

Определим значения кинетических моментов L_{z0} при $t_1 = 0$ и L_{zT} при $t_1 = T$ и приравняем эти значения.

Для $t_1 = 0$

$$L_{z0} = (J_z + m_2 \cdot O_1 O^2) \omega_T = 2368 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

При $t_1 > 0$ скорость точки K складывается из относительной скорости \vec{v}_r по отношению к телу H и переносной скорости \vec{v}_e в движении вместе с телом H . Поэтому для $t_1 = T$ покажем два вектора количества движения точки: $m_2 \vec{v}_r$ и $m_2 \vec{v}_e$ (рис. 151).

Для $t_1 = T$

$$L_{zT} = J_z \omega_T + m_2 \omega_T (O_1 K_T)^2 + m_2 v_r \cdot O_1 C.$$

Найдем

$$(O_1 K_T)^2 = (O_1 C)^2 + (CK_T)^2,$$

где

$$CK_T = OK_T - OC, \quad OK_T = s_{t_1=T} = 0,5T^2 = 0,5 \cdot 2^2 = 2 \text{ м},$$

т. е.

$$CK_T = 2 - 1,6 = 0,4 \text{ м}, \quad (O_1 K_T)^2 = 1,2^2 + 0,4^2 = 1,6 \text{ м}^2.$$

Относительная скорость

$$v_r = ds/dt = t_1,$$

при $t_1 = T = 2 \text{ с}$

$$v_r = 2 \text{ м/с}.$$

Поэтому

$$L_{zT} = 864\omega_T + 80\omega_T \cdot 1,6 - 80 \cdot 2 \cdot 1,2 = 992\omega_T - 192.$$

Приравнявая L_{z0} и L_{zT} :

$$2368 = 992\omega_T - 192,$$

находим

$$\omega_T = 2,58 \text{ рад/с}.$$

Зада н и е Д.10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 152—154. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1—3, 5, 6, 8—12, 17—23, 28—30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6—9, 11, 13—15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами

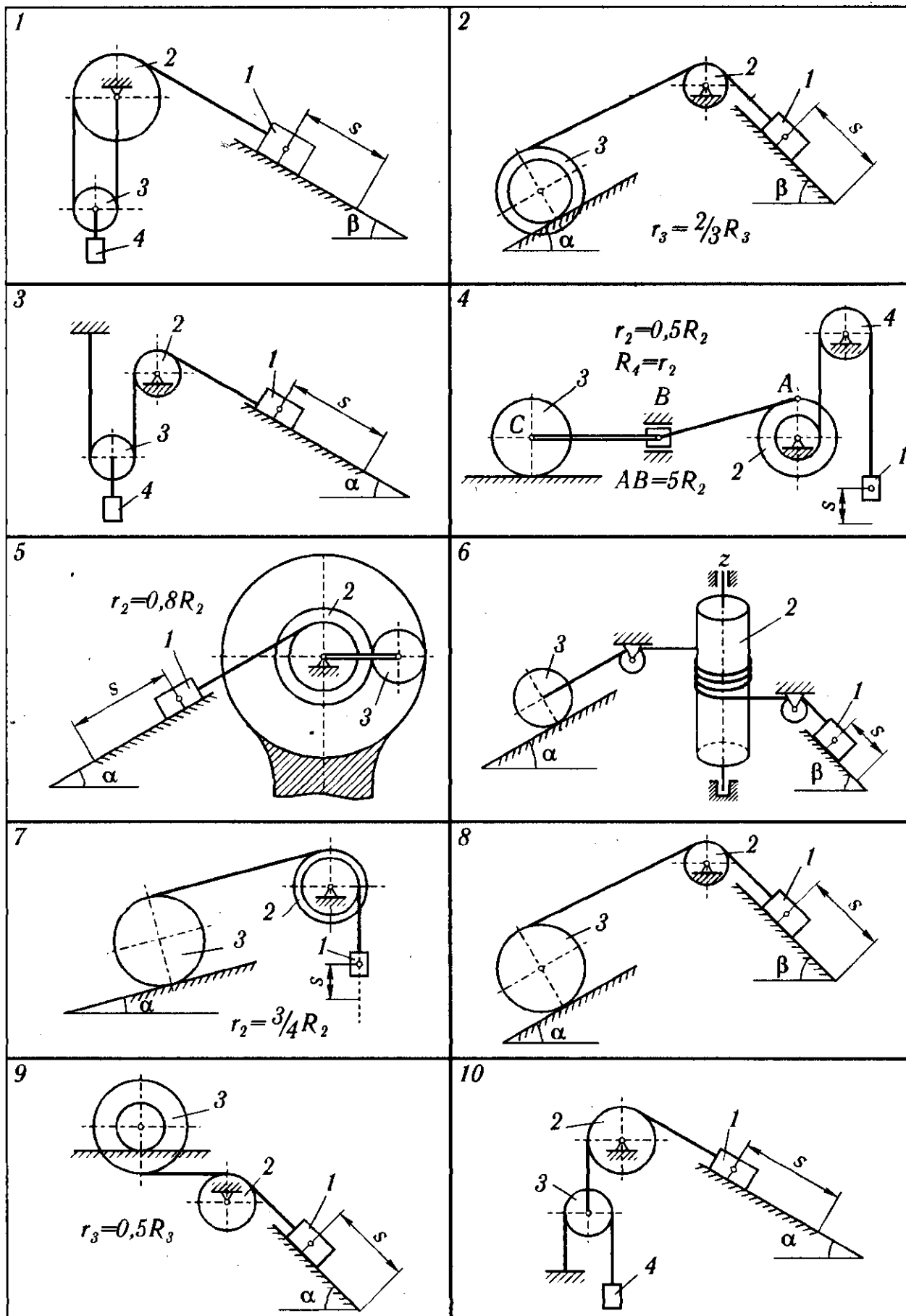


Рис. 152

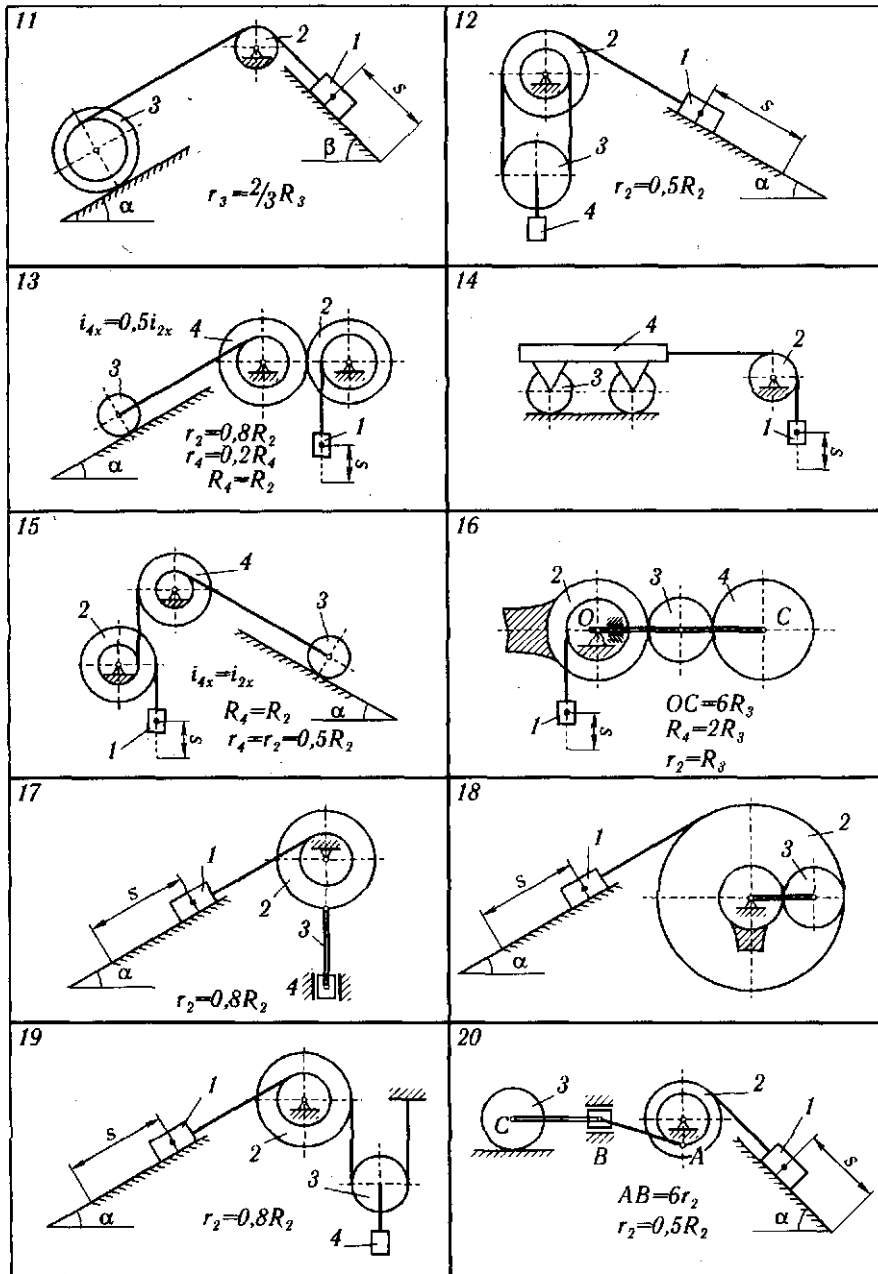


Рис. 153

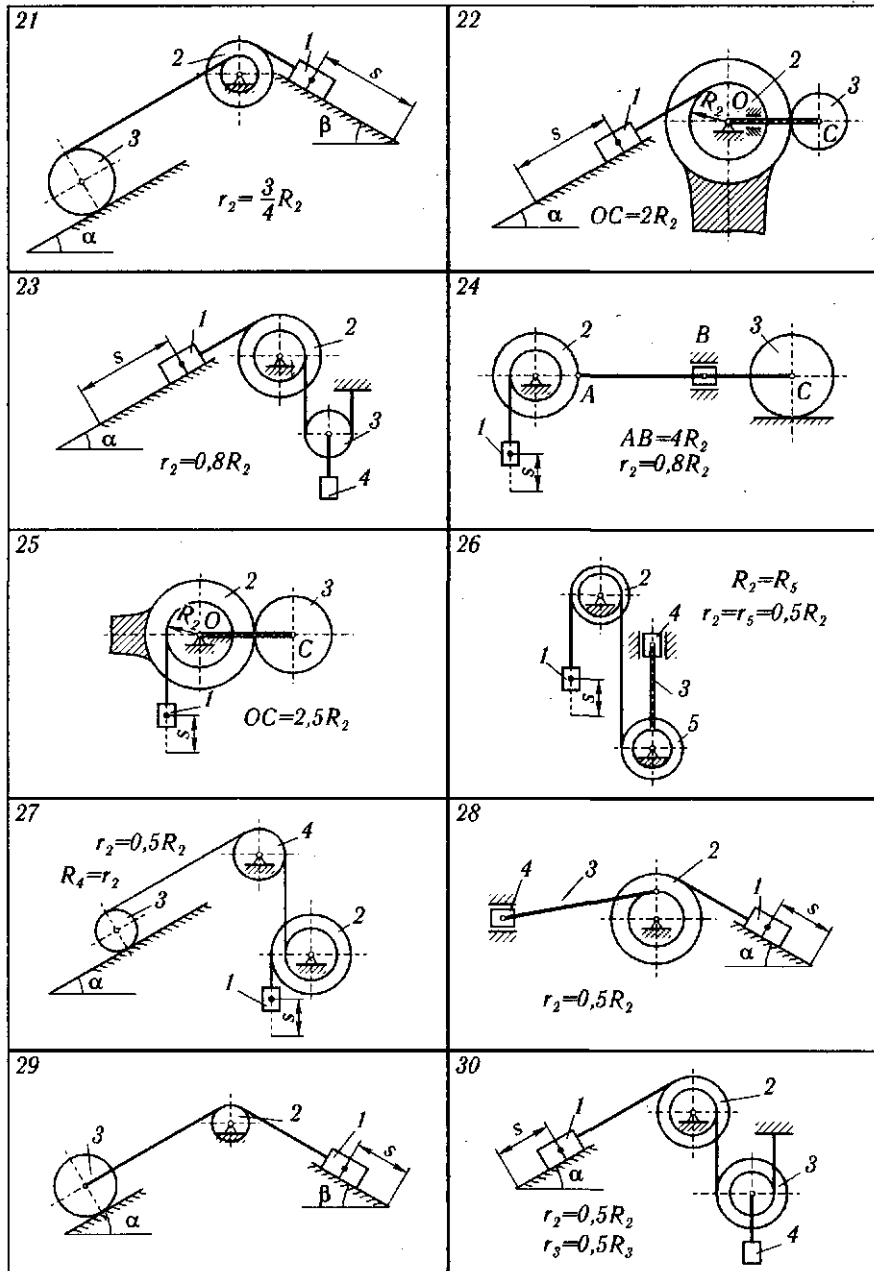


Рис. 154

нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s .

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 — массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей; $i_{2x}, i_{3\xi}$ — радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β — углы наклона плоскостей к горизонту; t — коэффициент трения скольжения; δ — коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 47. Блоки в катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Пример выполнения задания. Дано: m_1 — масса груза 1, $m_2 = 2m_1, m_3 = m_1, m_4 = 0,5m_1, m_5 = 20m_1, R_2 = R_3 = 12$ см, $r_2 = 0,5R_2, r_3 = 0,75R_3, R_5 = 20$ см, $AB = l = 4R_3, i_{2\xi} = 8$ см,

$i_{3x} = 10$ см, $\alpha = 30^\circ, f = 0,1, \delta = 0,2$ см, $s = 0,06\pi$ м. Сопротивление качению тела 2 не учитывать. Шатун 4 считать тонким однородным стержнем; каток 5 — однородный сплошной цилиндр. Массами звена BC_5 и ползуна B пренебречь. На рис. 155, а показана механическая система в начальном положении.

Найти v_1 — скорость груза 1 в конечном положении.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \quad (1)$$

где T_0 и T — кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_i^E$ — сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное; $\sum A_i^J$ — сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями,

$$\sum A_i^J = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_i^E. \quad (2)$$

Для определения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил надо изобразить систему в конечном положении (рис. 155, б, в).

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т. е. уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорости и перемещения груза 1.

Номер варианта (рис. 152-154)	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{3\xi}$	α	β	f	δ , см	s , м	Примечание
	кг				см		см		град					
1	m	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	-	-	-	-	-	60	0,10	-	2	
2	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	20	30	45	0,22	0,20	2	
3	m	m	$1/10m$	m	-	-	-	-	45	-	0,10	-	2	
4	m	$2m$	$40m$	m	20	40	18	-	-	-	-	0,30	$0,1\pi$	Массами звеньев AB , BC и ползуна B пренебречь
5	m	$2m$	m	-	20	15	18	-	60	-	0,12	-	$0,28\pi$	Массой водила пренебречь
6	m	$3m$	m	-	-	28	-	-	30	45	0,10	0,28	1,5	
7	m	$2m$	$2m$	-	16	25	14	-	30	-	-	0,20	2	
8	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	-	30	45	0,15	0,20	1,75	
9	m	$2m$	$9m$	-	-	30	-	20	30	-	0,12	0,25	1,5	
10	m	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	-	-	-	-	60	-	0,10	-	3	
11	m	$1/2m$	$1/4m$	-	-	30	-	25	30	45	0,17	0,20	2,5	
12	m	$1/2m$	$1/5m$	m	30	-	20	-	30	-	0,20	-	2,5	
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	-	30	-	-	0,24	2	
14	m	$1/2m$	$5m$	$4m$	-	25	-	-	-	-	-	0,20	2	Массы каждого из четырех колес одинаковы
15	m	$1/2m$	$4m$	$1/2m$	20	15	18	-	60	-	-	0,25	1,5	
16	m	$1/10m$	$1/20m$	$1/10m$	10	12	-	-	-	-	-	-	$0,05\pi$	Массой водила пренебречь
17	m	$1/4m$	$1/5m$	$1/10m$	20	-	15	-	60	-	0,10	-	$0,16\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень

Продолжение табл. 47

Номер варианта (рис. 152-154)	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{3\xi}$	α	β	f	δ , см	s , м	Примечание
	кг				см		см		град					
18	m	$3m$	m	—	35	15	32	—	60	—	0,15	—	$0,2\pi$	Массой водила пренебречь
19	m	$1/3m$	$1/10m$	m	24	—	20	—	60	—	0,15	—	1,5	
20	m	$2m$	$20m$	—	20	15	16	—	30	—	0,10	0,20	$0,2\pi$	Массами звеньев AB , BC и ползуна B пренебречь
21	m	m	$2m$	—	20	20	16	—	30	45	0,20	0,32	1,2	
22	m	$1/2m$	$1/4m$	—	20	10	—	—	60	—	0,17	—	$0,1\pi$	Массой водила пренебречь
23	m	m	$1/10m$	$4/5m$	20	—	18	—	30	—	0,10	—	1	
24	m	$3m$	$20m$	—	20	30	18	—	—	—	—	0,60	$0,08\pi$	Массами звеньев AB , BC и ползуна B пренебречь
25	m	$1/3m$	$1/4m$	—	16	20	—	—	—	—	—	—	$0,04\pi$	Массой водила пренебречь
26	m	$1/2m$	m	$1/3m$	30	—	20	—	—	—	—	—	$0,6\pi$	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
27	m	m	$6m$	$1/2m$	20	20	16	—	30	—	—	0,20	2	
28	m	$2m$	$3m$	—	20	—	14	—	60	—	0,10	—	$0,1\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
29	m	$1/4m$	$1/8m$	—	—	35	—	—	15	30	0,20	0,20	2,4	
30	m	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	—	0,12	—	2	

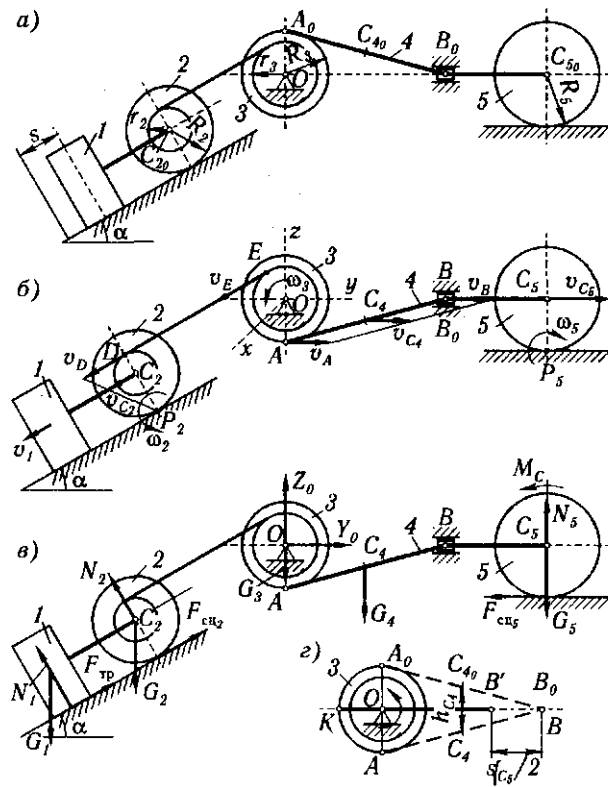


Рис. 155

Скорость центра масс C катка 2 равна скорости груза 1:

$$v_{C2} = v_1. \quad (3)$$

Угловая скорость катка 2, мгновенный центр скоростей которого находится в точке P_2 ,

$$\omega_2 = v_{C2} / (C_2 P_2).$$

Учитывая (3), получим

$$\omega_2 = v_1 / R_2. \quad (4)$$

Скорость точки D катка 2

$$v_D = \omega_2 \cdot DP_2,$$

т. е.

$$v_D = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Скорость точки E блока 3 равна скорости точки D катка 2:

$$v_E = v_D. \quad (5)$$

Но

$$v_E = \omega_3 r_3.$$

Следовательно,
по (5),

$$\omega_3 r_3 = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Так как

$$R_2 = 2r_2,$$

то

$$\omega_3 r_3 = 3/2 v_1,$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{3}{2} \frac{v_1}{r_3}. \quad (6)$$

Заменяя в формуле (6)

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}, \quad v_1 = \frac{ds}{dt},$$

получим

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \frac{ds}{dt},$$

или

$$d\varphi_3 = \frac{3}{2r_3} ds.$$

После интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{s}{r_3}. \quad (7)$$

Когда груз 1 пройдет путь $s = 0,06\pi$ м, блок 3 повернется на угол φ_3 :

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{s}{r_3} = \frac{3}{2} \frac{0,06\pi}{0,09} = \pi.$$

При этом повороте блока 3 на 180° его точка A_0 перейдет в конечное положение A и шатун 4 из начального положения A_0B_0 перейдет в конечное положение AB .

Каток 5 переместится влево при повороте блока 3 на угол $\pi/2$ и вправо при повороте блока еще на $\pi/2$; значит, конечное положение катка 5 совпадает с его начальным положением.

Таким образом, конечное положение всей системы вполне определено (рис. 155, б).

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (8)$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \quad (9)$$

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_{C_2}^2}{2} + \frac{J_{2\xi} \omega_2^2}{2}, \quad (10)$$

где $J_{2\xi}$ — момент инерции катка 2 относительно его продольной центральной оси $C_{2\xi}$:

$$J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2. \quad (11)$$

Подставляя (3), (4), (11) в формулу (10), получаем

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2R_2^2} v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} \right) v_1^2. \quad (12)$$

Кинетическая энергия тела 3, вращающегося вокруг оси Ox ,

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{3x} \omega_3^2, \quad (13)$$

где J_{3x} — момент инерции блока 3 относительно оси Ox :

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2. \quad (14)$$

Подставляя (6), (14) в формулу (13), получаем

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3x}^2}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{v_1}{r_3} \right)^2 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} v_1^2. \quad (15)$$

Кинетическая энергия шатуна 4, совершающего плоское движение,

$$T_4 = \frac{m_4 v_{C_4}^2}{2} + \frac{J_{4\xi} \omega_4^2}{2},$$

где v_{C_4} — скорость центра масс C_4 шатуна 4; ω_4 — угловая скорость шатуна 4; $J_{4\xi}$ — момент инерции шатуна относительно центральной оси $C_{4\xi}$.

Для определения v_{C_4} и ω_4 найдем положение мгновенного центра скоростей шатуна 4. Так как скорости точек A и B в этот момент параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна 4 находится в бесконечности; следовательно, угловая скорость шатуна в данный момент $\omega_4 = 0$, а скорости всех его точек параллельны и равны между собой. Таким образом, кинетическая энергия шатуна 4

$$T_4 = m_4 v_{C_4}^2 / 2, \quad (16)$$

где

$$v_{C_4} = v_A. \quad (17)$$

Вращательная скорость точки A тела 3

$$v_A = \omega_3 R_3, \quad (18)$$

или с учетом (14)

$$v_A = 3/2 R_3 v_1 / r_3.$$

Поскольку $r_3 = 3/4R_3$, получим

$$v_A = 2v_1.$$

По (17)

$$v_{C_4} = v_A, \quad v_{C_4} = 2v_1. \quad (19)$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетической энергии шатуна 4 принимает вид

$$T_4 = 1/2m_4(2v_1)^2 = 2m_4v_1^2. \quad (20)$$

Кинетическая энергия катка 5, совершающего плоское движение,

$$T_5 = m_5v_{C_5}^2/2 + J_{5\xi}\omega_5^2/2,$$

где v_{C_5} — скорость центра масс C_5 катка 5; $J_{5\xi}$ — момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной продольной оси $C_5\xi$, $J_{5\xi} = m_5R_5^2/2$; ω_5 — угловая скорость катка 5.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке P_5 . Поэтому

$$\omega_5 = v_{C_5}/R_5.$$

Следовательно,

$$T_5 = \frac{m_5v_{C_5}^2}{2} + \frac{m_5R_5^2v_{C_5}^2}{2 \cdot 2R_5^2} = \frac{3}{4}m_5v_{C_5}^2.$$

Так как звено BC_5 совершает поступательное движение, то $v_{C_5} = v_B$, но $v_B = v_{C_4} = 2v_1$. Значит, $v_{C_5} = 2v_1$.

Поэтому выражение кинетической энергии катка 5 принимает вид

$$T_5 = 3/4m_5(2v_1)^2 = 3m_5v_1^2. \quad (21)$$

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (8) с учетом (9), (12), (15), (20), (21):

$$T = m_2v_1^2/2 + m_2(1 + i_{2\xi}^2/R_2^2)v_1^2/2 + 9/8m_3v_1^2i_{3x}^2/r_3^2 + 2m_4v_1^2 + 3m_5v_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс, получаем

$$T = m_1v_1^2[1 + 2(1 + i_{2\xi}^2/R_2^2) + 9/4i_{3x}^2/r_3^2 + 2 + 120]/2,$$

или

$$T = 129m_1v_1^2/2. \quad (22)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении. Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис. 155, в).

Работа силы тяжести \vec{G}_1

$$A_{G_1} = G_1h_1 = m_1gs \sin \alpha. \quad (23)$$

Работа силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$

$$A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}}s.$$

Так как

$$F_{\text{тр}} = fN_1 = fG_1 \cos \alpha,$$

то

$$A_{F_{\text{тр}}} = -fm_1gs \cos \alpha. \quad (24)$$

Работа силы тяжести \vec{G}_2

$$A_{G_2} = G_2h_{C_2} = m_2gs \sin \alpha. \quad (25)$$

Работа сил сцепления $\vec{F}_{\text{сц}2}$, $\vec{F}_{\text{сц}5}$ катков 2 и 5 равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей этих катков.

Работа силы тяжести \vec{G}_4

$$A_{G_4} = G_4h_{C_4},$$

где h_{C_4} — вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна 4 из начального положения в его конечное положение (рис. 155, з):

$$h_{C_4} = R_3,$$

$$A_{G_4} = m_4gR_3. \quad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 5

$$A_{M_C} = -M_C\varphi_5, \quad (27)$$

где $M_C = \delta N_5 = \delta G_5$ — момент пары сил сопротивления качению катка 5; φ_5 — угол поворота катка 5.

Так как каток 5 катится без скольжения, то угол его поворота

$$\varphi_5 = s_{C_5}/R_5, \quad (28)$$

где s_{C_5} — перемещение центра тяжести C_5 катка 5.

В данном примере работу пары сил сопротивления вычислим как сумму работ этой пары при качении катка 5 влево при повороте тела 3 на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело 3 повернется еще на угол $\pi/2$.

Перемещение центра тяжести C_5 катка 5 равно перемещению ползуна B влево и вправо:

$$s_{C_5} = 2(B_0B'). \quad (29)$$

Определим перемещение B_0B' при повороте тела 3 на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки B выберем неподвижную точку K плоскости (рис. 155, з). При этом повороте тела 3 шатун из положения A_0B_0 перейдет в положение KB' . Тогда

$$B_0B' = KB_0 - KB',$$

где

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2},$$

$$KB' = l = 4R_3.$$

Следовательно,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0,88R_3. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), а затем в (28), находим полный угол поворота катка 5:

$$\varphi_5 = 1,76R_3/R_5. \quad (31)$$

Работа пары сил сопротивления качению по (27)

$$A_{Mc} = -\delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5. \quad (32)$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (23)—(26) и (32):

$$\sum A_i^E = m_1 g s \sin \alpha - f m_1 g s \cos \alpha + m_2 g s \sin \alpha + m_4 g R_3 - \delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5.$$

Подставляя заданные значения масс, получаем

$$\sum A_i^E = m_1 g s \left(\sin \alpha - f \cos \alpha + 2 \sin \alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1,76R_3}{R_5 s} \right),$$

или

$$\sum A_i^E = 1,51 m_1 g s. \quad (33)$$

Согласно теореме (2), приравняем значения T и $\sum A_i^E$, определяемые по формулам (22) и (33):

$$129 \cdot m_1 v_1^2 / 2 = 1,51 m_1 g s,$$

откуда

$$v_1 = 0,21 \text{ м/с.}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

За д а н и е Д.11. Исследование поступательного и вращательного движений твердого тела

Механическая система состоит из механизма (колес 1 и 2) и груза 3.

К колесу 1 приложена пара сил с моментом $M = M(t)$ (движущий момент) или движущая сила $P = P(t)$.