XIX Лаврентьевские чтения. Олимпиада по математике
13 апреля 2015 г.

1. Рассматривается бесконечная шахматная доска. Можно ли вставить положительные рациональные числа в каждую клетку шахматной доски так, чтобы каждое положительное рациональное число появлялось только один раз и при этом сумма каждой строки и каждого столбца была бы конечной?

2. В пространстве три отрезка A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в одной точке P. Пусть O_{ijk} — центр сферы, проходящей через точки A_i, B_j, C_k и P (здесь $i, j, k \in \{1, 2\}$). Докажите, что прямые $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$, $O_{211}O_{122}$ пересекаются в одной точке.

3. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}.$$

4. Пусть A и B матрицы размером 3×3 с вещественными элементами. Докажите, что

$$A - (A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1} = ABA,$$

где все обратные марицы, появляющиеся в левой части равенства существуют.

5. Пусть $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Докажите, что существует $x \in [0, 1]$ такое, что

$$\frac{4}{\pi}(f(1) - f(0)) = (1 + x^2)f'(x).$$

6. Докажите равенство

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0 \\ 1\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + \ldots + n\cdot k_n = n}} \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_n!}\, x^{k_1+k_2+\ldots+k_n} = x(x+1)^{n-1}.$$

7. Пусть E — множество всех непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, определенных на $[0, 1]$ таких, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Определим функционал

$$J(f) = \int_0^1 (1 + x^2)(f'(x))^2\, dx.$$

a) Покажите, что J достигает минимума на некотором элементе из множества E.

b) Вычислите $\min\limits_{f\in E} J(f)$.