Для определения $\varphi = \varphi(t)$ заметим, что угловые скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ обратно пропорциональны длинам окружностей или радиусам оснований конусов, т. е.

$$\dot{\varphi} = [\sin(\beta/2)/\sin(\alpha/2)]\dot{\psi} \text{ (то же следует из рис. 96),}$$

или

$$\varphi = [\sin(\beta/2)/\sin(\alpha/2)]\psi \qquad (\varphi_0 = 0).$$

Следовательно,

$$\varphi = [\sin(\beta/2)/\sin(\alpha/2)](\omega_1 t + \varepsilon_1 t^2/2).$$

В условиях данной задачи

$$\psi = 1{,}35t^2 + 1{,}20t;\ \theta = 5\pi/12;\ \varphi = \sqrt{2}\psi.$$

Координаты точки M в подвижной системе координат:

$$\xi = l\sin(\alpha/2) - M_0M = 30\cdot 0{,}5 - 10 = 5{,}0 \text{ см},$$

$$\eta = 0,$$

$$\zeta = l\cos(\alpha/2) = 30\cdot 0{,}866 = 26{,}0 \text{ см}.$$

Порядок решения такой задачи показан в примере выполнения задания К.5.

III. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Задание К.7. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Точка M движется относительно тела D. По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Схемы механизмов показаны на рис. 99 — 101, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 34.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма (рис. 102),

$$s_r = OM = 16 - 8\cos 3\pi t \text{ см};\ \varphi_e = 0{,}9t^2 - 9t^3 \text{ рад};\ t_1 = 2/9 \text{ с}.$$

Решение. Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис. 102) совпадает с плоскостью треугольника D. Положение точки M на теле D определяется расстоянием $s_r = OM$.

При $t = 2/9$ с

$$s_r = 16 - 8\cos(3\pi\cdot {}^2/_9) = 20{,}0 \text{ см}.$$

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Таблица 34

Номер варианта (рис. 99–101)	Уравнение относительного движения точки M $OM = s_r = s_r(t)$, см	Уравнение движения тела		t_1, с	R, см	a, см	α, град	Дополнительные данные
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см					
1	$18\sin(\pi t/4)$	$2t^3 - t^2$	–	2/3	–	25	–	
2	$20\sin\pi t$	$0{,}4t^2 + t$	–	5/3	20	–	–	
3	$6t^3$	$2t + 0{,}5t^2$	–	2	–	30	–	
4	$10\sin(\pi t/6)$	$0{,}6t^2$	–	1	–	–	60	
5	$40\pi\cos(\pi t/6)$	$3t - 0{,}5t^3$	–	2	30	–	–	
6	–	–	$3t + 0{,}27t^3$	10/3	15	–	–	$\varphi_r = 0{,}15\pi t^3$
7	$20\cos 2\pi t$	$0{,}5t^2$	–	3/8	–	40	60	
8	$6(t+0{,}5t^2)$	$t^3 - 5t$	–	2	–	–	30	
9	$10(1 + \sin 2\pi t)$	$4t + 1{,}6t^2$	–	1/8	–	–	–	
10	$20\pi\cos(\pi t/4)$	$1{,}2t - t^2$	–	4/3	20	20	–	
11	$25\sin(\pi t/3)$	$2t^2 - 0{,}5t$	–	4	–	25	–	
12	$15\pi t^3/8$	$5t - 4t^2$	–	2	30	30	–	
13	$120\pi t^2$	$8t^2 - 3t$	–	1/3	40	–	–	
14	$3 + 14\sin\pi t$	$4t - 2t^2$	–	2/3	–	–	30	
15	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	$0{,}2t^3 + t$	–	2	–	60	45	
16	$20\sin\pi t$	$t - 0{,}5t^2$	–	1/3	–	20	–	
17	$8t^3 + 2t$	$0{,}5t^2$	–	1	–	$4\sqrt{5}$	–	
18	$10t + t^3$	$8t - t^2$	–	2	–	–	60	
19	$6t + 4t^3$	$t + 3t^2$	–	2	40	–	–	
20	$30\pi\cos(\pi t/6)$	$6t + t^2$	–	3	60	–	–	
21	$25\pi(t + t^2)$	$2t - 4t^2$	–	1/2	25	–	–	
22	$10\pi\sin(\pi t/4)$	$4t - 0{,}2t^2$	–	2/3	30	–	–	
23	$6\pi t^2$	–	–	1	18	–	–	$\varphi = \pi t^3/6$; $O_1O = O_2A = 20$ см
24	$75\pi(0{,}1t + 0{,}3t^3)$	$2t - 0{,}3t^2$	–	1	30	–	–	
25	$15\sin(\pi t/3)$	$10t - 0{,}1t^2$	–	5	–	–	–	
26	$8\cos(\pi t/2)$	$-2\pi t^2$	–	3/2	–	–	45	
27	–	–	$50t^2$	2	75	–	–	$\varphi_r = 5\pi t^3/48$
28	$2{,}5\pi t^2$	$2t^3 - 5t$	–	2	40	–	–	
29	$5\pi t^3/4$	–	–	2	30	–	–	$\varphi = \pi t^3/8$; $O_1O = O_2A = 40$ см
30	$4\pi t^2$	–	$t^3 + 4t$	2	48	–	–	

Примечания. Для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r; в вариантах 5, 10, 12, 13, 20—24, 28—30 $OM = s_r$ — дуга окружности; на схемах 5, 10, 12, 21, 24 OM — дуга, соответствующая меньшему центральному углу. Относительное движение точки M в вариантах 6 и 27 и движение тела D в вариантах 23 и 29 определяются уравнениями, приведенными в последнем столбце табл. 34.

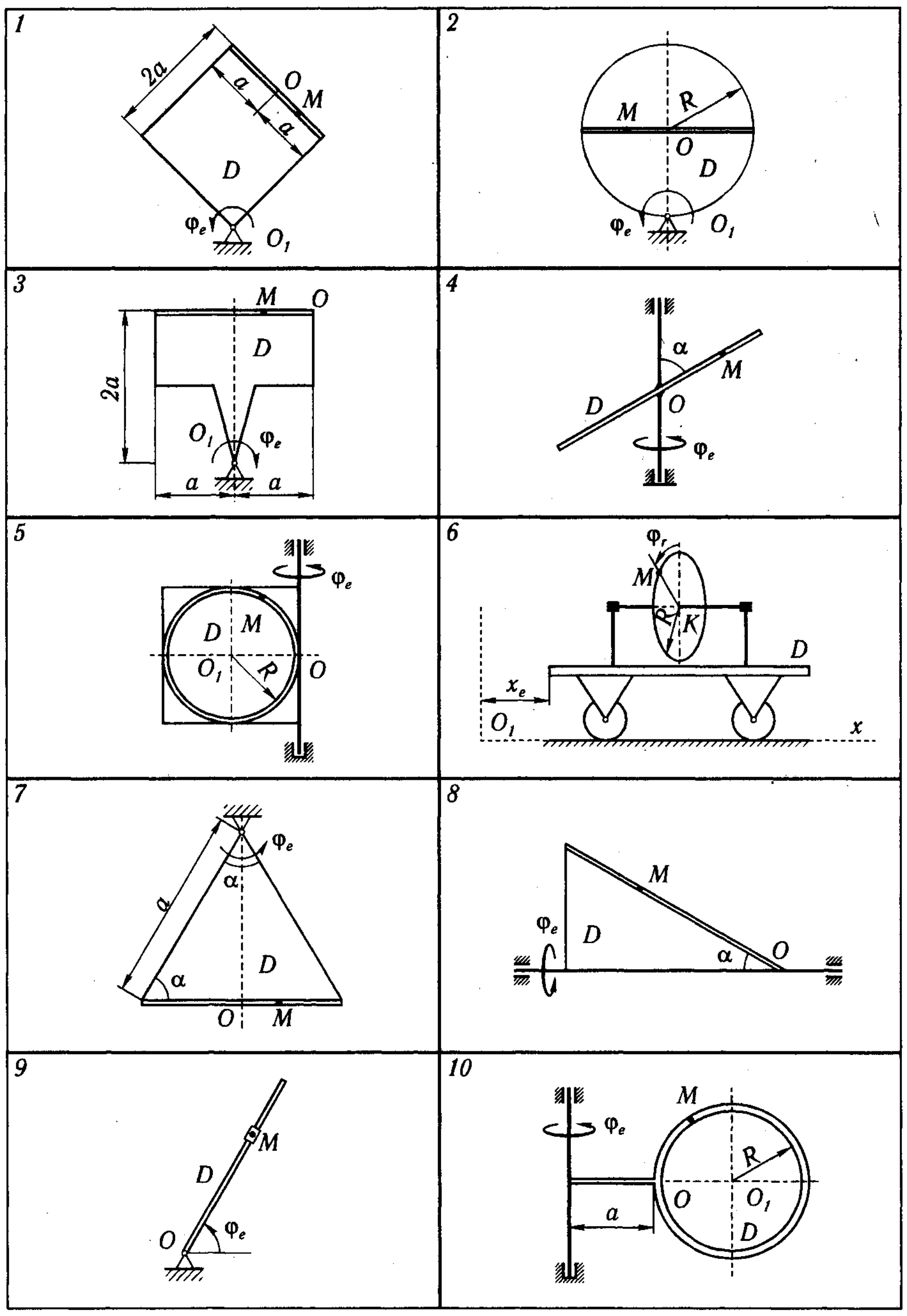
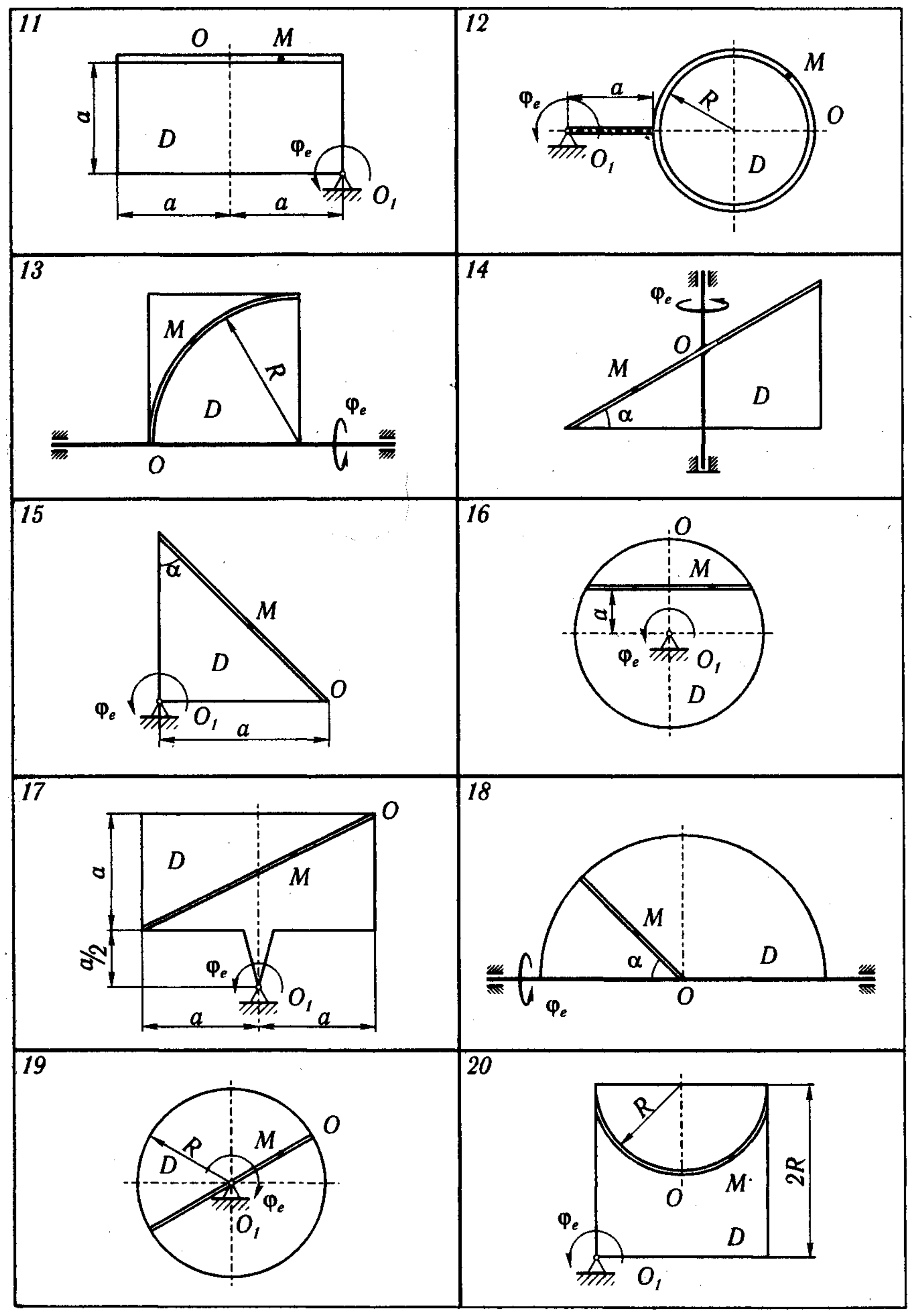

1
2a
a
a
O
M
D
φe
O1
2
M
R
O
D
φe
O1
3
M
O
D
2a
O1
φe
a
a
4
α
M
D
O
φe
5
φe
D
M
O1
R
O
6
φr
M
R
K
D
xe
O1
x
7
φe
a
α
α
D
O
M
8
M
φe
D
α
O
9
M
D
O
φe
10
M
φe
R
O
O1
a
D

Рис. 99



11
O
M
a
D
φe
O1
a
a
12
φe
a
M
R
O
O1
D
13
M
R
D
φe
O
14
φe
O
M
D
α
15
α
M
D
O
φe
O1
a
16
O
M
a
φe
O1
D
17
O
D
M
a
a/2
φe
O1
a
a
18
M
α
D
O
φe
19
R
M
O
D
φe
O1
20
R
2R
M
O
φe
D
O1

Рис. 100

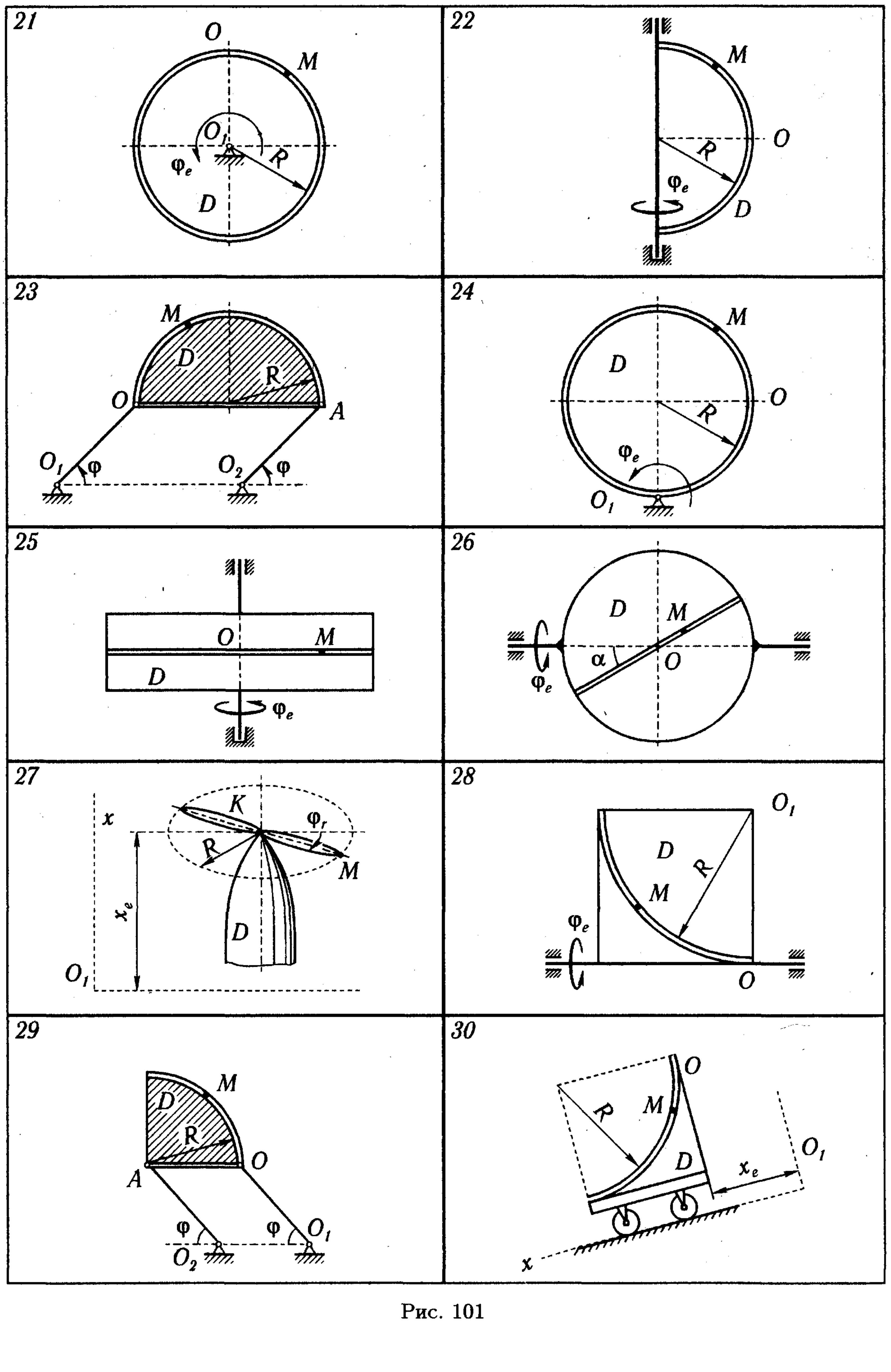

21
O
M
O1
φe
R
D
22
M
O
R
φe
D
23
M
D
R
O
A
O1
φ
O2
φ
24
M
D
O
R
φe
O1
25
O
M
D
φe
26
D
M
α
O
φe
27
K
x
φr
R
M
xe
D
O1
28
O1
D
R
M
φe
O
29
M
D
R
O
A
φ
φ
O1
O2
30
O
R
M
D
xe
O1
x

Рис. 101

Модуль относительной скорости

$$v_r = |\tilde{v}_r|,$$

где

$$\tilde{v}_r = \mathrm{d}s_r/\mathrm{d}t = 24\pi \sin 3\pi t.$$

При $t = 2/9$ с

$$\tilde{v}_r = 65{,}2 \text{ см/с}; \ v_r = 65{,}2 \text{ см/с}.$$

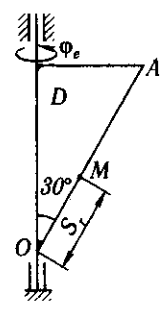


Рис. 102

Положительный знак у $\tilde{v}_r$ показывает, что вектор $\vec{v}_r$ направлен в сторону возрастания s_r.

Модуль переносной скорости

$$v_e = R\omega_e, \qquad (1)$$

где R — радиус окружности L, описываемой той точкой тела, с которой в данный момент совпадает точка M, $r = s_r \sin 30° = 10{,}0$ см; ω_e — модуль угловой скорости тела:

$$\omega_e = |\tilde{\omega}_e|; \quad \tilde{\omega}_e = \mathrm{d}\varphi_e/\mathrm{d}t = 1{,}8t - 27t^2.$$

При $t = 2/9$ с

$$\tilde{\omega}_e = -0{,}93 \text{ рад/с}; \ \omega_e = 0{,}93 \text{ рад/с}.$$

Отрицательный знак у величины $\tilde{\omega}_e$ показывает, что вращение треугольника происходит вокруг оси Oz в сторону, обратную направлению отсчета угла φ. Поэтому вектор $\vec{\omega}_e$ направлен по оси Oz вниз (рис. 103, a).

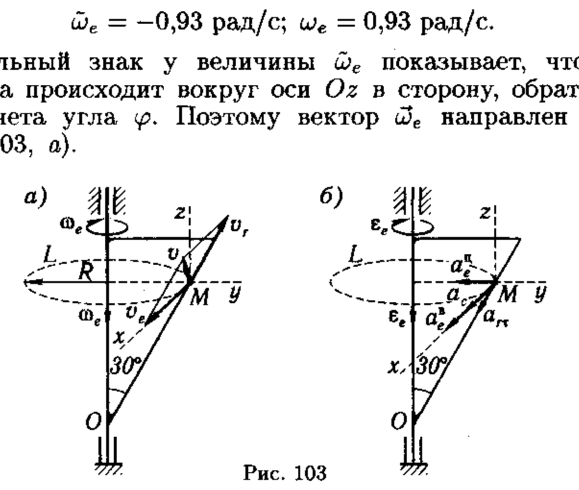


Рис. 103

Модуль переносной скорости, по формуле (1),

$$v_e = 9{,}3 \text{ см/с}.$$

Вектор $\vec{v}_e$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела. Так как $\vec{v}_e$ и $\vec{v}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2},$$

или

$$v = 65{,}9 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

или в развернутом виде

$$\vec{a} = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_e^{\text{в}} + \vec{a}_e^{\text{ц}} + \vec{a}_c.$$

Модуль относительного касательного ускорения

$$a_{r\tau} = |\tilde{a}_{r\tau}|,$$

где

$$\tilde{a}_{r\tau} = \mathrm{d}^2 s_r/\mathrm{d}t^2 = 72\pi^2 \cos 3\pi t.$$

При $t = 2/9$ с

$$\tilde{a}_{r\tau} = -355 \text{ см/с}^2; \quad a_{r\tau} = 355 \text{ см/с}^2.$$

Отрицательный знак $\tilde{a}_{r\tau}$ показывает, что вектор $\vec{a}_{r\tau}$ направлен в сторону отрицательных значений s_r. Знаки $\tilde{v}_r$ и $\tilde{a}_{r\tau}$ различны; следовательно, относительное движение точки M замедленное.

Относительное нормальное ускорение

$$a_{rn} = v_r^2/\rho = 0,$$

так как траектория относительного движения — прямая ($\rho = \infty$).

Модуль переносного вращательного ускорения

$$a_e^{\text{в}} = R\varepsilon_e, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_e = |\tilde{\varepsilon}_e|$ — модуль углового ускорения тела D:

$$\tilde{\varepsilon}_e = \mathrm{d}^2\varphi_e/\mathrm{d}t^2 = 1,8 - 54t.$$

При $t = 2/9$ с

$$\tilde{\varepsilon}_e = -10{,}2 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon = 10{,}2 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки $\tilde{\varepsilon}_e$ и $\tilde{\omega}_e$ одинаковы; следовательно, вращение треугольника D ускоренное, направления векторов $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\varepsilon}_e$ совпадают (рис. 103, *а*, *б*). Согласно (2),

$$a_e^{\text{в}} = 102 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^{\text{в}}$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{v}_e$.

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$a_e^{\text{ц}} = R\omega_e^2 \text{ или } a_e^{\text{ц}} = 9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^{\text{ц}}$ направлен к центру окружности L.

Кориолисово ускорение

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e,\ \vec{v}_r),$$

где

$$\sin(\vec{\omega}_e,\ \vec{v}_r) = \sin 150^\circ = 0{,}5.$$

С учетом найденных выше значений ω_e и v_r получаем

$$a_c = 61\ \text{см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_c$ направлен согласно правилу векторного произведения (рис. 103, *б*).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций:

$$a_x = a_e^{\text{в}} + a_c;\ a_y = -a_e^{\text{ц}} - a_{r\tau}\cos 60^\circ;$$

$$a_z = -a_{r\tau}\cos 30^\circ;\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Результаты расчета сведены в табл. 35.

Таблица 35

$\tilde{\omega}_e$, рад/с	Скорость, см/с			$\tilde{\varepsilon}_e$, рад/с^2	Ускорение, см/с^2								
	v_e	$\tilde{v}_r$	v		$a_e^{\text{ц}}$	$a_e^{\text{в}}$	a_{rn}	$\tilde{a}_{r\tau}$	a_c	a_x	a_y	a_z	a
−0,93	9,3	65,2	65,9	.−10,2	9	102	0	−355	61	163	−186	308	395

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ

Задание К.8. Определение угловых скоростей звеньев планетарного редуктора

Найти угловые скорости ведомого вала II и сателлитов редуктора. Схемы редукторов показаны на рис. 104—106, необходимые для расчета данные приведены в табл. 36.

Пример выполнения задания (варианты 1—20). Редуктор с цилиндрическими колесами. Исходные данные: схема редуктора (рис. 107); радиусы колес (см): $r_1 = 30$, $r_2 = 15$, $r_3 = 30$, $r_4 = 75$; угловые скорости (рад/с): $\omega_{\text{I}} = 80$, $\omega_1 = 20$.

Решение. Применим способ мгновенных центров скоростей. По угловым скоростям ведущих звеньев найдем скорость точки A оси блока сателлитов и скорость точки B касания колес *1* и *2* (рис. 108, *а*).

$$v_A = \omega_{\text{I}}(r_1 + r_2); \quad v_B = \omega_1 r_1,$$

или

$$v_A = 3600\ \text{см/с}; \quad v_B = 600\ \text{см/с}.$$