I. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1—5 (рис. 117, схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD, наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $\beta = 60°$. Определить τ и h.

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15°$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0{,}2$; $h = 4$ м; $\beta = 45°$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC.

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 3{,}5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60°$. Определить v_B и τ.

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9{,}8$ м; $\beta = 60°$; $f = 0$. Определить α и T.

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $l = 9{,}8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45°$. Определить f и v_c.

Варианты 6—10 (рис. 117, схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB, наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l, со скоростью v_A. Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f. Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью v_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20°$; $f = 0{,}1$; $\tau = 0{,}2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30°$. Определить l и v_C.

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15°$; $f = 0{,}1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45°$. Определить v_B и T.

Вариант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0{,}3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60°$. Определить α и d.

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15°$; $\tau = 0{,}3$ с; $f = 0{,}1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45°$. Определить v_B и v_A.

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15°$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60°$. Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC.

Варианты 11—15 (рис. 117, схема 3). Имея в точке A скорость v_A, мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l, составляющему с горизонтом угол α. При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d, находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью v_C. Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30°$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4{,}5$ м/с; $d = 3$ м. Определить τ и h.

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30°$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4{,}5$ м/с; $h = 1{,}5$ м. Определить v_A и d.

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30°$; $m = 400$ кг, $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1{,}5$ м. Определить P и l.

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30°$; $m = 400$ кг; $P = 2{,}2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить v_B и v_C.

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m.

Варианты 16—20 (рис. 117, схема 4). Камень скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f. Имея в точке B скорость v_B, камень через T с ударяется в точке C о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0{,}2$; $d = 2{,}5$ м. Определить h и T.

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45°$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить d и f.

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30°$; $l = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0{,}1$; $d = 3$ м. Определить h и τ.

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15°$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $\tau = 1{,}5$ с; $d = 2$ м. Определить v_A и h.

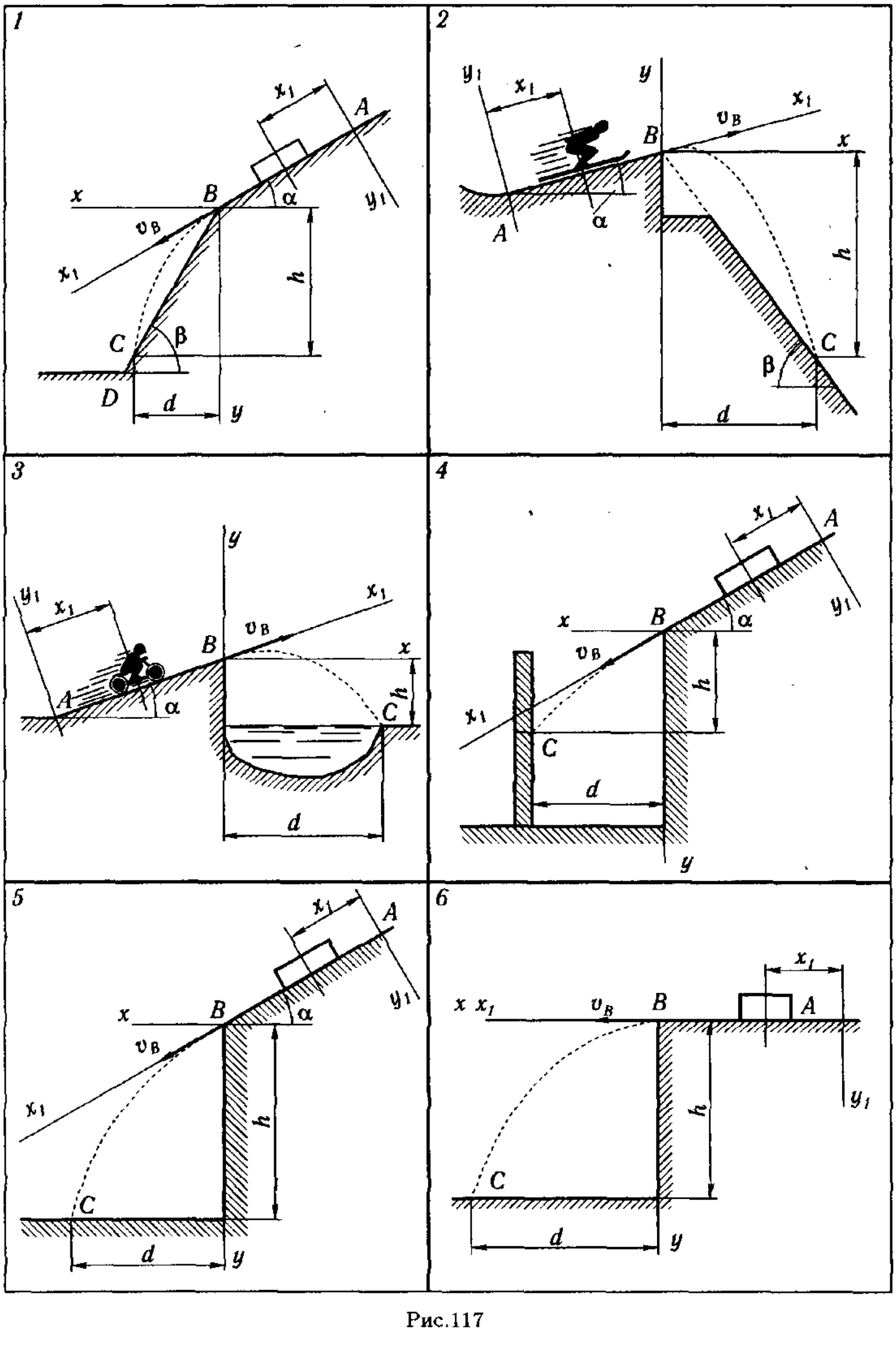
1
x
B
A
x_1
y_1
α
v_B
x_1
h
C
β
D
d
y
2
y_1
x_1
y
B
v_B
x_1
x
A
α
h
C
β
d
3
y
y_1
x_1
x_1
B
v_B
x
A
α
C
h
d
4
x_1
A
y_1
x
B
α
v_B
h
x_1
C
d
y
5
x_1
A
x
B
α
y_1
v_B
x_1
h
C
d
y
6
x_1
x x_1
v_B
B
A
y_1
h
C
d
y

Рис.117

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45°$; $v_A = 0$; $f = 0{,}3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Определить l и τ.

Варианты 21—25 (рис. 117, схема 5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ с тело в точке B со скоростью v_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью v_C; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30°$; $f = 0{,}1$; $v_A = 1$ м/с; $\tau = 1{,}5$ с; $h = 10$ м. Определить v_B и d.

Вариант 22. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45°$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить f и уравнение траектории на участке BC.

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9{,}81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T.

Вариант 24. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30°$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить τ и h.

Вариант 25. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30°$; $f = 0{,}2$; $l = 6$ м; $h = 4{,}5$ м. Определить τ и v_C.

Варианты 26—30 (рис. 117, схема 6). Имея в точке A скорость v_A, тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. Со скоростью v_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью v_C, находясь в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $v_A = 7$ м/с; $f = 0{,}2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м. Определить d и v_C.

Вариант 27. Дано: $v_A = 4$ м/с; $f = 0{,}1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить v_B и h.

Вариант 28. Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0{,}3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и T.

Вариант 29. Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2{,}5$ м; $h = 20$ м. Определить f и d.

Вариант 30. Дано: $f = 0{,}25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и τ.

Пример выполнения задания (рис. 118). В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC. Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость $v_0 = 0$, определить наименьшую ширину полки b и скорость v_C, с которой камень падает на нее. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l, камень движется τ с.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60°$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75°$. Определить b и v_C.

Решение. Рассмотрим движение камня на участке AB. Принимая камень за материальную точку, покажем (рис. 118) действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$. Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB:

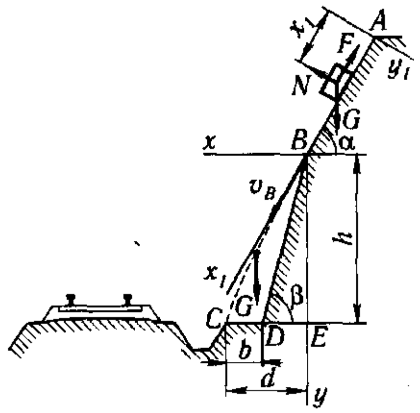

Рис. 118

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1}; \qquad m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - fG\cos\alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha - fg\cos\alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1;$$
$$x_1 = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\, t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0$*.

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \qquad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\, t;$$
$$x_1 = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\, t^2.$$

Для момента τ, когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B; \qquad x_1 = l,$$

т. е.

$$v_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\tau;$$
$$l = [g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2]\,\tau^2,$$

---

* Постоянные интегрирования $C_1 - C_6$ во всех 30 вариантах задания можно найти, вводя начальные условия на первом и втором участках движения точки. Тем не менее в ряде вариантов более естественно воспользоваться граничными условиями, когда значения координат и скоростей заданы не для одного, а для разных моментов времени.

откуда

$$v_B = 2l/\tau,$$

т. е.

$$v_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C.

Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \qquad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$

$$x_0 = 0; \qquad y_0 = 0;$$
$$\dot{x}_0 = v_B \cos\alpha; \qquad \dot{y}_0 = v_B \sin\alpha.$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\dot{x} = C_3; \qquad \dot{y} = gt + C_4;$$
$$x = C_3 t + C_5; \qquad y = gt^2/2 + C_4 t + C_6.$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3; \qquad \dot{y}_0 = C_4;$$
$$x_0 = C_5; \qquad y_0 = C_6.$$

Отсюда найдем, что

$$C_3 = v_B \cos\alpha; \qquad C_4 = v_B \sin\alpha;$$
$$C_5 = 0; \qquad C_6 = 0.$$

Получим следующие уравнения проекций скорости камня:

$$\dot{x} = v_B \cos\alpha, \qquad \dot{y} = gt + v_B \sin\alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = v_B \cos\alpha \cdot t, \qquad y = gt^2/2 + v_B \sin\alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2/(2v_B^2 \cos^2\alpha) + x \operatorname{tg}\alpha.$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2{,}11 \text{ м}, \qquad d_2 = -7{,}75 \text{ м}.$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d = 2{,}11$ м.

Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - h/\operatorname{tg} 75^\circ, \qquad \text{или } b = 0{,}77 \text{ м}.$$