МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ВЛАДИВОСТОК)
ТИХООКЕАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ХАБАРОВСК)
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.К. АММОСОВА

III Всероссийский этап Всероссийской олимпиады студентов образовательных организаций высшего образования (Всероссийской студенческой олимпиады) в 2017-2018 учебном году

Олимпиада по математике XXII Лаврентьевских чтений

составители:
д.ф.-м.н., проф. С.В. Попов
д.ф.-м.н., проф. А.Ю. Чеботарев
д.ф.-м.н., проф. А.В. Устинов
ст. преп. каф. МА В.Г. Марков
к.ф.-м.н. Э.И. Шамаев

Якутск
16.04.2018 г.

ЗАДАЧИ

1. Найдите наименьшее натуральное значение n, чтобы среди чисел $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ нашлись три числа сумма которых делится на 13 и три числа сумма которых делится на 19.

В.Г. Марков (Якутск, СВФУ)

2. Дифференцируемая функция $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ такова, что

$$g'(x) + g^2(x) + 1 \geq 0, \quad x \in (a, b), \quad \lim_{x \to a+0} g(x) = +\infty, \; \lim_{x \to b-0} g(x) = -\infty.$$

Найдите минимально возможное значение длины интервала (a, b).

А.Ю. Чеботарев (Владивосток, ДВФУ)

3. Дан выпуклый многогранник P_1 с 9 вершинами $A_1, \ldots, A_9$. Обозначим через P_2, $P_3, \ldots, P_9$ образы многогранника P_1 при параллельных переносах, отображающих вершину A_1 к вершинам A_2, $A_3, \ldots, A_9$ соответственно. Докажите, что среди многогранников $P_1, \ldots, P_9$ есть по крайней мере два многогранника, имеющих общую внутреннюю точку.

фольклор

4. Найдите коэффициенты c_0, c_1, c_2 ряда $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$, если известно, что он удовлетворяет функциональному уравнению

$$f^{-t}(z) \ln f(z) = z \qquad (t \neq 0).$$

А.В. Устинов (Хабаровск, ТОГУ)

5. Найдите минимальное значение интеграла $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx$, если $\displaystyle\int_x^1 f(s)ds \geq \frac{1-x^2}{2}$ для любых $x \in [0, 1]$.

А.Ю. Чеботарев (Владивосток, ДВФУ)

6. Дан простой замкнутый контур $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,x - y = 0\}$. Вычислите особый интеграл

$$J = \int\limits_L \frac{z^5}{z^6 + 1}\, dz.$$

С.В. Попов (Якутск, СВФУ)

7. Даны единичная матрица I порядка $2n$ и матрицы X и Y порядка $2n \times n$. Найдите наименьшее значение суммы квадратов элементов матрицы $I - XY^T$, где Y^T — транспонированная матрица по отношению к матрице Y.

Э.И. Шамаев (СВФУ, Якутск)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Ответ: 10.

Минимальная сумма трех чисел из данного набора равна $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$, а максимальная сумма равна $(n+2)+(n+3)+(n+4) = 3n+9 = 3(n+3)$. Поэтому задача сводится к нахождению такого числа n, чтобы на интервале $(3(n+1), 3(n+3))$ были два числа, которые делятся на 13 и на 19 соответственно. Путем несложного перебора нетрудно убедиться, что $n = 10$.

2. Ответ: π. Достаточно заметить, что

$$(\operatorname{arctg} g(x) + x)' = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} + 1 \geq 0.$$

Интегрируя полученное неравенство на интервале (a, b), получаем $-\pi/2 + b - \pi/2 - a \geq 0$, поэтому $b - a \geq \pi$. Минимальное значение длины интервала равное π достигается, например, на функции $g(x) = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0, \pi)$.

3. Обозначим через P' многогранник, определенный как образ P_1 при гомотетии с центром в точке A_1 и с коэффициентом подобия 2. Легко видеть, что все P_i, $i = 1, \ldots, 9$, содержатся в P' (действительно, если $M \in P_k$, то справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_k} + \overrightarrow{A_1M'})$$

для соответствующего $M' \in P_1$, и утверждение следует из выпуклости P_1). Но объем P' в точности в 8 раз превышает объем многогранника P_1, в то же время объемы многогранников P_i суммируются ровно 9 раз. Отсюда заключаем, что, в силу принципа Дирихле, хотя бы два многогранника пересекаются внутренним образом, что и требовалось доказать.

4. Ответ: $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = t + \frac{1}{2}$.

Из разложения $f(z)^{-t} \ln f(z) = c_0^{-t} \ln c_0 + O(z)$ следует, что $c_0 = 1$. При этом $f(z)^{-t} \ln f(z) = c_1 z + O(z^2)$, значит, $c_1 = 1$. Значение c_2 находится аналогично, из асимптотической формулы $f(z)^{-t} \ln f(z) = z + \left(c_2 - t - \frac{1}{2}\right) z^2 + O(z^3)$. Отсюда находим, что $c_2 = t + \frac{1}{2}$.

Замечание 1. Ряд $f(z)$ называется обобщённым экспоненциальным рядом и в общем случае можно показать, что $c_k = \frac{(tk+1)^{k-1}}{k!}$.

5. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Воспользуемся неравенством $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - x)^2 dx = \int_0^1 f^2(x)dx - 2\int_0^1 xf(x)dx + \frac{1}{3} \geq 0.$ Тогда

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq 2\int_0^1 xf(x)dx - \frac{1}{3}.$$

Далее, используя формулу Дирихле, получим

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 \int_0^x f(x)dsdx = \int_0^1 \int_s^1 f(x)dxds \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s^2)ds = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Проверим выполнение равенства. Если $f(s) = s$ при $s \in [0, 1]$, то $\displaystyle\int_x^1 f(s)ds = \frac{1-x^2}{2}$ при этом $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{3}$.

6. Ответ: $\frac{2}{3}\pi i$.

Через D обозначим круг радиуса 1 и с центром в точке $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Тогда граница круга — заданный контур L. Найдем нули знаменателя $z_{k+1} = \sqrt[6]{-1} = \exp(i\pi + i\frac{2\pi}{6}k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Следовательно,

$$z^6+1 = \left(z - \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\right)(z-i)\left(z - \exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)\right)\left(z - \exp\left(i\frac{7\pi}{6}\right)\right)(z+i)\left(z - \exp\left(i\frac{11\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6).$$

Можно сделать разложение подынтегральной функции на сумму элементарных (простейших) дробей

$$\frac{z^5}{z^6+1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} + \frac{1}{z-z_4} + \frac{1}{z-z_5} + \frac{1}{z-z_6}\right).$$

Итак, искомый особый интеграл есть сумма 6 интегралов от простейших дробей. С помощью известной формулы:

$$\int\limits_L \frac{dz}{z-z_0} = \begin{cases} 2\pi i, & z_0 \in D, \\ \pi i, & z_0 \in L, \\ 0, & z_0 \notin \overline{D} \end{cases} \tag{1}$$

и с учетом, что $z_1 \in D$, $z_2, z_6 \in L$ и $z_3, z_4, z_5 \notin D$, имеем

$$J = \int\limits_L \frac{z^5}{z^6+1}\,dz = \frac{1}{6}\int\limits_L \left(\frac{1}{z-z_1} + + \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} + \frac{1}{z-z_4} + \frac{1}{z-z_5} + \frac{1}{z-z_6}\right) dz = \frac{2}{3}\pi i.$$

Замечание 2. Особый интеграл (1) при $z_0 \in L$ имеет смысл лишь в случае главного значения по Коши. Доказательство этого равенства можно найти, например, в решении задачи 6 Всероссийской студенческой олимпиады в 2015-2016 учебном году.

7. Ответ: n.

Пусть X и Y выбраны равными крайней левой подматрице порядка $2n \times n$ матрицы I. В этом случае значение искомой суммы, которая называется фробениусовой нормой $\|I - XY^T\|^2$, равно n. Покажем, что это наименьшее значение. Рассмотрим сингулярное разложение $X = UDV$. Матрицу UYV обозначим через $\tilde{Y}$. Тогда, в силу инвариантности фробениусовой нормы относительно умножения на ортогональную матрицу, получим

$$\|I - XY^T\|^2 = \|UU^T - UDVV^T\tilde{Y}^TU^T\|^2 = \|I - D\tilde{Y}^T\|^2.$$

Произведение диагональной матрицы D и $\tilde{Y}^T$ означает произведение строк $\tilde{Y}^T$ на диагональные элементы D. Поэтому, без потери общности, задача эквивалентна задаче оптимизации $\|I - Z\|^2$ в пространстве матриц Z порядка $2n$ с нулевой нижней подматрицей порядка n. Нижняя подматрица порядка n матрицы $I - Z$ состоит из n единиц и $n(n-1)$ нулей. Следовательно, $\|I - XY^T\|^2 \geqslant n$.