

В этом выражении следует принять:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, & \quad \dot{x}_1 = v_*, & M_1 = M_* = a_2/a_1, \\ x_2 = s, & \quad \dot{x}_2 = 0,9v_*. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (28), получим

$$\frac{a_3}{2}(0,9^2 - 1)v_*^2 = -\frac{\alpha a_1}{2\tau b_1}s^2.$$

Путь s торможения, на котором скорость снижается до значения $0,9 v_*$,

$$s = v_* \sqrt{\frac{a_3 \tau b_1}{\alpha a_1} 0,19}. \quad (29)$$

2-й режим торможения. Уравнение, характеризующее движение системы при втором режиме торможения, получается из (28) при $a_1 = 0$:

$$\frac{a_3}{2}(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) = -a_2(x_2 - x_1). \quad (30)$$

Принимая $x_1 = 0$; $\dot{x}_1 = v_*$; $x_2 = l$; $\dot{x}_2 = 0,9v_*$, получаем

$$l = \frac{0,19a_3}{2a_2}v_*^2. \quad (31)$$

Подставляя значения параметров в формулы (29) и (31), получаем

$$s = 3,43 \text{ м}; \quad l = 37,39 \text{ м}.$$

Сравнивая пути s и l при первом и втором режимах торможения, заключаем, что приложение тормозного момента двигателя значительно сокращает тормозной путь.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Задача Д.19. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

Варианты механических систем показаны на рис. 198—200, а необходимые для решения данные приведены в табл. 55.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Пример выполнения задания. Дано: $G_1 = G_2 = 2G$; $G_3 = G_4 = G$; $R = 2r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$; $f = 0,2$.

Блок 3 — сплошной однородный цилиндр (рис. 201). Определить ускорения грузов 1 и 4 и натяжения ветвей нити 1—2 и 3—4.

Таблица 55

Номер варианта (рис. 198—200)	Сила тяжести				R/r	Радиусы инерции		P	Коэффициент трения скольжения f	Дополнительные данные
	G_1	G_2	G_3	G_4		i_{2x}	i_{3x}			
1	G	G	$3G$	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	
2	G	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	
3	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
4	G	G	$2G$	-	-	-	-	-	0,2	$r_2=r_3$
5	$2G$	G	G	G	3	$2r$	-	-	-	
6	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
7	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
8	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
9	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	$0,2G$	0,2	
10	$2G$	$2G$	G	-	4	-	$2r$	$G/3$	0,4	
11	$2G$	G	$2G$	$0,2G$	3	$2r$	-	-	0,2	
12	$2G$	G	$2G$	$0,2G$	3	$2r$	-	-	0,2	
13	$4G$	$2G$	G	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	$r_2=2r_3; R_2=R_3$
14	-	G	G	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$8G$	-	$r_2=2r_3; R_3=1,5R_2$
15	$4G$	$2G$	$2G$	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	$r_2=2r_3; R_3=1,5R_2$
16	-	G	$2G$	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$4G$	-	$r_2=2r_3; R_3=1,5R_2$
17	$2G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
18	$3G$	$0,2G$	$0,1G$	$0,5G$	2	-	-	-	0,4	
19	$4G$	$0,3G$	$0,2G$	$3G$	3	$2r$	$1,2r$	-	0,1	$r_3=1,2r; R_3=1,2r_3$
20	$4G$	$0,2G$	$0,1G$	$3G$	2	$1,6r$	$r\sqrt{2}$	-	0,2	$r_2=1,5r; R_2=1,2r_2$
21	$5G$	$0,1G$	$0,2G$	-	3	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
22	G	$0,2G$	$0,3G$	-	2	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
23	G	$0,2G$	$0,1G$	-	1,5	$1,2r$	-	$2G$	-	$R_3=1,2r$
24	$2G$	G	G	$8G$	-	-	-	-	-	Массы четырех колес одинаковы
25	$6G$	$2G$	$2G$	G	-	-	-	-	-	$r_3=r_4$
26	$6G$	G	$2G$	-	-	-	-	-	-	$r_3=r_2$
27	G	G	G	$4G$	2	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$	-	-	
28	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
29	$6G$	$3G$	G	G	2	-	$r\sqrt{2}$	-	-	$i_{4x}=i_{3x}$
30	$8G$	G	G	$2G$	-	-	-	-	0,1	

Примечания: 1. Радиусы инерции даны относительно центральных осей, перпендикулярных плоскости чертежа (рис. 198—200).

2. Коэффициент трения принимать одинаковым как при скольжении тела по плоскости, так и при торможении колодкой (варианты 9—12).

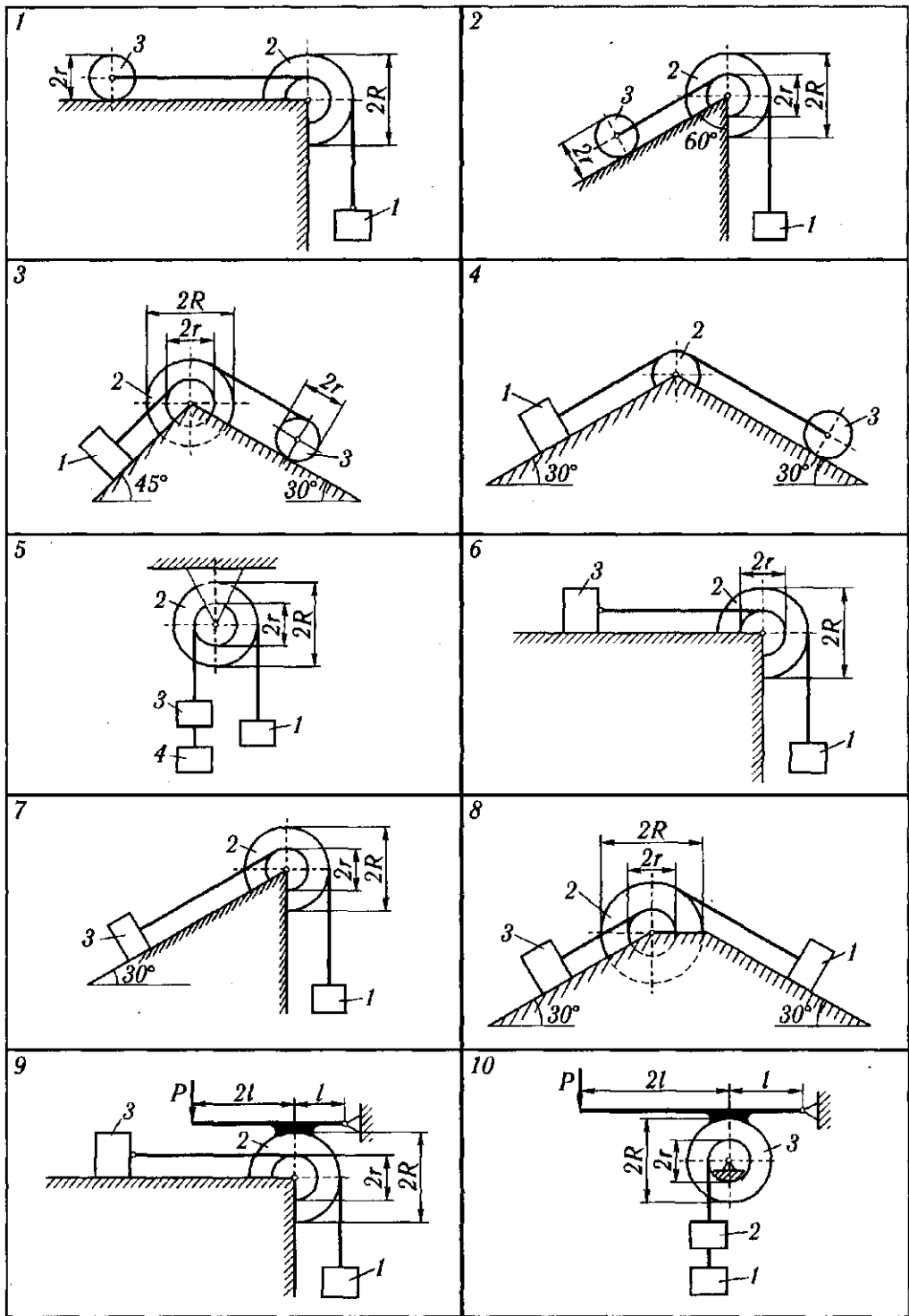


Рис. 198

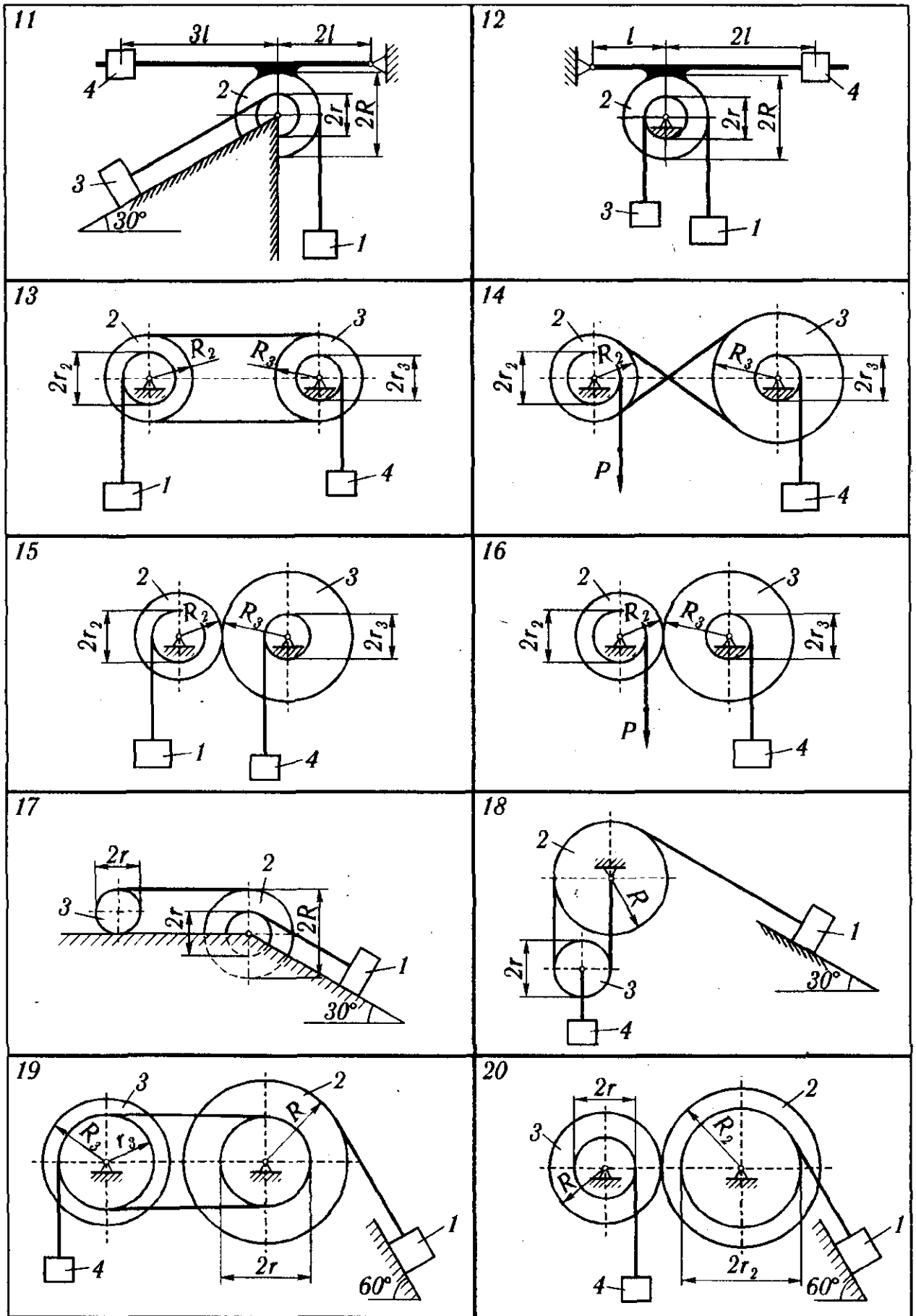


Рис. 199

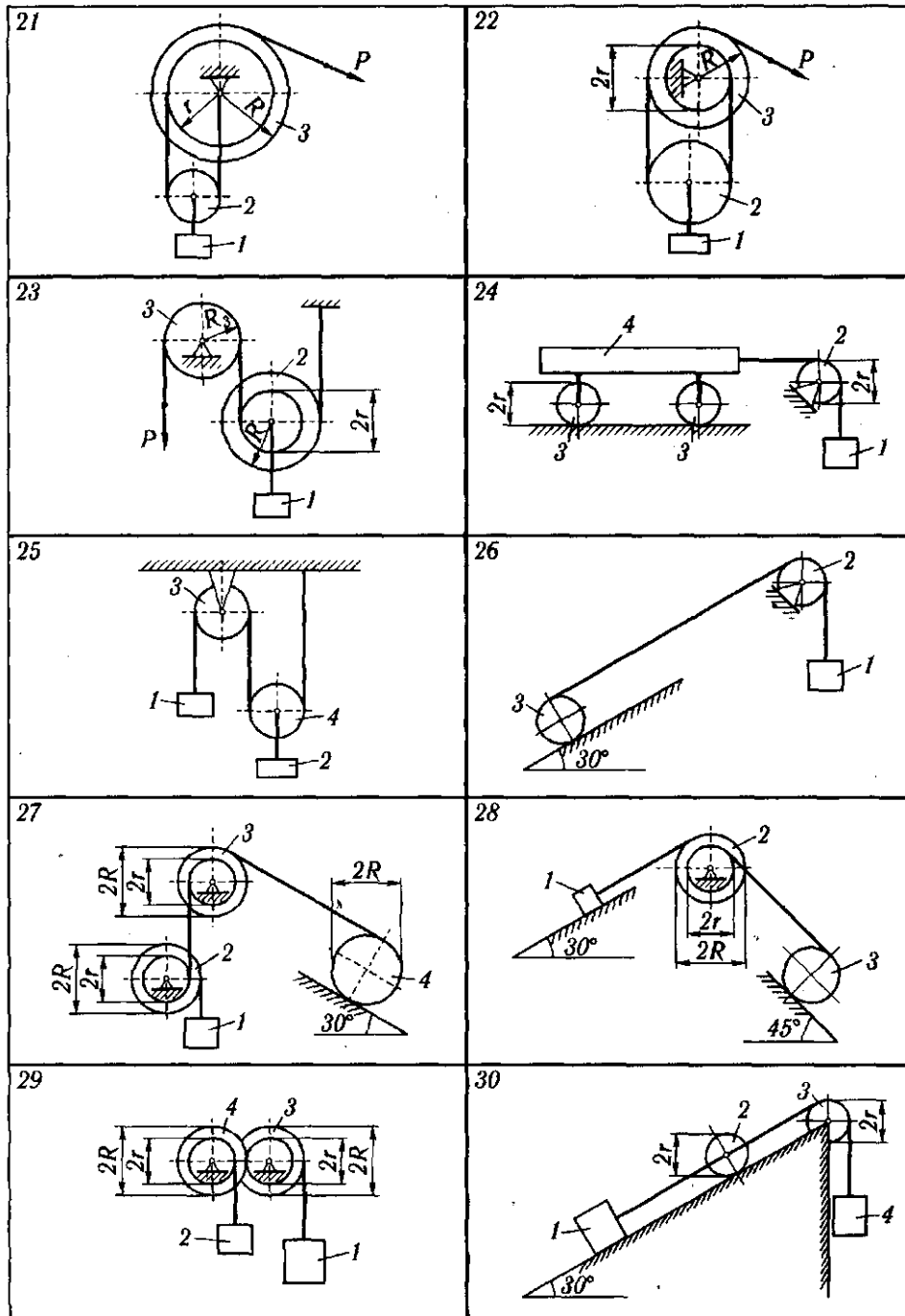


Рис. 200

Решение. Применим к решению задания общее уравнение динамики. Так как система приходит в движение из состояния покоя, направления ускорений тел соответствуют направлениям их движения.

Ввиду того, что среди сил, действующих на тела системы, есть сила трения, целесообразно по исходным данным найти истинное направление движения системы, чтобы правильно показать направление силы трения.

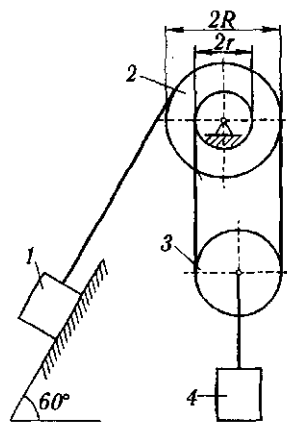


Рис. 201

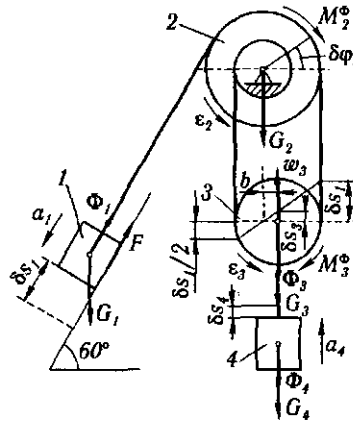


Рис. 202

Если направление движения системы выбрано ошибочно, то искомое ускорение получается со знаком «-». В этом случае необходимо изменить направления силы трения и сил инерции и внести соответствующие поправки в общее уравнение динамики.

В данном примере движение системы таково, что груз 1 опускается.

Покажем задаваемые силы: силы тяжести \vec{G}_1 — груза 1, \vec{G}_2 — блока 2, \vec{G}_3 — блока 3 и \vec{G}_4 — груза 4, а также \vec{F} — силу трения скольжения груза 1 по наклонной плоскости (рис. 202).

Приложим силы инерции. Сила инерции груза 1, движущегося поступательно с ускорением \vec{a}_1 , выражается вектором

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}_1.$$

Силы инерции блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ϵ_2 , приводятся к паре, момент которой

$$M_2^\Phi = J_{2x} \epsilon_2.$$

Силы инерции блока 3, совершающего плоское движение, приводятся к вектору

$$\vec{\Phi}_3 = -m_3 \vec{a}_3,$$

где \vec{a}_3 — ускорение центра масс блока 3, и к паре сил, момент которой

$$M_3^\Phi = J_{3x}\varepsilon_3,$$

где ε_3 — угловое ускорение блока.

Сила инерции груза 4, движущегося поступательно с ускорением \vec{a}_4 ,

$$\vec{\Phi} = -m_4\vec{a}_4.$$

Сообщим системе возможное перемещение в направлении ее действительного движения (рис. 202) (можно сообщить возможное перемещение и в обратном направлении).

Составим общее уравнение динамики:

$$G_1\delta s_1 \sin 60^\circ - F\delta s_1 - \Phi_1\delta s_1 - M_2^\Phi\delta\varphi_2 - G_3\delta s_3 - \Phi_3\delta s_3 - M_3^\Phi\delta\varphi_3 - G_4\delta s_4 - \Phi_4\delta s_4 = 0, \quad (1)$$

где $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$ — углы поворотов блоков 2 и 3.

Зависимости между возможными перемещениями такие же, как и между соответствующими скоростями.

Выразим скорости центров масс и угловые скорости тел системы через скорость тела 1 (составим уравнения связей).

Как показано на рис. 202, мгновенный центр скоростей блока 3 находится на одной вертикали с центром блока 2. Расстояние между мгновенным центром скоростей и центром блока 3

$$b = 3r/2 - r = r/2.$$

Теперь находим

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 = \omega_3 = v_1/R = v_1/2r; \\ v_3 = v_4 = \omega_3 b = v_1/4. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Такие же зависимости и между возможными перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = \delta s_1/(2r); \\ \delta s_3 = \delta s_4 = \delta s_1/4. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнение (1) с учетом (3) принимает вид

$$G_1 \sin 60^\circ - F - \Phi_1 - M_2^\Phi/(2r) - G_3/4 - \Phi_3/4 - M_3^\Phi/(2r) - G_4/4 - \Phi_4/4 = 0^*. \quad (4)$$

Учитывая, что

$$G_1 = G_2 = 2G = 2mg; \quad G_3 = G_4 = G = mg,$$

* Это же уравнение можно получить, если вместо (1) составить уравнение мощностей, сообщив системе возможные скорости. Соотношения (2), приведенные для действительных скоростей тел системы, те же, что и для любых возможных скоростей.

имеем

$$\left. \begin{aligned} F &= fG_1 \cos 60^\circ = fmg; \\ \Phi_1 &= m_1 a_1 = 2ma_1; \\ M_2^\Phi &= J_{2x} \varepsilon_2 = m_2 i_{2x}^2 \varepsilon_2 = 4mr^2 \varepsilon_2; \\ \Phi_3 &= m_3 a_3 = ma_3; \\ M_3^\Phi &= J_{3x} \varepsilon_3 = [m_3(1,5r)^2/2] \varepsilon_3 = 9mr^2 \varepsilon_3/8; \\ \Phi_4 &= m_4 a_4 = ma_4. \end{aligned} \right\} (5)$$

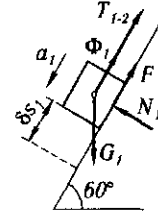


Рис. 203

Зависимости между ускорениями в соответствии с (2)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 = a_1/(2r); \\ a_3 &= a_4 = a_1/4. \end{aligned} \right\} (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим

$$g\sqrt{3} - fg - 2a_1 - a_1 - g/4 - a_1/16 - 9a_1/32 - g/4 - a_1/16 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{g(\sqrt{3} - f - 0,5)}{3,41}; & a_1 &= 2,69 \text{ м/с}^2; \\ a_4 &= a_1/4; & a_4 &= 0,74 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Для определения натяжения в ветви нити 1—2 мысленно разрежем нить и заменим ее действие на груз 2 реакцией T_{1-2} (рис. 203).

Общее уравнение динамики

$$G_1 \delta s_1 \sin 60^\circ - F \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - T_{1-2} \delta s_1 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} T_{1-2} &= G_1 \sin 60^\circ - F - \Phi_1 = 2G \sin 60^\circ - 2Gf \cos 60^\circ - 2(G/g)a_1; \\ T_{1-2} &= 0,93G. \end{aligned}$$

Для определения натяжения в нити 3—4 мысленно разрежем эту нить и заменим ее действие на груз 4 реакцией T_{3-4} (рис. 204).

Не составляя общего уравнения динамики, на основании принципа Даламбера имеем

$$T_{3-4} = G_4 + \Phi_4 = G + (G/g)a_4; \quad T_{3-4} = 10,8G.$$

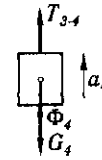


Рис. 204

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА

Задача Д.20. Применение уравнений Лагранжа II рода к определению сил и моментов, обеспечивающих программное движение манипулятора

Манипулятор (рис. 205—207), состоящий из звеньев 1, 2 и захвата D , приводится в движение приводами A и B . Захват D перемещается вдоль прямой ON . Со стороны привода A к звену 1 прикладывается