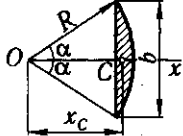


Продолжение табл. 17

Плоская фигура	Площадь	Координаты центра тяжести
	$\alpha = \pi/2$ (полукруг)	$F = \pi R^2/2$ $x_C = 4R/(3\pi)$
	$\alpha = \pi/6$	$F = \pi R^2/6$ $x_C = 2R/\pi$
Круговой сегмент	 $F = \frac{1}{2}R^2 \times$ $\times (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$x_C = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} =$ $= \frac{b^3}{12F}$

Примечание. Площади и координаты центров тяжести некоторых плоских фигур, встречающихся при выполнении заданий, приведены в табл. 17.

III. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТАТИКИ

Задание С.9. Определение реакций опор составных конструкций с внутренними односторонними связями

Найти реакции опор и силы во внутренних двусторонних и односторонних связях составной конструкции.

Схемы конструкций представлены на рис. 54—56 (размеры — в м), нагрузка указана в табл. 18. Учесть, что при заданной схеме нагружения конструкции реакция возникает только в одной из односторонних связей *E* или *F*. Зазоры отсутствуют. При снятии внешних сил реакции внешних и внутренних связей обращаются в ноль.

Таблица 18

Номер варианта	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кН·м	q , кН/м	Примечания
1	8	9	10	1,5	<i>EK</i> и <i>NF</i> — нити
2	9	10	12	1	<i>EK</i> и <i>NF</i> — нити
3	12	15	20	2	
4	7	5	13	1,2	
5	8	12	16	1	<i>EK</i> и <i>NF</i> — нити
6	9	14	8	3	
7	9	6	10	1,5	
8	8	10	12	2	<i>EK</i> и <i>NF</i> — нити
9	6	7	8	1	
10	7	5	14	1,8	<i>NF</i> — нить
11	12	14	6	1,4	
12	20	15	23	3	
13	11	12	16	2,2	
14	8	10	12	1,5	
15	22	18	20	1,8	

Номер варианта	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кН·м	q , кН/м	Примечания
16	8	7	10	1,2	
17	20	18	24	2	
18	16	15	20	2,8	
19	18	14	12	3	EK и NF — нити
20	19	14	18	2,5	EK — нить
21	6	11	15	1,8	
22	10	10	11	2	
23	16	15	9	3	EK и NF — нити
24	14	11	20	2	NF — нить
25	8	9	18	1,6	
26	6	5	7	1,6	
27	16	16	20	2,5	
28	14	11	15	1,9	
29	16	12	14	2	EK и NF — нити
30	17	23	18	1,7	EK и NF — нити

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 57); $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 3$ кН, $M = 20$ кН·м, $q = 1$ кН/м.

Определить реакции опор A и B , а также усилия во внутренних двусторонних связях (шарнирах C и D) и в односторонних связях (E и F).

Решение. Так как в условии задачи отсутствует информация о том, в какой из односторонних связей E или F возникает реакция, необходимо рассмотреть два случая.

1-й случай: $R_F = 0$. В этом случае (рис. 58) элементы ED и AC конструкции прижаты один к другому и, следовательно, направление реакции R_E будет таким, как показано на рис. 59. Связь F «не работает».

Сначала рассмотрим силы, приложенные к части AC конструкции (рис. 59). Уравнения равновесия этой системы имеют следующий вид:

$$\sum M_{iC} = 0; \quad R_E \cdot 2 + M - X_A \cdot 3 + Y_A \cdot 7 = 0; \quad (1)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_C + X_A = 0; \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + R_E + Y_C = 0. \quad (3)$$

Затем запишем систему уравнений равновесия для сил, приложенных к элементу CD (рис. 60):

$$\sum M_{iD} = 0; \quad -X'_C \cdot 1 - Y'_C \cdot 10 - P_2 \cdot 10 = 0; \quad (4)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X'_C + X_D = 0; \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y'_C + P_2 + Y_D = 0. \quad (6)$$

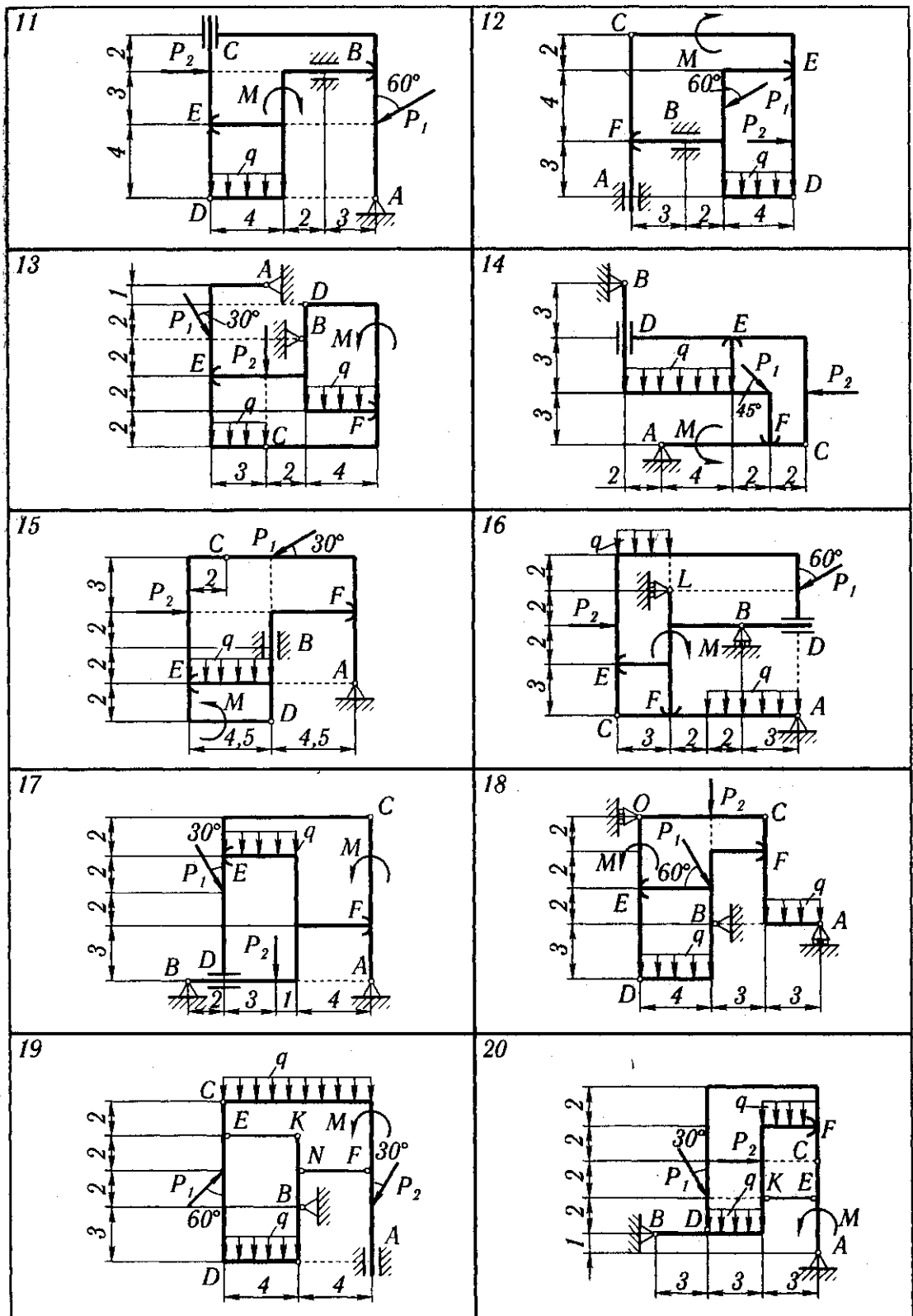


Рис. 55

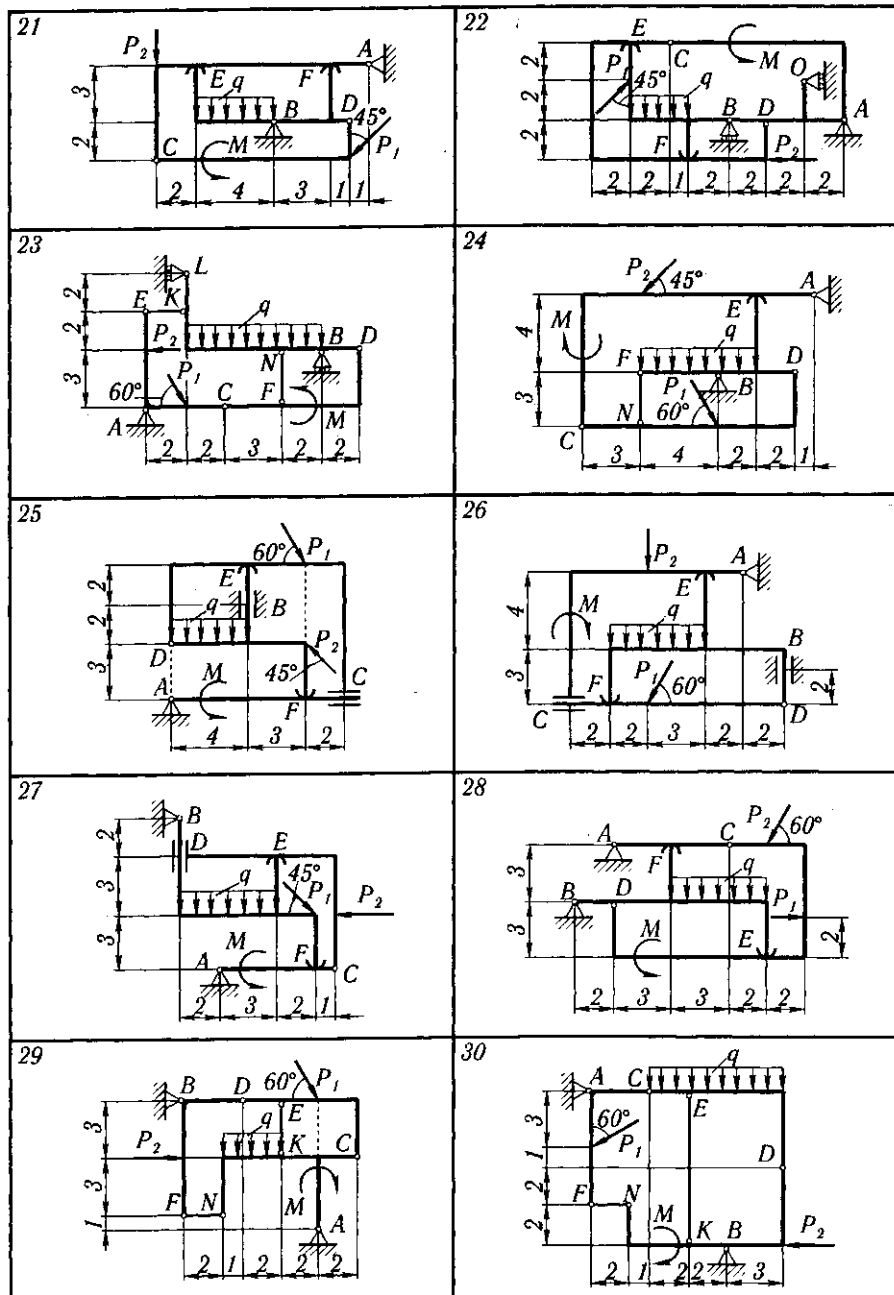


Рис. 56

Далее переходим к рассмотрению системы уравновешивающихся сил, приложенных к элементу ED (рис. 61).

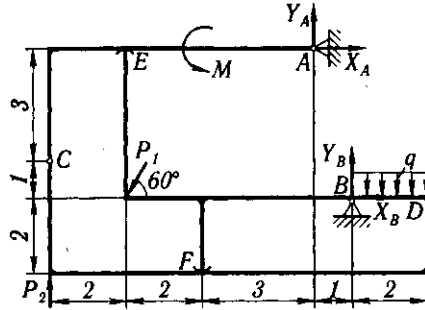


Рис. 57

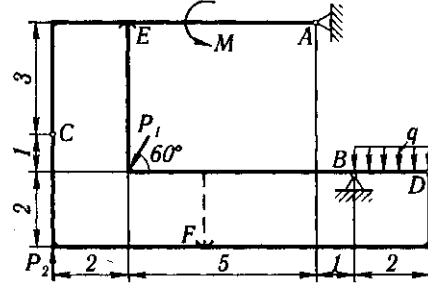


Рис. 58

Уравнения равновесия сил, приложенных к этой части конструкции, имеют следующий вид:

$$\sum M_{iB} = 0; \quad R'_E \cdot 6 + P_1 \sin 60^\circ \cdot 6 - Q \cdot 1 + Y'_D \cdot 2 = 0; \quad (7)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X'_D + X_B - P_1 \cos 60^\circ = 0; \quad (8)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -R'_E - P_1 \sin 60^\circ + Y_B - Q + Y'_D = 0. \quad (9)$$

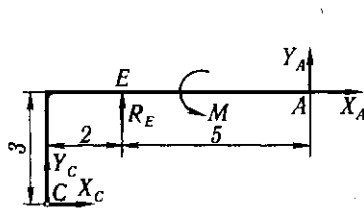


Рис. 59

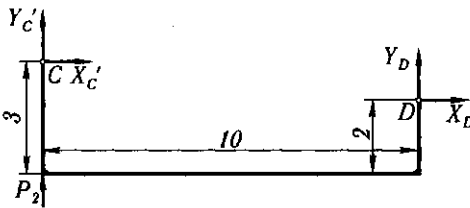


Рис. 60

Помимо уравнений равновесия (1) — (9) запишем уравнения, выражающие равенство действия и противодействия в шарнирах C и D .

Для шарнира C

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_C + Y'_C = 0; \quad (10)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_C + X'_C = 0. \quad (11)$$

Для шарнира D

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_D + Y'_D = 0; \quad (12)$$

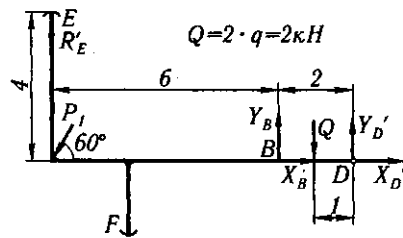


Рис. 61

$$\sum X_i = 0; \quad X_D + X'_D = 0. \quad (13)$$

Из уравнений (10) — (13) следует:

$$Y_C = -Y'_C; \quad X_C = -X'_C; \quad Y_D = -Y'_D; \quad X_D = -X'_D.$$

Учитывая это, а также $R'_E = R_E$, представим систему уравнений (1) — (9) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} 2R_E + M - 3X_A + 7Y_A &= 0; \\ X_C + X_A &= 0; \\ Y_A + R_E + Y_C &= 0; \\ X_C + 10Y_C - 10P_2 &= 0; \\ -X_C + X_D &= 0; \\ -Y_C + P_2 + Y_D &= 0; \\ 6R_E + 6P_1 \sin 60^\circ - Q \cdot 1 - 2Y_D &= 0; \\ -X_D + X_B - P_1 \cos 60^\circ &= 0; \\ -R_E - P_1 \sin 60^\circ + Y_B - Q - Y_D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Система линейных алгебраических уравнений (14) определяет истинные значения всех искоемых сил лишь при условии, что ее корень $R_E > 0$.

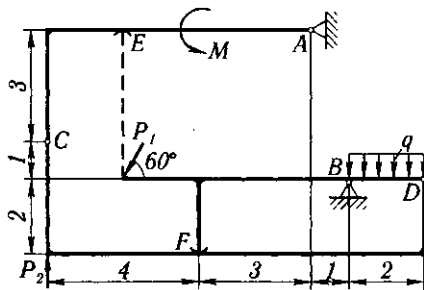


Рис. 62

2-й случай: $R_E = 0$. В этом случае (рис. 62) элементы FD и CD прижаты один к другому и, следовательно, направление реакции R_F будет таким, как показано на рис. 63 и 64 ($R'_F = R_F$). Связь E "не работает".

Рассмотрим систему сил, приложенных к части AC конструкции (рис. 65). Уравнения равновесия этой системы сил имеют следующий вид:

$$\sum M_{iC} = 0; \quad M + Y_A \cdot 7 - X_A \cdot 3 = 0; \quad (15)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_C = 0; \quad (16)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_C = 0. \quad (17)$$

Запишем уравнения равновесия сил, приложенных к элементу CD конструкции (см. рис. 63):

$$\sum M_{iD} = 0; \quad -Y'_C \cdot 10 - X'_C \cdot 1 - P_2 \cdot 10 + R_F \cdot 6 = 0; \quad (18)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X'_C + X_D = 0; \quad (19)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y'_C + P_2 - R_F + Y_D = 0. \quad (20)$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к элементу FD (см. рис. 64):

$$\sum M_{iB} = 0; \quad 6P_1 \sin 60^\circ - R_F \cdot 4 - Q \cdot 1 + Y'_D \cdot 2 = 0; \quad (21)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_B + X'_D - P_1 \cos 60^\circ = 0; \quad (22)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_B + Y'_D - Q + R_F - P_1 \sin 60^\circ = 0. \quad (23)$$

Учитывая и здесь результаты, вытекающие из уравнений (10) — (13), перепишем систему уравнений (15) — (23) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} M + 7Y_A - 3X_A &= 0; \\ X_A + X_C &= 0; \\ Y_A + Y_C &= 0; \\ 10Y_C + X_C - 10P_2 + 6R_F &= 0; \\ -X_C + X_D &= 0; \\ -Y_C + P_2 - R_F + Y_D &= 0; \\ 6P_1 \sin 60^\circ - 4R_F - Q - 2Y_D &= 0; \\ X_B - X_D - P_1 \cos 60^\circ &= 0; \\ Y_B - Y_D - Q + R_F - P_1 \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Система линейных уравнений (24) определяет истинные значения всех неизвестных лишь в случае, когда ее корень $R_F > 0$.

Системы уравнений (14) и (24) с учетом значений P , M и Q перепишем в матричной форме:

$$A_1 X_1 = B; \quad (25)$$

$$A_2 X_2 = B. \quad (26)$$

Здесь

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} R_E \\ X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_D \\ Y_D \\ X_C \\ Y_C \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} R_F \\ X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_D \\ Y_D \\ X_C \\ Y_C \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ -3 \\ -49,96 \\ 5 \\ 10,66 \end{pmatrix}.$$

Системы (25) и (26) должны решаться совместно с неравенствами «ключами», выбирающими систему уравнений равновесия. Если в процессе решения системы (25) выясняется, что $R_E > 0$, то уравнениями равновесия рассматриваемой составной конструкции являются уравнения (25). Если же оказывается, что $R_E < 0$, то, следовательно, $R_F > 0$, а поэтому уравнениями равновесия являются уравнения (26).

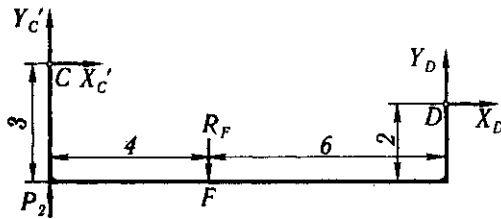


Рис. 63

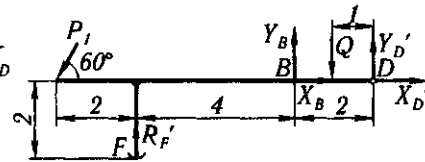


Рис. 64

Для решения полученных систем алгебраических уравнений можно использовать метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Блок-схема программы решений систем (25) и (26) совместно с «ключами» представлена на рис. 66, где Φ_1 — ввод исходных данных; Φ_2 — решение системы (25) методом Гаусса; Φ_3 — если $R_E > 0$, то переход к Φ_4 , если же $R_E \leq 0$, то переход к Φ_6 ; Φ_4 — печать результатов; Φ_5 — конец работы программы, Φ_6 — решение системы (26) методом Гаусса.

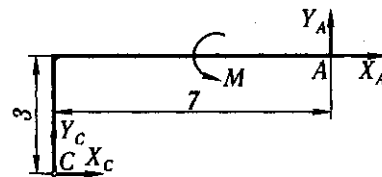


Рис. 65



Рис. 66

Результаты расчета приведены в табл. 19.

Таблица 19

Силы, кН								
R_F	X_A	X_B	X_D	X_C	Y_A	Y_B	Y_D	Y_C
9,949	11,023	-6,023	-11,023	-11,023	1,867	5,793	5,082	-1,867

Из таблицы видно, что реакция R_F оказалась положительной. Это означает, что при заданной схеме нагружения составной конструкции «работает» связь F , а в связи E усилие не возникает.

Для проверки правильности произведенных расчетов следует убедиться в том, что соблюдаются уравнения равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции:

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= M + P_1 \sin 60^\circ \cdot 5 - P_1 \cos 60^\circ \cdot 4 - P_2 \cdot 7 + Y_B \cdot 1 + X_B \cdot 4 - Q \cdot 2 = \\ &= 20 + 10 \cdot 0,866 \cdot 5 - 10 \cdot 0,5 \cdot 4 - 3 \cdot 7 + 5,793 - 6,023 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = \\ &= 49,093 - 49,092 \approx 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= Y_A + Y_B + P_2 - P_1 \sin 60^\circ - Q = 1,867 + 5,793 + 3 - 8,66 - 2 = \\ &= 10,66 - 10,66 = 0; \end{aligned}$$

$$\sum X_i = X_A + X_B - P_1 \cos 60^\circ = 11,023 - 6,023 - 10 \cdot 0,5 = 0.$$