

**III Всероссийский этап Всероссийской олимпиады студентов
образовательных организаций высшего образования
(Всероссийской студенческой олимпиады)
в 2016-2017 учебном году
17 апреля 2017 г.**

1. Найдите 2017-ю производную функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ в точке $x=0$.

В.Г. Марков (Якутск, СВФУ)

2. Найдите все комплексные числа z , удовлетворяющие уравнению

$$|z^3 + 1 - i| + |z|z\bar{z} = \sqrt{2}.$$

С.В. Попов (Якутск, СВФУ)

3. Найдите максимальное значение интеграла $\int_0^1 f^2(x) dx$, если $\int_0^1 f(x) dx = 0$, где $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ при $x \in [0, 1]$.

А.Ю. Чеботарев (Владивосток, ДВФУ)

4. Даны всевозможные квадратные матрицы $A_1, A_2, \dots, A_{2^{n^2}}$ порядка n с элементами 0 и 1. Найдите определитель матрицы, которая имеет единичную норму и является точкой минимума функции энергии матрицы

$$f(A) = \sum_{i=1}^{2^{n^2}} \|A - A_i\|^2.$$

(Нормой матрицы $A = \{a_{ij}\}$ называется квадратный корень суммы квадратов каждого ее элемента $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$).

Э.И. Шамаев (Якутск, СВФУ)

5. Эллипсоид получен вращением эллипса с фокусами F_1 и F_2 вокруг ее большей оси. Из точки O вне эллипсоида проведены две прямые, которые касаются эллипсоида в точках A и B . Докажите, что если точки A и B лежат на плоскости OF_1F_2 , то $\angle AF_1O = \angle BF_1O$.

А.Н. Афанасьев (Якутск, СВФУ)

6. Докажите равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\int_0^{2017} e^{4nx(1-x)} dx \right) = 1.$$

А.Ю. Чеботарев (Владивосток, ДВФУ)

7. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{A_n}$, где числа A_n и C_n задаются равенством

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ B_n & C_n \end{pmatrix}.$$

А.В. Устинов (Хабаровск, ТОГУ)