

**III Всероссийский этап Всероссийской олимпиады студентов
образовательных организаций высшего образования
(Всероссийской студенческой олимпиады)
в 2015-2016 учебном году**

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ XX ЛАВРЕНТЬЕВСКИХ ЧТЕНИЙ

1. Пусть $f(x) = x(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2) \dots (x^2 - 1008^2)$. Найдите $f'(1008)$.
(В.Г. Марков)

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Докажите, что для любого натурального n уравнение

$$\lambda^2 \cdot A - \lambda \cdot A^{3n+1} + 32 \cdot A^{3n+1} = 1024 \cdot A \quad (1)$$

имеет целые решения и решите уравнение при $n = 11$.

(А.Н. Афанасьев)

3. Вычислите интеграл

$$\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x} dx. \quad (2)$$

(А.О. Тихонова)

4. Найдите все функции $f(x, y)$ определенные на плоскости \mathbb{R}^2 , для которых выполняется равенство

$$f(a, b) + f(a + c, b + d) + f(a + d, b - c) + f(a + c + d, b + d - c) = 2016$$

для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, где $c, d \neq 0$.

(В.Г. Марков)

5. Озеро имеет форму выпуклой фигуры площади 71000 кв. м. Докажите, что два охотника могут занять позиции на берегу озера так, чтобы не достать друг друга, если известно, что дальность полета дроби ружья не более 300 метров.

(С.В. Попов)

6. Дан простой замкнутый контур $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0\}$. Вычислите интеграл

$$F(z) = \int_L \frac{\operatorname{sh} t}{t - z} dt,$$

где z удовлетворяет неравенству $|\operatorname{Re} z - 1| + |\operatorname{Im} z + 1| \leq 1$.

(С.В. Попов)

7. На плоскости эллипс \mathcal{E}_n , $n \in \mathbb{Z}$, задан уравнением

$$(x - n)^2 - 2(y - 2n - 1)^2 - (2x + y - 4n + 1)^2 = 0.$$

Найдите все прямые, имеющие точку касания с каждым эллипсом \mathcal{E}_n , $n \in \mathbb{Z}$.

(Э.И. Шамаев)