Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем, кроме того, уравнение для $\dot{x}$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + [hp/(k^2 - p^2)] \cos pt$$

и используем начальные условия задачи.

Рассматриваемое движение начинается в момент ($t = 0$), когда деформация пружины является статической деформацией под действием грузов D и E. При принятом положении начала отсчета O начальная координата груза D равна $x_0 = -f_{\text{ст}E}$, причем $f_{\text{ст}E} = G_E \sin\alpha / c$ — статическая деформация пружины под действием груза E.

Таким образом, при $t = 0$

$$x_0 = -f_{\text{ст}E}, \qquad \dot{x}_0 = 0.$$

Составим уравнения $x = x(t)$ и $\dot{x} = \dot{x}(t)$ для $t = 0$:

$$x_0 = C_1; \qquad \dot{x}_0 = C_2 k + hp/(k^2 - p^2),$$

откуда

$$C_1 = -f_{\text{ст}E}, \qquad C_2 = -hp/[k(k^2 - p^2)].$$

Уравнение движения груза D имеет следующий вид:

$$x = -f_{\text{ст}E} \cos kt - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Найдем числовые значения входящих в уравнение величин:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 100}{2}} = 17{,}3 \ \text{с}^{-1};$$

$$f_{\text{ст}E} = \frac{G_E \sin\alpha}{c} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5}{6 \cdot 100} = 0{,}0245 \ \text{м};$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{cd}{m_D(k^2 - p^2)} = \frac{600 \cdot 0{,}02}{2(300 - 100)} = 0{,}03 \ \text{м};$$

$$\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} = \frac{0{,}03 \cdot 10}{17{,}3} = 0{,}0173 \ \text{м}.$$

Следовательно, уравнение движения груза D

$$x = -2{,}45 \cos 17{,}3t - 1{,}73 \sin 17{,}3t + 3 \sin 10t \ \text{(см)}.$$

Задание Д.4. Исследование относительного движения материальной точки

Шарик M, рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу движущегося тела A (рис. 129—131). Найти уравнение относительного движения этого шарика $x = f(t)$, приняв за начало отсчета точку O.

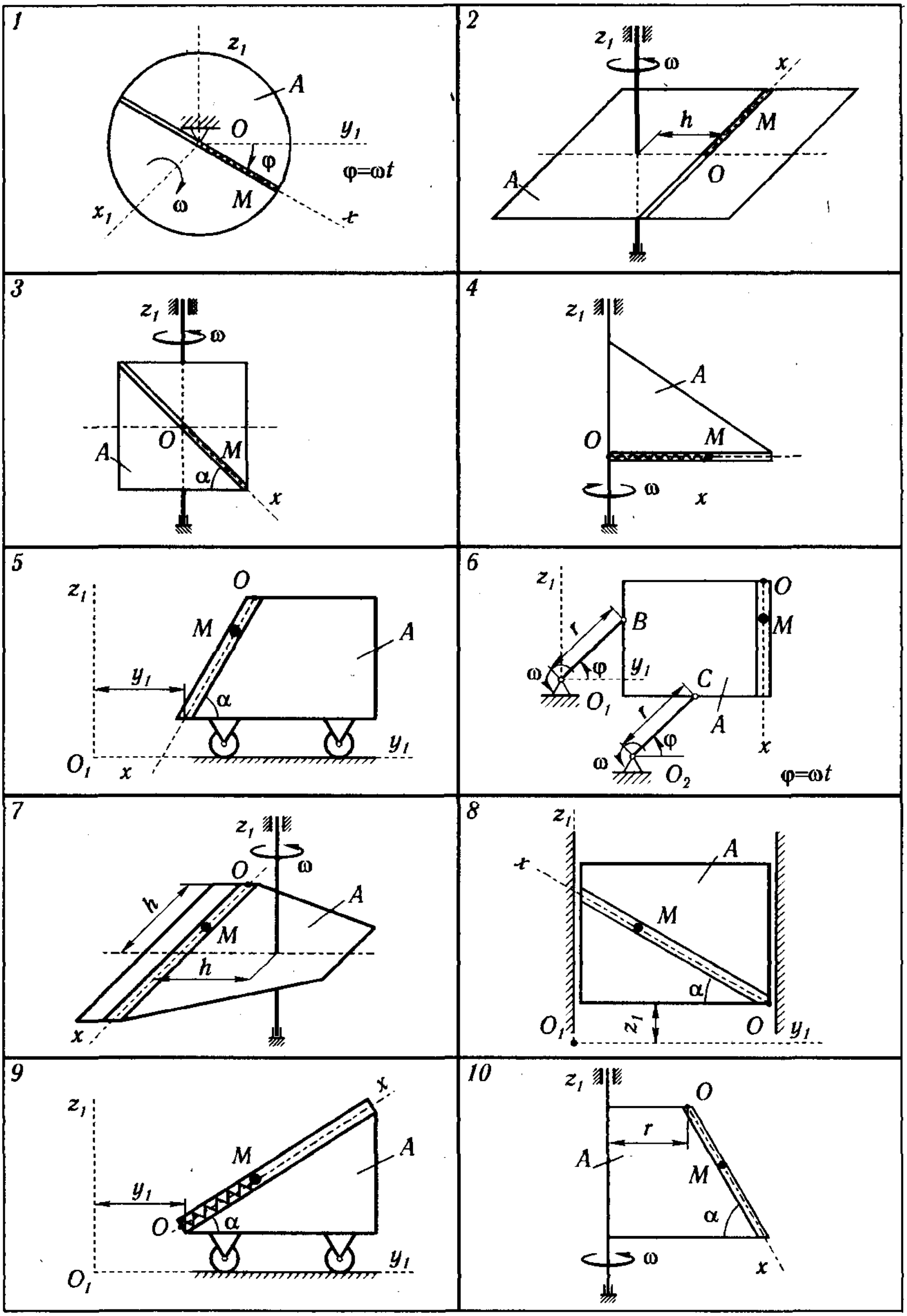

1
z1
A
O
y1
φ
φ=ωt
x1
ω
M
x
2
z1
ω
x
h
M
A
O
3
z1
ω
O
A
M
α
x
4
z1
A
O
M
ω
x
5
O
z1
M
A
y1
α
y1
O1
x
6
z1
O
B
M
r
ω
φ
y1
C
O1
A
r
φ
x
ω
O2
φ=ωt
7
z1
ω
O
A
h
M
h
x
8
z1
A
x
M
α
O1
z1
O
y1
9
x
z1
M
A
y1
O
α
y1
O1
10
z1
O
r
A
M
α
ω
x

Рис. 129

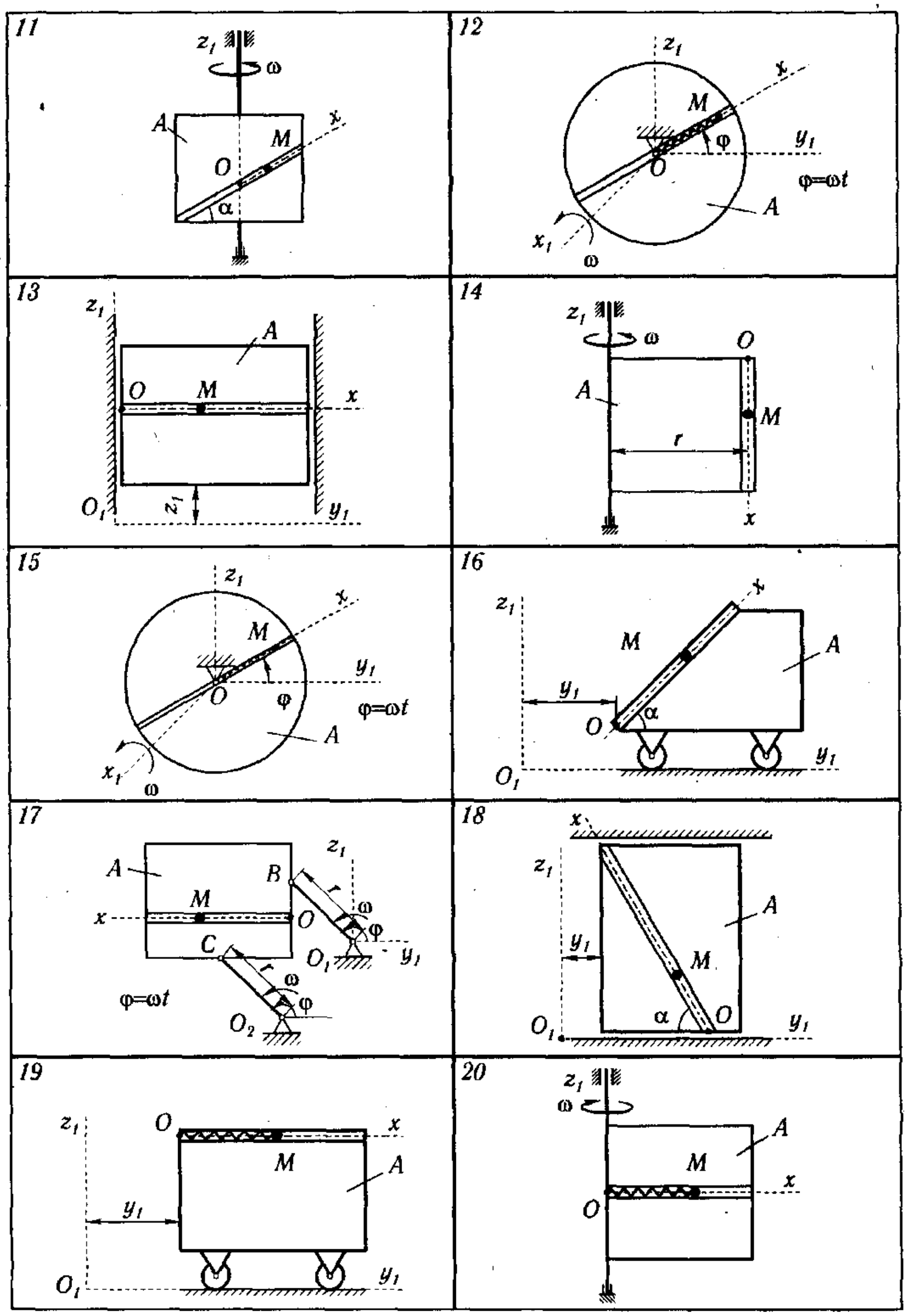
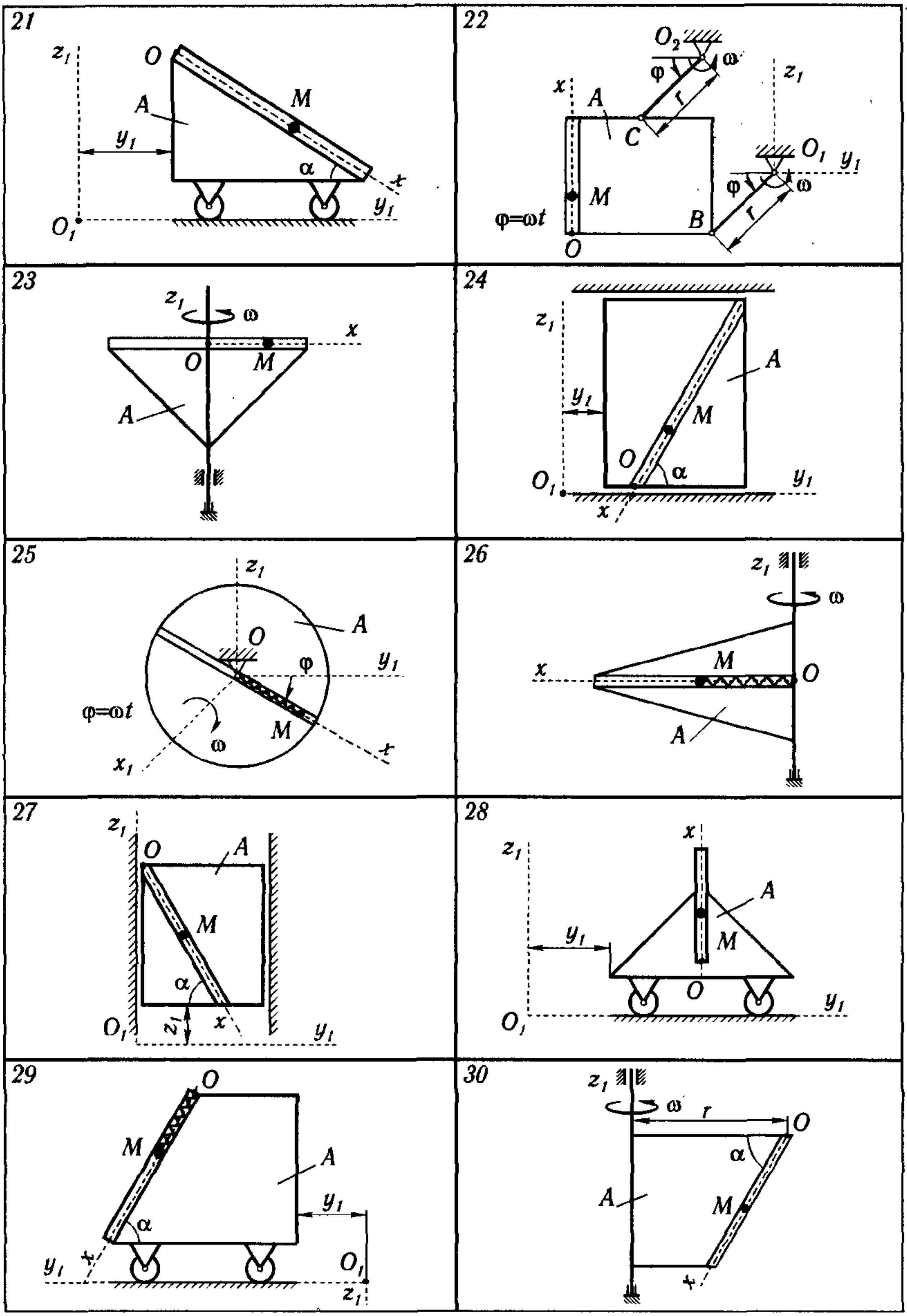

11
z_1
ω
A
x
M
O
α
12
z_1
x
M
y_1
φ
O
φ=ωt
A
x_1
ω
13
z_1
A
O
M
x
O_1
z_1
y_1
14
z_1
ω
O
A
M
r
x
15
z_1
x
M
y_1
O
φ
φ=ωt
A
x_1
ω
16
z_1
x
M
A
y_1
O
α
O_1
y_1
17
A
B
z_1
M
x
O
r
ω
φ
C
O_1
y_1
r
ω
φ=ωt
φ
O_2
18
x
z_1
A
y_1
M
O_1
α
O
y_1
19
z_1
O
x
M
A
y_1
O_1
y_1
20
z_1
ω
A
M
x
O

Рис. 130



21
z1
O
A
M
y1
α
x
O1
22
O2
φ
ω
z1
x
A
C
r
O1
y1
M
φ=ωt
B
O
23
ω
x
O
M
A
24
z1
A
y1
M
O
α
O1
x
25
z1
A
O
φ
y1
φ=ωt
M
ω
x1
x
26
ω
M
x
O
A
27
z1
O
A
M
α
O1
x
y1
28
x
z1
A
y1
M
O
O1
29
O
M
A
y1
α
x
O1
z1
30
z1
ω
r
O
α
A
M
x

Рис. 131

Таблица 40

Номер варианта (рис. 129–131)	α, град	m, кг	ω, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	Начальные данные x_0, м	$\dot{x}_0$, м/с	t_1, с	c, $\frac{\text{Н}}{\text{см}}$	l_0, м	Уравнение движения тела A	r, h м	f
1	–	0,02	π	0	0,4	0,5	–	–	–	–	0
2	–	0,02	π	0	0,2	0,4	–	–	–	0,15	0
3	45	0,03	2π	0,5	0	0,2	–	–	–	–	0
4	–	0,09	4π	0,2	–0,8	0,1	0,36	0,15	–	–	0
5	60	0,02	–	0,6	0	0,2	–	–	$y_1=0{,}6-2t^3$ (м)	–	0
6	–	0,01	10π	0,5	0	0,2	–	–	–	0,10	0
7	–	0,03	2π	0,3	0	0,2	–	–	–	0,20	0
8	30	0,03	–	0,8	0	0,1	–	–	$z_1=0{,}1\cos 2\pi t$ (м)	–	0
9	30	0,02	–	0,4	0	0,1	0,20	0,20	$y_1=4t^3$ (м)	–	0
10	60	0,05	6π	0,4	0	0,1	–	–	–	0,20	0
11	30	0,05	π	0	0	0,4	–	–	–	–	0
12	–	0,08	6π	0,05	0	0,1	0,20	0,10	–	–	0
13	–	0,01	–	0	0,5	0,2	–	–	$z_1=5-10t^2$ (м)	–	0,1
14	–	0,05	4π	0,5	0	0,1	–	–	–	0,20	0,2
15	–	0,01	π	0,5	0	1,0	–	–	–	–	0
16	45	0,02	–	1,0	2,0	0,1	–	–	$y_1=0{,}06t^3$ (м)	–	0
17	–	0,02	6π	0	4,0	0,2	–	–	–	0,20	0
18	40	0,02	–	0,6	0	0,1	–	–	$y_1=0{,}1\sin \pi t$ (м)	–	0
19	–	0,08	–	0,4	–0,8	0,1	0,40	0,20	$y_1=8t-t^3$ (м)	–	0
20		0,01	10π	0,1	0	0,2	0,20	0,10	–	–	0
21	30	0,05	–	0,5	0,1	0,1	–	–	$y_1=2+t^2$ (м)	–	0,2
22	–	0,03	4π	0,1	3,0	0,1	–	–	–	0,10	0
23	–	0,01	2π	–0,5	–0,1	0,2	–	–	–	–	0
24	60	0,01	–	0	0,2	0,2	–	–	$y_1=0{,}1\cos 1{,}5\pi t$ (м)	–	0
25	–	0,05	2π	0,1	–0,4	0,1	0,20	0,20	–	–	0
26	–	0,09	π	0,2	0,3	0,1	0,20	0,1	–	–	0
27	75	0,02	–	1,0	0,6	0,3	–	–	$z_1=0{,}1\sin 0{,}5\pi t$ (м)	–	0
28	–	0,03	–	0,8	0	0,3	–	–	$y_1=8-5t^3$ (м)	–	0,1
29	60	0,10	–	0,4	1,0	0,1	0,20	0,20	$y_1=8+t^3$ (м)	–	0
30	50	0,02	$\pi/2$	0	0,5	0,2	–	–	–	0,50	0

Тело A равномерно вращается вокруг неподвижной оси (в вариантах 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 20, 23, 26 и 30 ось вращения z_1 вертикальна, в вариантах 1, 12, 15 и 25 ось вращения x_1 горизонтальна). В вариантах 5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 28 и 29 тело A движется поступательно, параллельно вертикальной плоскости $y_1O_1z_1$.

Найти также координату x и давление шарика на стенку канала при заданном значении $t = t_1$. Данные, необходимые для выполнения задания, приведены в табл. 40.

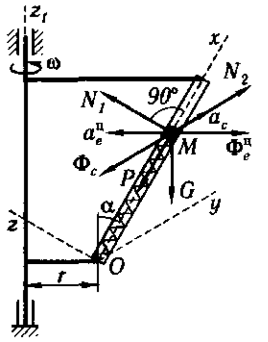


Рис. 132

В задании приняты следующие обозначения: m — масса шарика M; ω — постоянная угловая скорость тела A (в вариантах 1—4, 7, 10—12, 14, 15, 20, 23, 25, 26, 30) или кривошипов O_1B и O_2C (в вариантах 6, 17, 22); c — коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик M; l_0 — длина недеформированной пружины; f — коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала; x_0, $\dot{x}_0$ — начальная координата и проекция начальной скорости на ось x.

Пример выполнения задания (рис. 132). Дано: $\alpha = 30°$, $\omega = \pi$ рад/с; $m = 0{,}01$ кг; $\tau = 0{,}2$ с; $x_0 = 0{,}3$ м; $\dot{x}_0 = 2$ м/с; $c = 1$ Н/м; $l_0 = 0{,}2$ м; $r = 0{,}2$ м.

Найти уравнение $x = x(t)$ относительного движения шарика M, а также координату x_1 и давление шарика на стенку канала при заданном $t = t_1$.

Решение. Свяжем подвижную систему отсчета $Oxyz$ с вращающимся каналом (трубкой), совместив ось x с траекторией относительного движения шарика M.

Вращение этой системы вокруг оси z_1 является переносным движением для шарика M. Относительным движением шарика M является его движение вдоль трубки. В том случае, когда переносное движение является равномерным вращением, относительное движение точки определяется уравнением

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{P}_i + \vec{\Phi}_e^{ц} + \vec{\Phi}_c.$$

К шарику M приложены силы: вес $\vec{G}$, реакция пружины $\vec{P}$ и нормальная реакция стенки трубки; эту реакцию можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие N_1 и N_2.

Присоединяем к силам, действующим на шарик M, переносную центробежную силу инерции $\vec{\Phi}_e^{ц}$ и кориолисову силу инерции $\vec{\Phi}_c$, направленные противоположно ускорениям $\vec{a}_e^{ц}$ и $\vec{a}_c$. Направление ускорения $\vec{a}_c$ найдем по известному правилу. Предположим, что направление относительной скорости $\vec{v}_r$ точки M совпадает с положительным направлением оси x. В этом случае кориолисова сила инерции Φ_c перпендикулярна плоскости xOz и направлена, как показано на рис. 132.

Модули сил инерции определяются по формулам

$$\Phi_e^{ц} = ma_e^{ц} = m\omega_e^2(r + x\sin\alpha);$$

$$\Phi_c = ma_c = 2m\omega_e v_r \sin\alpha,$$

где

$$\omega_e = \omega, \qquad v_r = |\dot{x}|.$$

Основное уравнение относительного движения точки M в данном случае имеет вид

$$m\vec{a}_r = \vec{G} + \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_e^{ц} + \vec{\Phi}_c. \qquad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение относительного движения шарика M вдоль оси x:

$$m\ddot{x} = \sum X_i = \Phi_e^{ц} \sin\alpha - G\cos\alpha - P;$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2(r + x\sin\alpha)\sin\alpha - mg\cos\alpha - c(x - l_0)$$

(реакция пружины P равна произведению коэффициента жесткости на деформацию пружины).

Последнее уравнение представим в виде

$$\ddot{x} + (c/m - \omega^2\sin^2\alpha)x = \omega^2 r\sin\alpha - g\cos\alpha + cl_0/m. \qquad (2)$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x = x^* + x^{**},$$

где x^* — общее решение соответствующего однородного уравнения; x^{**} — частное решение уравнения (2).

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + c/m - \omega^2\sin^2\alpha = 0;$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\omega^2\sin^2\alpha - c/m} = \sqrt{\pi^2 \cdot 0{,}5^2 - 1/0{,}01} = 9{,}876i;$$

$$\lambda_2 = -9{,}876i.$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x^* = C_1\cos 9{,}876t + C_2\sin 9{,}876t.$$

Частное решение уравнения (2) находим в форме

$$x^{**} = B.$$

Из дифференциального уравнения (2) находим

$$x^{**} = B = \frac{\omega^2 r\sin\alpha - g\cos\alpha + cl_0/m}{c/m - \omega^2\sin^2\alpha}.$$

В результате вычислений получаем

$$B = 0{,}128 \text{ м}.$$

Решение дифференциального уравнения (2) относительного движения шарика M получает вид

$$x = C_1\cos 9{,}876t + C_2\sin 9{,}876t + 0{,}128. \qquad (3)$$

Скорость этого движения

$$\dot{x} = -9{,}876C_1 \sin 9{,}876t + 9{,}876C_2 \cos 9{,}876t. \qquad (4)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем, используя начальные условия:

$$\text{при} \quad t = 0 \quad x_0 = 0{,}3 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 2{,}0 \text{ м/с}.$$

Составим уравнения (3) и (4) для $t = 0$:

$$x_0 = C_1 + 0{,}128; \qquad \dot{x}_0 = 9{,}876C_2,$$

откуда

$$C_1 = 0{,}172; \qquad C_2 = 0{,}202.$$

Уравнение относительного движения шарика M принимает вид

$$x = 0{,}172 \cos 9{,}876t + 0{,}202 \sin 9{,}876t + 0{,}128.$$

Скорость относительного движения шарика $\dot{x} = -1{,}69 \sin 9{,}876t + 1{,}99 \cos 9{,}876t$.

Для определения составляющих реакции стенки трубки N_1 и N_2 при $t = t_1 = 0{,}2$ с выразим векторное уравнение (1) в проекциях на оси y и z. Учитывая, что вектор $\vec{a}_r$ перпендикулярен этим осям, получаем

$$0 = N_2 - \Phi_c, \qquad 0 = N_1 - G \cos 60^\circ - \Phi_e^{\text{ц}} \cos 30^\circ.$$

Из этих уравнений находим

$$N_2 = \Phi_c = 2m\omega v_r \sin\alpha;$$
$$N_1 = G \cos 60^\circ + \Phi_e^{\text{ц}} \cos 30^\circ = mg \cos 60^\circ + m\omega^2 (r + x \sin\alpha) \cos 30^\circ.$$

Для получения числовых значений N_1 и N_2 необходимо определить координату x_1 и проекцию относительной скорости точки $\dot{x}_1$, соответствующие значению $t_1 = 0{,}2$ с:

$$x_1 = 0{,}172 \cos(9{,}876 \cdot 0{,}2) + 0{,}202 \sin(9{,}876 \cdot 0{,}2) + 0{,}128 =$$
$$= 0{,}172 \cos 113^\circ + 0{,}202 \sin 113^\circ + 0{,}128 = 0{,}246 \text{ м};$$
$$\dot{x}_1 = -1{,}69 \sin 113^\circ + 1{,}99 \cos 113^\circ = -2{,}33 \text{ м/с}.$$

Следовательно, составляющие реакции $N_1 = 0{,}077$ Н; $N_2 = 0{,}080$ Н. Реакция стенки трубки

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_1^2} = \sqrt{0{,}077^2 + 0{,}080^2} = 0{,}111 \text{ Н}.$$

Искомое давление шарика M на стенки трубки по числовому значению равно найденной реакции N и направлено в противоположную сторону.