогда формула (10.5) дает решение из [82]. Таким образом, автор в [82] систему (10.4) решил как конечную систему. Далее, из (10.8) с учетом условий на параметры, получим $x_1 = \sum_{p=1}^{\infty} b_p = \alpha < \infty$. Тогда имеет место $x_2 = \alpha - b_1$, $x_3 = \alpha - b_1 - b_2$, $x_3 = \alpha - b_1 - b_2 - b_3$,..., формально получаем решение [82]. В решении [82] параметр a равен произвольной постоянной, а в последнем решении параметр α является вполне конкретным числом, а именно суммой ряда. Таким образом, решение [82] совпадает с решением, полученным при рассмотрении системы (10.2) как БС тогда и только тогда, когда $a = \alpha$. Следовательно, систему (10.2) необходимо рассматривать скорее как конечную систему, вместе с тем при выполнении определенных условий на свободный вектор данная система ведет себя как БС. В этом случае существуют строго частное решение и нетривиальное решение соответствующей однородной системы.

Решим систему (10.3) **примера 3** [78]. Сначала ее решим как конечную систему, используя решение (10.5) при $a_j = \frac{(1-j)(j+1)}{j^2}$ и $b_{j-1} = \frac{1}{j^2}$. Тогда, вычисляя $\prod_{k=2}^{j} a_k = \frac{(-1)^{j-1}(j+1)}{2j}$, $\prod_{k=j-p+1}^{j} a_k = \frac{(-1)^p(j-p)(j+1)}{j(j-p+1)}$, получим общее решение в виде $x_j = \frac{1-j}{1+j} + \frac{jC}{j+1}$, $C - \forall const$. При значениях постоянной $C = 2$ и $C = 1$ получим решение, приведенное в [78], при этом в [78] отмечено, что решение $x_j = \frac{1}{1+j}$ является главным решением. По [79] главное решение, если оно существует, является строго частным решением. Значит, это решение не содержит аддитивное слагаемое нетривиального решения соответствующей однородной системы. Поэтому общее решение нашей системы можно выписать в виде:

$$x_j = \frac{1}{1+j} + \frac{jC}{j+1}. \tag{10.9}$$

Известно, что конечная система не имеет строго частного решения, следовательно, решение (10.8) для данных значений параметров ведет себя как решение БС. Это объясняется тем, что при $j \to \infty$ b_j стремятся к нулю, a_j - к единице, $x_j = \frac{1}{1+j}$ - к нулю, то на бесконечности правые и левые части уравнений системы (10.4) согласуются. Решение (10.8) системы (10.4), полученное как решение БС при данных параметрах, необходимым образом должно совпасть с решением (10.9), что и имеет место. Вычисление главных миноров $A_p(j)$ по рекуррентной формуле [79, 81] или как значение определителя дает $A_p(j) = (-1)^p \frac{j(j+p+1)}{(j+1)(j+p)}$, $p > 0$. Подставляя эти величины и значения свободных членов в (10.7), получим

$$x_j = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_p(j) b_{j+p} = \frac{j}{j+1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(j+p)(j+p+1)} = \frac{1}{j+1}, \quad j = 1, ..., \infty\,. \tag{10.10}$$

Следовательно, выражение (10.10) является строго частным решением системы (10.4) и решения (10.8) и (10.9) полностью совпадают. Таким образом, БС (10.4) примера из [78] ведет себя в равной мере как конечная, так и БС. Такие системы по определению БС являются бесконечными, а по структуре решения они скорее конечные системы. Таким образом, БС, у которых гауссова матрица состоит из конечного числа диагоналей, можно называть *псевдобесконечными системами.* Известны БС, которые по структуре решения близки к БС, но существование решения этих систем также сильно зависит от теории конечных систем. Такими системами являются, например, квазирегулярные системы [78], квазипериодические [83]. Для таких систем характерно то, что начиная с некоторого номера $j = n_0$, все уравнения системы удовлетворяют специфическим условиям специальных систем, а конечное число уравнений не удовлетворяют этим условиям. Такие системы также можно отнести к псевдобесконечным системам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в рамках проекта результаты имеют теоретический характер и расширяют класс ранее изученных задач в области неклассических дифференциальных уравнений и дискретных систем. Исследуемые в рамках проекта задачи и результаты являются принципиально новыми. Выводы и положения основываются на строгих математических доказательствах. Для исследования поставленных задач были использованы методы: априорных оценок, продолжения по параметру, Галеркина, регуляризации, теории полугрупп и пропагаторов линейных операторов, функционального анализа, вариационного исчисления, перераспределения эйлеровых вкладов (зарядов), теории алгебры, а также разработанные авторами подходы и методы.

Правильность выбора методов и подходов в исследованиях подтверждается полученными новыми результатами и улучшениями существующих результатов.

1. Доказаны теоремы о качественных свойствах решений для нелинейных моделей однородных и композитных тел с трещинами. Доказаны теоремы о разрешимости задач оптимального управления расположением жестких включений в нелинейных математических моделях, описывающих равновесие композитных тел.

2. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы уравнений высокого порядка в частных производных с производной Капуто по времени.

3. Доказана регулярная разрешимость краевых задач для уравнений смешанно-составного типа третьего и высокого порядков и нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка составного типа с меняющимся направлением времени. Для рассматриваемых задач установлены оценки сходимости приближенных решений.

4. Введен класс абстрактных нелинейных дробных псевдодифференциальных уравнений в банаховых пространствах, который включает в себя как уравнения типа Маккина-Власова, описывающие нелинейные марковские процессы, так и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса стохастического управления и игр. Доказаны теоремы существования единственных мягких и классических решений для рассматриваемых уравнений.

5. Доказана теорема о существовании мягких 3-звезд в плоских разреженных графах обхвата не менее 14, не содержащих 3-цепей. Дана конструкция, доказывающая точность оценки 14. Найден полный список из 15 точных описаний 3-цепей в плоских графах с минимальной степенью 2 и обхватом 7.

6. Показано существование особого класса бесконечных систем, которые не в полной мере обладают свойствами общих бесконечных систем, но содержат некоторые особенности конечных систем. Для таких систем характерно то, что начиная с некоторого номера, все уравнения системы удовлетворяют специфическим условиям специальных систем, а конечное число уравнений не удовлетворяют этим условиям.

Полученные в рамках данного проекта результаты будут использованы для развития дальнейших исследований и внесут существенный вклад в развитие теории неклассических уравнений с частными производными, в разработке теории бесконечных алгебраических систем, теории графов.

Результаты могут быть применены для исследования математических моделей в статистических и динамических задачах теории упругости твердых тел, вязкоупругости, электродинамики, физики полупроводников, механики полимеров и других процессов современной физики, а также в развитии теории дробных игр среднего поля.

Результаты, полученные в области теории графов, будут использованы для получения новых структурных свойств плоских разреженных графов.

Результаты НИР по данной проблематике используются в образовательном процессе ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.Аммосова" (СВФУ): в подготовке и защите выпускных квалификационных работ студентов, магистрантов, а также кандидатских диссертаций аспирантов по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

По результатам НИР опубликованы и приняты к опубликованию 8 научных статей, в т.ч. индексированы в Web of Science - 4, в SCOPUS - 4. Сделаны 12 научных докладов на международных конференциях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Khludnev A.M., Kovtunenko V.A. Analysis of Cracks in solids. Boston; Southampton: WIT-Press, 2000.

2 Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

3 Khludnev A., Esposito A. C., Faella L. Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions // J. Optim. Theory Appl. 2020. V. 184, N. 1. P. 293–314.

4 Lebesgue H. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19, P. 27–43. .

5 Лазарев Н.П., Семенова Г.М. Задача о равновесии пластины Тимошенко с геометрически нелинейным условием непроникания для вертикальной трещины // Сиб. журн. индустр. матем. 2020. Т. 23, N. 3 С. 65–76.

6 Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наукова думка, 1973.

7 Lazarev N.P. An iterative penalty method for a nonlinear problem of equilibrium of a Timoshenko-type plate with a crack // Numerical Analysis and Applications 2011. V. 4, N. 4. P. 309–318.

8 Lazarev N. P., Itou H., Neustroeva N. V. Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle // Jpn. J. Ind. Appl. Math. 2016. V. 33, N. 1. P. 63–80.

9 Lazarev N. P., Rudoy E. M. Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. 2014. V. 94, N. 9. P. 730–739.

10 Лазарев Н. П. Задача о равновесии пологой оболочки Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, N 3. С. 58–69.

11 Лазарев Н.П. Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, N 4. С. 171–181.

12 Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

13 Rademacher, A., Rosin, K. Adaptive optimal control of Signorini's problem // Computational Optimization and Applications 2018. V. 70, N 2. P. 531–569.

14 Bermúdez A., Saguez C. Optimal control of a Signorini problem // SIAM J. Control Optim. 1987. V. 25, N 3. 576–582.

15 Novotny, A.A., Sokołowski, J. Topological Derivatives in Shape Optimization, Series: Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2013.

16 Sokołowski J., Żochowski A. Topological derivatives for optimization of plane elasticity contact problems // Engineering Analysis with Boundary Elements 2008. V. 32, P. 900–908.

17 Leugering G., Sokolowski J., Zochowski A. Control of crack propagation by shape-topological optimization // Discret. Contin. Dyn. S - Series A. 2015. V. 35, N. 6. P. 2625–2657.

18 Hintermüller M., Laurain A. Optimal shape design subject to variational inequalities // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49, P. 1015–1047.

19 Kovtunenko V. A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model // SIAM J. Control Optim. 2016. V. 54, N. 3. P. 1329–1351.

20 Furtsev A., Itou H., Rudoy E. Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation // International Journal of Solids and Structures. 2020. V. 182-183, P. 100–111.

21 Rudoy E. M. Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body // Angew. Math. Phys. 2015. V. 66, N. 4. P. 1923–1937.

22 Rudoy E. M. First-order and second-order sensitivity analyses for a body with a thin rigid inclusion// Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39, N. 17. P. 4994–5006.

23 Shcherbakov V.V. Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N. 3. N 71.

24 Khludnev A., Negri M. Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks // Z. Angew. Math. und Phys. 2013. V. 64, N 1. P. 179–191.

25 Khludnev A.M. Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies // Arch. Appl. Mech. 2013. V. 83. N. 10. P. 1493–1509.

26 Lazarev N. Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff-Love plate // Bound. Value Probl. 2015. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0437-y.

27 Khludnev A.M., Novotny A.A., Sokołowski J., Zochowski A. Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions // J. Mech. Phys. Solids. 2009. V. 57, N. 10. P. 1718–1732.

28 Lazarev N. P. Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack. // Z. Angew. Math. Mech. 2016 V. 96, N. 4. P. 509–518.

29 Lazarev N. P., Rudoy E. M. Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge // Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97, N. 9. P. 1120–1127.

30 Khludnev A., Popova T. Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control // Computers and Mathematics with Applications. 2019. V. 77, N. 1, P. 253–262.

31 Lazarev N., Everstov V. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2019. V. 99, N. 3. e201800268.

32 Lazarev N., Itou H. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff-Love plates with a crack // Mathematics and Mechanics of Solids. 2019. V. 24, N. 12. P. 3743–3752.

33 Khludnev A. M., Kovtunenko V. A. Analysis of cracks in solids. WIT-Press, Southampton, Boston, 2000.

34 Hlavaček I., Haslinger J., Nečas J., Lovišek J. Solution of Variational Inequalities in Mechanics. Springer-Verlag, New York. 1988.

35 Khludnev A., Negri M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, N. 5. P. 341–354.

36 Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2012. V. 92, N. 9. P. 716–730.

37 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

38 Нахушев А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

39 L. Bers, F. John, and M. Schechter, Partial differential equations, Lectures in Applied Mathematics: Proceedings (Interscience Publishers, 1999).

40 Егоров И.Е., Федоров В.Е., Тихонова И.М. Модифицированный метод Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка и оценка его погрешности // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование 2016. Т. 9, N. 4. С. 30–39.

41 Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.

42 Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. - Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН. - 1995. - С. 3-133.

43 Егоров И.Е., Ефимова Е.С. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием по времени для уравнения нечетного порядка с меняющимся направлением времени // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 1. С. 6-11. DOI.10.25587/SVFU.2019.101.27242.

44 Demidenko G.V. and Uspenskii S.V. Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect Highest-Order Derivative. New York, Basel: Marcel Dekker, 2003.

45 Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. - Utrecht - Boston - Köln - Tokyo: VSP, 2003.

46 Егоров И.Е., Ефимова Е.С. Краевая задача для уравнения третьего порядка, не разрешенного относительно старшей производной// Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 4. С. 28-36. DOI.10.25587/SVFU.2018.4.11314.

47 Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешано-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. - Новосибирск: Наука, 1978. С. 5-13.

48 Чуешев А.В. Разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: НГУ, 2001.

49 Егоров И.Е., Федоров В.Е. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка // Математические заметки ЯГУ. 1999. Т.6, выпуск 1. С.26-35.

50 Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов Н.Д., Пятнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

51 Fedorov V.E. Vragov boundary value problem for a high order equation of mixed-composite type // AIP Conference Proceedings. **2172**, 030007 (2019).

52 Fedorov V.E. Boundary value problem for a high order equation of mixed-composite type // AIP Conference Proceedings. **2159**, 030011 (2019).

53 Kolokoltsov V. N., Veretennikova M. Fractional Hamilton Jacobi Bellman equations for scaled limits of controlled Continuous Time Random Walks. Communications in Applied and Industrial Mathematics, 2014, vol. 6 (1), e-484.

54 V. N. Kolokoltsov. Nonlinear Markov processes and kinetic equations. Cambridge Tracks in Mathematics 182, Cambridge Univ. Press, 2010.

55 Kolokoltsov V. N. Differential Equations on Measures and Functional Spaces. Birkhauser, Cham, Switzerland, 2019.

56 Wernicke P. Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann.. 1904. Volume: 58. P: 413-426. .

57 Franklin Ph. The four-color problem // Amer. J. Math.. 1922. Volume: 44. P: 225-236. .

58 Borodin O.V., Ivanova A.O. An analogue of Franklin's Theorem // Discrete Math.. 2016. Volume: 339. Issue: 10. P: 2553-2556. .

59 Borodin O.V., Ivanova A.O. Low 5-stars in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math.. 2017. Volume: 340. Issue: 2. P: 18-22. .

60 Borodin O.V., Ivanova A.O., Nikiforov D.V. Low minor 5-stars in 3-polytopes with minimum degree 5 and no 6-vertices // Discrete Math.. 2017. V. 340, N 7. P: 1612–1616. .

61 Borodin O.V., Ivanova A.O. Light and low 5-stars in normal plane maps with minimum degree 5 // Sib. Math. J. 2016. V. 57, N 3. P. 470-475. .

62 Borodin O.V., Ivanova A.O., Jensen T.R. 5-Stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2014. V. 34, N 3. P. 539–546. .

63 Borodin O.V., Ivanova A.O. Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2013. V. 313, N. 17. P. 1710–1714. .

64 Borodin O.V., Ivanova A.O., Nikiforov D.V. Describing neighborhoods of 5-vertices in a class of 3-polytopes with minimum degree 5 // Siberian Math. J. 2018. V. 59, N. 1. P. 43–49. .

65 Borodin O.V., Ivanova A.O., Kazak O.N., Vasil'eva E.I. Heights of minor 5-stars in 3-polytopes with minimum degree 5 and no vertices of degree 6 and 7 // Discrete Math. 2018. V. 341, N. 3. P. 825–829. .

66 Hudák P., Maceková M., Madaras T., Široczki P. Light graphs in planar graphs of large girth // Discuss. Math. Graph Theory. 2016. V. 36, N. 1. P. 227–238. .

67 Borodin O.V., Ivanova A.O. Light 3-stars in sparse plane graphs // Siberian Electron. Math. Reports. 2018. V. 15, P. 1344–1352. .

68 Borodin O.V., Ivanova A.O., Jensen T.R., Kostochka A.V., Yancey M.P. Describing 3-paths in normal plane maps // Discrete Math.. 2013. Volume: 313. Issue: 23. P: 2702-2711. .

69 Borodin O.V., Ivanova A.O., A.V. Kostochka Tight descriptions of 3-paths in normal plane maps // J. Graph Theory. 2017. Volume: 85. Issue: 1. P: 115-132. .

70 Borodin O.V., Ivanova A.O. Describing tight descriptions of 3-paths in triangle-free normal plane maps // Discrete Math.. 2015. Volume: 338. Issue: 11. P: 1947-1952. .

71 Borodin O.V., Ivanova A.O. All one-term tight descriptions of 3-paths in normal plane maps without $K_4 - e$ // Dynamic Games and Applications. 2018. Volume: 341. Issue: 12. P: 3425-3433. .

72 Jendrol' S.,Maceková M. Describing short paths in plane graphs of girth at least 5 // Discrete Math.. 2015. Volume: 338. Issue: 9. P: 149-158. .

73 Jendrol' S., Maceková M., Montassier M., Soták R. Optimal unavoidable sets of types of 3-paths for planar graphs of given girth // Discrete Math.. 2016. Volume: 339. Issue: 2. P: 780-789. .

74 Jendrol' S., Maceková M., Montassier M., Soták R. 3-paths in graphs with bounded average degree // Discuss. Math. Graph Theory. 2016. Volume: 36. Issue: 2. P: 339-353. .

75 Jendrol' S., Maceková M., Soták R. Note on 3-paths in plane graphs of girth 4 // Discrete Math.. 2015. Volume: 338. Issue: 9. P: 1643-1648. .

76 Aksenov V.A., Borodin O.V., Ivanova A.O. All tight descriptions of 3-paths in plane graphs with girth at least 9 // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2018. Volume: 15. P: 1174-1181. .

77 O.V.Borodin, A.O.Ivanova Soft 3-stars in sparse plane graphs // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. V. 17, P. 1863–1868. .

78 Л. В. Канторович, В. И. Крылов Приближенные методы высшего анализа. – М.: ГИТТЛ, 1952.

79 Иванова О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М. О главных и строго частных решениях бесконечных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 3. С. 351–362.

80 Fedorov F.M. On the Theory of Infinite Systems of Linear Algebraic Equation //TWMS J. Pure Appl. Math. 2015. V.6, No.2. pp. 202–212. .

81 Ф. М. Федоров, Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.

82 Грибанов, Ю.И. Координатные пространства и бесконечные системы линейных уравнений, IV // Изв. вузов. Матем. 1964. N 2(39). С. 53–64.

83 Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.