Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.К.АММОСОВА
(ФГАОУ ВО СВФУ им.М.К.Аммосова)

УДК 517.956, 519.833, 519.217
Рег N НИОКТР АААА-А17-117021310138-8
Рег N ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
И.о. ректора
СВФУ им.М.К.Аммосова
д-р пед. наук,
______________ Е.И.Михайлова
«31» 01 2019 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(промежуточный, этап 2)

Задание № 1.6069.2017/БЧ

Руководитель НИР,
гл. научн. сотр., д-р физ.-мат. наук ______ 30.01.19 И.Е.Егоров
подпись, дата

Якутск 2019

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,
д-р физ.-мат. наук 30.01.19 И.Е. Егоров (введение, разделы 1, 6, заключение)
подпись, дата

Исполнители темы
д-р физ.-мат. наук 30.01.19 Ф.М. Федоров (раздел 11)
подпись, дата

д-р физ.-мат. наук 30.01.19 С.В. Попов (разделы 7, 8)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 30.01.19 М.С. Троева (введение, раздел 10, заключение)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 30.01.19 В.Е. Федоров (разделы 4-6)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 30.01.19 С.В. Потапова (введение, раздел 11, заключение)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 30.01.19 Н.Р. Пинигина (раздел 8)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 30.01.19 И.М. Тихонова (раздел 3)
подпись, дата

канд. физ.-мат. наук 30.01.19 Н.С. Попов (раздел 9)
подпись, дата

30.01.19 Е.С. Ефимова (раздел 2, 3)
подпись, дата

30.01.19 В.Г. Марков (раздел 7)
подпись, дата

Нормоконтролер 31.01.2019 Т.В. Сотникова
подпись, дата

РЕФЕРАТ

Отчет 88 с., 0 рис., 0 табл., 88 источников, 0 прил.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, УРАВНЕНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ, ЭЛЛИПТИКО–ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, КВАЗИБЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ, ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МАККИНА-ВЛАСОВА

Объектом исследования являются неклассические краевые задачи для уравнений математической физики, бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, нелинейные стохастические дифференциальные уравнения типа Маккина-Власова.

Целью выполнения НИР являются: Получение новых результатов в области локальных, нелокальных краевых задач для неклассических уравнений математической физики; развития общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений; исследование регулярности и чувствительности нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с частными производными типа Маккина-Власова.

Математические методы, используемые при выполнении работ: методы функционального анализа; модифицированный метод Галеркина; метод стохастических характеристик; методы теории полугрупп и пропагаторов линейных операторов; методы алгебры.

Результаты НИР: Доказаны теоремы разрешимости нелокальных краевых задач для неклассических уравнений с частными производными четного и нечетного порядков с меняющимся направлением времени, получены оценки сходимости и погрешности. Показана регулярность и чувствительность для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений типа Маккина-Власова. Показано, что квазиоднородные бесконечные системы системы могут вести себя и как неоднородные, и как почти однородные системы в зависимости от коэффициентов системы.

Область применения результатов НИР. Полученные результаты будут использованы для дальнейших исследований неклассических уравнений с частными производными и нелинейных стохастических дифференциальных уравнений типа Маккина-Власова и их приложений.

Итоги внедрения результатов НИР. Результаты НИР включены в диссертационную работу исполнителя проекта Е.С. Ефимовой; в рамках проекта опубликованы 12 научных статей (в т.ч. индексированы в Web of Science - 1, в SCOPUS - 10, ВАК, РИНЦ - 1).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проект направлен на исследование новых фундаментальных задач теории неклассических дифференциальных уравнений с частными производными, а также на построение основ теории общих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, представляющих большой интерес для исследования краевых задач для уравнений математической физики.

Локальные и нелокальные задачи с интегральными условиями достаточно хорошо изучены для классических эллиптических, параболических и гиперболических уравнений с частными производными. В настоящее время известны неклассические уравнения с частными производными, неразрешенные относительно старшей производной, которые встречаются в математических моделях вязко-упругости, электродинамики, физики полупроводников, механики полимеров и других процессов современной физики. При этом уравнения такого вида называют уравнениями соболевского типа. Отметим, что недостаточно изучена разрешимость локальных, нелокальных краевых задач для уравнений соболевского типа переменного типа и других неклассических уравнений. Результаты о регулярности и гладкой зависимости решений от входных данных для нелинейных стохастических уравнений в частных производных Маккина-Власова имеют как самостоятельный интерес, так и с точки зрения получения новых результатов в теории игр среднего поля с общим случайным шумом. Широкое практическое приложение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений в естествознании и технике сильно ограничивается недостаточной разработкой теории этих систем. В частности, остается открытым вопрос об единственности решения бесконечных систем. Это связано с тем, что решение соответствующей однородной системы является гораздо трудной задачей, чем решение неоднородной системы.

Цель работы: получение новых фундаментальных результатов в теории краевых задач для неклассических дифференциальных уравнений с частными производными; развитие методологии исследования краевых задач для уравнений математической физики на основе развития общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

На данном этапе проекта исследованы краевые задачи для неклассических уравнений с частными производными таких, как нелокальные краевые задачи для параболических уравнений с меняющимся направлением времени, для уравнений с частными производными четного и нечетного порядков с меняющимся направлением времени, для эллиптико-параболических уравнений и для интегро-дифференциальных уравнений. Исследована регулярность и гладкая зависимость от входных данных решений нелинейных стохастических уравнений в частных производных типа Маккина-Власова, порожденных процессами устойчивого типа. Предложена и развита теория бесконечных систем с общих позиций, краткое изложение которой приведено в работе. Вместе с тем вопрос об единственности решения бесконечных систем до сих пор остается открытым, в проекте исследована разрешимость однородных бесконечных систем.

Полученные фундаментальные результаты могут служить теоретической основой развития методов математического моделирования реальных процессов в экономике, экологии, строительстве и других областях, необходимых для решения проблем рационального природопользования, прогнозирования экологических систем и др.

Достижение требуемого качества работ обеспечивается имеющимся научным заделом коллектива по теме проекта. При проведении исследований новых фундаментальных задач, поставленных в рамках проекта, использованы современные математические методы и результаты мировой науки в данной области, а также подходы, методы и результаты, полученные ранее коллективом и опубликованные.

1 О разрешимости краевых задач с граничными условиями интегрального вида для параболического уравнения с меняющимся направлением времени

В данном разделе с помощью нестационарного метода Галеркина и метода регуляризации установлена однозначная регулярная разрешимость нелокальных краевых задач с граничным условием интегрального вида для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Получены оценки погрешности метода Галеркина через параметр регуляризации и собственные числа спектральной задачи для симметрического эллиптического оператора по пространственным переменным.

Отметим, что в работах [1–4] исследовалась однозначная регулярная разрешимость нелокальных начально-краевых задач с граничным условием интегрального вида для неклассических дифференциальных уравнений.

Пусть Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей γ из класса C^2, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $\Gamma = \gamma \times (0,T)$.

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(t)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a(x)u = f(x,t). \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1.1) достаточно гладкие функции в $\overline{Q}$ и выполнены условия

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2, \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}, \quad \forall \xi \in R^n, \quad \nu > 0.$$

Отметим, что коэффициент $k(t)$ может менять знак при $0 \leqslant t \leqslant T$. Введем множества

$$S_0^+ = \Omega_0 \ \text{ при } \ k(0) > 0 \ \text{ или } \ \emptyset \ \text{ при } \ k(0) \leqslant 0,$$

$$S_T^- = \Omega_T \ \text{ при } \ k(T) < 0 \ \text{ или } \ \emptyset \ \text{ при } \ k(T) \geqslant 0,$$

где $\emptyset$ - пустое множество в R^n.

Пусть $N_1(x,t)$, $\ f(x,t)$ – заданные функции определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $\ y \in \overline{\Omega}$, $\ t \in [0,T]$.

Краевая задача I. Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1.1) в области Q такое, что

$$u\Big|_{\overline{S}_0^+}=0,\ \ u\Big|_{\overline{S}_T^-}=0, \tag{1.2}$$

$$u\Big|_{(x,t)\in\Gamma}=\int_\Omega N_1(x,y)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in\Gamma}, \tag{1.3}$$

Краевая задача II. Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1.1) в области Q такое, что выполнены условия (1.2)

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{(x,t)\in\Gamma}=\int_\Omega N_1(x,y)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in\Gamma}, \tag{1.4}$$

где $\frac{\partial u}{\partial\nu}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\nu_j u_{x_i}$, $\nu=(\nu_1,...,\nu_n)$ – единичный вектор внутренней нормали к γ в точке $x\in\gamma$.

В анизатропном пространстве Соболева $W_2^{m,s}(Q)$ введем скалярное произведение и норму

$$(u,v)_{m,s}=\int\limits_Q\left[\sum_{|\alpha|\leq m}D^\alpha uD^\alpha v+D_t^s uD_t^s v\right]dQ,$$

$$\|u\|_{m,s}^2=(u,u)_{m,s},\ \ u,v\in W_2^{m,s}(Q),$$

причем $(u,u)_{0,0}=(u,u)=\int\limits_0 uvdQ$, для $||u||^2=(u,u)$ для функций $u,v\in L_2(Q)$.

Для функции $u(x)$ $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ выполняется неравенство Пуанкаре-Фридрихса

$$\int\limits_\Omega u^2dx\leqslant C_\Omega^2\int\limits_Q\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2dx.$$

Разрешимость краевой задачи I

Введем интегральный оператор $(M_1u)(x)=u(x)-\int\limits_\Omega N_1(x,y)u(y)dy$, $u\in L_2(\Omega)$.

Для $u(x)\in W_2^2(\Omega)$ определим функцию

$$\Phi_1(x,u)=\int\limits_\Omega\left[u(y)A_xN_1(x,y)-N_1(x,yA_yu(y)\right]dy,$$

где

$$A_x=-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)+a(x).$$

Условие (M). Существуют положительные постоянные m_0 и m_1 такие, что

$$m_0\|M_1u\|_0^2 \leqslant \|u\|_0^2 \leqslant m_1\|M_1u\|_0^2 \ \ \forall u \in L_2(\Omega),$$

где $\|u\|_0^2 = \int\limits_\Omega u^2dx$.

Лемма 1.1 *Пусть выполнены условия (M) и так же*

$$N_1(x,y) \in C^2\left(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\right), \quad N_1(x,t)=0, \quad x\in\Omega, \quad y\in\gamma. \tag{1.5}$$

Тогда для любой функции $u \in W_2^2(\Omega)$ выполняется неравенство:

$$\|\Phi_1(x,u)\|_0^2 \leqslant c_0\|M_1u\|_0^2 + c_1\sum_{i=1}^n \|\left(M_1u\right)_{x_i}\|_0^2,$$

неотрицательные постоянные c_0, c_1 в котором определяются функциями $N_1(x,y)$, $a_{ij}(x)$, $a(x)$ и числами m_0, m_1.

Теорема 1.1 *Пусть выполнены условия (M) для M_1,* (1.5) *и условия*

$$a-\frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad a+\frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad f\in W_2^{0,1}(Q), \quad \delta > c_0^{1/2},$$

$$\nu > c_1^{1/2}c_\Omega \tag{1.6}$$

И имеет место один из следующих случаев:

$$k(0)>0, \quad k(T)\geq 0, \quad f(x,0)=0,$$

$$\textit{или} \ \ k(0)>0, \quad k(T)<0, \quad f(x,0)=0, \quad f(x,T)=0,$$

$$\textit{или} \ \ k(0)\leq 0, \quad k(T)<0, \quad f(x,T)=0,$$

$$\textit{или} \ \ k(0)\leq 0, \quad k(T)\geq 0.$$

Тогда краевая задача I имеет единственное решение $u(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)$. И справедлива следующая оценка:

$$\|u\|_{2,1} \leq C_1\|f\|_{0,1}. \ \ C_1>0.$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу $\widetilde{I}$: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в

Q решением уравнения

$$\widetilde{L}v \equiv Lv + \Phi_1(x, M_1^{-1}v) = M_1 f, \qquad (1.7)$$

удовлетворяющую краевым условиям (1.2) и $v|_\Gamma = 0$.

Доказывается, что вспомогательная задача разрешима в $W_2^{2,1}(Q)$. Воспользуемся нестационарным методом Галеркина и методом регуляризации. В качестве базисных функций берем функции $\varphi_k(x)$, которые являются решением спектральной задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in \Omega, \quad \varphi|_\gamma = 0.$$

При этом собственные функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ...$ и $\lambda_k \to +\infty$.

Для $\varepsilon > 0$ положим $\widetilde{L}_\varepsilon v \equiv -\varepsilon v_{tt} + \widetilde{L}v$.

Сначала рассмотрим случай $k(0) > 0, \quad k(T) \geqslant 0, \quad f(x,0) = 0$.

Пусть $(u,v)_0 = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Приближенное решение $v^{N,\varepsilon}(x,t)$ вспомогательной краевой задачи будем искать в виде

$$v^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv w(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \geqslant 1, \quad \varepsilon > 0,$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(\widetilde{L}_\varepsilon v^{N,\varepsilon}, \varphi_l) = (M_1 f, \varphi_l)_0,$$

$$c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \; D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0, \quad l = \overline{1,N}.$$

Для приближенных решений $v^{N,\varepsilon}$ справедлива априорная оценка

$$||v^{N,\varepsilon}||_{2,1} \leqslant C_2\|f\|_{0,1}, \quad C_2 > 0,$$

которая позволяет стандартным образом доказать существование единственного решения v вспомогательной краевой задачи из $W_2^{2,1}(Q)$.Положим $u = M_1^{-1}v(x,t)$. Тогда $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$

и выполняется равенство $M_1(Lu - f) = 0$.

Данное равенство в силу условий (M) означает, что функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1.1) и удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3).

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Положим $u^{N,\varepsilon}(x,t) = M_1^{-1} v^{N,\varepsilon}(x,t)$.

Теорема 1.2 *Пусть выполнены все условия Теоремы 1.1. Тогда справедлива оценка*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_{1,0} \leqslant C_3 \|f\|_{0,1} (\sqrt{\varepsilon} + \lambda_{N+1}^{-1/2}),$$

где точное решение краевой задачи I.

Разрешимость краевой задачи II.

Пусть $N_2(x,y)$ - функция для которой при $x \in \gamma, \quad y \in \Omega$ выполняется равенство

$$\frac{\partial N_2(x,y)}{\partial \nu} = N_1(x,y), \quad x \in \gamma, \quad y \in \Omega.$$

Для функции $v \in W_2^2(\Omega)$ определим функцию

$$\Phi_2(x,v) = \int\limits_{\Omega} [v(y) A_x N_2(x,y) - N_2(x, y A_y v(y)] \, dy.$$

Снова введем интегральный оператор

$$(M_2 v)(x) = v(x) - \int\limits_{\Omega} N_2(x,y) v(y) dy, \quad v \in L_2(\Omega).$$

Лемма 1.2 *Пусть выполнены условия (M) при $M_1 = M_2$, а также*

$$N_2(x,y) \in C^3 \left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \right).$$

Тогда для любой функции $u \in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяющей условию (1.4), выполняется оценка

$$\|\Phi_2(x,v)\|_0^2 \leqslant \widetilde{c}_0 \|M_2 v\|_0^2 + \widetilde{c}_1 \sum_{i=1}^{n} \| \left(M_2 v\right)_{x_i} \|_0^2,$$

где $\widetilde{c}_0 \geqslant 0, \quad \widetilde{c}_1 \geqslant 0$.

Теорема 1.3 *Пусть выполнены условия Леммы 1.2 и условия*

$$a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad a + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad f \in W_2^{0,1}(Q),$$

$\delta > \widetilde{c}_0^{1/2} + \frac{1}{2}\widetilde{c}_1^{1/2}, \quad \nu > \frac{1}{2}\widetilde{c}_1^{1/2}$ *и имеет место один из следующих случаев:*

$$k(x,0) > 0, \quad k(x,T) \geq 0, \quad f(x,0) = 0,$$

$$\textit{или} \;\; k(x,0) > 0, \quad k(x,T) < 0, \quad f(x,0) = 0, \quad f(x,T) = 0,$$

$$\textit{или} \;\; k(x,0) \leq 0, \quad k(x,T) < 0, \quad f(x,T) = 0,$$

$$\textit{или} \;\; k(x,0) \leq 0, \quad k(x,T) \geq 0.$$

Тогда краевая задача II имеет единственное решение $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$*. справедлива оценка*

$$\|u\|_{2,1} \leq C_4 \|f\|_{0,1}. \;\; C_4 > 0.$$

Если ввести функцию $v = M_2 u$, то разрешимость краевой задачи II сводится к изучению вспомогательной краевой задачи.

Краевая задача $\widetilde{II}$. Найти решение $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ уравнения

$$\widetilde{L}v \equiv Lv + \Phi_2(x, M_2^{-1}v) = M_2 f. \tag{1.8}$$

удовлетворяющее краевым условиям (1.2) и

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{1.9}$$

Доказательство разрешимости краевой задачи (1.8), (1.2), (1.9) в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ проводится аналогично доказательству теоремы 1.1, если в качестве базисных функций $\varphi_k(x)$ брать решения спектральной задачи

$$A_x \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \;\; x \in \Omega, \;\; \left.\frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu}\right|_{\gamma} = 0,$$

которые образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Далее, функция $u = M_2^{-1} v$ будет искомым решением краевой задачи II.

Положим $u^{N,\varepsilon} = M_2^{-1} v^{N,\varepsilon}$, где $v^{N,\varepsilon}$- приближенное решение краевой задачи (1.8), (1.2), (1.9).

Теорема 1.4 *Пусть выполнены условия Теоремы 1.3. Тогда справедлива оценка*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_{1,0} \leqslant C_5 \|f\|_{0,1}(\sqrt{\varepsilon} + \lambda_{N+1}^{-1/2}), \quad C_5 > 0.$$

2 Метод Фаэдо-Галеркина для неклассического уравнения нечетного порядка с меняющимся направлением времени

В данном разделе доказано существование и единственность регулярного решения краевой задачи для неклассического уравнения нечетного порядка по времени с меняющимся направлением времени с помощью метода Фаэдо-Галеркина. При этом регулярная разрешимость краевой задачи установлена на основе новых глобальных априорных оценок для приближенных решений метода Фаэдо-Галеркина [5, 6]. А также получена оценка погрешности метода Фаэдо-Галеркина через параметр регуляризации и собственные числа спектральной задачи Дирихле для оператора Лапласа.

Пусть Ω-ограниченная область в R^n с гладкой границей S, $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ для $0 \leq t \leq T$, $S_T = S \times (0, T)$.

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим неклассическое уравнение нечетного порядка

$$Lu = \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u - \Delta u + c(x) u = f(x,t), \tag{2.1}$$

где $s \geq 1$-целое число. Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (2.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$. Отметим, что коэффициент $k_{2s+1}(x,t)$ может менять знак внутри области произвольным образом. Введем множества

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : (-1)^s k_{2s+1}(x,0) \gtrless 0, \ x \in \Omega\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \gtrless 0, \ x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (2.1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{2.2}$$

$$D_t^i u|_{t=T}^{t=0} = 0; \ i = \overline{0, s-1}; \ D_t^s u|_{\overline{S_0^+}} = 0; \ D_t^s u|_{\overline{S_T^-}} = 0. \tag{2.3}$$

В анизотропном пространстве Соболева $W_2^{m,s}(Q)$ введем скалярное произведение

$$(u,v)_{m,s} = \int_Q [\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u D^\alpha v + D_t^s u D_t^s v] dQ, \ u, v \in W_2^{m,s}(Q),$$

причем $(u,v)_{0,0}=(u,v)=\int\limits_Q uvdQ$ для функций u,v из $L_2(Q)$, $\|u\|^2=(u,u)$.

Через C_L обозначим класс функций из $W_2^{2,2s+1}(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (2.2), (2.3).

Лемма 2.1 *[5]. Пусть коэффициент $c(x)>0$ достаточно большой, и выполнено условие*

$$(-1)^s[k_{2s}-(\frac{2s+1}{2})k_{2s+1t}]\geq\delta>0.$$

Тогда для любой функции $u\in C_L$ имеет место оценка

$$\|u\|_{1,s}^2\leq C_1(Lu,u),\ C_1>0. \tag{2.4}$$

Для $\forall u\in C_L$ имеем

$$(Lu,u)=\int\limits_Q\{(-1)^s[k_{2s}-\frac{2s+1}{2}k_{2s+1t}](D_t^su)^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+cu^2\}dQ$$
$$+\frac{(-1)^s}{2}\int\limits_{S_T^+}k_{2s+1}(D_t^su)^2dx+\frac{(-1)^{s+1}}{2}\int\limits_{S_0^-}k_{2s+1}(D_t^su)^2dx+I, \tag{2.5}$$

где $|I|\leq M_1\int\limits_Q\sum\limits_{i=0}^{s-1}(D_t^iu)^2dQ,\ M_1$ - положительная постоянная, зависящая от коэффициентов k_i уравнения (2.1). В силу теорем вложения [7] справедливы оценки

$$||D_t^iv||^2\leq\varepsilon\int\limits_Q[\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2+(D_t^sv)^2]dQ+C_\varepsilon||v||^2,\ v\in W_2^{1,s}(Q),$$

$1\leq i\leq s-1,\ \varepsilon>0,\ C_\varepsilon>0$ зависит от параметра ε и Q. Тогда для I справедлива оценка

$$|I|\leq\gamma\int\limits_Q[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+(D_t^su)^2]dQ+\tilde{C}_\gamma||u||^2,\ \gamma>0,\ \tilde{C}_\gamma>0.$$

Полагая в соотношении (2.5) $\gamma=min\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}\}$ и считая, что $c(x)-\widetilde{C}_\gamma\geq c_0>0$, получим оценку леммы 2.1.

Из леммы 2.1 следует, что при выполнении условий леммы 2.1 регулярное решение краевой задачи (2.1)-(2.3) единственно.

Теорема 2.1 *Пусть выполнены условия леммы 2.1,*

$$(-1)^s[k_{2s}+\frac{1}{2}k_{2s+1t}] \geq \delta > 0,\ f \in W_2^{0,1}(Q),\ f(x,0)=0,\ f(x,T)=0,$$

и

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0,\ (-1)^s k_{2s+1}(x,T) < 0.$$

Тогда краевая задача (2.1)-(2.3) *имеет единственное решение* $u(x,t)$ *из* $W_2^{2,2s+1}(Q)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{2,2s+1} \leq C_2\|f\|_{0,1},\ C_2 > 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ положим

$$L_\varepsilon u = Lu + (-1)^{s+1}\varepsilon D_t^{2s+2}u.$$

В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются решением следующей задачи

$$-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k,\ x \in \Omega,$$

$$\varphi_k|_s = 0.$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, и соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...,\ \lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенные решения $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ краевой задачи (2.1)-(2.3) будем искать в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv v(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x),$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f,\varphi_l)_0,\ l=\overline{1,N}, \tag{2.6}$$

$$D_t^i c_l^{N,\varepsilon}\ |_{t=0}^{t=T} = 0,\ i=\overline{0,s},\ l=\overline{1,N}, \tag{2.7}$$

где $(\cdot,\cdot)_0$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Однозначная разрешимость краевой задачи (2.6), (2.7) следует из единственности решения данной краевой задачи.

Умножим (2.6) на $c_l^{N,\varepsilon}$ и просуммируем по l от 1 до N, затем, интегрируя полученное равенство по t, получим соотношение

$$(f, v) = \varepsilon \|D_t^{s+1} v\|^2 + (Lv, v).$$

Отсюда в силу оценки (2.4) следует априорная оценка

$$\varepsilon \|D_t^{s+1} v\|^2 + \|v\|_{1,s}^2 \leq C_3 \|f\|^2, \ C_3 > 0. \tag{2.8}$$

Путем интегрирования по частям из (2.6), (2.7) установим, что

$$(-1)^s (f_t, D_t^{2s+1} v) = \varepsilon ||D_t^{2s+2} v||^2 + (-1)^s \int\limits_Q [k_{2s} + \frac{1}{2} k_{2s+1t}](D_t^{2s+1} v)^2 dQ + \int\limits_Q \sum_{i=1}^n (D_t^{s+1} v_{x_i})^2 dQ$$
$$+ \int\limits_Q c(x)(D_t^{s+1} v)^2 dQ + \frac{(-1)^{s+1}}{2} \int\limits_\Omega k_{2s+1} (D_t^{2s+1} v)^2 dx|_{t=0}^{t=T} + I_1 + I_2, \tag{2.9}$$

где

$$I_1 = (-1)^s \int\limits_Q [k_{2s_t} D_t^{2s} v + \sum_{i=1}^{2s-1} D_t (k_i D_t^i)] D_t^{2s+1} v dQ,$$

$$I_2 = (-1)^{s+1} \int\limits_\Omega [\sum_{i=s+1}^{2s} k_i D_t^i v] D_t^{2s+1} v dx|_{t=0}^{t=T}.$$

В силу условий теоремы 2.1 существует положительное число δ_1 такое, что

$$(-1)^s k_{2s+1}(x, 0) \geq \delta_1, \ (-1)^{s+1} k_{2s+1}(x, T) \geq \delta_1, \ x \in \overline{\Omega}.$$

Используя неравенство Коши $|ab| \leq \gamma a^2 + \frac{1}{4\gamma} b^2, \ \gamma > 0$, оценим I_k:

$$|I_1| \leq \frac{\delta}{2} ||D_t^{2s+1} v||^2 + C_4 \delta^{-1} \sum_{i=1}^{2s} ||D_t^i v||^2, \ C_4 > 0,$$

$$|I_2| \leq \frac{\delta_1}{4} \int\limits_{\Omega_0 \cup \Omega_T} (D_t^{2s+1} v)^2 dx + C_5 \delta_1^{-1} \int\limits_{\Omega_0 \cup \Omega_T} \sum_{i=s+1}^{2s} (D_t^i v)^2 dx, \ C_5 > 0.$$

В силу теорем вложения [7] справедливы неравенства

$$\int\limits_{\Omega_t}(D_t^i u)^2dx \le \gamma\int\limits_Q [(D_t^{2s+1}u)^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2]dQ + C_\gamma\int\limits_Q u^2dQ,$$
$$i=\overline{1,2s},\ 0\le t\le T,\ (\gamma>0),\ u\in W_2^{1,2s+1}(Q), \tag{2.10}$$

$$\int\limits_Q (D_t^j u)^2dQ \le \gamma\int\limits_Q [(D_t^{2s+1}u)^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2]dQ + \widetilde{C}_\gamma\int\limits_Q u^2dQ,$$
$$j=\overline{1,2s},\ (\gamma>0),\ u\in W_2^{1,2s+1}(Q). \tag{2.11}$$

Далее, используя для дальнейшей оценки $|I_k|$ неравенства (2.10) и (2.11), оценку (2.8) и неравенство Коши, из соотношения (2.9) получаем оценку

$$\varepsilon||D_t^{2s+2}v||^2+\int\limits_Q [(D_t^{2s+1}v)^2+\sum_{i=1}^n (D_t^{s+1}v_{x_i})^2]dQ \le C_6||f||_{0,1}^2,\ C_6>0. \tag{2.12}$$

Снова интегрируя по частям, из (2.6), (2.7) получим равенство

$$-(f,\Delta v)=\varepsilon\int\limits_Q\sum_{i=1}^n (D_t^{s+1}v_{x_i})^2dQ-\sum_{i=1}^{2s+1}\int\limits_Q k_iD_t^iv\Delta vdQ+\int\limits_Q(\Delta v)^2dQ-\int\limits_Q c(x)v\Delta vdQ. \tag{2.13}$$

Теперь в силу неравенств (2.8), (2.11), (2.12) из (2.13) следует априорная оценка

$$\varepsilon\int\limits_Q\sum_{i=1}^n (D_t^{s+1}v_{x_i})^2dQ+\int\limits_Q(\Delta v)^2dQ \le C_7||f||_{0,1}^2,\ C_7>0. \tag{2.14}$$

Из неравенств (2.8), (2.12), (2.14) получаем, что для приближенных решений $u^{N,\varepsilon}$ справедлива априорная оценка

$$||u^{N,\varepsilon}||_{2,2s+1}\le C_8||f||_{0,1},\ C_8>0, \tag{2.15}$$

которая позволяет стандартным образом завершить доказательство теоремы 2.1.

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1. Тогда справедлива оценка*

$$||u-u^{N,\varepsilon}||_{1,s}\le C_9||f||_{0,1}(\varepsilon^{1/2}+\lambda_{N+1}^{-1/2}),\ C_9>0, \tag{2.16}$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (2.1)-(2.3).

Пусть $u(x,t)$ -точное решение краевой задачи (2.1)-(2.3), гарантированное теоремой 1. Функция $u(x,t)$ представима в виде ряда Фурье

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)\varphi_k(x),\ c_k(t)=(u,\varphi_k)_0.$$

При этом имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\int\limits_0^T c_k^2(t)dt=||\Delta u||^2\leq C_{10}||f||_{0,1}^2,\ C_{10}>0. \tag{2.17}$$

С другой стороны, для функции $u(x,t)$ справедливы соотношения

$$(Lu,\varphi_l)=(f,\varphi_l),\ l=1,2...\ . \tag{2.18}$$

В пространстве $L_2(Q)$ введем линейное многообразие

$$H_N=\{\eta(x,t)=\sum_{l=1}^{N}d_l(t)\varphi_l(x),\ d_l\in W_2^{2s+1}(0,T),\ d_l^{(i)}(0)=0,\ d_l^{(i)}(T)=0 \text{ при } i=\overline{0,s}.\}$$

В силу (2.6), (2.18) имеем

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon},\eta)=(f,\eta),\ (Lu,\eta)=(f,\eta)\ \forall\eta\in H_N.$$

Отсюда получаем

$$(L(u-u^{N,\varepsilon}),\eta)=(-1)^{s+1}\varepsilon(D_t^{2s+2}u^{N,\varepsilon},\eta)\ \forall\eta\in H_N.$$

Полагая в последнем равенстве $\eta=w-u^{N,\varepsilon}=(u-u^{N,\varepsilon})+(w-u),\ w\in H_N$, будем иметь:

$$(L(u-u^{N,\varepsilon}),u-u^{N,\varepsilon})=(-1)^{s+1}\varepsilon(D_t^{2s+2}u^{N,\varepsilon},w-u^{N,\varepsilon})+(f-Lu^{N,\varepsilon},u-w). \tag{2.19}$$

В силу (2.4) из (2.19) будем иметь

$$||u-u^{N,\varepsilon}||_{1,s}^2\leq C_{11}[\varepsilon||D_t^{2s+1}u^{N,\varepsilon}||||w_t-u_t^{N,\varepsilon}||+||f-Lu^{N,\varepsilon}||||u-w||],\ C_{11}>0. \tag{2.20}$$

При $w = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k(t)\varphi_k(x) \in H_N$ справедливо неравенство

$$||u - w||^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int\limits_0^T c_k^2(t)dt \leq \lambda_{N+1}^{-2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^2 \int\limits_0^T c_k^2(t)dt,$$

из которого в силу (2.17) получим

$$||u - w|| \leq C_{12}\lambda_{N+1}^{-1}||f||_{0,1}. \tag{2.21}$$

Далее из соотношения (2.20) с учетом неравенств (2.4), (2.15), (2.21) получаем оценку погрешности метода Фаэдо-Галеркина (2.16).

Теорема 2.2 доказана.

3 Нелокальная краевая задача для параболического уравнения с меняющимся направлением времени

Исследованию неклассических уравнений с меняющимся направлением времени посвящены многие работы [5, 8–13]. Краевые задачи для параболических уравнений с меняющимся направоением времени были изучены в [8,9,12–14]. Нелокальные краевые задачи исследовались в [2, 15–18].

В данном разделе с помощью нестационарного метода Галеркина и метода регуляризации доказана однозначная регулярная разрешимость нелокальной краевой задачи с интегральным условием по времени для параболического уранения с меняющимся направлением времени. Также получена оценка погрешности нестационарного метода Галеркина через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи.

Пусть $\Omega \in R^n$ - ограниченная область с гладкой границей γ. Denote $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma = \gamma \times (0, T)$.

В цилиндрической области Q рассмотрим параболическое уравнение

$$Lu \equiv k(t)u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t). \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (3.1) достаточно гладкие в $\overline{Q}$. Let $k(0) > 0, k(T) \geq 0$. Отметим, что коэффициент $k(t)$ может менять знак внутри области произвольным образом $0 \leq t \leq T$.

Краевая задача I. Найти решение уравнения (3.1) в области Q такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = \int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau, \quad x \in \Omega. \tag{3.3}$$

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ - анизотропное пространство Соболева. Введем норму в пространство Соболева

$$||u||^2_{m,s} = \int\limits_Q \left[\sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u)^2 + (D_t^s u)^2\right] dQ,$$

and $(u,v) = \int\limits_Q uvdQ, \;\; ||u||^2 = (u,u) \;\; \forall u, v \in L_2(Q)$.

Введем функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - \int\limits_0^T N(\tau)u(x,\tau)d\tau, \quad u \in L_2(Q).$$

Для $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ обозначим

$$\Phi(x,t,v) = c(x,t)N_1 \int\limits_0^T N(\tau)v(x,\tau)d\tau - N_1 \int\limits_0^T N(\tau)\Delta v(x,\tau)d\tau,$$

где

$$N_1 = \frac{1}{1-N_0}, \quad N_0 = \int\limits_0^T N(\tau)d\tau.$$

Теорема 3.1 *Пусть выполнены условия*

$$c + \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad c - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0, \quad f \in W_2^{0,1}(Q),$$

$$k(0) > 0, \quad k(T) \geq 0, \quad f(x,0) = 0.$$

Тогда при определенных условиях малости на функцию $N(t)$ или число T краевая задача (3.1)-(3.3) *имеет единственное решение $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ и справедлива оценка:*

$$\|u\|_{2,1} \leq C_1\|f\|_{0,1}, \quad C_1 > 0.$$

Доказательство данной теоремы проводится с помощью вспомогательной краевой задачи для уравнения

$$\widetilde{L}v \equiv Lv + \Phi(x,t,v) = f. \tag{3.4}$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (3.4) в области Q такое, что

$$v|_{\Gamma} = 0, \tag{3.5}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.6}$$

В доказательстве теоремы 3.1 используется нестационарный метод Галеркина и метод регуляризации.

В качестве базисных берем функции $\varphi_k(x)$ которые являются решениями спектральной задачи

$$-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k,$$

$$\varphi_k|_\gamma = 0.$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ and $\lambda_k \to +\infty$ for $k \to \infty$.

Для $\varepsilon > 0$, положим $\widetilde{L}_\varepsilon v = -\varepsilon v_{tt} + \widetilde{L}v$.

Обозначим через

$$(u,v)_0 = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \ \ \forall u,v \in L_2(\Omega)$$

скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

Приближенные решения $v^{N,\varepsilon}(x,t)$ краевой задачи (3.4)-(3.6) будем искать в виде

$$v^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv w(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad \varepsilon > 0,$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решения следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(\widetilde{L}_\varepsilon v^{N,\varepsilon}, \varphi_l) = (f, \varphi_l)_0, \tag{3.7}$$

$$c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0, \ D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0, \quad l = \overline{1,N}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим случай $k(0) > 0, \quad k(T) \geq 0$.

Однозначная разрешимость краевой задачи (3.7), (3.8) следует из единственности решения данной краевой задачи.

Теорема 3.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда справедлива следующая оценка погрешности для нестационарного метода Галеркина:*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_{1,0} \leqslant C_2\|f\|_{0,1}(\sqrt{\varepsilon} + \lambda_{N+1}^{-1/2}), \tag{3.9}$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от f, N, ε.

4 Оценка скорости сходимости метода Галеркина для неклассического уравнения математической физики

В данном разделе мы рассматриваем применение нестационарного метода Галеркина к первой краевой задаче для вырождающегося эллиптико-параболического уравнения высокого порядка.

Пусть Ω есть ограниченная односвязная область в R^n с гладкой границей S. Положим

$$Q = \Omega \times (0,T), S_T = S \times (0,T), T = const > 0; \Omega_t = \Omega \times t, 0 \leq t \leq T.$$

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s} k_i(t) D_t^i u + Mu = f(x,t), \tag{4.1}$$

где

$$Mu \equiv (-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D_x^\beta u) + a_0(x)u.$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (4.1) бесконечно дифференцируемы в $\overline{Q}$, и выполнены условия

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geq \nu|\xi|^{2m}, \quad \nu > 0, \quad x \in \Omega, \quad \forall \xi \in R^n.$$

Мы рассматриваем случай $(-1)^{s-1}k_{2s}(0) > 0, (-1)^{s-1}k_{2s}(T) > 0$. Обозначим через $n = (n_1, ..., n_n)$ внутреннюю нормаль к S.

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (4.1), такое, что

$$\frac{\partial^i u}{\partial n^i}|_{S_T} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}; \tag{4.2}$$

$$D_t^j u|_{t=0,t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}. \tag{4.3}$$

В работе [19] методом регуляризации была установлена однозначная регулярная разрешимость краевой задачи (4.1)–(4.3).

В настоящей работе мы доказываем существование и единственность регулярного решения первой краевой задачи (4.1)–(4.3), используя модифицированный метод Галеркина. В качестве базисных функций выбираются собственные функции самосопряженной спектральной задачи для эллиптического уравнения высокого порядка. Для приближенных решений получены глобальные априорные оценки. Благоларя им установлена оценка скорости сходимости метода Галеркина через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи для эллиптического оператора M.

Пусть $W_2^{m,s}(Q)$ есть анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{m,s}^2 = \int_0^T [\|u\|_m^2 + \|D_t^s u\|_0^2] dt,$$

где $\|.\|_m$ - норма пространства Соболева $W_2^m(\Omega)$ [7]; $\|.\|_{0,0} = \|.\|$ - норма в пространстве $L_2(Q)$.

Через C_L обозначим множество функций из $W_2^{2m,2s}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям (4.2), (4.3).

В работе [19] было доказано следующее утверждение.

Лемма 4.1 *[19]. Пусть коэффициент $a_0(x) < 0$ достаточно большой по модулю, и выполнены условия*

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(0) > 0, \quad (-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют функции $\varphi(t), \psi(t) \in C^\infty[0,T]$, такие, что для всех функций $u(x,t) \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \varphi u_t + \psi u) \geq C_1 \|u\|_{m,s}^2, \quad C_1 = const > 0,$$

где $(.)$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$.

В силу условия $(-1)^{s-1}k_{2s}(0) > 0$ существует положительное число $t_0 < T$, такое, что $(-1)^{s-1}k_{2s}(t) \geq \delta_0 > 0$, $t \in [0, t_0]$. Функции $\varphi(t), \psi(t) \in C^\infty[0,T]$ выбираются такие, что

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(t) = \mu = const > 0, t \in [t_o, T], \quad \varphi_t \geq 0; \quad \psi = -\frac{2s+1}{2}\varphi_t - 1.$$

Теорема 4.1 *Пусть коэффициент $a_0(x) < 0$ достаточно большой по модулю, и выполнены условия*

$$(-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + (1-2s)k_{2s,t}] \geq \delta > 0, \quad (-1)^{s-1}[2k_{2s-1} + k_{2s,t}] \geq \delta > 0;$$

$$(-1)^{s-1}k_{2s}(t) \geq 0, \quad t \in [0,T]; \quad (-1)^{s-1}k_{2s}(0) > 0, \quad (-1)^{s-1}k_{2s}(T) > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q)$ *существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (4.1)–(4.3) *из пространства* $W_2^{2m,2s}(Q)$.

Рассмотрим следующий регуляризованный оператор

$$L_\varepsilon u \equiv (-1)^{s-1}\varepsilon D_t^{2s}u + Lu, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Для построения приближенных решений в качестве базиса $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ выбираем решения спектральной задачи:

$$M\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial^i \varphi}{\partial n^i}|_S = 0, \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$.

Собственные числа можно пронумеровать таким образом, что $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ и $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенное решение краевой задачи (4.1)–(4.3) ищем в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x),$$

где $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad l = \overline{1, N}, \tag{4.4}$$

$$D_t^i c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0,t=T} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 4.11. Тогда для приближенных решений* $u^{N,\varepsilon}(x,t)$ *справедлива оценка*

$$\|u - u^{N,\varepsilon}\|_{m,s} \leq C_2\|f\|_{0,1}(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + |\lambda_{N+1}|^{-\frac{1}{4}}),$$

где $u(x,t)$ *- точное решение краевой задачи* (4.1)–(4.3), *а постоянная* $C_2 > 0$ *не зависит от* N, ε.

5 Краевая задача для уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени

В данном разделе рассматривается применение стационарного метода Галеркина к одной краевой задаче для уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени, постановка которой в общем случае отличается от первой краевой задачи [5].

Пусть Ω есть ограниченная односвязная область в R^n с гладкой границей γ. Положим

$$Q = \Omega \times (0, T), \quad \Gamma = \gamma \times (0, T), \quad T = const > 0; \quad \Omega_t = \Omega \times \{t\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u - \Delta u + c(x)u = f(x,t). \tag{5.1}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (5.1) бесконечно дифференцируемы в $\overline{Q}$. Введем обозначения для множеств на основаниях цилиндра:

$$S_0^{\pm} = \{(x,0) : x \in \Omega, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,0) \gtrless 0\},$$

$$S_T^{\pm} = \{(x,T) : x \in \Omega, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \gtrless 0\}.$$

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (5.1), такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0; \tag{5.2}$$

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, i = \overline{0, s-1}; \quad D_t^s u|_{\overline{S}_0^+} = 0; \quad D_t^s u|_{\overline{S}_T^-} = 0; \quad D_t^i u|_{t=T} = 0, i = \overline{s+1, 2s} \tag{5.3}$$

Коэффициент $k_{2s+1}(x,t)$ может менять свой знак внутри области Q произвольным образом. Поэтому класс уравнений (5.1) содержит эллиптико-параболические уравнения, уравнения с меняющимся направлением времени и другие. В работе [20] с помощью функционального метода и нестационарного метода Галеркина в сочетании с методом регуляризации изучена обобщенная и регулярная разрешимость краевой задачи (5.1)–(5.3). Отметим, что постановка краевой задачи (5.1)–(5.3) в случае $k_{2s+1} = \pm(-1)^s$ была предложена в работе [21].

В настоящей работе для задачи (5.1)–(5.3) применяется стационарный метод Галеркина, доказана ее однозначная регулярная разрешимость. Получена оценка скорости сходимости стационарного метода Галеркина для этой задачи через собственные значения самосопряженной спектральной задачи для квазиэллиптического уравнения, собственные функции которой выбираются в качестве базиса при построении приближенных решений.

Обозначим через $W_2^{m,s}(Q)$ анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{m,s} = \int_0^T [\|u\|^2_m + \|D_t^s u\|^2_0]dt,$$

где $\|.\|_m$ есть норма в пространстве Соболева $W_2^m(\Omega)$; $\|.\|_{0,0} = \|.\|$ - норма в $L_2(Q)$.

Пусть C_L есть множество функций из $W_2^{2,2s+1}(Q)$, удовлетворяющих условиям (5.2),(5.3). В работе [20] доказано следующее утверждение.

Лемма 5.1 *[20]. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия:*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0; \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) > 0.$$

Тогда для любой функции $u(x,t) \in C_L$ имеет место оценка

$$(Lu, u) \geq C_1\|u\|^2_{1,s}, \quad C_1 = const > 0,$$

где $(.,.)$ есть скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Следствие 5.1 *Пусть выполнены условия леммы 5.1. Тогда краевая задача* (5.1)–(5.3) *может иметь не более одного решения из пространства $W_2^{2,2s+1}(Q)$.*

В дальнейшем будем считать, что выполнены условия (кроме леммы 5.3)

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) > 0.$$

В этом случае краевые условия (5.3) принимают вид:

$$D_t^i u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0,s}; \quad D_t^i u|_{t=T} = 0, \quad i = \overline{s+1,2s}.$$

Рассмотрим спектральную задачу:

$$Z\varphi \equiv (-1)^{s+1}D_t^{2s+2}\varphi - \Delta\varphi = \lambda\varphi, \tag{5.4}$$

$$\varphi|_\Gamma = 0; \quad D_t^i\varphi|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0,s}; \quad D_t^i\varphi|_{t=T} = 0, \quad i = \overline{s+1, 2s+1} \tag{5.5}$$

Пусть $\widetilde{W}_2^{2,2s+2}(Q)$ есть замыкание множества функций из $C^\infty(\overline{Q})$, удовлетворяющих краевым условиям (5.5), по норме пространства $W_2^{2,2s+2}(Q)$. Обозначим через $\dot{W}_2^{1,s+1}(Q)$ замыкание $\widetilde{W}_2^{2,2s+2}(Q)$ по норме пространства $W_2^{1,s+1}(Q)$. Справедливы равенство

$$(Z\varphi, \psi) = (\varphi, Z\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \widetilde{W}_2^{2,2s+2}(Q),$$

и оценка

$$(Z\varphi, \varphi) = \int_Q [(D_t^{s+1}\varphi)^2 + \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2] dQ \geq C_2 \|\varphi\|_{1,s+1}^2, \quad C_2 = const > 0.$$

Тогда спектральная задача (5.4), (5.5) имеет собственные значения λ_k такие, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, а собственные функции $\varphi_k(x,t)$ образуют ортогональный базис в $\dot{W}_2^{1,s+1}(Q)$ и ортонормированный базис в $L_2(Q)$. При этом для любой функции $u(x,t) \in \widetilde{W}_2^{2,2s+2}(Q)$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k(x,t), \quad c_k = (u, \varphi_k), \tag{5.6}$$

причем ряд (5.6) сходится в $\dot{W}_2^{1,s+1}(Q)$.

С другой стороны, в силу второго основного неравенства для оператора Лапласа нетрудно получить неравенство

$$\| u \|_{2,2s+2} \leq C_3 \| Zu \|, \quad C_3 > 0, \quad \forall u \in \widetilde{W}_2^{2,2s+2}(Q).$$

Из последнего неравенства следует, что собственные функции $\varphi_k(x,t)$ спектральной задачи (5.4), (5.5) принадлежат $\widetilde{W}_2^{2,2s+2}(Q)$.

Лемма 5.2 *Для* $\forall u(x,t) \in \widetilde{W}_2^{2,2s+2}(Q)$ *ряд* (5.6) *сходится в* $\widetilde{W}_2^{2,2s+2}(Q)$.

Приближенное решение краевой задачи (5.1)–(5.3) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N \varphi_k(x,t),$$

где c_k^N определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1,N}. \tag{5.7}$$

Однозначная разрешимость системы (5.7) следует из леммы 5.2 1.

Лемма 5.3 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) > 0, \quad f(x,t) \in L_2(Q).$$

Тогда справедлива оценка

$$\|u^N\|_{1,s} \leq C_4\|f\|, \quad C_4 = const > 0. \tag{5.8}$$

Лемма 5.4 *Пусть выполнены условия леммы 3, а также*

$$(-1)^s[2k_{2s} + k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0, \quad f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q).$$

Кроме того, $f(x,0) = 0$ почти всюду в Ω. Тогда справедлива оценка

$$\|u^N\|_{2,2s+1} \leq C_5\|f\|_{0,1}, \quad C_5 = const > 0.$$

Теорема 5.1 *Пусть выполнены условия леммы 5.4. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ краевой задачи (5.1)–(5.3) из пространства $W_2^{2,2s+1}(Q)$. При этом приближенные решения $u^N(x,t)$ слабо сходятся в $W_2^{2,2s+1}(Q)$ к точному решению $u(x,t)$.*

Теорема 5.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 5.1 и $s \geq 1$. Тогда для приближенных решений $u^N(x,t)$ справедлива оценка:*

$$\|u - u^N\|_{1,s} \leq C_6\|f\|_{0,1}\lambda_{N+1}^{-1/4},$$

где $u(x,t)$ - точное решение краевой задачи (5.1)–(5.3), а постоянная $C_6 > 0$ не зависит от N.

Замечание 5.1 *Отметим, что в случае $s = 0$ краевая задача (1)-(3) совпадает с первой краевой задачей, и в этом случае она исследовалась в работе [22].*

6 Стационарный метод Галеркина в первой краевой задаче для уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени

В данном разделе рассматривается применение стационарного метода Галеркина к первой краевой задаче для уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени.

Пусть Ω есть ограниченная односвязная область в R^n с гладкой границей γ. Положим

$$Q = \Omega \times (0,T), \quad \Gamma = \gamma \times (0,T), \quad T = const > 0; \quad \Omega_t = \Omega \times \{t\}, \quad 0 \le t \le T.$$

В цилиндрической области Q рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u - \Delta u + c(x)u = f(x,t). \tag{6.1}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (6.1) бесконечно дифференцируемы в $\overline{Q}$.

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (6.1), такое, что

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{6.2}$$

$$D_t^i u|_{t=0,t=T} = 0, \quad i = \overline{0, s-1}; \quad D_t^s u|_{\overline{S}_0^+} = 0; \quad D_t^s u|_{\overline{S}_T^-} = 0. \tag{6.3}$$

На знак функции $k_{2s+1}(x,t)$ внутри области Q никаких ограничений не накладывается. Поэтому в класс уравнений (6.1) входят эллиптико-параболические уравнения, уравнения с меняющимся направлением времени и другие. В работе [5] с помощью функционального метода и нестационарного метода Галеркина в сочетании с методом регуляризации изучена слабая, обобщенная и регулярная разрешимость краевой задачи (6.1)-(6.3). В работе [23] для этой задачи применяется стационарный метод Галеркина в случае $(-1)^s k_{2s+1}(x,0) \le 0, (-1)^s k_{2s+1}(x,T) \ge 0$, установлена ее разрешимость в весовом пространстве Соболева, а также получена оценка погрешности метода Галеркина для этого случая.

В настоящей работе с помощью стационарного метода Галеркина при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказана однозначная регулярная разрешимость краевой задачи (6.1)-(6.3) в случае $(-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0, (-1)^s k_{2s+1}(x,T) < 0$. При этом, в отличие от работы [5], для приближенных решений получены глобальные априорные оценки по всей области Q. На основании этих оценок установлена оценка скорости сходимости приближенных решений к точному решению задачи через собственные значения самосопряженной спектральной задачи для квазиэллиптического уравнения, собственные функции которой выбираются в качестве базиса при построении приближенных решений.

Обозначим через $W_2^{m,s}(Q)$ анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{m,s}^2 = \int_0^T [\|u\|_m^2 + \|D_t^s u\|_0^2] dt,$$

где $\|.\|_m$ есть норма в пространстве Соболева $W_2^m(\Omega)$ [10]; $\|.\|_{0,0} = \|.\|$ - норма в $L_2(Q)$.

Пусть C_L есть множество функций из $W_2^{2m,2s+1}(Q)$, удовлетворяющих условиям (6.2), (6.3). В работе [5] доказано следующее утверждение.

Лемма 6.1 *[5]. Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнено условие:*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1,t}] \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $u(x,t) \in C_L$ справедливо неравенство

$$(Lu, u) \geq C_1 \|u\|_{m,s}^2, \quad C_1 = const > 0,$$

где $(.,.)$ есть скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Из леммы 6.1, в частности, следует единственность регулярного оешения краевой задачи (6.1)-(6.3) при указанных условиях.

В дальнейшем будем считать, что $(-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0, (-1)^s k_{2s+1}(x,T) < 0$ (кроме леммы 6.2). В этом случае краевые условия (6.3) принимают вид:

$$D_t^i u|_{t=0,t=T} = 0, \quad i = \overline{0,s}.$$

Пусть функции $\varphi_k(x,t)$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решениями спектральной задачи:

$$(-1)^{s+1} D_t^{2s+2}\varphi - \Delta\varphi = \lambda\varphi, \tag{6.4}$$

$$\varphi|_\Gamma = 0; \quad D_t^i \varphi|_{t=0,t=T} = 0, \quad i = \overline{0, s}. \tag{6.5}$$

Функции $\varphi_k(x,t)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_k таковы, что $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Приближенное решение краевой задачи (6.1)-(6.3) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t),$$

где c_k^N определяются системой линейных алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \varphi_l) = (f, \varphi_l), \quad l = \overline{1, N}. \tag{6.6}$$

Однозначная разрешимость системы (6.6) следует из леммы 6.1.

Лемма 6.2 *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$(-1)^s[2k_{2s} - (2s+1)k_{2s+1,t}] \ge \delta > 0, \quad f(x,t) \in L_2(Q).$$

Тогда справедлива оценка

$$\|u^N\|_{1,s} \le C_2\|f\|, \quad C_2 = const > 0.$$

Лемма 6.3 *Пусть выполнены условия леммы 6.2, а также*

$$(-1)^s[2k_{2s} + k_{2s+1,t}] \ge \delta > 0, \quad f(x,t) \in W_2^{0,1}(Q),$$

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) < 0, \quad x \in \Omega.$$

Кроме того, $f(x,0) = 0, f(x,T) = 0$ для почти всех x из Ω.

Тогда имеет место оценка

$$\|u^N\|_{2,2s+1} \le C_3\|f\|_{0,1}, \quad C_3 = const > 0.$$

Теорема 6.1 *Пусть выполнены условия леммы 6.3. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ краевой задачи (6.1)-(6.3) из пространства $W_2^{2,2s+1}(Q)$. При этом приближенные решения $u^N(x,t)$ слабо сходятся в $W_2^{2,2s+1}(Q)$ к точному решению $u(x,t)$.*

Теорема 6.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 6.1. Тогда для приближенных решений* $u^N(x,t)$ *справедлива оценка:*

$$\|u - u^N\|_{1,s} \leq C_4 \|f\|_{0,1} \lambda_{N+1}^{-1/4},$$

где $u(x,t)$ *- точное решение краевой задачи* (6.1)-(6.3)*, а постоянная* $C_4 > 0$ *не зависит от* N.

Замечание 6.1 *Отметим, что краевая задача* (6.1)-(6.3) *в случаях* $s = 0, s = 1$ *была исследована стационарным методом Галеркина в работах [6, 22, 24], а нестационарным методом Галеркина при* $s = 0$ *- в работах [25, 26].*

7 Противоположные спутные потоки с общими условиями сопряжения

В работе [27] рассматриваются задачи сопряжения различных физических процессов, в частности распространение тепла в неоднородных средах, задачи типа дифракции, взаимодействия фильтрационных и каналовых потоков жидкости, фильтрация в скважину, возвратные течения в пограничном слое за точкой его отрыва и другие. При этом, полученные задачи сопряжения сопровождаются примерами их реализации, включая и результаты в виде теорем существования и единственности решений краевых задач. В настоящей работе рассматриваются противоположные спутные потоки с общими условиями сопряжения из предложенных моделей сопряжения, контактных краевых задач.

В данном разделе рассматриваются краевые задачи для параболических уравнений $2n$-го порядка с меняющимся направлением времени в случае полной матрицы условий склеивания. Известно, что в случае краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени, гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения пространствам Гёльдера. С.А. Терсенов [8] в простейших случаях получил необходимые и достаточные условия разрешимости таких задач для параболических уравнений второго порядка в пространствах $H_{x\ t}^{p,p/2}$ при $p > 2$. При этом условия разрешимости (ортогональности), которым должны удовлетворять данные задачи, были выписаны в явном виде. Отметим, что в одномерном случае число условий ортогональности конечно. В то же время в многомерном случае число условий ортогональности, интегрального характера, бесконечно [9].

Сопряжение потоков

Рассмотрим в некоторой области $(x, y) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ уравнение

$$\vec{a}\nabla u = \operatorname{div}(\lambda\nabla u), \quad \vec{a} = \vec{a}(x, y, u), \quad \lambda = \lambda(x, y, u) \geq 0, \tag{7.1}$$

описывающее распространение величины u в среде, перенос вдоль траекторий вектора $\vec{a}$ и с коэффициентом диффузии λ. Например, u — концентрация некоторого вещества в потоке жидкости, температура или плотность жидкости.

Уравнение (7.1) описывает также течения вязкой несжимаемой жидкости, уравнения Стокса. В этом случае u — компонента вектора скорости $\vec{u} = (u, v)$ вдоль основного направления потока в направлении оси $0x$. Тогда уравнение (7.1) преобразуется к следующему

$$\vec{a}\,\nabla u = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda u_y). \tag{7.2}$$

Формулы преобразования координат (x, y) в (ξ, η) при повороте системы вокруг начала координат на положительный угол φ имеют вид $\vec{\xi} = A\vec{x}$, где $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

В этих условиях уравнение (7.1) при $\lambda = 1$ преобразуется к виду $A\vec{a}\nabla_\xi u = \nabla_\xi^2 u$ и тем самым (7.2) записывается в форме

$$A\vec{a}\,\nabla_\xi u = u_{\eta\eta}. \tag{7.3}$$

Пусть кривая Γ, проходящая через точку $(0, 0)$ разбивает область Q на области Q_1 и Q_2 так, что $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \Gamma$. В области Q_1 преимущественным направлением распространения величины $u(x, y)$ является направление оси $0x$, в области Q_2 — оси 0ξ. При этом пусть в областях Q_1 и Q_2 для величин $u = u^1(x, y)$ и $u = u^2(\xi, \eta)$ соответственно, выполняются уравнения (7.2) и (7.3).

Условия непрерывности функций u^k и их нормальных производных на линии Γ имеют вид

$$u^1(\vec{x}) = u^2(A\vec{x}), \quad \nabla_x u^1(\vec{x}) \cdot \vec{n} = A\nabla_\xi \cdot u^2(\xi) \cdot \vec{n}|_{\vec{\xi}=A\vec{x}}, \tag{7.4}$$

где $\vec{n}$ — нормаль к Γ, внутренняя в Q_1.

Противоположные спутные потоки

В этом случае условия сопряжения (7.4) имеют вид

$$u^1(\vec{x}) = u^2(A\vec{x}), \quad u_y^1(\vec{x}) = u_\eta^2(A\vec{x}).$$

Краевые задачи для противоположных спутных потоков в случае линейных уравнений (в основном модельных) рассматривались в работах М.С. Боуенди, П. Гривара, К.Д.Пагани, Г. Таленти, О. Арены, С.А. Терсенова, А.М. Нахушева, И.Е. Егорова, А.А. Керефова, Н.В. Кислова, С.Г. Пяткова и других авторов (библиография имеется в [8, 9, 27]). Н.В. Кислов [28] исследовал подобные задачи с помощью "проекционной теоремы обобщающей результат М.С. Боуенди и П. Гривара, а С.Г. Пятков [29] опирался на ряд свойств собственных функций соответствующей спектральной задачи. Нелинейным уравнениям переменного типа посвящены также [30], где имеется достаточно полная библиография.

Пусть $Q = \Omega \times (0, T)$, где Ω область в $\mathbb{R}$, либо $\Omega \equiv \mathbb{R}$, причем $0 \in \Omega$. Считаем, что область Q делится $\Gamma = (0, T)$ на две односвязные области Q^+ и Q^-. В области Q рассматривается уравнение [31]

$$f(x)u_t = u_{xx}, \tag{7.5}$$

где

$$f(x) = \begin{cases} a, & x > 0 \quad (a > 0), \\ -b, & x < 0 \quad (b > 0). \end{cases}$$

Решение уравнения (7.5) в классе ограниченных функций будет единственным при выполнении начальных условий

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \Omega^+), \quad u(x, T) = u_T(x) \quad (x \in \Omega^-) \tag{7.6}$$

и условий непрерывности производных до 1-го порядка

$$u(-0, t) = u(+0, t), \quad u_x(-0, t) = u_x(+0, t) \quad (t \in (0, T)). \tag{7.7}$$

Теорема 7.1 *Пусть $u_0, u_T \in H^p(\Omega^\pm)$, $p = 2l + \gamma$, $l \geq 1$ — целое число, $0 < \gamma < 2\theta \equiv \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{b}}$ $(1 - 2\theta \leq \gamma < 1)$, если $b \geq a$. Тогда при выполнении $2l$ условий*

$$L_s(u_0, u_T) = 0, \quad s = 1, \ldots, [p],$$

существует единственное решение уравнения (7.5) из пространства Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/2}(Q^\pm)$ $(H_{x\ \ \ \ \ \ t}^{2l+1-2\theta-2\varepsilon, l+\frac{1}{2}-\theta-\varepsilon}$, ε — сколь угодно малая положительная постоянная, причем $\varepsilon = 0$ при $\gamma > 1 - 2\theta$), которое удовлетворяет условиям (7.6), (7.7).

В области Q рассмотрим уравнение

$$f(x)u_t = Lu, \tag{7.8}$$

где L — строго эллиптический оператор $2n$-го порядка по x с коэффициентами из класса Гёльдера в $\bar{Q}$.

Пусть в уравнении (7.8) функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Решение уравнения (7.8) в классе ограниченных функций будет единственным при выполнении начальных условий (7.6) и условий непрерывности производных до $2n-1$-го порядка

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=+0},\ 0 < t < T \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{7.9}$$

Методом параболических потенциалов простого слоя с неизвестными плотностями $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига [32], краевая задача (7.8), (7.6), (7.9) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа:

$$K_1\vec{\alpha} \equiv A\vec{\alpha}(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{B(T-t, T-\tau)\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{Q}_1(t), \tag{7.10}$$

$$K_2\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{B(t, \tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{Q}_2(t), \tag{7.11}$$

где A и B — матрицы n-го порядка, выписываемые в явном виде. Отметим, что данное представление решения единственно. Полученные системы сингулярных интегральных уравнений

$$K_1\alpha \equiv K_1^0\alpha + k_1\alpha = \vec{Q}_1, \quad K_2\beta \equiv K_2^0\beta + k_2\beta = \vec{Q}_2$$

решаются в классе функций, ограниченных на концах отрезка $(0, T)$ (в классе $h(0, T)$ [33]) с индексом $æ = -1$ [34, 35]. Регуляризуя полученные уравнения, получим системы уравнений Фредгольма

$$\vec{\alpha} + K_1^* k_1\alpha = \vec{Q}_1^*, \quad \vec{\beta} + K_2^* k_2\beta = \vec{Q}_2^*. \tag{7.12}$$

Разрешимость уравнений Фредгольма (7.12) следует из единственности решения основной задачи (7.8), (7.6), (7.9) и однозначности представления их через потенциалы.

Если решение уравнения (7.11) ищется из пространства Гёльдера $H^{p,p/2n}(Q^{\pm})$ (в обозначениях [36]), то для разрешимости задачи (7.8), (7.6), (7.9) должны выполняться условия

$$L_s(u_0, u_T) = 0, \quad s = 1, \ldots, 2\left([p] - \frac{[p]}{2n} + 1\right), \tag{7.13}$$

где L_s — интегральные операторы от функций u_0, u_T.

Теорема 7.2 *Пусть $u_0, u_T \in H^p(\Omega^\pm)$. Тогда при выполнении условий (7.13) существует единственное решение уравнения (7.8) из пространства Гёльдера $H^{p,p/2n}(Q^\pm)$, удовлетворяющее условиям (7.6), (7.9).*

Общие условия сопряжения

В области Q рассматривается уравнение (7.8) при $n = 3$. Рассматриваются общие условия сопряжения, найдены зависимости показателей гельдеровских пространств от весовых функций сопряжения [37, 38].

Решение системы уравнений (7.8) ищется из пространства Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/6}(Q^+)$, $p = 6l+\gamma$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее начальным условиям (7.6) и условиям сопряжения

$$\vec{u}\,(-0,t) = A\,\vec{u}\,(+0,t), \tag{7.14}$$

где $\vec{u}^{\,k} = (u^k, u^k_x, u^k_{xx}, u^k_{xxx}, u^k_{xxxx}, u^k_{xxxxx})$, A — невырожденная верхняя треугольная матрица с постоянными действительными коэффициентами a_{ij}, причем выполнены

$$\begin{vmatrix} a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.15}$$

Будем считать, что коэффициенты a_{ij} матрицы A удовлетворяют условию единственности решения краевой задачи (7.8), (7.6), (7.14).

Теорема 7.3 *Пусть элементы невырожденной матрицы A удовлетворяют условиям (7.15). Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^p(\Omega^\pm)$ $(p = 6l + \gamma)$. Тогда при выполнении $12l - 4$ условий (7.13) существует единственное решение уравнения (7.8), удовлетворяющее условиям (7.6), (7.9) из пространства $H_{x\ t}^{p,p/6}(Q^\pm)$.*

8 Гладкие решения параболических уравнений с меняющимся направлением времени

Для неклассических краевых задач, как правило, гладкость начальных и граничных данных не обеспечивают принадлежность решения гёльдеровским пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи, указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам Гёльдера. Применение единого подхода при общих условиях склеивания для таких уравнений дает показать, что нецелый показатель гельдеровского пространства может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения для неклассических уравнений.

С.А. Терсенов в простейших случаях получил необходимые и достаточные условия разрешимости таких задач для параболических уравнений второго порядка в пространствах $H_{x\ t}^{p,p/2}$ при $p > 2$ [31]. При этом условия разрешимости (ортогональности), которым должны удовлетворять данные задачи, были выписаны в явном виде. Отметим, что в одномерном случае число условий ортогональности конечно. В то же время в многомерном случае число условий ортогональности, интегрального характера, бесконечно [9].

В данном разделе рассматриваются вопросы корректности краевых задач для параболических уравнений четного порядка с меняющимся направлением времени при $n = 2, 3$ в случае полной матрицы условий склеивания. Показано, что решения краевых задач зависят как от нецелого показателя пространства Гёльдера, так и от коэффициентов матрицы условий склеивания при выполнении необходимых и достаточных условий на входные данные задачи.

Постановка задачи

В области $Q^+ = \mathbb{R}^+ \times (0, T)$ будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad -u_t^2 = Lu^2 \quad \left(L \equiv (-1)^{n+1}\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\right). \tag{8.1}$$

Решение системы уравнений (8.1) ищется из пространства Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/2n}(Q^+)$, $p = 2nl + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u^1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x, T) = \varphi_2(x), \ x > 0, \tag{8.2}$$

и условиям склеивания

$$\vec{u}^{\,1}(0,t) = A\,\vec{u}^{\,2}(0,t), \tag{8.3}$$

где $\vec{u}^{\,k} = (u^k, u^k_x, \ldots, u^k_{\underbrace{x\ldots x}_{2n-1}})$, A — невырожденная матрица с постоянными действительными коэффициентами.

Будем предполагать, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^p(\mathbb{R})$,

$$\omega_1(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi, \quad \omega_2(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} U(\xi,T;x,t)\varphi_2(\xi)\,d\xi$$

и будем пользоваться интегральным представлением решения для системы (8.1):

$$u^1(x,t) = \int\limits_0^t \overrightarrow{U_1}(x,t;0,\tau)\vec{\alpha}(\tau)\,d\tau + \omega_1(x,t), \quad u^2(x,t) = \int\limits_t^T \overrightarrow{U_2}(0,\tau;x,t)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau + \omega_2(x,t),$$

где $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}$ — вектор-строки $\overrightarrow{U_1} = (U, V_1, \ldots, V_{n-1})$, $\overrightarrow{U_2} = (U, W_1, \ldots, W_{n-1})$, U — фундаментальное решение, V_p, W_p — элементарные решения Л. Каттабрига первого уравнения (8.1) и $\vec{\alpha}(t)$, $\vec{\beta}(t)$ — вектор-столбцы неизвестных плотностей с компонентами $\alpha_p(t)$, $\beta_p(t)$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Функции $\omega_1(x,t)$, $\omega_2(x,t)$ являются решениями уравнений (8.1) и удовлетворяют условиям (8.2) в $\mathbb{R}$.

Рассмотрим случай верхней треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{2n-1,2n-1} & a_{2n-1,2n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2n,2n} \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

В случае симметричности матрицы A находимся в условиях работы [39].

Параболические уравнения четвертого порядка

Рассматривается уравнение (8.1) при $n = 2$. Заметим также, что в случае симметричности матрицы A находимся в условиях работ [40, 41]. Будем считать, что коэффициенты a_{ij} матрицы A удовлетворяют условию единственности решения краевой задачи (8.1)–(8.3).

Теорема 8.1 *Пусть элементы невырожденной матрицы A вида (8.4) удовлетворяют усло-*

виям $a_{ij} = 0$, $i < j \le 5$, $a_{33} - \sqrt{2}a_{22} \neq 0$, *кроме этого,* $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^p(\mathbb{R}^+)$ $(p = 4l + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $4l$ *условий*

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \ldots, 4l \tag{8.5}$$

существует единственное решение уравнения (8.1), *удовлетворяющее условиям* (8.2), (8.3) *из пространства*

1) $H_{x\ t}^{p,p/4}(Q^+)$, *если* $0 < \gamma < 1 - 4\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/4}(Q^+)$, $q = 4l + 1 - 4\theta$, *если* $1 - 4\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\quad t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/4}(Q^+)$, *если* $\gamma = 1 - 4\theta$, *где* ε *— сколь угодно малая положительная постоянная,* $\theta = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}|\frac{a}{b}| \in (0, \frac{1}{4})$, $a = a_{33}$, $b = a_{33} - \sqrt{2}a_{22}$.

Теорема 8.2 *Пусть элементы невырожденной матрицы A вида (8.4) удовлетворяют условиям* $a_{24} \neq 0$, $\quad a_{34} \neq 0$ *и*

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8.6}$$

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^p(\mathbb{R}^+)$ $(p = 4l + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $6l + 2$ *условий вида* (8.5) *существует единственное решение уравнения* (8.1), *удовлетворяющее условиям* (8.2), (8.3) *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/4}(Q^+)$.

Замечания

1. 8.1 и 8.2 справедливы, если в невырожденной матрице склеивания (8.4) хотя бы один из трех элементов a_{13}, a_{14}, a_{24} будет отлично от нуля при выполнении условий (8.6). Если в невырожденной матрице склеивания (8.4) выполнены условия $a_{13} = a_{14} = a_{24} = 0$, то при выполнении условий (8.6) справедлива теорема о безусловной разрешимости.

2. Аналогичные теоремы справедливы при $n = 3$ в случае параболических уравнений с меняющимся направлением времени шестого порядка

9 Нелокальные интегро-дифференциальные задачи многомерных диффузионных процессов

Нелокальные краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе активно изучаются в последнее время, но при этом в основном рассматривается лишь случай классических уравнений второго порядка (см. работы [42], [15]). Отметим также исследования для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе [43], [44].

В данном разделе изучаются интегро-дифференциальные уравнения с интегральными условиями на боковой границе. Доказываются теоремы существования регулярных решений.

Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты, бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$ $(0<T<+\infty)$, $S=\Gamma\times(0,T)$ есть его боковая граница, $f(x,t)$ — заданная в цилиндре $\overline{Q}$ функция, $u_0(x)$ — заданная на множестве $\overline{\Omega}$ функция, $N(t)$ — заданная на множестве $[0,T]$ функция, $K_1(x,y,t)$, $K_2(x,y,t)$ — функции, заданные при $x\in\overline{\Omega}$, $y\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$.

Краевая задача I: найти функцию $u(x,t)$ являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu\equiv\frac{\partial}{\partial t}(Au)-\Delta u=f(x,t),\quad Au=\int_0^t N(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau,\tag{9.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega,\tag{9.2}$$

$$u(x,t)|_{(x,t)\in S}=\int\limits_\Omega K_1(x,y,t)u(y,t)dy|_{(x,t)\in S},\tag{9.3}$$

Краевая задача II: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (9.1) и такую, что для нее выполняется условие (9.2) и условие

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu(x)}\right|_{(x,t)\in S}=\int\limits_\Omega K_2(x,y,t)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S},\tag{9.4}$$

где $\nu(x)=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ есть вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке.

Разрешимость краевой задачи I

Из уравнения (9.1) получим

$$N(0)u(x,t) + \int\limits_0^t N'(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau - \Delta u = f(x,t).$$

Отсюда при $t = 0$, с учетом условия (9.2), имеем нелокальную краевую задачу для определения $u_0(x)$:

$$\begin{gathered} -\Delta u_0(x) + N(0)u_0(x) = f(x,0), \\ u_0(x)|_{x\in\Gamma} = \int\limits_\Omega K_1(x,y,0)u_0(y)\,dy|_{x\in\Gamma}. \end{gathered} \tag{9.5}$$

Определим оператор M_1 по формуле

$$(M_1u)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega K_1(x,y,t)u(y,t)dy.$$

Условие на оператор M_1: оператор M_1 однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$ и существуют положительные постоянные m_1, m_2 такие, что выполняются неравенства

$$m_1\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \le \int\limits_\Omega [M_1u(x,t)]^2\,dx \le m_2\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx \tag{9.6}$$

при любом $t \in [0,T]$ и $u(x,t) \in L_2(Q)$.

Пусть $V = W_2^{2,0}(Q)$. Положим $LM_1u(x,t) - M_1Lu(x,t) = \Phi(x,t,u)$, $\quad w = M_1u$. Имеем

$$\Phi(x,t,u) = \int\limits_\Omega \Delta_x K_1(x,y,t)u(y,t)\,dy - \int\limits_\Omega K_1(x,y,t)\,\Delta_y u(y,t)\,dy. \tag{9.7}$$

Прежде чем доказывать разрешимость краевой задачи I заметим, что для функций $u(x,t)$ из пространства V, для которых выполняется условие (9.2), имеет место следующее неравенство Пуанкаре:

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2\,dx\,d\tau \le c_0\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i}^2\,dx, \tag{9.8}$$

где c_0 зависит от области Ω.

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega (\Delta_x K_1)^2(x,y,\tau)\,dxdy,\\
P_1 &= \max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega K_1^2(x,y,\tau)\,dxdy,\\
c_1 &= \max_{t\in[0,T]} |N'(t)|.
\end{aligned} \tag{9.9}
$$

Теорема 9.1 *Пусть выполняются условия* (9.6), *а также условия*

$$
\begin{gathered}
K_1(x,y,t)\in C^1(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \quad N(t)\in C^1[0,T],\\
\textit{существует}\quad \delta_0\in(0;1/2) \quad \textit{такое, что выполнены}\\
1+2N(0)(1-c_0) > 2c_0c_1T + 4c_0\delta_0^2 + \tfrac{c_0P_0}{\delta_0^2 m_1},\\
1 > 4\delta_0^2 + \tfrac{P_1}{\delta_0^2 m_1}, \quad f(x,t)\in L_2(Q).
\end{gathered} \tag{9.10}
$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, и это решение единственно.

Для доказательства рассматривается вспомогательная краевая задача: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$
Lw = g(x,t) + \Phi_1(x,t,w), \tag{9.11}
$$

и удовлетворяющую условиям

$$
w(x,t)|_S = 0, \quad w(x,0) = w_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{9.12}
$$

где

$$
\begin{gathered}
u(x,0) - \int\limits_\Omega K_1(x,y,0)u(y,0)\,dy = u_0(x) - \int\limits_\Omega K_1(x,y,0)u_0(y)\,dy \equiv w_0(x),\\
\Phi_1(x,t,w) = \Phi(x,t,M_1^{-1}w).
\end{gathered}
$$

Разрешимость краевой задачи (9.11), (9.12) в классе $W = \{v(x,t) : v(x,t)\in V, \;\; w(x,t) = M_1 v(x,t)\in V\}$ для любой функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ доказывается методом продолжения по параметру [45].

Разрешимость краевой задачи II

Пусть $K_3(x,y,t)$ — функция, определенная на множестве $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ и такая, что при $(x,y,t) \in \Sigma \equiv (\Gamma\times\Gamma\times(0,T))$ выполняются равенства

$$\frac{\partial K_3(x,y,t)}{\partial\nu(x)} = K_2(x,y,t), \tag{9.13}$$

где переменные y, t являются параметрами. С помощью функции $K_3(x,y,t)$ определим оператор M_1 и функцию $\widetilde{\Phi}(x,t,u)$ по формулам

$$(M_1 u)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_{\Omega} K_3(x,y,t)u(y,t)\,dy,$$

$$\widetilde{\Phi}(x,t,u) = LM_1u(x,t) - M_1Lu(x,t).$$

Значение оператора M_1 на функцию $u(x,t)$ будем обозначать через $\widetilde{w} = M_1u(x,t)$ и определим начальную функцию $\widetilde{w}(x,0) = w_1(x)$:

$$w_1(x) = u_0(x) - \int\limits_{\Omega} K_3(x,y,0)u_0(y)\,dy.$$

Оператор M_1 однозначно и непрерывно обратим как оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при всех $t\in[0,T]$ и существуют положительные постоянные m_3, m_4 такие, что выполняются неравенства

$$m_3\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \le \int\limits_{\Omega}[M_1u(x,t)]^2\,dx \le m_4\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \tag{9.14}$$

при любых $t\in[0,T]$ и $u(x,t)\in L_2(Q)$.

Как и выше, ведем обозначения

$$\begin{aligned} Q_0 &= \max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}(\Delta_x K_3)^2(x,y,\tau)\,dxdy,\\ Q_1 &= \max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K_3^2(x,y,\tau)\,dxdy. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Теорема 9.2 *Пусть выполняются условия (9.14), а также условия*

$$
\begin{gathered}
K_3(x,y,t) \in C^2(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,T]), \quad N(t) \in C^2[0,T], \\
\textit{существует} \quad \delta_0 \in (0;1/2) \quad \textit{такое, что выполнены} \\
1 + 2N(0)(1-c_0) > 2c_0c_1T + 4c_0\delta_0^2 + \tfrac{c_0Q_0}{\delta_0^2 m_1}, \\
1 > 4\delta_0^2 + \tfrac{Q_1}{\delta_0^2 m_1}, \quad f(x,t) \in L_2(Q).
\end{gathered}
\tag{9.16}
$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, и это решение единственно.

Замечание 9.1 *В 9.1, 9.2 условия малости на функции $K_1(x,y,t)$, $K_3(x,y,t)$ можно заменить на условие малости на c_0 и условия обращения в нуль на границе:*

$$K_i(x,y,t) = K_{y_i}(x,y,t) = 0 \ (i = 1,3) \quad \textit{при} \ \ y \in \Gamma.$$

10 Регулярность и чувствительность решений нелинейных стохастических уравнений в частных производных типа Маккина-Власова, порожденных процессами устойчивого типа

В данном разделе исследуется чувствительность нелинейных стохастических дифференциальных уравнений типа Маккина-Власова, порожденных процессами устойчивого типа. Используя метод стохастических характеристик, мы переносим эти уравнения в нестохастические уравнения со случайными коэффициентами, что позволяет использовать результаты, полученные для нелинейных уравнений в частных производных типа Маккина-Власова, порожденных процессами устойчивого типа в предыдущих работах авторов. Необходимость изучения чувствительности нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных типа Маккина-Власова естественным образом возникает при анализе игр среднего поля с общим шумом.

Стохастическое уравнение в частных производных типа Маккина-Власова, порожденное процессами устойчивого типа имеет вид

$$d(f, \mu_t) = (L(\mu_t)f + \frac{1}{2}(\sigma_{com}\sigma_{com}^T\nabla, \nabla)f, \mu_t)\, dt + (\sigma_{com}\nabla f, \mu_t)\, dW_t. \tag{10.1}$$

Это уравнение написано в слабой форме, что означает, что оно должно выполняться для всех $f \in C^2(\mathbf{R}^d)$. Здесь $x \in \mathbf{R}^d$, W_t is d'-мерное стандартное броуновское движение, σ_{com} – постоянная $d \times d'$-матрица,

$$L(\mu_t)f(x) = (b(x, \mu_t), \nabla)f(x) - a(x)|\Delta|^{\alpha/2}f(x), \tag{10.2}$$

генератор процессов устойчивого типа в $\mathbf{R}^d$ с индексом устойчивости $\alpha \in (1, 2)$, $\mu_t \in \mathcal{M}\left(\mathbf{R}^d\right)$ (множество ограниченных положительных борелевских мер на $\mathbf{R}^d$), коэффициент сноса $b(x, \mu)$ и коэффициент масштаба $a(x)$ являются непрерывными функциями.

Используя следующее правило $Y \circ dX = YdX + \frac{1}{2}dYdX$, уравнение (10.1) записывается в форме Стратоновича следующим образом

$$d(f, \mu_t) = (L(\mu_t)f, \mu_t)\, dt + (\sigma_{com}\nabla f, \mu_t) \circ dW_t. \tag{10.3}$$

Напомним, что дробный Лапласиан может быть представлен как интегральный оператор

$$|\Delta|^{\alpha/2} f(x) = C_\alpha \int_{\mathbf{R}^d} \left(f(x+y) - f(x) - \frac{(\nabla f(x), y)}{1+|y|^2} \right) \frac{dy}{|y|^{d+\alpha}}, \tag{10.4}$$

с некоторой постоянной C_α.

Необходимость изучения чувствительности стохастического уравнения Маккина-Власова (10.1) и обозначения σ_{com} возникают естественным образом из анализа игр среднего поля с общим шумом, в которых положения агентов N задаются системой уравнений

$$dX_t^i = b(X_t^i, \mu_t^N, u_t^i)\, dt + \sigma_{com} dW_t + a^{1/\alpha}(X_t^i) dY_t^i, \tag{10.5}$$

где все X_t^i принадлежат $\mathbf{R}^d$, W_t – многомерное стандартное броуновское движение. W_t – общий шум, и Y_t^i – независимые симметричные процессы Леви с индексом α. Параметры $u_t^i \in U \subset \mathbf{R}^m$ – управления игроков, каждый из которых стремится максимизировать свой выигрыш. Прямой компонент системы связанных прямых-обратных уравнений, выражающей условие согласованности в играх среднего поля, представляет собой уравнение типа Маккина-Власова, а обратный компонент представляет собой уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Существует обширная литература, в которой изучаются свойства стохастических дифференциальных уравнений в частных производных типа Маккина-Власова, порожденных диффузионными процессами (см., например, [46–57] и ссылки в них). Корректность стохастических дифференциальных уравнений в частных производных типа Маккина-Власова была изучена в [56] в классе L_2-функций, и для мер в [52], хотя при допущении дополнительной монотонности. Наша работа является первой, в которой анализируются стохастические дифференциальные уравнения в частных производных типа Маккина-Власова для марковских процессов устойчивого типа.

Анализ чувствительности для нелинейных стохастических уравнений Маккина-Власова, порожденных дифузионными и нелинейными процессами устойчивого типа, в которых изучаются точные оценки роста решений и их производных по начальным данным при достаточно общих условиях на коэффициенты, изучался в [55, 58, 59]. Точные оценки становятся важными при изучении более общих уравнений такого типа, имеющих случайные коэффициенты, поскольку шум обычно считается неограниченным.

Основным подходом в нашей работе является использование метода стохастических характеристик (см. [55,60,61]), который позволяет превратить стохастическое уравнение Маккина-Власова в нестохастическое уравнение со случайными коэффициентами. Затем доказывается корректность уравнения (10.3). Затем доказывается наши основные результаты о гладкой чувствительности этого уравнения по отношению к начальным данным.

Приведем основные обозначения, использованные в работе:

$C^n(\mathbf{R}^d)$ – банахово пространство n раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных функций f на $\mathbf{R}^d$ таких, что каждая производная вплоть до порядка n ограничена, снабженное нормой $\|f\|_{C^n}$, которая является точной верхней гранью сумм абсолютных величин всех производных вплоть до порядка n.

$C_\infty(\mathbf{R}^d)$ – банахово пространство ограниченных непрерывных функций $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ с $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, снабженное sup-нормой.

$C^n_\infty(\mathbf{R}^d)$ – замкнутое подпространство пространства $C^n(\mathbf{R}^d)$ функций f со всеми производными вплоть до порядка n принадлежащих $C_\infty(\mathbf{R}^d)$.

Если $\mathcal{M}$ – замкнутое подмножество банахова пространства $\mathbf{B}$, тогда $C([0,T],\mathcal{M})$ – метрическое пространство непрерывных функций $t \to \mu_t \in \mathcal{M}$ с расстоянием $\|\eta - \xi\|_{C([0,T],\mathcal{M})} = \sup_{t\in[0,T]} \|\eta_t - \xi_t\|_{\mathbf{B}}$. Элемент пространства $C([0,T],\mathcal{M})$ записывается как $\{\mu_.\} = \{\mu_t, t \in [0,T]\}$.

$\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ – банахово пространство конечных борелевских мер со знаком на $\mathbf{R}^d$.

$\mathcal{M}^+(\mathbf{R}^d)$ и $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ – подмножества $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ положительных и положительных нормированных (вероятностных) мер, соответственно.

Пусть $\mathcal{M}_{<\lambda}(\mathbf{R}^d)$ (соотв. $\mathcal{M}_{\le\lambda}(\mathbf{R}^d)$ или $\mathcal{M}_\lambda(\mathbf{R}^d)$) и $\mathcal{M}^+_{<\lambda}(\mathbf{R}^d)$ (соотв. $\mathcal{M}^+_{\le\lambda}(\mathbf{R}^d)$ или $\mathcal{M}_\lambda(\mathbf{R}^d)$) обозначают части этих множеств содержащих меры норм меньше чем λ (соот. не превышающие λ или равные λ).

Пусть $C^{k\times k}(\mathbf{R}^{2d})$ – подпространство пространства $C(\mathbf{R}^{2d})$ содержащее функции f такие, что частные производные $\partial^{\alpha+\beta} f/\partial x^\alpha \partial y^\beta$ с мультииндексом α, β, $|\alpha| \le k, |\beta| \le k$, определены и принадлежат $C(\mathbf{R}^{2d})$. Точная верхняя грань норм этих производных приводит к естественной норме этого пространства.

Для функции F на $\mathcal{M}^+(\mathbf{R}^d)$ или $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ вариационная производная определяется как производная по направлению $F(\mu)$ по направлению δ_x:

$$\frac{\delta F(\mu)}{\delta\mu(x)} = \frac{d}{dh}|_{h=0} F(\mu + h\delta_x).$$

Старшие производные определяются $\delta^l F(\mu)/\delta\mu(x_1)...\delta\mu(x_l)$ определяются по индукции.

Пусть $C^k(\mathcal{M}_{\leq\lambda}(\mathbf{R}^d))$ – пространство функционалов таких, что k-го порядка вариационные производные определены и представляют непрерывные функции всех переменных с мерами, рассмотренные в их слабой топологии.

Пусть $C^{k,l}(\mathcal{M}_{\leq\lambda}(\mathbf{R}^d))$ – подпространство пространства $C^k(\mathcal{M}_\lambda(\mathbf{R}^d))$, содержащее функционалы F такие, что $\delta^m F(\mu)/\delta\mu(.)...\delta\mu(.) \in C^l(\mathbf{R}^d)$ для всех $m \leq k$.

Пусть $C^{2,k\times k}(\mathcal{M}_{\leq\lambda}(\mathbf{R}^d))$ – пространство функционалов таких, что их вариационные производные второго порядка непрерывны как функции всех переменных и принадлежат пространству $C^{k\times k}(\mathbf{R}^{2d})$ как функции пространственных переменных; норма в этом пространстве следующая

$$\|F\|_{C^{2,k\times k}(\mathcal{M}_{\leq\lambda}(\mathbf{R}^d))} = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_\lambda(\mathbf{R}^d)} \left\| \frac{\delta^2 F}{\delta\mu(.)\delta\mu(.)} \right\|_{C^{k\times k}(\mathbf{R}^{2d})}.$$

$(f,\mu) = \int f(x)\mu(dx)$ – обычное спаривание функций и мер в $\mathbf{R}^d$.

Стохастические характеристики для коммутирующих групп

Пусть $L_t(\mu)$ является семейством операторов, определенных на плотном подпространстве D пространства B и зависящее от $\mu \in B^*$ как от параметра. Пусть $\Omega = (\Omega_1, \cdots, \Omega_k)$ – вектор коммутирующих линейных операторов $D \to B$, которые порождают коммутирующие строго непрерывные группы $T_j = \exp\{t\Omega_j\}$ в B, а также слабо непрерывные группы $T_j^* = \exp\{t\Omega_j^*\}$ в B^*. Пусть $W_t = (W_t^1, \cdots, W_t^k)$ – k-мерное стандартное броуновское движение. Нас интересует слабое стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича в B^*:

$$d(f,\mu_t) = (L_t(\mu_t)f,\mu_t)dt + (\Omega f,\mu_t)\circ dW_t$$

$$= (L_t(\mu_t)f,\mu_t)dt + \sum_j (\Omega_j f,\mu_t)\circ dW_t^j. \tag{10.6}$$

Лемма 10.1 *При замене неизвестной функции μ_t на*

$$\zeta_t = \exp\{-\Omega^* W_t\}\mu_t = \exp\{-\sum_j \Omega_j^* W_t^j\}\mu_t,$$

уравнение (10.6) *переходит в нестохастическое уравнение в частных производных со случайными коэффициентами:*

$$\frac{d}{dt}(f,\zeta_t) = (\tilde{L}_t(\zeta_t)f,\zeta_t) = (L_t^{dress}(\exp\{\Omega^* W_t\}\zeta_t)f,\zeta_t), \tag{10.7}$$

с

$$L_t^{dress}(\mu)f = \exp\{\Omega W_t\} L_t(\mu) \exp\{-\Omega W_t\} f,$$

$$\tilde{L}_t(\zeta_t) = L_t^{dress}(\exp\{\Omega^* W_t\}\zeta_t). \tag{10.8}$$

Поскольку нас больше всего интересует чувствительность, сформулируем соответствующий абстрактный результат, который является прямым следствием леммы 10.1.

Сосредоточимся на случае, когда $B = C_\infty(\mathbf{R}^d)$ и $B^* = \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$, где производные можно записать в терминах вариационных производных.

Лемма 10.2 *Пусть уравнение* (10.7) *корректно и его решения* ζ_t *гладко зависят от начального условия в том смысле, что вариационные производные* $\delta\zeta_t/\delta\zeta_0(x)$ *and* $\delta^2\zeta/\delta\zeta_0(x)\delta\zeta_0(y)$ *существуют как меры со знаком и являются ограниченными по норме и слабыми непрерывными функциями от* x *и* y*. Тогда решения* $\mu_t = \exp\{\Omega^* W_t\}\zeta_t$ *уравнения* (10.3) *также гладко зависит от начального условия* $\mu_0 = \zeta_0$ *и вариационные производные определяются следующими формулами*

$$\left(f, \frac{\delta \mu_t}{\delta \mu_0(x)}\right) = \frac{\delta}{\delta \mu_0(x)}(f, \mu_t) = \frac{\delta}{\delta \zeta_0(x)}(\exp\{\Omega W_t\} f, \zeta_t), \tag{10.9}$$

$$\left(f, \frac{\delta^2 \mu_t}{\delta \mu_0(x)\delta \mu_0(y)}\right) = \frac{\delta^2}{\delta \zeta_0(x)\delta \zeta_0(y)}(\exp\{\Omega W_t\} f, \zeta_t). \tag{10.10}$$

Результат о корректности

В данном параграфе мы рассмотрим корректность уравнения (10.1) или (10.3).

Уравнение (10.3) является частным случаем уравнения (10.6) с

$$\Omega v(x) = (\sigma_{com}, \nabla) v(x) = \{\Omega^j v(x)\} = \{\sum_k \sigma_{com}^{jk} \nabla_k v(x)\}.$$

Оператор Ω имеет сопряженный оператор

$$\Omega' v(x) = -\Omega v(x) = (-\sigma_{com}, \nabla) v(x),$$

и порождает d' полугрупп

$$T_j(t) v(x) = v(x + \sigma_{com}^{j.} t) = v(x_1 + \sigma_{com}^{j1} t, ..., x_d + \sigma_{com}^{jd} t),$$

решающих задачу Коши для уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \sum_k \sigma_{com}^{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k}(t,x).$$

Эти полугруппы коммутируют и определяют действие $T(t_1, \cdots, t_{d'})$ из $\mathbf{R}^{d'}$ на $(\mathbf{R}^d)$ следующей формулой

$$T(t_1, \cdots, t_{d'}) : v(x) \mapsto v(x + \sum_j \sigma_{com}^{j\cdot} t_j).$$

Согласно лемме 10.1, уравнение (10.3) переписывается в терминах мер $\zeta_t = T^*(-W_t)\mu_t$ как уравнение (10.7)

$$\frac{d}{dt}(f, \zeta_t) = (\tilde{L}_t(\zeta_t) f, \zeta_t) = (L_t^{dress}(\zeta_t(x - \sigma_{com} W_t)) f, \zeta_t), \tag{10.11}$$

с

$$L_t^{dress}(\mu) f(x) = \exp\{\Omega W_t\} L(\mu) \exp\{-\Omega W_t\} f(x)$$

$$= (b(x + \sigma_{com} W_t, \mu), \nabla) f(x) - a(x + \sigma_{com} W_t) |\Delta|^{\alpha/2} f(x) \tag{10.12}$$

и

$$\tilde{L}_t(\zeta_t) f(x) = L_t^{dress}(\zeta_t(x - \sigma_{com} W_t)) f(x)$$

$$= (\tilde{b}(W_t, x, \zeta_t), \nabla) f(x) - \tilde{a}(W_t, x) |\Delta|^{\alpha/2} f(x), \tag{10.13}$$

где

$$\tilde{b}(W_t, x, \zeta_t) = b(x + \sigma_{com} W_t, \zeta_t(x - \sigma_{com} W_t)),$$

$$\tilde{a}(W_t, x) = a(x + \sigma_{com} W_t).$$

Мы будем использовать некоторые предположения о регулярности для функции $b(x, \mu)$, зависящей от x и $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$. Для всех практических целей зависимость b от μ выражается в терминах некоторых интегральных функционалов, т.е. следующего типа

$$b(x, \mu) = g(x, I_1, ..., I_\rho), \tag{10.14}$$

$$I_m = \int_{\mathbf{R}^{dl_m}} B_m(x, y_1, ..., y_{l_m}) \mu(dy_1) \cdots \mu(dy_{l_m}),$$

с функциями B_m, которые являются симметричными по y , для которых все вариационные производные принадлежат одинаковому классу:

$$\frac{\delta b(x,\mu)}{\delta\mu(z)} = \sum_m \frac{\partial g}{\partial I_m}(x, I_1, ..., I_\rho) l_m \int_{\mathbf{R}^{d(l_m-1)}} B_m(x, z, y_2, ..., y_{l_m})$$

$$\times\mu(dy_2)\cdots\mu(dy_{l_m}), \tag{10.15}$$

следовательно, все условия регулярности можно переписать в терминах обычной гладкости функций B_m.

Введем следующие условия:

(C1) Функция $a(x) \in C^2_\infty\left(\mathbf{R}^d\right)$ и удовлетворяет неравенствам

$$M^{-1} \le a(x) \le M$$

для всех $x \in \mathbf{R}^d$ и постоянной $M > 1$;

(C2) Функция $b(x,\mu)$ непрерывна и ограничена на $\mathbf{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$, $b(.,\mu) \in C^2(\mathbf{R}^d)$, и b является Липшиц-непрерывной как функция от x, равномерно по другим переменным;

(C3) Первая и вторая вариационные производные $b(x,\mu)$ по μ корректно определены, ограничены и

$$b(x,.) \in (C^{2,1\times 1} \cap C^{1,2})(\mathcal{M}_{\le\lambda}(\mathbf{R}^d))$$

для всех $\lambda > 0$.

Замечание 10.1 *Если функция b представлена как (14) тогда гладкость вариационных производных второго порядка $b(x,\mu)$ может быть выражена в терминах гладкости конечномерных функций B_m and g.*

Корректность этого нелинейного нестохастического уравнения со случайными коэффициентами (10.7) или (10.11), следует из общих результатов о корректности нелинейных уравнений устойчивого типа из [58, 59, 62, 63] (см., например,Теорему 7.9 из [58] и Утверждение 2.5 из [59]). Из эквивалентности этого уравнения уравнению (10.3), мы получаем следующий результат о корректности для (10.3).

Теорема 10.1 *При предположениях (C1)-(C3) и любого заданного $T > 0$ справедливо следующее.*

(i) Задача Коши для уравнения (10.3) *корректно определена почти наверняка, т.е., для*

любого начального условия $Y \in \mathcal{M}^+(\mathbf{R}^d)$ оно имеет единственное ограниченное неотрицательное решение $\mu_t(Y)$ такое, что $\zeta_t = \exp\{-\Omega^* W_t\}\mu_t$ решает (10.7) *и* (10.11).

(ii) Для всех $t > 0$, $\|\zeta_t\| \le \|Y\|$ и ζ_t имеют плотности по мере Лебега. С некоторыми злоупотреблениями в обозначениях мы снова обозначим эти плотности через ζ_t. Они удовлетворяют уравнению в мягкой форме

$$\zeta_t(x) = \int G_t(x,y)Y(dy)$$

$$-\int_0^t ds \int \frac{\partial}{\partial y}\Big(G_{(t-s)}(x,y), \tilde{b}(W_s, y, \zeta_s)\zeta_s(y)\Big)\, dy. \qquad (10.16)$$

Следовательно, $\|\mu_t\| \le \|Y\|$ и μ_t также имеют плотности, v_t и $\mu_t(dy) = v_t(y)dy \to Y$ слабо, при $t \to 0$. Если начальное условие Y имеет плотность v_0, тогда $v_t \to v_0$ в $L^1(\mathbf{R}^d)$. Здест $G_t(x,y)$ функция Грина, сопряженная к функции Грина для оператора $a(x)|\Delta|^{\alpha/2}$.

(iii) Для любых двух решений μ_t^1 и μ_t^2 уравнения (10.3) *с начальными условиями Y^1, Y^2 справедлива оценка*

$$\|\mu_t^1 - \mu_t^2\|_{L_1(R^d)} \le \|Y^1 - Y^2\|_{\mathcal{M}(R^d)} C(T, \|Y^1\|), \qquad (10.17)$$

с C, зависящим от оценок производных в условиях (C1)-(C3).

Подчеркнем, что коэффициенты уравнения (10.3) являются случайными, но оценки роста (10.17) являются детерминированными из-за равномерных оценок для коэффициентов $\tilde{b}$ и $\tilde{a}$. По факту, постоянные $C(T, \|Y^1\|)$ в правой части (10.17) можно естественным образом выразить через функции Миттаг-Леффлера.

Гладкая зависимость от входных данных: первый порядок

В данном параграфе мы изучаем чувствительность нелинейного стохастического уравнения типа Маккина-Власова (10.3), то есть, производные

$$\xi_t(x;.) = \xi_t(x;.)[\mu_0] = \frac{\delta \mu_t}{\delta \mu_0(x)} = \frac{d}{dh}|_{h=0}\mu_t[\mu_0 + h\delta_x], \qquad (10.18)$$

и

$$\eta_t(x,z;.) = \eta_t(x,z;.)[\mu_0] = \delta^2\mu_t/\delta\mu_0(x)\delta\mu_0(z).$$

По лемме 10.2 эти производные выражаются через производные нестохастического уравнения (10.7) или (10.11). Для нестохастических уравнений такого типа чувствительность была получена в нашей предыдущей работе (см. Теорему 3.2 из [59]), которая подразумевает точечную (почти для всех траекторий W_t) чувствительность (10.3). Однако для приложений важно иметь оценки роста производных ξ, η в различных функциональных пространствах, которые либо детерминированы, или хотя бы имели ограниченное математическое ожидание. Для случая постоянных корреляций σ_{com} мы сможем получить оценки, которые являются детерминированными. С этой целью мы должны рассмотреть основные этапы доказательства чувствительности (10.7) и (10.11) и точно увидеть, как оценки зависят от коэффициентов. Ключевым моментом, который следует отметить, является то, что, поскольку $\tilde{b}$ и $\tilde{a}$ получены смещением b и a, условия (C1)-(C3) на b и a эквивалентны тем же предположениям, что и на $\tilde{b}$ и $\tilde{a}$ с одинаковыми оценками по нормам во всех задействованных пространствах.

Теорема 10.2 *При условиях (C1)–(C3) отображение $Y = \mu_0 \mapsto \mu_t$ из Теоремы 10.1 является непрерывно дифференцируемым по Y так что производная* (10.18) *корректно определена как непрерывная функция двух переменных такая, что*

$$\sup_x \sup_{\mu_0 \in \mathcal{M}^+_{\leq\lambda}(\mathbf{R}^d)} \|\xi_t(x;.)[\mu_0]\| \leq C(T, \lambda, \|Y\|) \tag{10.19}$$

для $t \in [0, T]$ равномерно для всех значений W_t. Более того, вариационные производные $\xi_t(x;.)$ дважды слабо дифференцируемы по x, как функционалы на пространстве гладких функций, т.е.

$$\partial \xi_t(x;.)/\partial x \in (C^1_\infty(\mathbf{R}^d))^*, \quad \partial^2 \xi_t(x;.)/\partial x^2 \in (C^2_\infty(\mathbf{R}^d))^*,$$

и

$$\|\partial \xi_t(x;.)/\partial x\|_{(C^1_\infty(\mathbf{R}^d))^*} \leq C(T, \lambda, \|Y\|),$$

$$\|\partial^2 \xi_t(x;.)/\partial x^2\|_{(C^2_\infty(\mathbf{R}^d))^*} \leq C(T, \lambda, \|Y\|), \tag{10.20}$$

также равномерно для всех значений W_t.

Гладкая зависимость от входных данных: второй порядок

Аналогично Теореме 10.2 теперь мы можем получить следующий результат о чувствительности второго порядка для уравнения Маккина-Власова (10.3).

Мы получаем для $\tilde{\eta}_t = \delta^2 \zeta_t / \delta Y(x) \delta Y(z)$ уравнение в слабой форме дифференцированием уравнения (**??**)

$$\frac{d}{dt}(f,\tilde{\eta}_t(x,z;.)) = \Big((\tilde{b}(W_t,.\,,\zeta_t),\nabla)f - \tilde{a}(W_t,.)|\Delta|^{\alpha/2}f, \tilde{\eta}_t(x,z;.) \Big)$$

$$+(f,q_t) + \int\int \left(\frac{\delta \tilde{b}(W_t,y,\zeta_t)}{\delta\zeta_t(w)} \tilde{\eta}_t(x,z;dw), \nabla f(y) \right) \zeta_t(y)\, dy, \tag{10.21}$$

с (f,q_t) следующего вида

$$\int\int \left(\frac{\delta \tilde{b}(W_t,y,\zeta_t)}{\delta\zeta_t(w)}, \nabla f(y) \right) [\tilde{\xi}_t(x;dy)\tilde{\xi}_t(z;dw) + \tilde{\xi}_t(x;dw)\tilde{\xi}_t(z;dy)]$$

$$+\int\int\int \left(\frac{\delta^2 \tilde{b}(W_t,y,\zeta_t)}{\delta\zeta_t(w)\delta\zeta_t(u)}, \nabla f(y) \right) \tilde{\xi}_t(x;dw)\tilde{\xi}_t(z;du)\zeta_t(y)\, dy, \tag{10.22}$$

который должен быть выполнен с исчезающим начальным условием.

Это уравнение аналогичное уравнению (**??**), но с дополнительным неоднородным членом (f,q_t).

Структура (10.22) показывает, что для данного анализа нужны экзотические пространства $C^{2,k\times k}(\mathcal{M}^+_{\le\lambda}(\mathbf{R}^d))$, определенные во введении.

Теорема 10.3 *(i) При условиях (C1)–(C3) отображение $Y=\mu_0\mapsto\mu_t$ из Теоремы 10.1 является дважды непрерывно дифференцируемым по Y, так, что производная $\eta_t(x,z;.)$ корректно определена как непрерывная функция трех переменных так, что*

$$\sup_x \sup_z \sup_{\mu_0\in\mathcal{M}^+_{\le\lambda}(\mathbf{R}^d)} \|\eta_t(x,z;.)[\mu_0]\| \le C(T,\lambda,\|Y\|) \tag{10.23}$$

для $t\in[0,T]$ равномерно для всех значений W_t.

Более того, производные $\eta_t(x,z;.)$ по x и z корректно определены как элементы $(C^2(\mathbf{R}^d))^*$ и

$$\|\frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^\beta}{\partial z^\beta}\eta_t(x,z;.)\|_{(C^2(\mathbf{R}^d))^*} \le C(T,\lambda,\|Y\|) \tag{10.24}$$

для $\gamma,\beta=0,1$.

11 О квазиоднородных бесконечных системах линейных алгебраических уравнений

Как отмечено в работах [64, 65] история исследования бесконечных систем линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных насчитывает более 200 лет. Еще Фурье (1807) получил решение задачи Дирихле для случая бесконечной полосы с применением бесконечных систем, правда, он пришел к правильному результату несколько скользким путем. Значительно позже астроном Г. Хилл (1877) удачно применил бесконечную систему при интегрировании одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, получающегося при исследовании движения луны. Также практическое решение ОДУ принудило А. Пуанкаре обратиться к бесконечным системам. Решение интегральных уравнений привело А. Фредгольма и Д. Гильберта к мысли исследовать бесконечные системы.

В развитие приложений метода Фурье Л.В Канторович предложил метод решения основывающийся на сведении граничной задачи к бесконечной системе линейных уравнений и была изложена [66]оригинальная теория, так называемых регулярных (вполне регулярных, квазирегулярных), бесконечных систем. До настоящего времени эта теория является единственной теорией бесконечных систем, успешно применяемой для решения различных задач статистической теории упругости. Второй наиболее разработанной теорией является теория периодических бесконечных систем [64],в том числе систем с разностными индексами [67, 68].При разработке теории дифракции волн последние системы широко использованы Шестопаловым В.П. и его учениками [69, 70],при этом они значительно развили теорию решения указанных систем. Вместе с тем недостаточная разработка теории и методов решения общих бесконечных систем значительно затрудняют приложение этих систем в математическом моделировании различных физических, химических, биологических, технологических и т. д. процессов [71].Тем не менее попытки практического применения бесконечных систем для решения многих задач механики, техники, физики и естествознания не утихают, например, для решения задач спектральной теории и параметрических цепей [72]и теории волноводов [73],а также радиоцепей [74].Для решения многих физических и технических задач могут успешно применяться особые виды бесконечных систем, [75] хотя об свойствах этих систем полной ясности до сих пор отсутствует [76].Здесь уместно отметить что, широко используемое в научной литературе понятие главного решения бесконечной системы не выдерживает критики [76].

Таким образом, теория бесконечных систем линейных алгебраических уравнений возникла и развивается в связи с теми приложениями, которые она имеет в вопросах интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, в теории интегральных уравнений и, в особенности, при решении краевых задач математической физики.

Основные сведения о бесконечных системах, матрицах, определителях и минорах можно найти в работах [64–66, 77, 78].

Основные понятия и вспомогательные сведения

Пусть задана неоднородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений с бесконечным множеством неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n + ... = b_1,\\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n + ... = b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n + ... = b_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}, \tag{11.1}$$

где коэффициенты и свободные члены системы, а также неизвестные взяты из некоторого поля F.

Совокупность численных значений величин $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ...называется *решением системы* (11.1), если после подстановки этих значений в левую часть равенств (11.1) мы получим сходящиеся ряды, и все эти равенства будут удовлетворены.

В случае разрешимости бесконечная система называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*.

Вычисляем главные миноры (главные определители) матрицы A системы (11.1): $|A_1| = a_{1,1}$, $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ и т. д. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}|A_n| = |A|$, то считается, что существует *бесконечный определитель*, а значение указанного предела есть значение *бесконечного определителя*. Предполагается, что матрица A бесконечной системы (11.1) имеет бесконечный определитель отличный от нуля.

Бесконечная матрица A по Куку Р. [78] может быть нижней треугольной или верхней треугольной в соответствии с аналогичными понятиями для конечных матриц.

Следовательно, нижние или верхние треугольные матрицы с отличными от нуля бесконечными определителями необходимо выделить.

Определение 1. Если все элементы главной диагонали нижней треугольной матрицы не равны нулю, то такую матрицу назовем просто *треугольной*. Если главная диагональ верхней треугольной матрицы состоит из ненулевых элементов, то такую матрицу называем *гауссовой матрицей*.

Таким образом, бесконечные определители (если они существуют) треугольной и гауссовой матриц всегда отличны от нуля, в этом заключается принципиальная разница нижней и верхней треугольной матриц соответственно от треугольной и гауссовой матриц.

Если бесконечная система имеет гауссову матрицу, то говорят, что система задана в *гауссовой форме* или просто она называется *гауссова система*.

Поскольку предполагается, что бесконечный определитель системы (11.1) отличен от нуля, то бесконечная матрица системы (11.1) имеет бесконечный ранг [77]. Поэтому, для обобщения алгоритма Гаусса воспользуемся теоремой [79]:

Теорема 11.1 *Всякую матрицу $A(a_{i,k})_1^\infty$ бесконечного ранга, у которой последовательность главных миноров отличны от нуля, т. е. $D_k \neq 0$ $(k = 1, 2, ..., \infty)$ можно представить в виде произведения треугольной матрицы B на гауссову матрицу C, т. е. $A = BC$, причем коэффициенты матриц B и C рекуррентно записаны через коэффициенты матрицы A.*

Если положить $b_{j,j} \equiv 1$, то получим алгоритм Гаусса для данной бесконечной системы. Последний позволяет вместо системы (11.1) решать следующую эквивалентную *гауссову систему*:

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_{j,j+p} x_{j+p} = \bar{b}_j, \quad j = 1, 2, 3, ..., \tag{11.2}$$

где $c_{j,j+p}$ – элементы гауссовой матрицы C, а $\bar{b}_j$ – элементы матрицы $B^{-1}b$.

Были попытки обобщения алгоритма Гаусса на бесконечной системы [80, 81],но с алгоритмической точки зрения они оказались мало пригодны для их практической реализации.

Для простоты гауссову систему (11.2) запишем в более общем виде, не связывая ее со системой (11.1):

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{j,j+p} x_{j+p} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \tag{11.3}$$

где $a_{j,j+p}$ – элементы гауссовой матрицы A, b_j – свободные члены.

В качестве основного метода решения гауссовой системы (11.3) нами предлагается использовать метод редукции, но не в его классическом понимании.

Определение 2. Если при построении метода редукции для решения бесконечных систем алгебраических уравнений количество неизвестных и количество уравнений остаются одинаковыми в усеченной системе, то говорим, что метод редукции *понимается в узком смысле*, а если количество неизвестных остается большим, чем количество уравнений, то говорим,что метод редукции *понимается в широком смысле.*

Таким образом, метод редукции в узком смысле – это известный метод простой редукции. Но различное понимание метода редукции имеет принципиальное значение. Метод редукции в узком смысле применяется только для решения неоднородной бесконечной системы, а в широком смысле – с учетом нетривиального решения, в случае его существования, соответствующей однородной системы.

Здесь следует подчеркнуть, что приближенное решение усеченной системы, например, методом последовательных приближений, чаще всего не дает успеха [76].

Для эффективного аналитического решения некоторых гауссовых бесконечных систем при рассмотрении примеров используется понятие периодических гауссовых систем.

Определение 3. *Периодической гауссовой системой* называется, гауссова бесконечная система (11.3) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

$$\frac{a_{j,j+p}}{a_{j+p,j+p}} = a_p,\ \ j = 1, 2, 3, \dots . \tag{11.4}$$

Новые результаты, полученные нами ранее

Здесь приводим новые сведения, полученные нами по решению общей бесконечной системы (11.1) [82–84]

Усекая в соответствии с методом простой редукции систему (11.3) и решая ее, получим, следующий результат.

Теорема 11.2 *Пусть задана, урезанная по методу простой редукции от системы (11.3), конечная гауссова система в виде*

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p} \overset{n}{x}_{j+p} = b_j, \quad a_{j,j} \neq 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{11.5}$$

Тогда решением системы (11.5) будет выражение:

$$\overset{n}{x}_j = B_{n-j}, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{11.6}$$

где

$$B_{n-j} = \frac{b_j}{a_{j,j}} - \sum_{p=0}^{n-j-1} \frac{a_{j,n-p}}{a_{j,j}} B_p \quad B_0 = \frac{b_n}{a_{n,n}}, \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{11.7}$$

Спрашивается, когда же метод простой редукции сходиться к решению общей системы (11.1)? Для того, чтобы ответить на данный вопрос предположим выполнение двух следующих условий:

1) Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} B_{n-j} = B(j)$. Это условие гарантирует, как видно из выражения (11.6), что метод простой редукции сходится;

2) Пусть в выражении (11.7) допустим предельный переход почленно, т.е. имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=j+1}^{n} \frac{a_{j,p}}{a_{j,j}} B_{n-p} = \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{a_{j,p}}{a_{j,j}} \lim_{n\to\infty} B_{n-p}.$$

Условие 2) является достаточным условием того, чтобы числа $B(j)$ составили частное решение гауссовой системы (11.3), тем самим исходной системы (11.1).

Теорема 11.3 *Пусть выполняются условия 1) и 2), тогда предельное значение* $\lim\limits_{n\to\infty} B_{n-j} = B(j)$ *является частным решением системы (11.3), тем самым и общей системы (11.1).*

Определение 4. Частное решение $x_j = B(j)$ гауссовой бесконечной системы (11.3) называется *строго частным решением* системы (11.1).

Теорема 11.4 *Если неоднородная гауссова система (11.3) совместна, то всегда существует ее строго частное решение, которое выражается формулой Крамера.*

Теорема 11.5 *Общая неоднородная бесконечная система (11.1) с отличным от нуля бесконечным определителем совместна тогда и только тогда, когда существует ее строго частное решение.*

Теорема 11.6 *Пусть гауссова система (11.3) совместна, тогда ее строго частное решение* x_j *имеет вид*

$$x_j = B(j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p A_p(j) b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{11.8}$$

где $A_p(j)$ – рекуррентно определяются соотношением:

$$A_p(j) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p-1-k} a_{j+k,j+p}}{a_{j+k,j+k}} A_k(j), \;\; A_0(j) = 1 \;\; \forall j. \tag{11.9}$$

В действительности выражение (11.9) является значением следующего *характеристического* определителя (порядка $n - j = p$):

$$A_{n-j}(j) = \begin{vmatrix} \frac{a_{j,j+1}}{a_{j,j}} & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \frac{a_{j,j+2}}{a_{j,j}} & \frac{a_{j+1,j+2}}{a_{j+1,j+1}} & 1 & ... & 0 & 0 \\ \frac{a_{j,j+3}}{a_{j,j}} & \frac{a_{j+1,j+3}}{a_{j+1,j+1}} & \frac{a_{j+2,j+3}}{a_{j+2,j+2}} & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ \frac{a_{j,n-2}}{a_{j,j}} & \frac{a_{j+1,n-2}}{a_{j+1,j+1}} & \frac{a_{j+2,n-2}}{a_{j+2,j+2}} & ... & 1 & 0 \\ \frac{a_{j,n-1}}{a_{j,j}} & \frac{a_{j+1,n-1}}{a_{j+1,j+1}} & \frac{a_{j+2,n-1}}{a_{j+2,j+2}} & ... & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-2,n-2}} & 1 \\ \frac{a_{j,n}}{a_{j,j}} & \frac{a_{j+1,n}}{a_{j+1,j+1}} & \frac{a_{j+2,n}}{a_{j+2,j+2}} & ... & \frac{a_{n-2,n}}{a_{n-2,n-2}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \end{vmatrix}. \tag{11.10}$$

На самом деле (11.8) показывает, что справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} B_{n-j}(j) = B(j)$, where

$$\overset{n}{x}_j = B_{n-j}(j) = \sum_{p=0}^{n-j-1} (-1)^p A_p(j) \frac{b_{j+p}}{a_{j+p,j+p}}, \quad j = 1, 2, ...n. \tag{11.11}$$

Теорема 11.7 *Пусть задана урезанная от гауссовой системы (11.3) в однородном случае ($b_j = 0$) в соответствии с методом редукции в широком смысле конечная однородная гауссова система в виде*

$$\sum_{p=0}^{n-j} a_{j,j+p} \overset{n+1}{x}_{j+p} = 0, \quad a_{jj} \neq 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{11.12}$$

Тогда решением системы (11.12) является выражение

$$\overset{n+1}{x}_j = \frac{(-1)^j x_0 A_{n-j}(j)}{A_n(0)}, \quad j = 0, 1, ..., n, \tag{11.13}$$

где $A_{n-j}(j)$ – определитель (11.10), вычисляемое соотношением (11.9) и x_0 – произвольное вещественное число, индекс $n+1$ – количество неизвестных системы (11.12) порядка n.

Здесь для удобства записи нумерация уравнений в (11.3) начинается с нуля, т.е. $j =$

$0, 1, 2, \dots$.

Приведем важнейшие свойства строго частного решения, которые следуют из теорем (4)–(6).

Свойство 11.1 *Совместная неоднородная система (11.1) всегда имеет единственное частное решение, которое выражается формулой Крамера*

Свойство 11.2 *Строго частное решение не содержит как аддитивное слагаемое нетривиальное решение соответствующей однородной системы. В связи с этим свойством это решение и названо* строго частным решением.

Свойство 11.3 *Строго частное решение является главным решением бесконечной системы, если последнее существует. Но главное решение получено в сочетании метода простой редукции с методом последовательных приближений, сходимость которого не зависит от сходимости метода редукции.*

Свойство 11.4 *У однородной бесконечной системы тривиальное решение является её строго частным решением. Следовательно, методом простой редукции принципиально нельзя получить нетривиальное решение однородной системы.*

Вопросы единственности решения

Главное отличие конечных систем от бесконечных заключается в том, что если даже бесконечный определитель отличен от нуля, то соответствующая однородная бесконечная система может иметь и нетривиальные решения, чего быть не может для конечных систем. Следовательно, исследование соответствующих однородных систем приобретает особую актуальность с точки зрения единственности решения неоднородных бесконечных систем.

Вместе с тем имеется другой путь исследования однозначности решения бесконечных систем, а именно, единственность решения некоторых бесконечных систем обусловливается однозначностью решения самой исходной задачи, как это сделано, например, в работе [70].Но такой путь не всегда удается осуществить, как это указано в [85].

Поэтому наиболее общим подходом остается исследование однородных систем.

Вместе с тем решение однородных бесконечных систем является гораздо трудной задачей, чем решение неоднородных систем, как на это обратил внимание еще Рисс [86].Как уже указали выше (см. свойство 4) методы решения неоднородных и однородных систем кардинально различаются. В настоящее время имеются эпизодические работы по решению однородных бесконечных систем, т. е. удается решить некоторые специальные системы. С другой стороны, в приложениях встречаются бесконечные системы, в которых только конечное число уравнений является неоднородным, а бесконечная часть – однородной. На практике при исследовании таких систем на ее особенность не обращают внимания.

Для четкого понимания различий методов решения одной и той же системы в неоднородном и однородном случаях приведем подробную схему решения одной специальной бесконечной системы.

Пример 1. Рассмотрим следующую бесконечную систему [64]

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p)!}{(2p)!} x_{j+p} = b^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \quad b > 0, \tag{11.14}$$

имеющей замкнутое точное аналитическое решение, причем не единственное. Ее практическое приложение для решения одной смешанной задачи математической физики приведено в [87].

Легко проверить, что для коэффициентов системы (11.14) выполняется условие периодичности (11.4), кроме того, свободные члены b_j имеют вид $b_{k+m} = b_k b_m$. Это позволяет найти ее точное аналитическое решение [64, 85, 87]

$$x_j = \frac{b^j}{(2j)! sh(\sqrt{b})}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{11.15}$$

Если нет возможности решать заданную бесконечную систему аналитическим путем в замкнутом виде, то приходится обращаться к вычислительным методам и решать систему с помощью компьютера.

Поэтому теперь систему (11.14) решим как гауссову систему, полученной от общей системы (11.1), без учета ее специфики, используя только теоремы 2–7, в частности, формулы (11.8), (11.9) и (11.11), (11.13).

Вычисление ряда (11.8) с использованием рекуррентной формулы (11.9) осуществляется таким образом: для каждого j при $n \to \infty$ вычисляем абсолютное значение разности последних двух членов суммы (11.11), следя этой разностью, и если это значение не превышает заданной точности ε, мы останавливаем вычисления (при некотором $n = N_j$). Естественно, для каждого j существует свое N_j, а это в свою очередь позволяет следить за невязкой, т.е. за разницей между левой и правой частями системы (11.14) для найденных значений x_j для каждого j. Если эти невязки стремятся к нулю, то полученные числа x_j будут приближенными решениями системы

(11.14) с гарантированной точностью в случае достаточно быстрой сходимости ряда в (11.8).

Поясним вышесказанное. Действительно, если числовая последовательность $\overset{n}{x}_j$ сходится при увеличении n, то это говорит о том, что простая редукция имеет предел, т. е. сходится. Здесь необходимо помнить о том, что на самом деле формула (11.11) с учетом (11.9) дает точное решение урезанной конечной системы n-го порядка для каждого n в единой записи. Но сходимость простой редукции еще не говорит о том, что редукция сходится именно к решению гауссовой бесконечной системы, например (11.14), тем самым общей системы (11.1). Но если она сходится, то она сходится непременно к значению, определяемому формулой Крамера для соответствующего j. Для того чтобы показать, что простая редукция сходится к решению гауссовой системы (11.14) нам необходимо следить за невязкой. Очевидно, из формулы (11.11) с учетом (11.9) следует From the formula (3.5$'$) with regard to (3.6) it follows that

$$\varepsilon = |\overset{n}{x}_j - \overset{n+1}{x}_j| = \left| A_{n+1-j}(j)\frac{b_{n+1}}{a_{n+1,n+1}} \right|,$$

где $A_{n+1-j}(j)$ – характеристические определители (11.10) гауссовой матрицы A, $a_{j,j+p} \in A$, b_j – свободные члены системы (11.3).

В таблице 1 представлены результаты расчетов системы (11.14) для b=0.5, b=2.3 при $\varepsilon = 10^{-8}$ и ее точное решение (11.15).

Таблица 1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
b=0.5	0.7933	0.1983	0.0083	0.0001	0.0000
(11.15)	0.7933	0.1983	0.0083	0.0001	0.0000
b=2.3	0.4193	0.4809	0.0924	0.0071	0.0003
(11.15)	0.4188	0.4816	0.0923	0.0071	0.0003

В таблице 2 даны невязки первых трёх уравнений рассматриваемой системы, которые показывают, что найденные решения удовлетворяют исходной системе с достаточной точностью (кстати, таблица 1 также подтверждает это утверждение):

Таблица 2

b	1	2	3
0.5	$3.787 \cdot 10^{-12}$	$-4.712 \cdot 10^{-10}$	$-2.940 \cdot 10^{-9}$
2.3	$7.229 \cdot 10^{-11}$	$1.444 \cdot 10^{-8}$	$2.172 \cdot 10^{-6}$

Таким образом, как показывают таблицы 1 и 2 аналитическое решение (11.15) на самом деле является строго частным решением системы (11.14).

В силу периодичности системы (11.14) и в однородном случае удается найти ее аналитическое решение в замкнутом виде, причем фактически все ее нетривиальные решения.

Пример 2. Найти все нетривиальные решения системы (11.14) в однородном случае:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2j+2p)!}{(2p)!} x_{j+p} = 0,\ j = \overline{0,\infty}. \tag{11.16}$$

Решение. Хотя решение данного примера приведено в наших ранних работах неоднократно, в частности, в [87], в силу важности примера, здесь приведем полную схему решения системы (11.16).

Известно [65],что между решениями однородной периодической системы и соответствующей однородной системы с разностными индексами

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x_{j+p} = 0,\ j = 0, 1, \dots, \tag{11.17}$$

существует изоморфизм по соотношению $y_j = \frac{x_j}{a_{j,j}}$, Здесь y_j есть решение периодической системы, x_j – системы (11.17) с разностными индексами.

Как показано в работах [64, 65],для систем с разностными индексами (следовательно и для периодических систем) главную роль в вопросе существования нетривиальных решений играет *характеристика* системы (или по другому *характеристическое уравнение*):

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p x^p = 0. \tag{11.18}$$

Именно нули этого алгебраического уравнения определяют нетривиальные решения бесконечных систем с разностными индексами, тем самим – и периодических.

Если уравнение (11.18) не имеет нулей, то неоднородная система (11.3), в случае ее периодичности, имеет единственное решение. Если $x = \xi$ является однократным нулем уравнения (11.18), то выражение $x_j = \frac{(-\xi)^j C}{a_{j,j}}$ является нетривиальным решением соответствующей однородной периодической системы [64, 65],где C произвольное число.

В нашем случае, имеем $a_p = \frac{1}{(2p)!}$, тогда уравнение

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p)!} x^p = \cos(\sqrt{x}) = 0,$$

имеет однократные нули $x = \xi_k = \frac{\pi^2 (2k+1)^2}{4}$, $k = 0, 1, 2, ...$. Очевидно, функция $f(x)$ других нулей не имеет.

Следовательно, все независимые по k, т. е. *фундаментальные* решения однородной гауссовой системы с разностными индексами (11.17), имеют вид:

$$x_j^{(k)} = \frac{(-1)^j \pi^{2j} (2k+1)^{2j} C_k}{2^{2j}}, \quad j, k = 0, 1, 2, ..., C_0 = x_0, \tag{11.19}$$

а соответствующая периодическая система (11.16) –

$$x_j^{(k)} = \frac{(-1)^j \pi^{2j} (2k+1)^{2j} C_k}{(2j)! 2^{2j}}, \quad j, k = 0, 1, 2, ..., C_0 = x_0, \tag{11.20}$$

где C_k – произвольные постоянные.

Изоморфная система с разностными индексами к периодической системе (11.16) запишется так:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} x_{j+p} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots . \tag{11.21}$$

Очевидно наименьшее по абсолютной величине точное решение системы (11.21) следует из (11.19) при $k = 0$ $(x_0 = 1)$:

$$x_j = (-1)^j \frac{\pi^{2j}}{2^{2j}}, \quad j = 0, 1, 2, ..., . \tag{11.22}$$

В таблице 3 представлены результаты расчетов по формуле (11.13) для n=3, n=5, n=10 и точное решение (11.22) бесконечной однородной системы (11.21):

Таблица 3

n	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
3	1.0	-2.45901639	5.90163934	-11.80327868	
5	1.0	-2.46729082	6.08539023	-14.96407434	35.91377842
10	1.0	-2.46740109	6.08806814	-15.02170510	37.06455106
(11.22)	1.0	-2.46740110	6.08806818	-15.02170614	37.06457428

Как показывает таблица 3 полученное численное решение однородной системы (11.21) очень быстро сходится к точному решению.

В таблице 4 даны значения характеристических определителей $A_{n-j}(j)$, входящих в формулу (11.13) для рассматриваемых n.

Таблица 4

j	0	1	2	3	4	5
3	$8.5 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$	1		
5	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-2}$	$8.5 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$	1
10	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$9.3 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$

Отсюда видно, что значения $A_{n-j}(j)$ сильно убывают.

Теперь рассмотрим исходную однородную периодическую систему (11.16).

Наименьшее по абсолютной величине точное решение системы (11.16) следует из (11.20) при $k = 0$ ($x_0 = 1$):

$$x_j = (-1)^j \frac{\pi^{2j}}{(2j)!2^{2j}}, \quad j = 0, 1, 2, ..., . \qquad (11.23)$$

В таблице 5 представлены результаты численных расчетов бесконечной периодической однородной системы (11.16) для $n = 3, n = 5, n = 10$ по формуле (11.13) и ее точное решение (11.23).

Таблица 5

n	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
3	1.0	-1.22950819	0.24590163	-0.01639344	
5	1.0	-1.23364541	0.25355792	-0.02078343	0.00089071
10	1.0	-1.23370054	0.25366950	-0.02086347	0.00091925
(11.23)	1.0	-1.23370055	0.25366950	-0.02086348	0.00091926

Таблица 5 также показывает быструю сходимость формулы (11.13).

В таблице 6 даны значения характеристических определителей $A_{n-j}(j)$ для рассматриваемых систем.

Таблица 6

j	0	1	2	3	4	5
3	$6.1 \cdot 10^1$	$7.5 \cdot 10^1$	$1.5 \cdot 10^1$	1		
5	$5.1 \cdot 10^4$	$6.2 \cdot 10^4$	$1.3 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^3$	$4.5 \cdot 10^1$	1
10	$3.7 \cdot 10^{14}$	$4.6 \cdot 10^{14}$	$9.4 \cdot 10^{13}$	$7.7 \cdot 10^{12}$	$3.4 \cdot 10^{11}$	$9.3 \cdot 10^9$

Как показывает таблица 6 характеристические определители $A_{n-j}(j)$ неограниченно возрастают с увеличением n, тем не менее их соответствующие отношения (11.13) дают решения системы (11.16), как на это указывает таблица 5.

Квазиоднородные бесконечные системы

По видимому, впервые приставка "квази" была введена касательно регулярных бесконечных систем [66].*Квазирегулярными системами* называются системы, в которых условие регулярности выполнено лишь во всех строках, начиная с некоторой $j = N + 1$, т. е. для конечного числа $j = 1, 2, ..., N$ уравнений системы условие регулярности не выполняется. Как показано в работе [64], вопрос существования решения такой системы сводится к вопросу о существовании решения конечной системы, даже если регулярная часть бесконечной системы имеет единственное ограниченное решение.

Необходимо заметить, что, вообще говоря, существует столько "квази"систем, сколько существует специальных систем, например, аналогично было введено понятие квазипериодических систем [64, 65].

Рассмотрим квазиоднородные системы, понимая под ними, бесконечные системы в которых начиная с номера $j = N + 1$ все уравнения являются однородными, а все уравнения с номерами $j = 1, 2, ..., N$ – неоднородны.

Квазиоднородные бесконечные системы можно отнести к особым бесконечным системам по двум причинам. Во-первых, они как все квази системы в конечном счете сводятся к решению конечных систем, тем самим приобретают свойство конечных систем. Во-вторых, самое важное, методы решения, как это указали выше, неоднородных и однородных систем принципиально различаются. Поэтому решение квазиоднородных систем как неоднородные системы, что априори наблюдается на практике, возможно не всегда оправдано.

Для простоты исследуем квазиоднородную систему, которая содержит только одно неоднородное уравнение. Приложение таких систем в теории параметрических радиоцепей отражено, например, в работах [74, 88].

Пример 3. Сперва рассмотрим следующую бесконечную систему, приведенную в работе [66].как пример приближенного решения регулярной системы с помощью лимитант:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{(2j+1-2i)(2j-1-2i)} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., \tag{11.24}$$

где $b_1 = -1, b_j = 0, j = 2, 3, ...$

В упомянутой работе приведены следующие границы для неизвестных: $1,211 \leq x_1 \leq 1,331$; $0,538 \leq x_2 \leq 0,726$; $0,346 \leq x_3 \leq 0,592$;

$$0,231 \leq x_4 \leq 0,534; \quad 0,135 \leq x_5 \leq 0,506; \quad 0 \leq x_i \leq 0,492\, (i = 6, 7, ...).$$

Бесконечную систему (11.24) решаем с применением простой редукции, т. е. по формулам (11.8), (11.9) с использованием формулы (11.11) при этом данный подход назовем первым способом решения квазиоднородной системы (11.24). Результаты расчетов приведены в таблице 7, которая показывает, что величины $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{n}{x}_j$ сходятся к некоторому пределу, т. е. простая редукция сходится.

Таблица 7

ε	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{10}
10^{-5}	1.27146	0.63445	0.47503	0.39526	0.34536	0.23281
10^{-6}	1.27268	0.63593	0.47669	0.39705	0.34727	0.23509
10^{-7}	1.27306	0.63640	0.47722	0.39762	0.34787	0.23581

В таблице 8 приведены невязки первых 5-ти уравнений. Отсюда видно, что невязка остается устойчивой при увеличении числа уравнений системы, т. е. не уменьшается.

Таблица 8

n	1	2	3	4	5
10^{-5}	$-3.4 \cdot 10^{-3}$	$-4.2 \cdot 10^{-3}$	$-5.0 \cdot 10^{-3}$	$-6.1 \cdot 10^{-3}$	$-7.4 \cdot 10^{-3}$
10^{-6}	$-3.8 \cdot 10^{-3}$	$-4.5 \cdot 10^{-3}$	$-5.3 \cdot 10^{-3}$	$-6.3 \cdot 10^{-3}$	$-7.6 \cdot 10^{-3}$
10^{-7}	$-4.0 \cdot 10^{-3}$	$-4.6 \cdot 10^{-3}$	$-5.3 \cdot 10^{-3}$	$-6.3 \cdot 10^{-3}$	$-7.7 \cdot 10^{-3}$

Если $\varepsilon = 10^{-5}$, то максимальное число уравнений max(j+p) равно 338, при $\varepsilon = 10^{-6}$ – $max(j+p) = 1062$, при $\varepsilon = 10^{-7}$ – $max(j+p) = 3352$.

Медленная сходимость ряда в (11.8) вероятно всего вызвано тем, что бесконечная система (11.24) на самом деле является скорее однородной системой, чем неоднородная, поскольку только одно уравнение является неоднородным. Но как уже указали выше, методы решения неоднородной и однородной систем принципиально различаются, поэтому такие системы можно отнести к особым типам бесконечных систем [76].Первый способ решения системы (11.24) предполагает, что она является "чисто"неоднородной. Поэтому систему (11.24) решаем как квазиоднородную систему, т. е. с учетом ее однородной части, это будет второй способ решения. В соответствии с этим сначала решаем однородную часть системы (11.24), т. е. систему

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{(2j+1-2i)(2j-1-2i)} = 0, \quad j = 2, 3, \dots . \qquad (11.25)$$

Решаем однородную систему (11.25) с применением редукции в широком смысле, т. е. по формуле (11.13) с использованием выражения (11.9). Результаты расчетов приведены в таблице 9.

Таблица 9

n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{10}
338	1.00000	0.49926	0.37389	0.31111	0.27181	0.18298
1062	1.00000	0.49976	0.37465	0.31206	0.27292	0.18468
3352	1.00000	0.49993	0.37489	0.31236	0.27327	0.18522

Найденные решения системы (11.25) $x_i\,(i = 1, 2, ...)$ подставляем в первое уравнение исходной системы и получим некоторое значение C ряда в левой части первого уравнения. Полученные решения однородной системы $x_i\,(i = 1, 2, ...)$ делим на C. Последние значения и будут решением исходной системы (11.24) и они приведены в таблице 10.

Таблица 10

n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{10}
338	1.27230	0.63521	0.47570	0.39582	0.34583	0.23281
1062	1.27294	0.63617	0.47690	0.39723	0.34741	0.23509
3352	1.27314	0.63648	0.47729	0.39768	0.34792	0.23581

Так как однородная система (11.25) решается точнее, как это показали в предыдущих примерах, а первое уравнение системы (11.24) практически решается точно, то таблица 10 должна отражать наиболее точное решение системы (11.24). Оказалось, что в данном случае это не так, т. е. обе способа практически совпадают. В таблице 11 приведем сравнение результатов, полученных обоими способами при $max(j + p) = 3352$. Отсюда видно, что обе способа практически идентичны.

Таблица 11

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{10}
1-й способ	1.27306	0.63640	0.47722	0.39762	0.34787	0.23581
2-й способ	1.27314	0.63648	0.47729	0.39768	0.34792	0.23581

Таким образом, квазиоднородная система (11.24) ведет себя как "чисто"неоднородная система. Чем это объясняется? Если сравнить последние колонки таблиц 7 и 10, то видим, что они полностью совпадают. Это говорит о том, что решение системы (11.24) первым способом уже с десятого неизвестного совпадает с решением соответствующей однородной системы.

Хотя, как показывает таблица 11, границы неизвестных качественно верно отражены методом лимитант, количественно они оказались очень грубыми, особенно большая ошибка наблюдается при увеличении номера неизвестных. По видимому, такая значительная ошибка объясняется тем, что метод лимитант никак не учитывает специфику системы (11.24), точнее, не учитывается особенность решения однородной части системы (11.24). В действительности, решение квазиоднородной системы (11.24), как на это указали выше, очень быстро совпадает с нетривиальным решением однородной части.

Теперь рассмотрим пример квазиоднородной системы, когда ее однородная часть имеет только тривиальное решение. Для этого за основу возьмем систему, приведенную в нашей работе [76],как пример системы, имеющая единственное решение.

Пример 4. Пусть задана бесконечная система (11.1) со следующими конкретными коэффициентами и свободными членами

$$a_{j,i} = \begin{cases} i+1 & j \geq i \\ j+1 & i < j \end{cases}, \quad b_j = \sum_{k=0}^{j} \frac{b^k}{(1-b)^2}, \ b \neq 1, \ j,i = 0,1,2,\dots,$$

которая в развернутом виде будет иметь вид:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & \cdots & = & b_0, \\ x_0 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & + & \cdots & + & 2x_n & \cdots & = & b_1, \\ x_0 & + & 2x_1 & + & 3x_2 & + & \cdots & + & 3x_n & \cdots & = & b_2, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ x_0 & + & 2x_1 & + & 3x_2 & + & \cdots & + & nx_n & \cdots & = & b_n, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array} . \tag{11.26}$$

В однородном случае система (11.26) имеет только тривиальное решение, что показано в [76].Из системы (11.26) составим квазиоднородную систему, оставляя первое уравнение и считая остальные уравнения однородными:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_0 & + & x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & \cdots & = & \frac{1}{(1-b)^2}, \\
x_0 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & + & \cdots & + & 2x_n & \cdots & = & 0, \\
x_0 & + & 2x_1 & + & 3x_2 & + & \cdots & + & 3x_n & \cdots & = & 0, \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\
x_0 & + & 2x_1 & + & 3x_2 & + & \cdots & + & nx_n & \cdots & = & 0, \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
\tag{11.27}
$$

Задаваясь $b = 0.9$ и $\varepsilon = 10^{-10}$, вычислим по формулам (11.8), (11.9) и ($3.5'$) строго частное решение системы (11.27).

Численные расчеты показывают, что числа $x_0 = 200$, $x_1 = -100$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$,... составляют искомое решение. Действительно, прямой подстановкой этих чисел в систему (11.27) убеждаемся, что она удовлетворяется.

Гауссова форма системы (11.27) в однородном случае имеет вид [76]

$$\sum_{p=0}^{\infty} x_{j+p} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots . \tag{11.28}$$

Используя периодичность системы (11.28) в работе [76]доказана, что система (11.28) имеет только тривиальное решение. Здесь это утверждение докажем без применения периодичности системы (11.28), т. е. докажем с общих позиций.

Поэтому воспользуемся формулой (11.13) для определения нетривиальных решений системы (11.28). Для этого вычисляем с помощью соотношения (11.9) величины $A_p(j)$: $A_1(j) = a_{j,j}A_0(j) = 1$, $A_2(j) = -A_0(j) + A_1(j) = 0$, тогда $A_p(j) = 0$ для всех $p \geq 2$.

Отсюда следует, что при $n \to \infty$ величины $A_{n-j}(j) = 0$ и $A_n(0) = 0$. Тогда формула (11.13) ничего не дает, а это значит что система (11.28) имеет только тривиальное решение. Необходимо отметить одно важное обстоятельство. Однородная часть системы (11.28) удовлетворяется за счет линейной зависимости всех однородных уравнений в случае $x_i = 0$ для всех $i \geq 2$ и $x_i \neq 0$ при $x_i < 2$. Это легко видно из системы (11.27), т. е. имеем $x_0 + 2x_1 = 0$, решая его с первым уравнением $x_0 + x_1 = 100$ получим то, что получили.

Пример 5. Исследовать квазиоднородную систему, основой которой является гауссова система (11.14).

Умножая гауссову матрицу системы (11.14) и ее столбец свободных членов на треугольную матрицу, состоящую только из единиц, получим общую систему:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdots & = & 1.0, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 13x_2 & + & 31x_3 & + & 57x_4 & + & \cdots & = & 1.5, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 37x_2 & + & 391x_3 & + & 1737x_4 & + & \cdots & = & 1.8, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 37x_2 & + & 1111x_3 & + & 21897x_4 & + & \cdots & = & 1.9, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 37x_2 & + & 1111x_3 & + & 62217x_4 & + & \cdots & = & 1.9, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \cdots & . & . \end{array} \qquad (11.29)$$

Составим квазиоднородную систему, оставляя первое уравнение в (11.29) и считая остальные уравнения считая однородными:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdots & = & 1.0, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 13x_2 & + & 31x_3 & + & 57x_4 & + & \cdots & = & 0, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 37x_2 & + & 391x_3 & + & 1737x_4 & + & \cdots & = & 0, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 37x_2 & + & 1111x_3 & + & 21897x_4 & + & \cdots & = & 0, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 37x_2 & + & 1111x_3 & + & 62217x_4 & + & \cdots & = & 0, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \cdots & . & . \end{array} \qquad (11.30)$$

Решая систему (11.30) как неоднородную систему, т. е. первым способом, получим решение $x_0 = 1.5$, $x_1 = -0.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0,\ldots x_i = 0,\ldots$. Решаем вторым способом, т. е. сначала решаем однородную часть системы (11.30).

Решаем систему (11.30) в однородном случае, используя формулы (11.13) и (11.9). На самом деле этот случай подробно рассмотрен в примере 1 и показано, что указанная однородная система имеет нетривиальное решение (см. табл. 3 и 5).

Пример 5$'$. Исследовать квазиоднородную систему, основой которой является также гауссова система (11.14), но общая система будет отличной от системы (11.29).

Для этого умножим матрицу и столбец свободных членов гауссовой системы (11.14) на матрицу с единицей на главной диагонали, а остальные элементы ниже диагонали полагаем случайными числами от 1 до 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & ... \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 1 & ... \\ . & . & . & . & . & . & ... \end{pmatrix},$$

тогда получим систему с некоторой правой частью.

Отсюда составим следующую квазиоднородную систему:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcccl} x_0 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdot & = & 1, \\ x_0 & + & 3x_1 & + & 13x_2 & + & 31x_3 & + & 57x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ x_0 & + & 11x_1 & + & 85x_2 & + & 511x_3 & + & 1961x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ 2x_0 & + & 6x_1 & + & 122x_2 & + & 2222x_3 & + & 26994x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ 2x_0 & + & 4x_1 & + & 62x_2 & + & 2912x_3 & + & 104218x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ x_0 & + & 7x_1 & + & 61x_2 & + & 4051x_3 & + & 142969x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array} \tag{11.31}$$

Решаем систему (11.31) первым способом, т. е. найдем численные значения строго частного решения системы (11.31) при $b = 0.5$ и $\varepsilon = 10^{-8}$. Для определения первых 10 решений оказалось достаточно системы с $max(j + p) = 13$.

Таблица 12

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.24445	-0.15035	-0.121292	0.02959	-0.00249	0.00009

Теперь систему (11.31) решим вторым способом, сначала решаем однородную систему

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_0 & + & 3x_1 & + & 13x_2 & + & 31x_3 & + & 57x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ x_0 & + & 11x_1 & + & 85x_2 & + & 511x_3 & + & 1961x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ 2x_0 & + & 6x_1 & + & 122x_2 & + & 2222x_3 & + & 26994x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ 2x_0 & + & 4x_1 & + & 62x_2 & + & 2912x_3 & + & 104218x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ x_0 & + & 7x_1 & + & 61x_2 & + & 4051x_3 & + & 142969x_4 & + & \cdot & = & 0, \\ . & & . & & . & & . & & . & & . & & \end{array} \tag{11.32}$$

Таблица 13

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	-0.72107	0.09170	-0.03017	0.00133	-0.00004

Решение системы (11.32) подставляем в первое уравнение системы (11.31), получим $C = 0.34175$. Тогда решением системы (11.31) будет решение системы (11.32) поделённое на $C = 0.34175$.

Таблица 14

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2.92611	-2.10995	0.26832	-0.08828	0.00389	-0.00011

Как видно из таблиц 12 и 14, решения не только количественно, но и качественно значительно различаются, причем решение во втором случае близко к решению однородной системы. Как показывют эти таблицы обе решения быстро убывают до нуля. Таким образом, выбор решения сильно зависит от исходной физической задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в рамках проекта результаты имеют теоретический характер и расширяют класс ранее изученных краевых задач для нелинейных неклассических уравнений. Исследуемые в рамках проекта задачи и результаты являются принципиально новыми. Выводы и положения основываются на строгих математических доказательствах. Для исследования поставленных краевых задачи были использованы метод априорных оценок, метод продолжения по параметру, модифицированный метод Галеркина, метод регуляризации, метод стохастических характеристик, методы теории полугрупп и пропагаторов линейных операторов, а также разработанные авторами подходы и методы.

Правильность выбора методов и подходов в исследованиях подтверждается полученными новыми результатами и улучшениями существующих результатов.

Доказаны теоремы разрешимости нелокальных краевых задач для неклассических уравнений с частными производными таких, как нелокальные краевые задачи для параболических уравнений с меняющимся направлением времени, для уравнений с частными производными четного и нечетного порядков с меняющимся направлением времени, для эллиптико-параболических уравнений и для интегро-дифференциальных уравнений. Получены оценки сходимости и погрешности.

Показана регулярность и гладкая зависимость от входных данных решений нелинейных стохастических уравнений в частных производных типа Маккина-Власова, порожденных процессами устойчивого типа.

На основе численных решений бесконечных систем исследованы квазиоднородные системы. В частности, показано, что такие системы могут вести себя и как “чисто” неоднородные, и как почти однородные системы в зависимости от коэффициентов системы.

Полученные в рамках данного проекта фундаментальные результаты будут использованы для дальнейших исследований и внесут существенный вклад в развитие теории неклассических уравнений с частными производными и теории нелинейных стохастических дифференциальных уравнений типа Маккина-Власова, в разработке теории бесконечных алгебраических систем. Результаты могут быть применены для исследования математических моделей в статистических и динамических задачах теории упругости твердых тел, вязкоупругости, электродинамики, физики полупроводников, механики полимеров и других процессов современной физики, а также в исследовании игр среднего поля.

Результаты НИР по данной проблематике используются в образовательном процессе ФГАОУ ВО “Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.Аммосова” (СВФУ): в подготовке курсовых, выпускных работ, магистерских диссертаций студентов, кандидатских диссертаций аспирантов.

Результаты НИР данного этапа включены в диссертационную работу исполнителя проекта Е.С. Ефимовой, использованы в преподавании специальных курсов, в научных исследованиях аспирантов по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. В рамках выполнения данного НИР защищены магистерские диссертации, выпускные и курсовые работы. По результатам НИР опубликованы 12 научных статей (в т.ч. индексированы в Web of Science - 1, в SCOPUS - 10, ВАК, РИНЦ - 1). Сделаны 14 научных докладов на международных конференциях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Абдрахманов А.М., Кожанов А.И. Задача со смещением для уравнений в частных производных // Известия вузов. Математика. 2007. 5. 540. С. 3–26.

2 Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. - 2008. - N 3 (62). - С.165 - 174.

3 Попов Н.С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболического уравнения с нелокальным граничным условиеминтегрального вида // Матемаические заетки ЯГУ. 2013. Т. 20, Вып. 2. С. 3–14.

4 Абдрахманов А.М. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условиемвторого рода для уравнения нечетного порядка. // Математические заметки. 2010. Т. 88, № 2. С. 163–176.

5 Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. - Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН. - 1995. - С. 3-133.

6 Егоров И.Е., Ефимова Е.С. Стационарный метод Галеркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Математические заметки ЯГУ. 2011.Т.18, вып.2. С. 41-46.

7 Бесов О. В., Ильин В. П., Никольски С. М. // *Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.*

8 Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.

9 Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

10 Beals R. and Protopescu V. Half-range completenessfor the Fokker-Planck equation // J. Statist. Phys. 1983. V.32, N 3. P.565-584.

11 Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

12 Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи дифракции. ДАН СССР. 1960. С. 1054-1057.

13 Егоров И.Е. О модифицированном методе Галеркина для параболического уравнения с меняющимся направлением времени. // Узбекский математический журнал. 2013. N 3. С. 33–40.

14 Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Математика. Сб. перев. 1963. Т.7, N 6, С. 99-121.

15 Кожанов А.И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. 2004, вып. 30. С. 63–69.

16 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

17 Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications // Operator Theory Advances and Applications. - Birkhauser Verlag, 1997. - Vol.91.

18 Skubachevskii A.L. Nonclassical boundary-value problems. II // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 166, N. 4. PP. 377–561.

19 Егоров И.Е., Федоров В.Е. О первой краевой задаче для одного уравнения смешанного типа высокого порядка // Методы прикладной математики и математической физики. Якутск: Изд-во ЯНЦ СО АН СССР, 1987. С. 8-14.

20 Egorov I.E. On One Boundary Value Problem for an Equation with Varying Time Direction // Математически заметки ЯГУ. 1998. Т. 5, №2. С. 77 - 84.

21 Кожанов А.И. Краевые задачи для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, №2. С. 359 - 376.

22 Ефимова Е.С., Егоров И.Е., Колесова М.С. Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, Вып. 3. С. 43–49. .

23 Ефимова Е.С. Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка с меняющимся направлением времени // Математические заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, №2. С. 32 - 38.

24 Егоров И.Е., Ефимова Е.С. Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка с меняющимся направлением времени // Математические заметки ЯГУ. 2012.Т.19, вып.1. С. 27-33.

25 Егоров И.Е. О модифицированном методе Галеркина для параболического уцравнения с меняющимся направлением времени // Узбекский математический журнал. 2013. №3. С. 33 - 40.

26 Егоров И.Е., Ефимова Е.С. Модифицированный метод Галеркина для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16, №2. С. 6 - 15.

27 Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.

28 Pyatkov S.G., Popov S.V., Antipin V.I. On Solvability of Boundary Value Problems for Kinetic Operator- Differential Equations. Integral Equations and Operator Theory 80 (2014), 557–580. DOI 10.1007/s00020- 014-2172-7c.

29 Pyatkov S.G. Operator Theory. Utrecht, Boston, Tokyo: VSP, 2002.

30 Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа.- Новосибирск:Наука, 1983.-170с.

31 Терсенов С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

32 Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1961. Tome 31. P. 1–45.

33 Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

34 Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

35 Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.

36 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973.

37 Popov S.V., Markov V.G. Boundary value problems for parabolic equations of high order with a changing time direction // IOP Conf. Series: Journal of Physics Conf. Series. V.894 (2017) 012075. pp.1–5. doi: 10.1088/1742-6596/894/1/012075 .

38 Popov S.V. Parabolic equations with changing time direction and a full matrix of gluing conditions // AIP Conference Proceedings. V. 1907 (2017) 030009. doi.org/10.1063/1.5012631.

39 Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. С. 58–59.

40 Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Материалы Международного научного форума "Ломоносов-2010": Математика / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев, А.В. Андриянов. Электронный ресурс. М.: Макс Пресс, 2010.

41 Попов Н.С. Разрешимость задачи со смещением для псевдопараболического уравнения с нелокальным интегральным краевым условием // II Всероссийская научная конференция и VII Всероссийская школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов "Математическое моделирование развития Северных территорий Российской Федерации": Тез. докл. / Якутск: Филиал изд-ва ЯГУ, ИМИ ЯГУ, 2009. - С.68-69.

42 Fridman A. Monotone decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions // Quat. of Appl. Math. 1986, V.XLIV, 3. P. 401–407.

43 Попов Н.С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Математические заметки ЯГУ. 2012. Т.19, Вып. 1. С. 82–95.

44 Попов Н.С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида / Н.С. Попов // Математические заметки СВФУ. 2014. Т.21, N 2. С. 69–80.

45 Кожанов А.И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных ультрапараболических уравнений некоторых математических моделей динамики биологических систем // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2009. - Т. XII, N 4 (40). - С. 64 - 78.

46 Basna R., Hilbert A., Kolokoltsov V. N. An Approximate Nash Equilibrium for Pure Jump Markov Games of Mean-field-type on Continuous State Space. Stochastics, 2017, vol. 89 (6-7), pp. 967–993. DOI: 10.1080/17442508.2017.1297812. .

47 Bardi M., Priuli F. S. Linear-quadratic n-person and mean-field games with ergodic cost. SIAM J. Control Optim., 2014, vol. 52 (5), pp. 3022–3052.

48 Bensoussan A., Frehse J., Yam P. On the Interpretation of the Master Equation. Stochastic Process. Appl., 2017, vol. 127 (7), pp. 2093–2137. DOI: 10.1016/j.spa.2016.10.004.

49 Cardaliaguet P. The Convergence Problem in Mean Field Games with Local Coupling. Appl. Math. Optim., 2017, vol. 76 (1), pp. 177–215. DOI: 10.1007/s00245-017-9434-0. .

50 Carmona R. Delarue F. Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I, II. Probab. Theory Stoch. Model., 2018, vol. 83-84.

51 Crisan D., McMurray E. Smoothing properties of McKean-Vlasov SDEs Pro,a,. Theory relat. Fields. 2018, vol. 171 (1-2), pp. 97–148. .

52 Dawson D. and Vaillancourt J. Stochastic McKean-Vlasov equations. NoDEA **2** (1995), 199-229.

53 Hu Y., Yaozhong, Nualart D., Song J. A nonlinear stochastic heat equation: Hölder continuity and smoothness of the density of the solution. Stochastic Process. Appl. 2013, vol. 123 (3), pp. 1083–1103.

54 Huang M., Malhamé R., Caines P. Large population stochastic dynamic games: closed-loop Mckean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. Commun. Inf. Syst., 2006, vol. 6, pp 221–252.

55 Kolokoltsov V., Troeva M. Regularity and Sensitivity for McKean-Vlasov SPDEs. AIP Conference Proceedings. Proceedings of the 8th International Conference on Mathematical Modeling (ICMM-2017) (2017), V. 1907, pp. 030046.

56 Kurtz Th. and Xiong J. Particle representations for a class of nonlinear SPDEs // Stoch. Proc. Appl. 1999. V. 83. P. 103–126.

57 Nourian M. and Caines P. ϵ-Nash mean field game theory for nonlinear stochastic dynamical systems with major and minor agents // SIAM J. Control Optim. 51:4 (2013), 3302–3331.

58 Kolokoltsov V. N. Nonlinear Markov processes and kinetic equations. Cambridge Tracks in Mathematics 182, Cambridge Univ. Press, 2010.

59 Kolokoltsov V. N., Troeva M., Yang W. Mean Field Games Based on Stable-Like Processes. Autom. Remote Control, 2016, vol. 77 (11), pp. 2044–2064.

60 Kunita H. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. V. 24. Cambridge University Press, 1990.

61 Kolokoltsov V.N., Tyukov A.E. *Small time and semiclassical asymptotics for stochastic heat equation driven by Lévy noise.* Stochastics and Stochastics Reports **75** (1-2)(2003), 1–38.

62 Kolokoltsov V. N. Symmetric stable laws and stable-like jump-diffusions. Proc. Lond. Math. Soc., 2000, vol. 80(3), pp. 725–768.

63 Kolokoltsov V. N. Nonlinear Markov semigroups and interacting Lévy type processes. J. Stat. Phys., 2007, vol. 126 (3), pp. 585–642.

64 Федоров Ф. М. Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.

65 Федоров Ф. М. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. Новосибирск: Наука, 2011.

66 Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: ГИТТЛ, 1952.

67 Фельд Я.Н. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах // Докл. АН СССР, 1955. Т. 102, № 2. С. 257–260.

68 Масалов С. А. Метод полуобращения и бесконечные системы уравнений в некоторых задачах дифракции волн // ЖВМ и МФ. – 1981. – Т. 21, № 1. – С. 80-88.

69 Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. – Киев: Наука думка, 1984.

70 Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн в решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973.

71 Федоров Ф. М., Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000.

72 Тафт В.А. Основы спектральной теории и расчет цепей с переменными параметрами. М.: Наука, 1964.

73 Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.

74 Бирюк Н.Д., Горбатенко В.В., Горбатенко С.А., Поздняков М.В. Проблема сходимости бесконечных систем линейных алгебраических уравнений в теории параметрических радиоцепей // Электричество. 2000. № 5. С. 55-62.

75 Папернов Е. Л. О решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. – 1978. – Т. 18, № 5. – С. 1300-1302.

76 Иванова О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М. О главных и строго частных решениях бесконечных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 3. С. 351–362.

77 Каган В. Ф. Основания теории определителей. – Киев: Гос. изд-во Украины, 1922.

78 Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Физматгиз, 1960.

79 Федоров Ф. М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, вып. 1. – С. 133-140.

80 Koch H. On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations // Compte rendu of Scandinavian Congress of Mathematicians in Stockholm 1909. Leipzig, Teubner, 1910.

81 Finta B. The Gauss Method For Systems of Linear Equations (II) //Petru Maior. 2006. (http://www.upm.ro/InterIng2007/Papers/Section6/6-Gauss_Method_Infinite_System_2_pVI-6-1_5.pdf).

82 Fedorov F.M. Introduction to the Theory of Infinite Systems. Theory and Practices // AIP Conference Proceedings 1907, 030006 (2017) DOI:10.1063/1.5012628.

83 Fedorov F.M. On Remarkable Relations and the Passage to the Limit in the Theory of Infinite Systems. // J Generalized Lie Theory Appl. 2015. 9:224. doi:10.4172/1736–4337.1000224.

84 Fedorov F.M. On the Theory of Infinite Systems of Linear Algebraic Equation //TWMS J. Pure Appl. Math. 2015. V.6, No.2. pp. 202–212. .

85 Федоров Ф.М., Иванова О.Ф., Павлов Н.Н. Об особенностях бесконечных систем // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, №.4. С. 62–78.

86 Riesz F. Les systemes d'equation lineaires a une infinite d'inconnues. Gauthier-Villars, Paris, 1913.

87 Федоров Ф.М., Осипова Т.Л. Граничный метод в задачах с переменными граничными условиями // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, вып. 1. С. 116–120.

88 Белоглазов В. В., Бирюк Н. Д., Юргелас В. В. Проблема сходимости бесконечной системы алгебраических уравнений, описывающих вынужденные колебания параметрического контура // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – № 2.– С. 175-180.