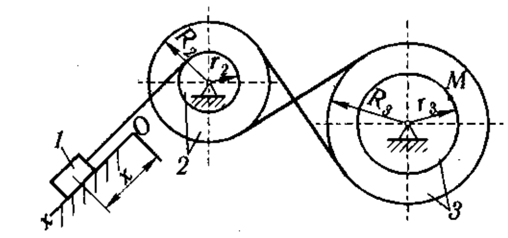

Рис. 71

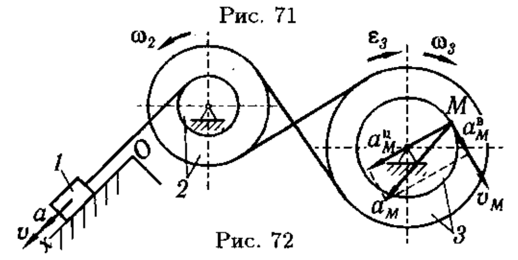

Рис. 72

Ускорение груза *1*

$$a = \ddot{x} = 72 \text{ см/с}^2.$$

Для определения скорости и ускорения точки M запишем уравнения, связывающие скорость груза v и угловые скорости колес ω_2 и ω_3.

В соответствии со схемой механизма

$$\left.\begin{aligned} v &= r_2\omega_2; \\ R_2\omega_2 &= R_3\omega_3, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

откуда

$$\omega_3 = vR_2/(r_2R_3),$$

или с учетом (6) после подстановки данных

$$\omega_3 = 2{,}215t + 0{,}154.$$

Таблица 24

v, см/с	a, см/с^2	ω_3, рад/с	ε_3, рад/с^2	v_M, см/с	$a_M^{ц}$, см/с^2	$a_M^{в}$, см/с^2	a_M, см/с^2
77	72	2,37	2,22	94,8	224	88,6	241

Угловое ускорение колеса *3*

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2{,}215 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки M, ее вращательное, центростремительное и полное ускорения определяются по формулам

$$v_M = r_3\omega_3;$$

$$a_M^{в} = r_3\varepsilon_3; \qquad a_M^{ц} = r_3\omega_3^2;$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{ц})^2 + (a_M^{в})^2}.$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t_1 = 1$ с приведены в табл. 24.

Скорости и ускорения тела *1* и точки M показаны на рис. 72.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К.3. Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов помещены на рис. 73—75, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 25.

Таблица 25

Номер варианта (рис. 73–75)	Размеры, см				ω_{OA},	ω_{I},	ε_{OA},	v_A,	a_A,
	OA	r	AB	AC	рад/с	рад/с	рад/с^2	см/с	см/с^2
1	40	15	–	8	2	–	2	–	–
2	30	15	–	8	3	–	2	–	–
3	–	50	–	–	–	–	–	50	100
4	35	–	–	45	4	–	8	–	–
5	25	–	–	20	1	–	1	–	–
6	40	15	–	6	1	1	0	–	–
7	35	–	75	60	5	–	10	–	–
8	–	–	20	10	–	–	–	40	20
9	–	–	45	30	–	–	–	20	10
10	25	–	80	20	1	–	2	–	–
11	–	–	30	15	–	–	–	10	0
12	–	–	30	20	–	–	–	20	20
13	25	–	55	40	2	–	4	–	–
14	45	15	–	8	3	12	0	–	–
15	40	15	–	8	1	–	1	–	–
16	55	20	–	–	2	–	5	–	–
17	–	30	–	10	–	–	–	80	50
18	10	–	10	5	2	–	6	–	–
19	20	15	–	10	1	2,5	0	–	–
20	–	–	20	6	–	–	–	10	15
21	30	–	60	15	3	–	8	–	–
22	35	–	60	40	4	–	10	–	–
23	–	–	60	20	–	–	–	5	10
24	25	–	35	15	2	–	3	–	–
25	20	–	70	20	1	–	2	–	–
26	20	15	–	10	2	1,2	0	–	–
27	–	15	–	5	–	–	–	60	30
28	20	–	50	25	1	–	1	–	–
29	12	–	35	15	4	–	6	–	–
30	40	–	–	20	5	–	10	–	–

Примечание. ω_{OA} и ε_{OA} — угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_{I} — угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A — скорость и ускорение точки A. Качение колес происходит без скольжения.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 76); исходные данные (табл. 26).

Таблица 26

Размеры, см			ω_{OA}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Решение. 1. *Определение скоростей точек и угловой скорости звена* (рис. 77). Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

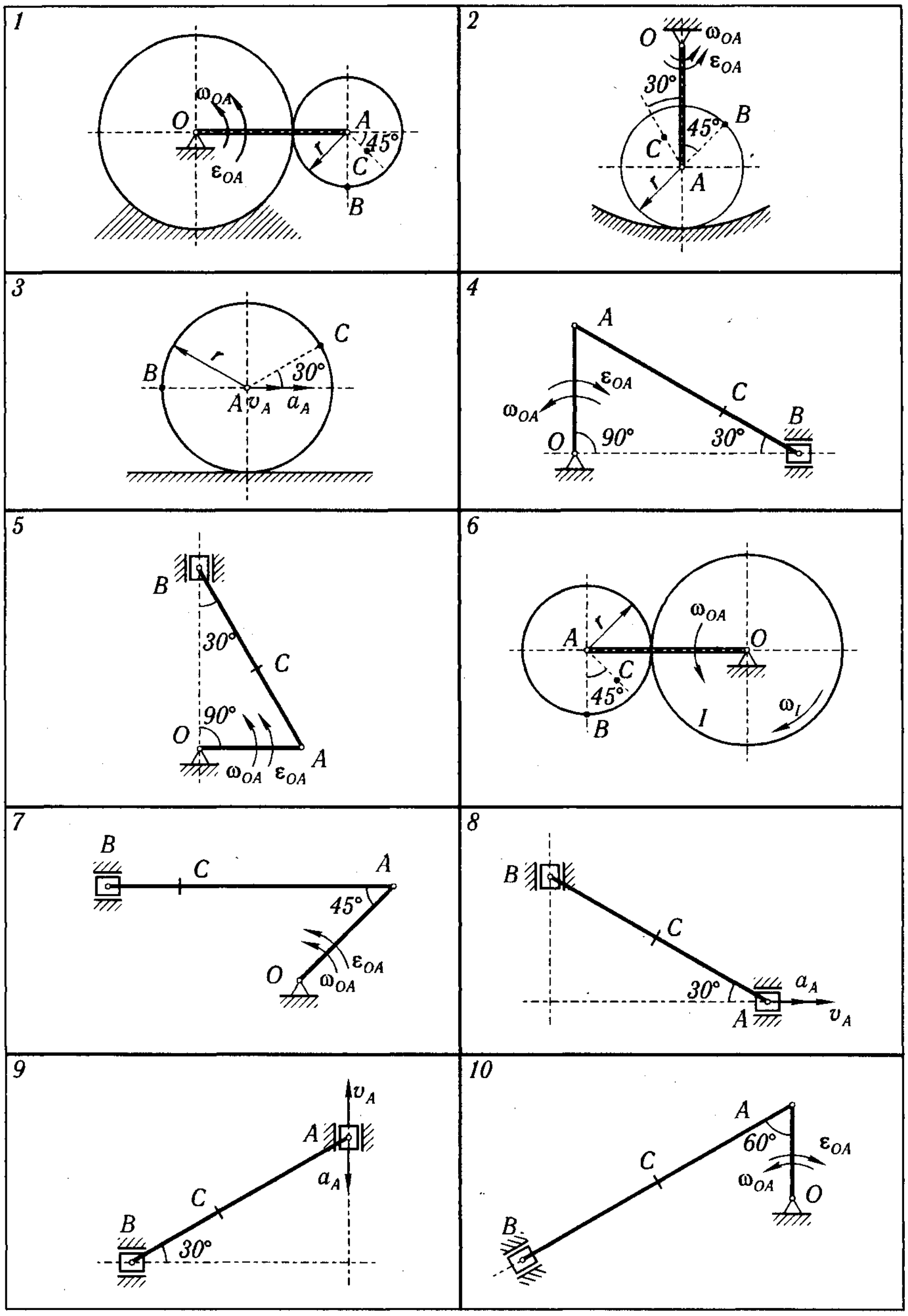
1
O
A
B
C
r
45°
ωOA
εOA
2
O
A
B
C
r
30°
45°
ωOA
εOA
3
A
B
C
r
30°
vA
aA
4
O
A
B
C
90°
30°
ωOA
εOA
5
O
A
B
C
30°
90°
ωOA
εOA
6
O
A
B
C
r
45°
I
ωOA
ωI
7
O
A
B
C
45°
ωOA
εOA
8
A
B
C
30°
aA
vA
9
A
B
C
30°
vA
aA
10
O
A
B
C
60°
ωOA
εOA

Рис. 73

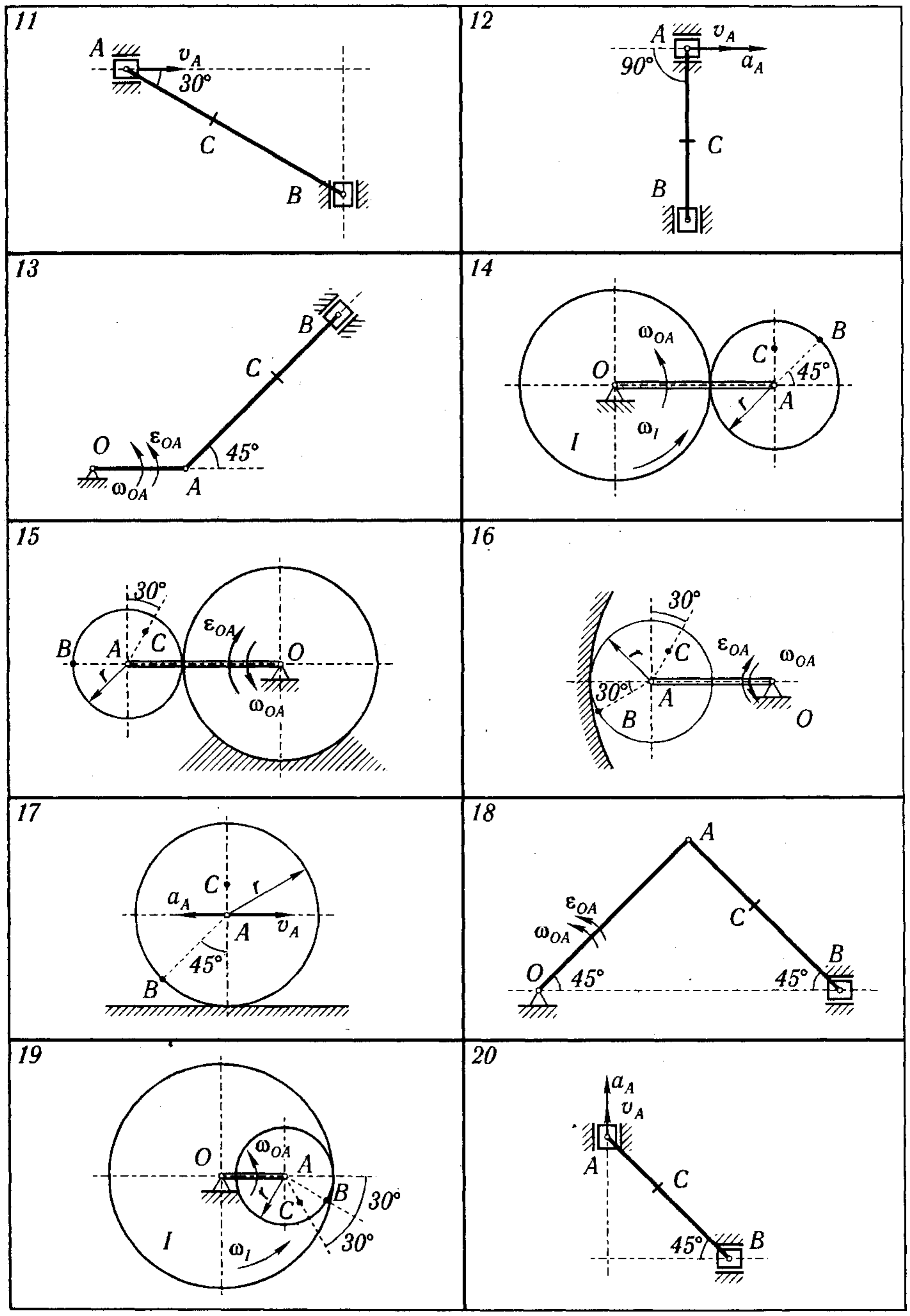
11
A
v_A
30°
C
B
12
A
v_A
a_A
90°
C
B
13
B
C
O
ε_{OA}
45°
ω_{OA}
A
14
ω_{OA}
B
C
O
45°
A
r
ω_I
I
15
30°
ε_{OA}
B
A
C
O
r
ω_{OA}
16
30°
r
C
ε_{OA}
ω_{OA}
30°
A
B
O
17
C
r
a_A
A
v_A
45°
B
18
A
ε_{OA}
C
ω_{OA}
B
O
45°
45°
19
O
ω_{OA}
A
B
30°
r
C
I
ω_I
30°
20
a_A
v_A
A
C
45°
B

Рис. 74

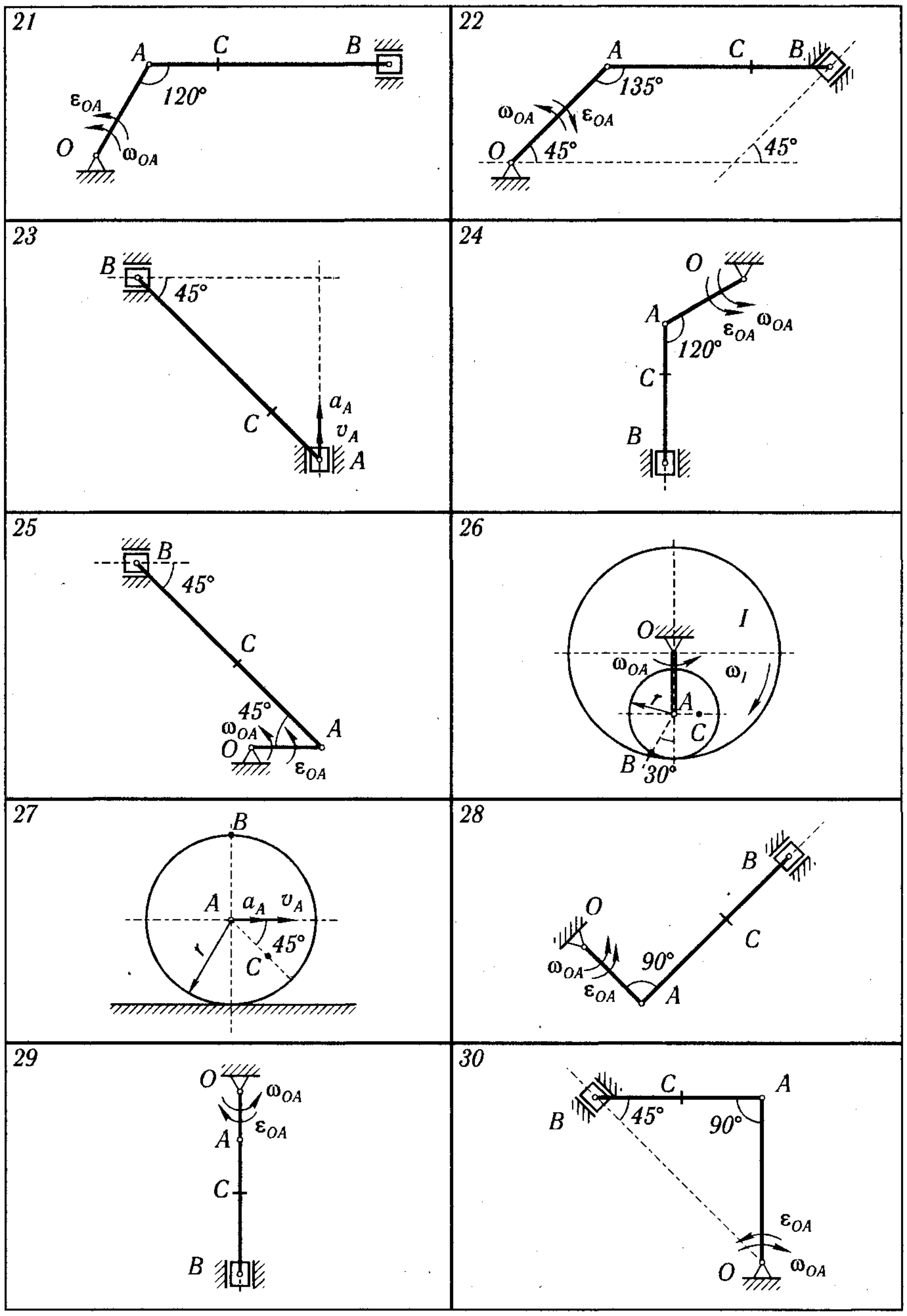
21
A
C
B
120°
ε_{OA}
O
ω_{OA}
22
A
C
B
135°
ω_{OA}
ε_{OA}
O
45°
45°
23
B
45°
a_A
v_A
C
A
24
O
A
ω_{OA}
ε_{OA}
120°
C
B
25
B
45°
C
45°
ω_{OA}
A
O
ε_{OA}
26
O
I
ω_{OA}
ω_I
r
A
C
B
30°
27
B
A
a_A
v_A
45°
r
C
28
B
O
C
ω_{OA}
90°
ε_{OA}
A
29
O
ω_{OA}
ε_{OA}
A
C
B
30
C
A
B
45°
90°
ε_{OA}
O
ω_{OA}

Рис. 75

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA. Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

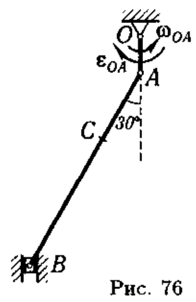

Рис. 76

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}.$$

Модули скоростей точек B и C

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Расстояния AP_{AB}, BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB}:

$$AP_{AB} = 52{,}0 \text{ см}; \qquad BP_{AB} = 30{,}0 \text{ см}; \qquad CP_{AB} = 36{,}1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим $v_A = 15{,}0$ см/с; $\omega_{AB} = 0{,}29$ рад/с; $v_B = 8{,}7$ см/с; $v_C = 10{,}5$ см/с.

Вектор $\vec{v}_C$ направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB.

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

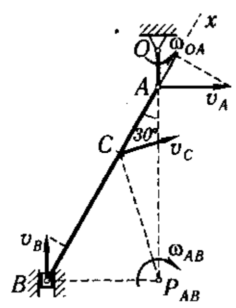

Рис. 77

Направим ось x вдоль шатуна AB в направлении от B к A.

Имеем $v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x)$, или, как видно из рис. 77,

$$v_A \cos 60° = v_B \cos 30°.$$

Отсюда

$$v_B = 8{,}7 \text{ см}.$$

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

2. *Определение ускорений точек и углового ускорения звена* (рис. 78). Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{в}} + \vec{a}_A^{\text{ц}}; \quad a_A^{\text{в}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^{\text{ц}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\text{в}} + \vec{a}_{AB}^{\text{ц}},$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\text{в}} + \vec{a}_A^{\text{ц}} + \vec{a}_{AB}^{\text{в}} + \vec{a}_{AB}^{\text{ц}}. \tag{1}$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a^{\text{ц}}_{AB} = \omega^2_{AB} \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a^{\text{в}}_A = 20{,}0 \text{ см/с}^2; \quad a^{\text{ц}}_A = 22{,}5 \text{ см/с}^2; \quad a^{\text{ц}}_{AB} = 5{,}0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^{\text{ц}}_A$ направлен от A к O. Вектор $\vec{a}^{\text{в}}_A$ перпендикулярен вектору $\vec{a}^{\text{ц}}_A$ и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа OA — замедленное).

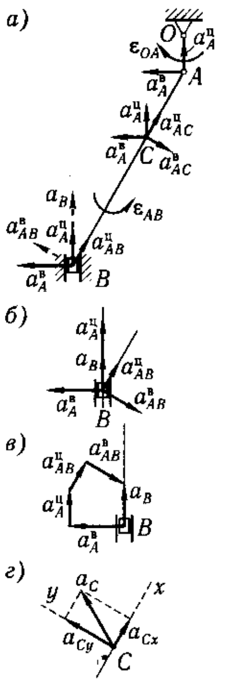

Рис. 78

Вектор $\vec{a}^{\text{ц}}_{AB}$ направлен от B к A. Что касается ускорения $\vec{a}_B$ точки B и вращательного ускорения $\vec{a}^{\text{в}}_{AB}$, то известны только линии действия этих векторов: $\vec{a}_B$ — по вертикали вдоль направляющих ползуна, $\vec{a}^{\text{в}}_{AB}$ — перпендикулярно AB.

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 78, *а*). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y, как показано на рис. 78, *г*, получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a^{\text{в}}_A \cos 60^\circ + a^{\text{ц}}_{AB} \cos 30^\circ + a^{\text{ц}}_{AB}; \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a^{\text{в}}_A \cos 30^\circ + a^{\text{ц}}_A \cos 60^\circ + a^{\text{в}}_{AB}. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим

$$a_B = 16{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $\vec{a}_B$ направлено, как показано на рис. 78, *а*.

Из уравнения (3) получаем

$$a^{\text{в}}_{AB} = -20{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Направление $\vec{a}^{\text{в}}_{AB}$ противоположно показанному на рис. 78, *а*.

Ускорение $\vec{a}_B$ и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 78, *б*.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь $a^{\text{в}}_{AB}$ — алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = |a^{\text{в}}_{AB}|/AB.$$

Вычисляя, находим

$$\varepsilon_{AB} = 0,34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ускорения $\vec{a}^{\text{в}}_{AB}$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB}. Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном — противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.

Определить $\vec{a}_B$ и $\vec{a}^{\text{в}}_{AB}$ можно и графически — построением многоугольника ускорений.

Отложим из точки B согласно (1) в выбранном масштабе последовательно векторы $\vec{a}^{\text{в}}_A$, $\vec{a}^{\text{ц}}_A$ и $\vec{a}^{\text{ц}}_{AB}$ (рис. 78, *в*). Через конец вектора $\vec{a}^{\text{ц}}_{AB}$ проведем прямую, параллельную вращательному ускорению $\vec{a}^{\text{в}}_{AB}$, т. е. перпендикулярно $\vec{a}_B$, до пересечения ее с прямой, по которой направлено ускорение $\vec{a}_B$.

Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.

Модули a_B и $a^{\text{в}}_{AB}$ могут быть найдены измерением на чертеже.

Определяем ускорение точки C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^{\text{в}}_A + \vec{a}^{\text{ц}}_A + \vec{a}^{\text{в}}_{AC} + \vec{a}^{\text{ц}}_{AC}.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении AB вокруг полюса A

$$a^{\text{в}}_{AC} = \varepsilon_{AB} \cdot AC; \quad a^{\text{ц}}_{AC} = \omega^2_{AB} \cdot AC,$$

или

$$a^{\text{в}}_{AC} = 6{,}8 \text{ см/с}^2; \quad a^{\text{ц}}_{AC} = 1{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^{\text{в}}_{AC}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}^{\text{ц}}_{AC}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB}.

Ускорение точки C находим способом проекций (рис. 78, *а*):

$$a_{Cx} = a^{\text{ц}}_{AC} + a^{\text{ц}}_A \cos 30^\circ - a^{\text{в}}_A \cos 60^\circ,$$

$$a_{Cy} = a^{\text{ц}}_A \cos 60^\circ + a^{\text{в}}_A \cos 30^\circ - a^{\text{в}}_{AC},$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

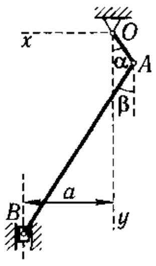

Рис. 79

В результате вычислений получаем: $a_{Cx} = 11{,}2$ см/с^2; $a_{Cy} = 21{,}8$ см/с^2; $a_C = 24{,}5$ см/с^2 (рис. 78, *г*).

Приведем решение этой же задачи другим, более общим методом.

На рис. 79 показана схема механизма в некотором произвольном положении.

Проведем оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются условия

$$\vec{r}_B = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \tag{4}$$

($\vec{r}_B$ — радиус-вектор точки B, проведенный из центра O),

$$x_B = a = \text{const}. \tag{5}$$

Проецируя (4) на ось x, с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin\alpha + AB \cdot \sin\beta = a. \tag{6}$$

Для определения угловой скорости $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ звена AB и углового ускорения $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos\alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos\beta \cdot \omega_{AB} = 0. \tag{7}$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA\cos\alpha/(AB \cdot \cos\beta). \tag{8}$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$, имеем

$$OA \cdot \sin\alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos\alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \sin\beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos\beta \cdot \varepsilon_{AB} = 0;$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \operatorname{tg}\beta + OA(\varepsilon_{OA}\cos\alpha - \omega_{OA}^2 \sin\alpha)/(AB \cdot \cos\beta). \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять ω_{AB} и ε_{AB} для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0°$, $\beta = 30°$).

Заметим, что ω_{OA} и ε_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «−» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α. В данном случае $\omega_{OA} = 1{,}5$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = -2{,}0$ рад/с^2. Смысл знаков ω_{AB} и ε_{AB} определяется направлением отсчета угла β.

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y, получаем

$$y_B = OA \cdot \cos\alpha + AB \cdot \cos\beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin\alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin\beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos\alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin\alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \cos\beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin\beta \cdot \varepsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ на оси x и y.

Задание К.4. Кинематический анализ многозвенного механизма

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1A} = 2$ рад/с. Определить для заданного положения механизма:

1) скорости точек A, B, C, ... механизма и угловые скорости всех его звеньев с помощью плана скоростей;