XVIII Лаврентьевские чтения. Олимпиада по математике
14 апреля 2014 г.

1. Существуют ли функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(g(x)) = x^{2014}$ и $g(f(x)) = x^{2015}$ для всех $x \in \mathbb{R}$?

2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ углы $\angle BDD_1$ и $\angle CA_1A$ — прямые. Докажите, что $AB = CD_1$.

3. Найдите предел

$$\lim_{t\to 2} \frac{\displaystyle\int_0^t \frac{x^2}{\prod\limits_{j=1}^{2014}(x^2-j^2)}\,dx}{\displaystyle\int_0^t \frac{x^2}{\prod\limits_{j=1}^{2015}(x^2-j^2)}\,dx}.$$

4. Известно, что $|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leqslant 1$ для всех $x \in [-1; 1]$. Найдите наименьшее число C такое, что $|a| + |b| + |c| + |d| \leqslant C$.

5. Для последовательности чисел Фибоначчи $\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$ найдите все вещественные числа a и b такие, что для каждого натурального n число $aF_n + bF_{n+1}$ встречается в ряде Фибоначчи.

6. Даны вещественные матрицы 8×8: $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ такие, что $a_{ij} = b_{ij} + 1$ для всех $i, j = 1, \ldots 8$. Известно, что $A^3 = 0$. Докажите, что определитель матрицы $\det B = 0$.

7. Пусть a, b, c положительные числа такие, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1, \\ \sqrt{z-b} + \sqrt{x-b} = 1, \\ \sqrt{x-c} + \sqrt{y-c} = 1, \end{cases}$$

имеет единственное вещественное решение.