Олимпиада по математике XXII Лаврентьевских чтений

III Всероссийский этап Всероссийской олимпиады студентов образовательных организаций высшего образования (Всероссийской студенческой олимпиады) в 2017-2018 учебном году

16 апреля 2018 г.

1. Найдите наименьшее натуральное значение n, чтобы среди чисел $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ нашлись три числа сумма которых делится на 13 и три числа сумма которых делится на 19.

2. Дифференцируемая функция $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ такова, что

$$g'(x) + g^2(x) + 1 \geq 0, \quad x \in (a, b), \qquad \lim_{x \to a+0} g(x) = +\infty, \ \lim_{x \to b-0} g(x) = -\infty.$$

Найдите минимально возможное значение длины интервала (a, b).

3. Дан выпуклый многогранник P_1 с 9 вершинами $A_1, \ldots, A_9$. Обозначим через $P_2, P_3, \ldots, P_9$ образы многогранника P_1 при параллельных переносах, отображающих вершину A_1 к вершинам $A_2, A_3, \ldots, A_9$ соответственно. Докажите, что среди многогранников $P_1, \ldots, P_9$ есть по крайней мере два многогранника, имеющих общую внутреннюю точку.

4. Найдите коэффициенты c_0, c_1, c_2 ряда $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$, если известно, что он удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(z)^{-t} \ln f(z) = z \qquad (t \neq 0).$$

5. Найдите минимальное значение интеграла $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx$, если

$$\int_x^1 f(s)ds \geq \frac{1 - x^2}{2} \text{ для любых } x \in [0, 1].$$

6. Дан простой замкнутый контур $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,x - y = 0\}$. Вычислите особый интеграл

$$J = \int\limits_L \frac{z^5}{z^6 + 1}\, dz.$$

7. Даны единичная матрица I порядка $2n$ и матрицы X и Y порядка $2n \times n$. Найдите наименьшее значение суммы квадратов элементов матрицы $I - XY^T$, где Y^T — транспонированная матрица по отношению к матрице Y.