

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ  
КИНЕМАТИКА

**I. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ**

**Зада н и е К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения**

По заданным уравнениям движения точки  $M$  установить вид ее траектории и для момента времени  $t = t_1$  (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 20.

Таблица 20

Номер варианта	Уравнения движения		$t_1$ , с
	$x = x(t)$ , см	$y = y(t)$ , см	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4 \cos^2(\pi t/3) + 2$	$4 \sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
5	$2 \sin(\pi t/3)$	$-3 \cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7 \sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7 \cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4 \cos(\pi t/3)$	$-2 \sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1/2
12	$5 \sin^2(\pi t/6)$	$-5 \cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5 \cos(\pi t^2/3)$	$-5 \sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2
15	$4 \cos(\pi t/3)$	$-3 \sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7 \sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7 \cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3 \cos(\pi t^2/3)$	$3 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6 \sin(\pi t^2/6) - 2$	$6 \cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1

Номер варианта	Уравнения движения		$t_1$ , с
	$x = x(t)$ , см	$y = y(t)$ , см	
24	$-4 \cos(\pi t/3) - 1$	$-4 \sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8 \cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8 \sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$	$-9 \cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2 \cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \quad (1)$$

$$t_1 = 0,5 \quad (x \text{ и } y \text{ — в см, } t \text{ и } t_1 \text{ — в с}).$$

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время  $t$  из уравнений (1).

Получаем  $y = x^2 - 1$ , т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 67.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь  $\vec{i}, \vec{j}$  — орты осей  $x$  и  $y$ ;  $v_x, v_y, a_x, a_y$  — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 4 \text{ см/с}; & a_x = \dot{v}_x &= 0; \\ v_y = \dot{y} &= 32t; & a_y = \dot{v}_y &= 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt|, \quad (6)$$

или

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a}/v|; \quad (6')$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (6'')$$

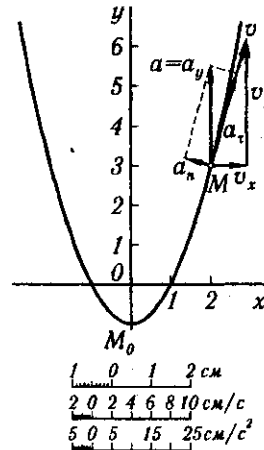


Рис. 67

$dv/dt$  выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при  $dv/dt$  означает, что движение точки ускоренное, направления  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{v}$  совпадают; знак «-», — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \quad (7)$$

Если радиус кривизны траектории  $\rho$  в рассматриваемой точке неизвестен, то  $a_n$  можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}|/v. \quad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x|/v. \quad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (9)$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3)—(6), (8) и (10) для заданного момента времени  $t_1 = 0,5$  с приведены в табл. 21.

Таблица 21

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с <sup>2</sup>					Радиус кривизны, см
$x$	$y$	$v_x$	$v_y$	$v$	$a_x$	$a_y$	$a$	$a_\tau$	$a_n$	$\rho$
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 67 показано положение точки  $M$  в заданный момент времени. Вектор  $\vec{v}$  строим по составляющим  $\vec{v}_x$  и  $\vec{v}_y$ , причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор  $\vec{a}$  строим по составляющим  $\vec{a}_x$  и  $\vec{a}_y$  и затем раскладываем на составляющие  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$ . Совпадение величин  $a_\tau$  и  $a_n$ , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Дополнение к заданию К.1. Данное задание может быть использовано для определения скорости и ускорения точки при ее движении по пространственной траектории. Для этого к двум уравнениям движения (см. табл. 20) добавляется третье уравнение (табл. 22).

Общий порядок выполнения задания в этом случае такой же, как и в приведенном выше примере.

Таблица 22

Номер вари- анта	$z = z(t)$ , см	Номер вари- анта	$z = z(t)$ , см	Номер вари- анта	$z = z(t)$ , см	Номер вари- анта	$z = z(t)$ , см	Номер вари- анта	$z = z(t)$ , см
1	$3t$	7	$2,5t$	13	$1,5t$	19	$6t$	25	$5t$
2	$2t$	8	$5t$	14	$2t+2$	20	$2t$	26	$6t$
3	$1,5t$	9	$4t+8$	15	$3t$	21	$4t$	27	$3,5t$
4	$4t+4$	10	$t$	16	$1,5t$	22	$t$	28	$4t$
5	$t$	11	$2t$	17	$5t$	23	$1,5t$	29	$5t$
6	$3t$	12	$3t$	18	$3,5t$	24	$2t$	30	$1,5t$

## II. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

### ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### Задание К.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

Движение груза 1 должно описываться уравнением

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \quad (1)$$

где  $t$  — время, с;  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  — некоторые постоянные.

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) положение груза определяется координатой  $x_0$ , и он имеет скорость  $v_0$ . Учесть, что в момент времени  $t = t_2$  координата груза равна  $x_2$ .

Определить коэффициенты  $c_0$ ,  $c_1$  и  $c_2$ , при которых осуществляется требуемое движение груза 1. Определить также в момент времени  $t = t_1$  скорость и ускорение груза и точки  $M$  одного из колес механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 68—70, а необходимые данные приведены в табл. 23.

**Пример выполнения задания.** Дано: схема механизма (рис. 71);  $R_2 = 50$  см,  $r_2 = 25$  см,  $R_3 = 65$  см,  $r_3 = 40$  см,  $x_0 = 14$  см,  $v_0 = 5$  см/с,  $x_2 = 168$  см,  $t_1 = 1$  с,  $t_2 = 2$  с.

Найти уравнение движения груза, а также скорости и ускорения груза и точки  $M$  в момент времени  $t = t_1$ .

Решение. Уравнение движения груза 1 имеет вид

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0. \quad (1)$$