

( $\vec{r}_B$  — радиус-вектор точки  $B$ , проведенный из центра  $O$ ),

$$x_B = a = \text{const}. \quad (5)$$

Проецируя (4) на ось  $x$ , с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin \alpha + AB \cdot \sin \beta = a. \quad (6)$$

Для определения угловой скорости  $\omega_{AB} = \dot{\beta}$  звена  $AB$  и углового ускорения  $\varepsilon_{AB} = \dot{\omega}_{AB}$  нет необходимости выражать  $\beta$  из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что  $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$ , получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos \alpha / (AB \cdot \cos \beta). \quad (8)$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что  $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$ , имеем

$$OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos \beta \cdot \varepsilon_{AB} = 0;$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \operatorname{tg} \beta + OA(\varepsilon_{OA} \cos \alpha - \omega_{OA}^2 \sin \alpha) / (AB \cdot \cos \beta). \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять  $\omega_{AB}$  и  $\varepsilon_{AB}$  для любого положения механизма, в частности для заданного ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ).

Заметим, что  $\omega_{OA}$  и  $\varepsilon_{OA}$  входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчета угла  $\alpha$ . В данном случае  $\omega_{OA} = 1,5$  рад/с,  $\varepsilon_{OA} = -2,0$  рад/с<sup>2</sup>. Смысл знаков  $\omega_{AB}$  и  $\varepsilon_{AB}$  определяется направлением отсчета угла  $\beta$ .

Модуль скорости точки  $B$   $v_B = |\dot{y}_B|$ . Модуль ускорения  $a_B = |\ddot{y}_B|$ . Проецируя (4) на ось  $y$ , получаем

$$y_B = OA \cdot \cos \alpha + AB \cdot \cos \beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin \beta \cdot \varepsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки  $C$  следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор  $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$  на оси  $x$  и  $y$ .

#### За д а н и е К.4. Кинематический анализ многозвенного механизма

Кривошип  $O_1A$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_{O_1A} = 2$  рад/с. Определить для заданного положения механизма:

1) скорости точек  $A, B, C, \dots$  механизма и угловые скорости всех его звеньев с помощью плана скоростей;

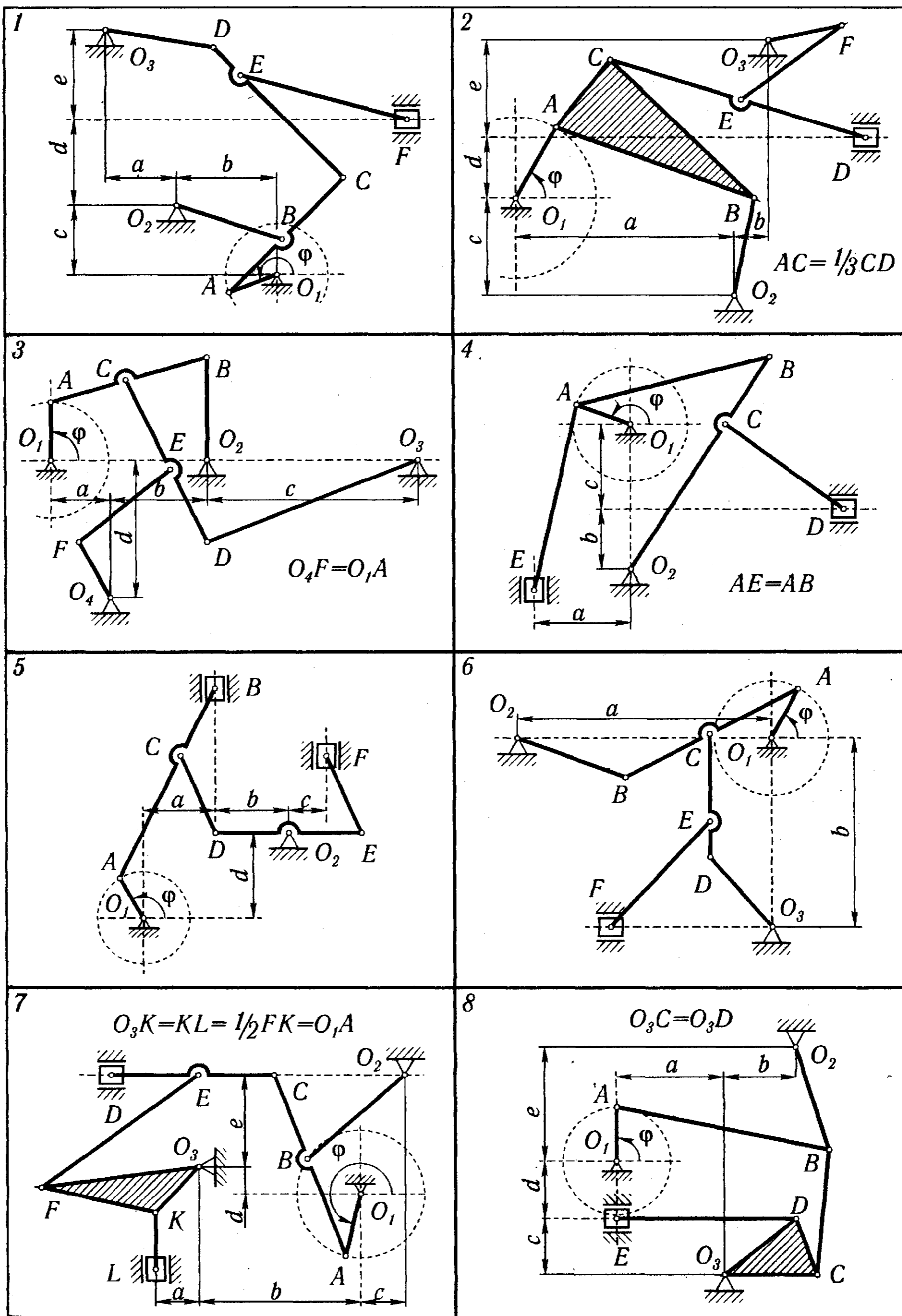


Рис. 80

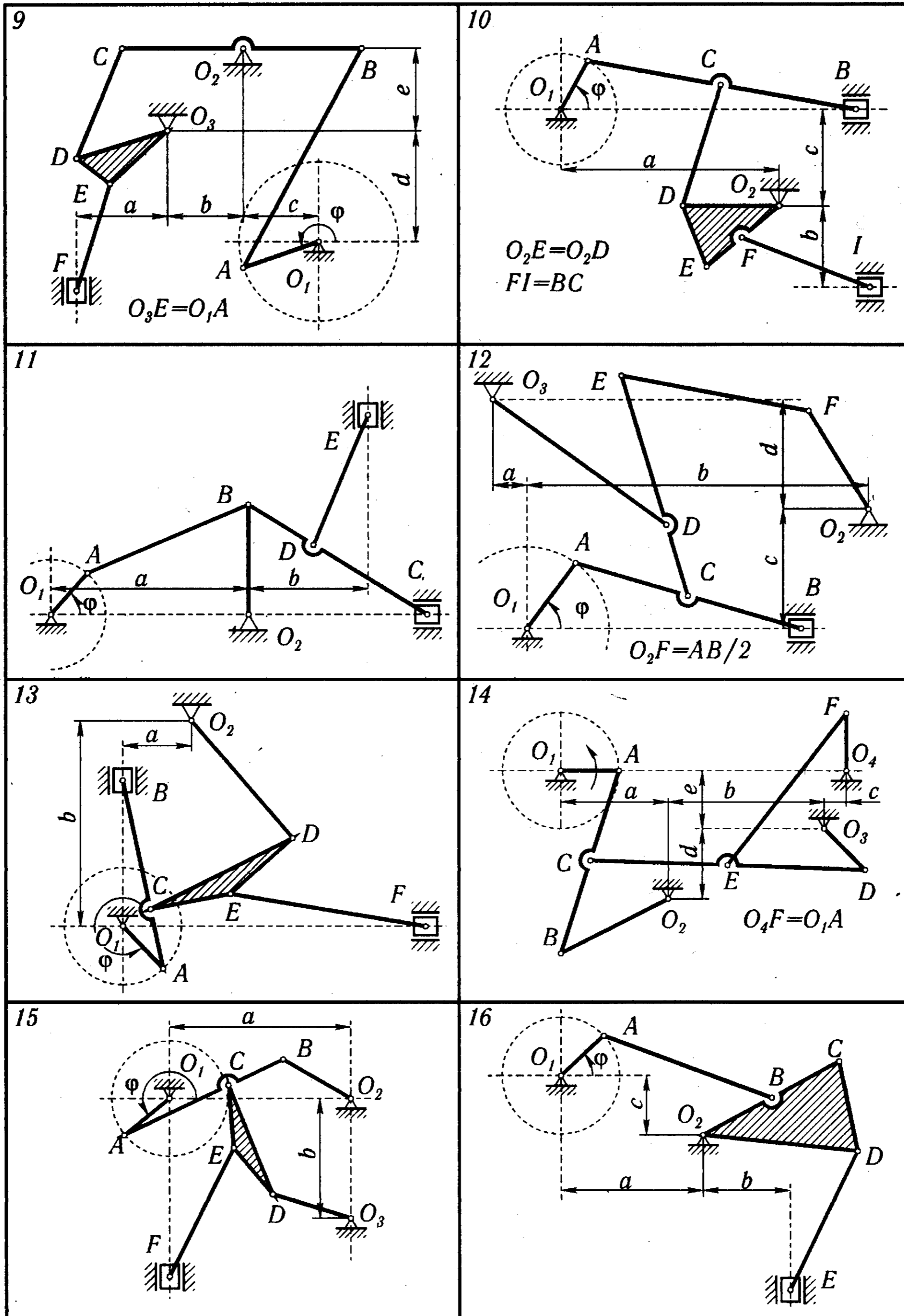


Рис. 81

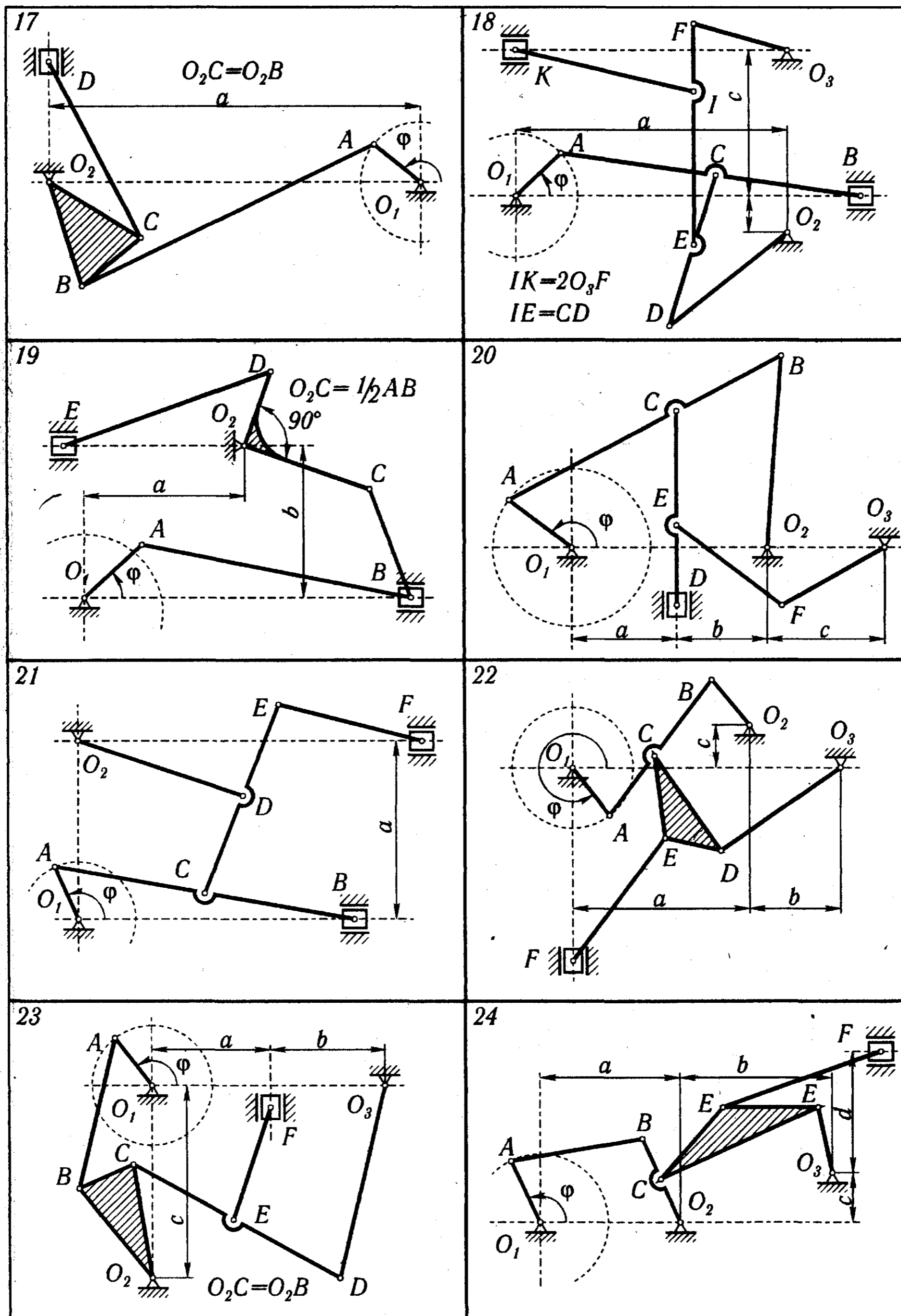


Рис. 82

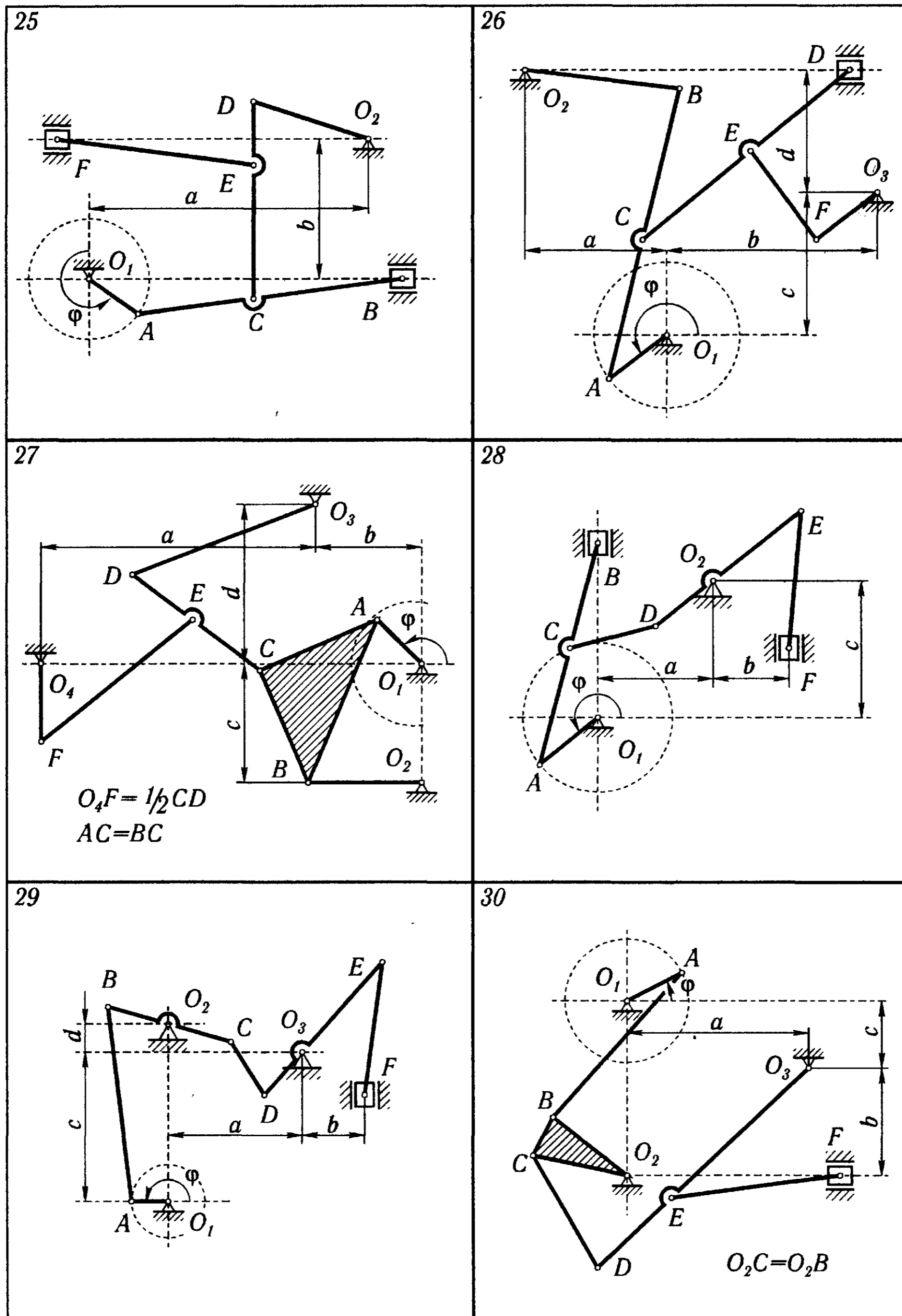


Рис. 83

- 2) скорости этих же точек механизма и угловые скорости звеньев с помощью мгновенных центров скоростей;  
 3) ускорения точек  $A$  и  $B$  и угловое ускорение звена  $AB$ ;  
 4) положение мгновенного центра ускорений звена  $AB$ ;  
 5) ускорение точки  $M$ , делящей звено  $AB$  пополам.  
 Схемы механизмов показаны на рис. 80—83, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 27.

Таблица 27

Номер варианта (рис. 80—83)	$\varphi$ , град.	Расстояния, см					Длина звеньев, см										
		$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$O_1A$	$O_2B$	$O_2D$	$O_3D$	$O_3F$	$AB$	$BC$	$CD$	$CE$	$DE$	$EF$
1	200	18	23	18	22	23	14	28	—	28	—	21	21	48	38	—	42
2	60	56	10	26	16	25	21	25	—	—	20	54	52	69	35	—	32
3	90	15	25	54	35	—	15	28	—	58	—	42	21	47	26	—	31
4	155	26	15	23	—	—	15	65	—	—	—	51	22	38	—	—	—
5	125	19	19	10	22	—	12	—	19	—	—	55	19	23	—	38	22
6	60	65	49	—	—	—	15	29	—	24	—	50	25	32	23	—	39
7	250	11	42	11	7	24	16	34	—	—	41	25	25	42	21	—	49
8	90	27	18	14	15	30	14	29	—	23	—	55	32	15	—	45	—
9	200	23	19	20	28	21	21	31	—	25	—	65	62	31	—	11	29
10	20	55	21	25	—	—	15	—	24	—	—	70	35	33	—	17	12
11	50	50	30	—	—	—	14	29	—	—	—	45	54	34	—	37	—
12	55	10	86	32	28	—	21	—	—	55	—	60	30	19	60	—	49
13	315	17	54	—	—	—	15	—	40	—	—	50	35	40	22	22	50
14	0	28	40	6	18	15	15	31	—	15	—	50	25	70	35	—	50
15	220	46	31	—	—	—	15	20	—	20	—	45	15	31	17	17	37
16	40	36	22	15	—	—	15	20	40	—	—	45	20	24	—	40	—
17	145	96	—	—	—	—	15	28	—	—	—	84	20	51	—	—	—
18	45	70	9	37	—	—	16	—	39	—	25	78	38	41	19	—	57
19	40	42	39	—	—	—	20	—	20	—	—	71	30	—	—	57	—
20	145	27	24	30	—	—	20	50	—	—	30	80	32	58	29	—	35
21	115	46	—	—	—	—	15	—	45	—	—	78	39	26	52	—	38
22	305	46	23	11	—	—	15	15	—	38	—	44	25	30	22	15	40
23	130	31	30	50	—	—	15	30	—	50	—	40	16	60	30	—	30
24	115	36	39	13	31	—	17	23	—	17	—	35	11	45	25	25	44
25	325	72	36	—	—	—	15	—	30	—	—	76	46	50	35	—	51
26	215	36	53	36	32	—	19	40	—	—	19	76	38	68	35	—	29
27	140	71	27	32	40	—	16	30	—	50	—	46	33	40	20	—	50
28	215	30	20	35	—	—	19	—	19	—	—	59	29	24	—	48	36
29	180	35	15	38	7	—	10	16	—	15	—	50	33	16	—	45	33
30	25	46	28	17	—	—	16	25	—	75	—	50	11	33	—	26	44

**Пример выполнения задания.** Дано: 1) схема механизма в заданном положении (рис. 84); 2) исходные данные (табл. 28).

Решение. 1. *Определение скоростей точек и угловых ускорений звеньев механизма с помощью плана скоростей.*

а) *Определяем скорости точек.* Строим схему механизма в вы-

бранном масштабе (рис. 85). Вычисляем модуль скорости точки  $A$  кривошипа  $O_1A$ :

$$v_a = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см/с.}$$

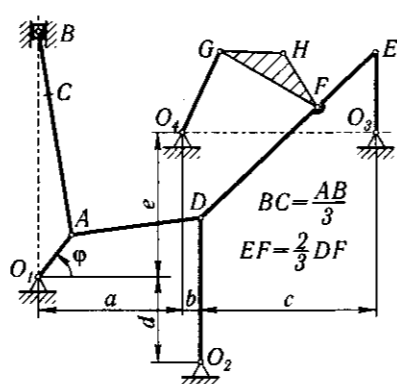


Рис. 84

Вектор  $\vec{v}_A$  перпендикулярен  $O_1A$  и направлен в сторону вращения кривошипа.

Строим план скоростей. Из произвольно выбранного полюса  $O$  проводим отрезок  $Oa$ , изображающий в выбранном масштабе скорость точки  $A$ . Для определения скорости точки  $B$  через полюс  $O$  проводим прямую, параллельную скорости  $\vec{v}_B$ , через точку  $a$  — прямую, перпендикулярную  $AB$ . Получаем точку  $b$ ; отрезок  $Ob$  определяет скорость точки  $B$ . Измеряем длину отрезка  $Ob$  и, пользуясь масштабом скоростей, находим  $v_B = 17,5 \text{ см/с}$ .

Таблица 28

$\varphi$ , град.	Расстояние, см					Длина звеньев, см									
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$O_1A$	$AB$	$AD$	$O_2D$	$DE$	$O_3E$	$FG$	$GH$	$FH$	$O_4G$
52	32	4	39	19	32	12	46	29	32	53	18	25	14	14	20

Для определения скорости точки  $C$  делим отрезок  $ab$  плана скоростей в отношении  $ac/cb = AC/CB$ .

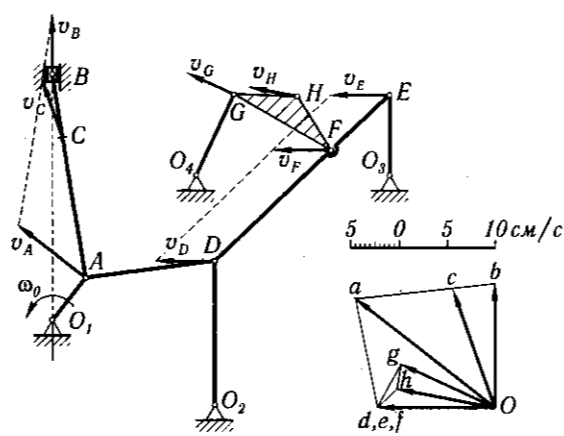


Рис. 85

Отрезок  $Oc$  изображает скорость точки  $C$ . Пользуясь масштабом скоростей, получаем

$$v_C = 17,5 \text{ см/с.}$$

Продолжая построение плана скоростей, находим  $v_A, v_B, v_C, v_D, v_E, v_F, v_G, v_H$  (табл. 29).

На чертеже механизма концы векторов скоростей точек прямолинейного звена (например  $A, B, C$  или  $D, E$ ) находятся на одной прямой.

Таблица 29

Способ определения	Скорости точек, см/с							
	По плану скоростей	24	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	14,8
С помощью мгновенных центров скоростей	24	17,3	17,5	17,4	17,4	17,4	14,6	14,1

б) Определяем угловые скорости звеньев механизма. Отрезок  $ab$  плана скоростей выражает вращательную скорость точки  $B$  вокруг точки  $A$ :

$$ab = v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB;$$

отсюда угловая скорость звена  $AB$

$$\omega_{AB} = ab/AB = 19,5/46 = 0,424 \text{ рад/с.}$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев  $AD$ ,  $DE$ ,  $FGH$ :

$$\begin{aligned} \omega_{AD} &= ad/AD; \\ \omega_{DE} &= de/DE; \\ \omega_{FGH} &= fg/FG. \end{aligned}$$

Угловую скорость  $\omega_{FGH}$  можно определить также из соотношений

$$\omega_{FGH} = gh/GH = fh/FH.$$

Угловая скорость звена  $O_2D$  определяется по вращательной скорости точки  $D$  вокруг неподвижного центра  $O_2$ :

$$\omega_{O_2D} = v_D/O_2D.$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев  $O_3E$ ,  $O_4G$ :

$$\omega_{O_3E} = v_E/O_3E; \quad \omega_{O_4G} = v_G/O_4G.$$

Вычисленные по этим формулам угловые скорости приведены в табл. 30.

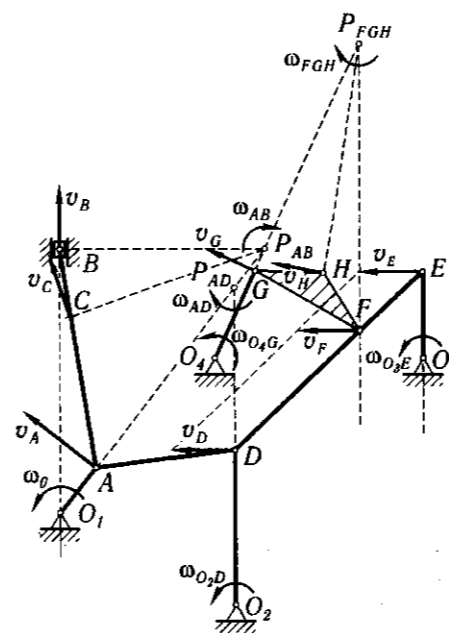


Рис. 86

Таблица 30

Способ определения	Угловые скорости звеньев, рад/с						
	$AB$	$AD$	$DE$	$O_2D$	$O_3E$	$FGH$	$O_4G$
По плану скоростей	0,424	0,500	0	0,547	0,972	0,272	0,740
С помощью мгновенных центров скоростей	0,421	0,505	0	0,544	0,967	0,278	0,730

2. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей.



а) Определяем положения мгновенных центров скоростей звеньев механизма. Строим схему механизма в выбранном масштабе (рис. 86). Звенья  $O_1A$ ,  $O_2D$ ,  $O_3E$ ,  $O_4G$  вращаются вокруг неподвижных центров  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$ .

Мгновенный центр скоростей  $P_{AB}$  звена  $AB$  находится как точка пересечения перпендикуляров, проведенных из точек  $A$  и  $B$  к их скоростям. Аналогично определяется положение мгновенных центров скоростей  $P_{AD}$  и  $P_{FGH}$ . Мгновенный центр скоростей звена  $DE$  находится в бесконечности.

б) Определяем скорости точек. Скорости точек звеньев механизма пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенных центров скоростей соответствующих звеньев.

Эти расстояния измеряются на чертеже. Для определения скоростей точек  $B$  и  $C$  звена  $AB$  имеем пропорции

$$v_A/v_B = AP_{AB}/BP_{AB};$$

$$v_A/v_C = AP_{AB}/CP_{AB}.$$

Следовательно,

$$v_B = v_A \cdot BP_{AB}/AP_{AB};$$

$$v_C = v_A \cdot CP_{AB}/AP_{AB}.$$

Аналогично, для точки  $D$  звена  $AD$

$$v_A/v_D = AP_{AD}/DP_{AD},$$

откуда

$$v_D = v_A \cdot DP_{AD}/AP_{AD}.$$

Так как мгновенный центр скоростей звена  $DE$  находится в бесконечности, то  $v_E = v_F = v_D$ .

Для определения скоростей точек  $G$  и  $H$  имеем пропорции  $v_F/v_G = FP_{FGH}/GP_{FGH}$ ;  $v_F/v_H = FP_{FGH}/HP_{FGH}$ .

Следовательно,

$$v_G = v_F \cdot GP_{FGH}/FP_{FGH};$$

$$v_H = v_F \cdot HP_{FGH}/FP_{FGH}.$$

Пользуясь масштабом длин, определяем расстояния от точек до мгновенных центров скоростей.

Эти расстояния (в см) приведены в табл. 31.

Таблица 31

$AP_{AB}$	$BP_{AB}$	$CP_{AB}$	$AP_{AD}$	$DP_{AD}$	$FP_{FGH}$	$GP_{FGH}$	$HP_{FGH}$
57	41	41,5	47,5	34,5	62,7	52,8	50,8

Скорости точек, вычисленные по указанным формулам, приведены в табл. 29.

Одновременно с определением модулей скоростей точек находим их направления, а также направления вращений звеньев механизма.

Например, по направлению скорости точки  $A$  и положению мгновенного центра скоростей  $P_{AB}$  устанавливаем, что вращение звена  $AB$  происходит по часовой стрелке. Поэтому скорость точки  $B$  при данном положении механизма направлена вверх.

Аналогично определяем направления вращений остальных звеньев и направления скоростей точек механизма (рис. 86).

в) Определяем угловые скорости звеньев механизма. Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей:

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AP_{BA} = \omega_{AD} \cdot AP_{AD}.$$

Отсюда определяем угловые скорости звеньев  $AB$  и  $AD$ :

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}; \quad \omega_{AD} = v_A / AP_{AD}.$$

Угловая скорость звена  $O_2D$  определяется по скорости точки  $D$ :

$$\omega_{O_2D} = v_D / O_2D.$$

Угловая скорость звена  $DE$  при данном положении механизма равна нулю, так как мгновенный центр скоростей звена в этом случае находится в бесконечности:  $\omega_{DE} = 0$ .

Аналогично определяем угловые скорости остальных звеньев механизма:

$$\begin{aligned} \omega_{O_3E} &= v_E / O_3E; \\ \omega_{FGH} &= v_F / FFGH; \\ \omega_{O_4G} &= v_G / O_4G. \end{aligned}$$

Угловые скорости звеньев, вычисленные по указанным соотношениям, приведены в табл. 30.

### 3. Определение ускорений точек $A$ , $B$ , $D$ и угловых ускорений звеньев $AB$ и $BD$ \*

а) Определяем  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_B$  и  $\varepsilon_{AB}$  (рис. 87). С помощью теоремы об ускорениях точек плоской фигуры определяем ускорение точки  $B$ :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^t.$$

Так как кривошип  $O_1A$  вращается равномерно, то ускорение точки  $A$  направлено к центру  $O_1$  и равно

$$a_A = a_A^n = O_1A \cdot \omega_{O_1A}^2 = 12 \cdot 2^2 = 48 \text{ см/с}^2.$$

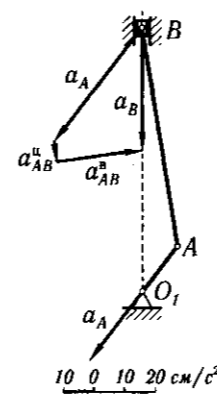


Рис. 87

\* Условие задания предусматривает определение ускорений точек  $A$ ,  $B$  и углового ускорения звена  $AB$ . Однако в примере определяются также ускорение точки  $D$  и угловое ускорение звена  $AD$  в соответствии с двумя случаями, встречающимися в задачах такого типа.

Центростремительное ускорение точки  $B$  во вращательном движении шатуна  $AB$  вокруг полюса  $A$  направлено от точки  $B$  к точке  $A$  и равно

$$a_{BA}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 46 \cdot 0,4^2 = 7,36 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем от точки  $B$  в соответствующем масштабе ускорение полюса  $\vec{a}_A$ . Из конца вектора  $\vec{a}_A$  строим вектор  $\vec{a}_{AB}^n$ , проводя его параллельно  $BA$ . Через конец вектора  $\vec{a}_{AB}^n$  проводим прямую, перпендикулярную  $BA$ , т. е. параллельную вращательному ускорению  $\vec{a}_{AB}^t$ . Точка пересечения этой прямой с прямой, по которой направлен вектор ускорения ползуна  $B$ , определяет концы векторов  $\vec{a}_B$  и  $\vec{a}_{AB}^t$ . Измерением на чертеже получаем  $a_B = 39 \text{ см/с}^2$ ;  $a_{AB}^t = 30 \text{ см/с}^2$ . Так как  $a_{AB}^t = AB \cdot \varepsilon_{AB}$ , то угловое ускорение звена  $AB$

$$\varepsilon_{AB} = a_{AB}^t / AB = 30 / 46 = 0,652 \text{ рад/с}^2.$$

б) Определяем  $\vec{a}_D$  и  $\varepsilon_{AD}$  (рис. 88). Точка  $D$  принадлежит двум звеньям:  $AD$  и  $O_2D$ . Взяв за полюс точку  $A$ , получаем

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{AD}^t + \vec{a}_{AD}^n.$$

Ускорение точки  $A$  найдено выше:  $a_A = 48 \text{ см/с}^2$ . Центростремительное ускорение точки  $D$  во вращательном движении звена  $AD$  вокруг полюса  $A$  направлено от точки  $D$  к точке  $A$  и равно

$$a_{AD}^n = AD \cdot \omega_{AD}^2 = 28,5 \cdot 0,5^2 = 7,1 \text{ см/с}^2.$$

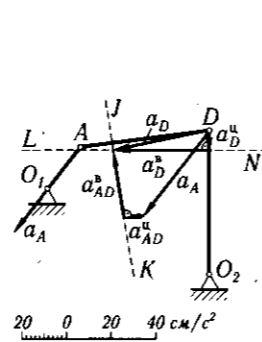


Рис. 88

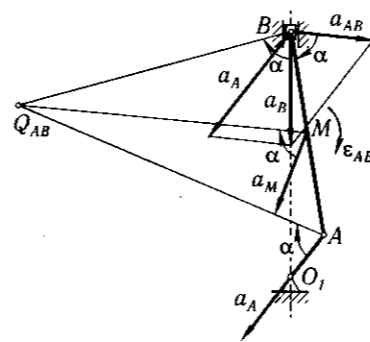


Рис. 89

Откладываем из точки  $D$  в соответствующем масштабе ускорение полюса  $\vec{a}_A$ . Из конца вектора  $\vec{a}_A$  строим вектор  $\vec{a}_{AD}^n$ , проводя его параллельно  $DA$ . Через конец вектора  $\vec{a}_{AD}^n$  проводим прямую  $JK$  перпендикулярно  $DA$ , т. е. параллельно вращательному ускорению  $\vec{a}_{AD}^t$ . Однако определить ускорение  $\vec{a}_D$  этим построением невозможно, так как его направление неизвестно.

Чтобы найти ускорение точки  $D$ , необходимо выполнить второе построение, рассматривая  $D$  как точку звена  $O_2D$ . В этом случае

$$\vec{a}_D = \vec{a}_D^n + \vec{a}_D^p.$$

Центростремительное ускорение точки  $D$

$$a_D^n = O_2D \cdot \omega_{O_2D}^2 = 8 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем от точки  $D$  вектор  $\vec{a}_D^n$ , направив его к центру  $O_2$ . Через конец вектора  $\vec{a}_D^n$  проводим прямую  $LN$  перпендикулярно  $O_2D$ , т. е. параллельно вращательному ускорению  $\vec{a}_D^p$ .

Точка пересечения этой прямой с  $JK$  определяет концы векторов  $\vec{a}_D$ ,  $\vec{a}_{AD}^n$  и  $\vec{a}_D^p$ .

Измерением на чертеже получаем  $a_D = 42 \text{ см/с}^2$ ;  $a_{AD}^n = 30 \text{ см/с}^2$ .

Так как  $a_{AD}^n = AD \cdot \epsilon_{AD}$ , то угловое ускорение звена  $AD$

$$\epsilon_{AD} = a_{AD}^n / AD = 30/29 = 1,03 \text{ рад/с}^2.$$

4. *Определение положения мгновенного центра ускорений звена  $AB$*  (рис. 89). Примем точку  $A$  за полюс. Тогда ускорение точки  $B$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}.$$

Строим параллелограмм ускорений при точке  $B$  по диагонали  $\vec{a}_B$  и стороне  $\vec{a}_A$ . Сторона параллелограмма  $\vec{a}_{AB}$  выражает ускорение точки  $B$  во вращении  $AB$  вокруг полюса  $A$ . Ускорение  $\vec{a}_{AB}$  составляет с отрезком  $AB$  угол  $\alpha$ , который можно измерить на чертеже.

Направление вектора  $\vec{a}_{AB}$  относительно полюса  $A$  позволяет определить направление  $\epsilon_{AB}$ , в данном случае соответствующее направлению вращения часовой стрелки. Отложив угол  $\alpha$  от векторов  $\vec{a}_A$  и  $\vec{a}_B$  в этом направлении и проводя два луча, найдем точку их пересечения  $Q_{AB}$  — мгновенный центр ускорений звена  $AB$ .

5. *Определение ускорения точки  $M$* . Найдем ускорение точки  $M$  с помощью мгновенного центра ускорений.

Ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра ускорений:

$$a_M / a_A = MQ_{AB} / AQ_{AB}.$$

Подставив расстояния, определенные по чертежу,  $MQ_{AB} = 67,5 \text{ см}$ ,  $AQ_{AB} = 77 \text{ см}$ , получим ускорение точки  $M$ :

$$a_M = a_A \cdot MQ_{AB} / AQ_{AB} = 48 \cdot 67,5 / 77 = 42,1 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение  $a_M$  составляет с прямой  $MQ_{AB}$  угол  $\alpha$ ; направление этого вектора соответствует угловому ускорению  $\epsilon_{AB}$ .